

## Гидравлический удар в трубе постоянного сечения

Гидравлический удар это явление, которое может возникать в трубопроводе, по которому течет жидкость, при резком перекрытии его сечения. Частицы жидкости, прилежащие к границе перекрытия (задвижке), образуют пробку, в которой их скорость равна нулю, а давление резко повышается. При этом в остальном трубопроводе течение жидкости продолжается, что указывает на конечность скорости движения границы между областями продолжающегося течения и покоя.

Кроме того, в области повышения давления может увеличиться диаметр сечения трубы из-за упругой деформации ее стенок. Если же материал стенок трубы не достаточно упругий (хрупкий), резкое повышение давления может привести к разрушению стенок трубы. Именно это явление при эксплуатации первых водопроводов послужило причиной изучения явления гидравлического удара.

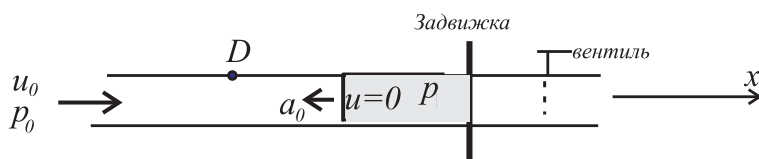


Рис. 1:

В результате в трубопроводе образуется некоторый фронт, по одну сторону от которого еще продолжается течение с начальной скоростью  $u_0$  и давлением  $p_0$ , а по другую сторону – область, где скорость  $u_1 = 0$  и давление  $p_1 > p_0$  значительно больше первоначального (рис.1). Продолжающаяся двигаться жидкость натывается на пробку и тоже вынуждена остановиться и присоединиться к области, где  $u_1 = 0$  и  $p = p_1 > p_0$ . В результате граница между областями течения и покоя перемещается вверх по течению с некоторой скоростью  $a_0$ .

Эту границу можно назвать фронтом ударной волны, а скачок давления называют ударным давлением  $p_1 - p_0 = p_{yg}$ . Именно  $p_{yg}$  является угрозой для разрушения стенок труб из-за недостаточной прочности материала, из которого они сделаны.

Величины ударного давления  $p_{yg} = p_1 - p_0$  и скорости  $a_0$  фронта скачка давления вдоль трубопровода являются предметом изучения и измерения в эксперименте в задаче о гидравлическом ударе.

Фронт скачка давления распространяется вверх по потоку пока не достигнет некоторой границы с областью, где поддерживается постоянное давление. Например, в резервуаре, откуда подается вода в трубопровод, это свободная поверхность с атмосферным давлением  $p = p_0$ .

Выполнение граничных условий непрерывности давления на границе двух областей требует возникновения отраженной волны, на фронте которой скачком меняется давление от значения  $p_1$  в пришедшей волне до значения  $p_2 = p_0 < p_1$ . При этом возникает движение частиц жидкости в сторону меньшего давления. В этой области возникает течение в сторону резервуара со скоростью  $u_2 < 0$ .

Фронт отраженной волны, за которым  $p = p_2$  и  $u_2 < 0$ , идет по трубе вплоть до задвижки. На этой границе должно быть обеспечено выполнение условия непротекания  $u = 0$ . Это потребует образования отраженной волны с  $u_3 = 0$  и понижением давления  $p_3 < p_2$ . Таким образом, вверх по трубопроводу идет еще одна волна разрежения. Этот процесс периодически продолжается, затухая вследствие реальных свойств жидкости.

Для измерения ударного давления  $p_{yg} = p_1 - p_0$  и скорости фронта ударной волны  $a_0$  достаточно знать изменение давления со временем в какой-либо точке трубопровода. График такой зависимости имеет вид, представленный на рис.2. В эксперименте для получения этой зависимо-

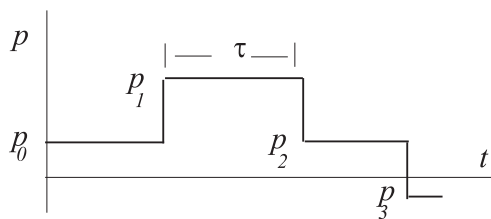


Рис. 2:

сти нужно поместить прибор, измеряющий изменение давления со временем с самозаписывающим устройством в некоторой точке трубопровода. Согласно полученной диаграмме,  $p_{yg} = p_1 - p_0$  и  $a_0 = \frac{2l}{\tau}$ , где  $l$  — расстояние от точки измерения давления до свободной поверхности в резервуаре, а  $\tau$  — время между прохождением через точку измерения ударной волны и волны разрежения, отраженной от свободной поверхности.

Именно такая задача предлагается для выполнения в лабораторном практикуме.

## Теоретическое решение

Теоретическое решение для описания процесса гидравлического удара дано в работе Н.Е.Жуковского "О гидравлическом ударе в водопроводных трубах". Предлагаем его краткое изложение.

Для описания движения принимаем модель идеальной жидкости. Считаем, что труба расположена в горизонтальной плоскости, так что силу тяжести можно не учитывать.

Интегральные законы сохранения массы и импульса для жидкого объема  $V^*$  имеют вид

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} \rho dV = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{V^*} \rho \bar{v} dV = - \int_{\Sigma} p \bar{n} dS$$

Основное течение и изменение его параметров происходит вдоль оси трубы, которую примем за ось  $x$ . Начало координат  $x = 0$  на задвижке в точке резкого перекрытия трубы. Так что течение происходит в области  $x < 0$ .

Стенки трубы выполнены из упругого материала и могут деформироваться при изменении давления внутри трубы. При этом площадь сечения трубы  $S$  меняется, в результате чего появляется радиальная составляющая скорости течения  $v_r(x, r, t)$ . Течение неодномерное.

Однако, радиальная компонента  $v_r$  мала по сравнению с основным течением и поэтому может быть принята приближенная модель квазиодномерного движения, в котором в качестве скорости будет принята средняя по сечению  $S$  скорость  $u(x, t)$

$$u(x, t) = \frac{1}{S} \int_S v_x dS$$

При этом радиальное течение учитывается изменением площади поперечного сечения трубы  $S = S(x, t)$ .

Величина  $\int_S v_x dS = Q$  представляет поток жидкости через сечение трубы, то есть объемный расход. Так что  $u = \frac{Q}{S}$ .

Запишем дифференциальные уравнения неразрывности и движения для одномерного течения со скоростью  $u(x, t)$  в трубке тока переменного сечения  $S(x, t)$

### Система уравнений для осредненного движения

Рассмотрим неподвижный элемент трубки тока малой длины  $\Delta x$ .

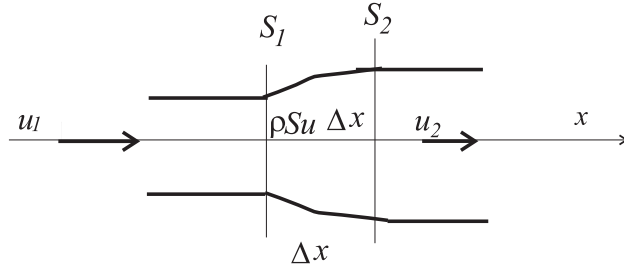


Рис. 3:

Масса жидкости внутри него  $\rho S \Delta x$ . Ее изменение со временем равно разнице потоков массы через сечения  $S_1$  и  $S_2$  трубки

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) \Delta x = \rho_1 S_1 u_1 - \rho_2 S_2 u_2$$

Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение движения для осредненного одномерного течения со скоростью  $u(x, t)$  вдоль оси  $x$  имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Полученные два уравнения содержат четыре функции  $\rho, u, p, S$ , зависящие от  $x, t$ .

Для получения полной замкнутой системы нужны еще два уравнения.

### Уравнение состояния

Уравнение состояния жидкости можно представить в виде  $p = p(\rho, T)$  (или  $p = p(\rho, s)$ ), где  $T$  - температура,  $s$  - энтропия.

В рассматриваемом процессе отсутствует приток тепла и  $ds = 0$  (второй закон термодинамики) и  $s = \text{const}$ . Поэтому  $p = p(\rho)$ .

Вода - слабо сжимаемая среда и при не слишком больших изменениях давления эту зависимость можно представить разложением функции  $p = p(\rho)$  в ряд Тейлора, ограничившись первым (линейным) членом разложения.

$$p = p_0 + \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s (\rho - \rho_0)$$

Коэффициент  $K = \rho_0 \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s$  называется модулем объемного адиабатического сжатия жидкости. Для воды при температуре  $20^\circ\text{C}$   $K \simeq 22000 \text{ кгс/см}^2$ .

Так что уравнение состояния имеет вид

$$p - p_0 = K \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (3)$$

Для замыкания системы необходимо еще уравнение для изменения площади сечения трубы  $S(x, t)$  при изменении давления внутри нее.

#### Уравнение, определяющее деформацию трубы

Рассмотрим квазистационарное изменение внутреннего радиуса  $R$  тонкостенной трубы при изменении давления внутри нее.

В состоянии, когда давление внутри  $p = p_0 = \text{const}$ , труба имеет внутренний радиус  $R_0$  и толщину стенок трубы  $\delta \ll R_0$ .

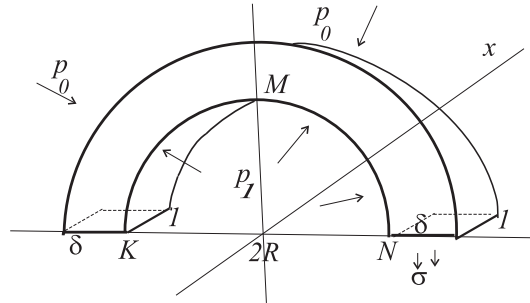


Рис. 4:

Сечениями, ортогональными оси трубы, вырежем из нее элемент в виде кольца единичной длины вдоль оси трубы. Рассечем его плоскостью, проходящей через ось трубы. Образовалось полукольцо с торцевыми сечениями в виде двух площадок с площадью  $\delta \cdot 1$  (рис. 4).

Рассмотрим равновесие полученной фигуры под действием сил давления  $p_0$  снаружи и  $p_1$  внутри трубы и упругих сил на торцевых сечениях, заменивших действие отрезанной части кольца.

Вычислим суммарную силу, действующую на внешней и внутренней поверхности полукольца. Для внутреннего полукольца замкнем контур полуокружности отрезком диаметра  $KN$ .

Если  $p_1 = \text{const}$ , то интеграл по замкнутому контуру  $\oint_{KMNK} p \bar{n} dl = 0$ . Тогда интеграл по полуокружности равен по величине интегралу по диаметру, то есть  $2Rp$ , и имеет направление ортогональное диаметру.

Применим этот способ вычисления и к внешней полуокружности радиуса  $R + \delta$ , где давление равно  $p_0$ .

Суммарная сил для полукольца единичной длины вдоль оси  $x$  а равна

$$p_1 2R - p_0 2(R + \delta)$$

Здесь  $R = R(x, t) = R_0 + \Delta R$ , то есть учтена деформация сечения трубы.

Эта сила должна быть уравновешена упругими силами на торцевых площадках разреза кольца. Согласно закону Гука, напряжение на этих площадках  $\sigma = E\varepsilon$ , где  $E$  - модуль Юнга, а  $\varepsilon$  - относительная деформация вдоль направления, ортогонального разрезу.

Эта компонента деформации есть относительное изменение длины окружности кольца  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta R}{R_0}$ .

Упругие силы действуют на двух площадках разреза кольца, общая площадь которых  $2\delta \cdot 1$ . Так что упругие силы, действующие на торцах, равны  $2E \frac{\Delta R}{R_0} \delta$ .

Таким образом уравнение равновесия полукольца принимает вид

$$p_1 2R - p_0 2(R + \delta) = 2E \frac{\Delta R}{R_0} \delta$$

Это уравнение следует переписать, используя вместо радиуса  $R$  площадь поперечного сечения  $S(x, t)$ . При этом учитываем, что

$$R \sim \sqrt{S}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\sqrt{S} - \sqrt{S_0}}{\sqrt{S_0}} = \sqrt{\frac{S}{S_0}} - 1, \quad R = R_0 + \Delta R = \sqrt{\frac{S}{S_0}} R_0$$

Подставляя выражение  $R$  через  $\sqrt{S}$ , получим

$$\sqrt{\frac{S}{S_0}} = 1 - \frac{(p_1 - p_0) \sqrt{\frac{S}{S_0}} R_0 + p_0 \delta}{E \delta}$$

или

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\left(1 + \frac{p_0}{E}\right)^2}{\left(1 - \frac{(p_1 - p_0) R_0}{E \delta}\right)^2}$$

Принимая во внимание, что для железных труб модуль упругости  $E \simeq 22 \cdot 10^5 \text{ кс/см}^2$ , это уравнение можно записать в линейном приближении. Так как  $p_0 \ll E$ , то этой величиной можно пренебречь. А малый добавок в знаменателе учесть в линейном приближении. Уравнение для изменения площади сечения примет вид

$$\frac{S}{S_0} = 1 + 2 \frac{(p_1 - p_0) R_0}{E \delta} \quad (4)$$

Таким образом для функций  $u, p, \rho, S$  получена система четырех уравнений (1) - (4).

Будем искать ее решение в линейном приближении.

Система уравнений в линейном приближении

Для этого проведем линеаризацию уравнений неразрывности и движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \rho_0 S_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ p - p_0 - K \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \\ \frac{S}{S_0} &= 1 + 2 \frac{(p - p_0) R_0}{E \delta} \end{aligned} \quad (5)$$

Последние два уравнения позволяют выразить  $\rho S$  через давление

$$\rho S = \rho_0 S_0 \left[ 1 + 2 R_0 \frac{p - p_0}{E \delta} \right] \left( 1 + \frac{p - p_0}{K} \right)$$

Учитывая малость величин  $\frac{p-p_0}{E\delta}$  и  $\frac{p-p_0}{K}$ , их произведением следует пренебречь. Так что

$$\rho S = \rho_0 S_0 \left[ 1 + \left( 2 \frac{R_0}{E\delta} + \frac{1}{K} \right) (p - p_0) \right]$$

Подставим это выражение для  $\rho S$  в уравнение неразрывности. Тем самым исключим  $S$  и  $\rho$  из системы (5).

$$\rho_0 S_0 \left( 2 \frac{R_0}{E\delta} + \frac{1}{K} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 S_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{\rho_0 \left( 2 \frac{R_0}{E\delta} + \frac{1}{K} \right)} = a_0^2 \quad (6)$$

(Заметим, что величина  $a_0$  имеет размерность скорости.)

В результате получили систему двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 a_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Перекрестным дифференцированием по  $x, t$  получим волновое уравнение для функции  $u$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Его общее решение можно представить в виде двух волн, движущихся со скоростью  $a_0$  в положительном и отрицательном направлении оси  $x$ .

$$u = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t) + \text{const}$$

Это указывает на механический смысл введенной выше формулой (6) величины  $a_0$  – это скорость распространения фронтов волн вдоль оси  $x$ .

Тогда из второго уравнения системы (7) для давления получим

$$p = \rho_0 a_0 (f_1(x - a_0 t) - f_2(x + a_0 t)) + \text{const}$$

Задача с начальными и граничными условиями. В начальный момент времени во всей области течения  $u = u_0, p = p_0$ .



После перекрытия течения задвижкой в точке  $x = 0$  от границы вверх по течению в область  $x < 0$  идет фронт скачка давления  $p_1$ . Для него решение следует искать в виде волны, идущей в одну сторону – в сторону  $x < 0$ , то есть в виде

$$u = u_0 + f(x + a_0t), \quad p = p_0 - \rho_0 a_0 f(x + a_0t)$$

На границе при  $x = 0$  должно быть выполнено условие  $u = 0$ . Это определяет значение функции  $f = -u_0$ . В результате скорость течения и давление за фронтом волны принимают значения

$$u_1 = 0, \quad p_1 = p_0 + \rho_0 a_0 u_0$$

Эти параметры состояния распространяется вверх по течению со скоростью  $a_0$ , величина которой дана полученной выше формулой (6). Скачок давления на фронте этой волны назван выше ударным давлением  $p_{yg}$

$$p_{yg} = p_1 - p_0 = \rho_0 a_0 u_0 \quad (8)$$

В эксперименте предполагается измерять скорость фронта скачка давления  $a_0$  (5) и величину ударного давления  $p_{yg} = p_1 - p_0$  (8).

Такие значения  $p_1 = \rho_0 a_0 u_0$ ,  $u_1 = 0$  будут во всей области за фронтом вплоть до выхода фронта на свободную поверхность при  $x = -L$  в резервуаре, откуда подается вода в трубопровод. На этой границе должно быть выполнено условие  $p = p_0$ .

В результате возникает новое возмущение  $u_2$ ,  $p_2$ , идущее от этой границы в сторону роста  $x$  с той же скоростью  $a_0$

$$u_2 = u_1 + F(x - a_0t), \quad p_2 = p_1 + \rho_0 a_0 F(x - a_0t)$$

На границе  $x = -L$  должно быть выполнено условие  $p_2 = p_0$ . Это определяет величину нового возмущения  $F = -u_0$ . По трубе в сторону задвижки идет отраженная волна, в которой давление  $p_2$  уменьшается (волна разрежения) до значения  $p_0$  и движение воды со скоростью  $u_2 = -u_0$  происходит в отрицательном направлении оси  $x$ .

Аналогично, когда этот фронт приходит к границе  $x = 0$  на задвижке, должно быть выполнено условие непроницаемости где  $u = 0$  и следующая отраженная волна будет тоже волной разрежения, в которой  $p_3 = p_0 - \rho_0 a_0 u_0$  и  $u_3 = 0$ .

## Проведение эксперимента

### Схема установки

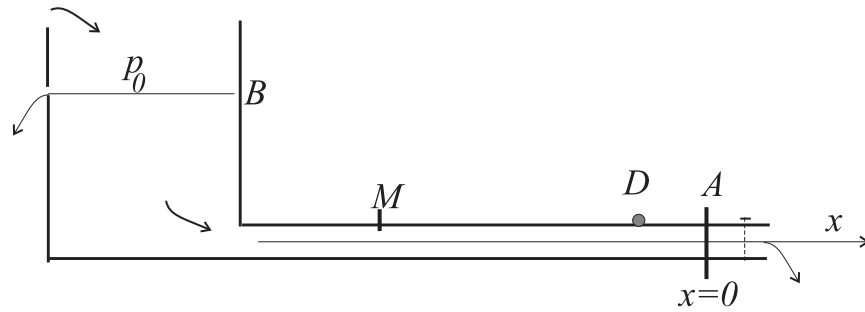


Рис. 5:

Установка состоит из достаточно длинной железной трубы постоянного сечения, расположенной в горизонтальной плоскости. Внутренний диаметр трубы  $d = 32$  мм, толщина стенок трубы  $\delta = 3$  мм.

В трубу подается вода из напорного бака, в котором поддерживается постоянный уровень. На открытой свободной поверхности давление  $p_0$ . Расход в трубе регулируется вентильным краном на ее конце.

В некоторой точке трубы  $D$  (рис. 5) установлен прибор, позволяющий измерять давление  $p$  в зависимости от времени (датчик давления). Прибор работает на основе тензодатчика. Его показания записываются с помощью компьютера. Расстояние от датчика до свободной поверхности воды в баке  $BD = l = 57$  м.

Устанавливается некоторый стационарный режим течения.

Измеряется объемный расход жидкости  $Q$  и находится скорость начального течения  $u_0 = Q/S$ .

Включается запись датчика давления. Он записывает показание давления в стационарном потоке  $p_0$  (рис. 2).

Резко (по возможности мгновенно) перекрывается течение в трубе задвижкой ( $A$ ). Датчик давления записывает скачок давления до значения  $p_1$ . Это давление сохраняется в точке  $D$  в течение времени пока фронт идет до свободной поверхности в баке и отражается в виде волны разрежения. Когда волна разрежения дойдет от бака до датчика, на диаграмме давление упадет до значения  $p_2$ .

На диаграмме давления (рис.2) время  $\tau$  между этими скачками соответствует двум расстояниям  $l$  от места расположения датчика до свободной поверхности в баке (В).

Полученная диаграмма позволяет получить значения для скорости скачка  $a_0$  и величины ударного давления  $p_{yg}$  для данного режима течения

$$a_0 = \frac{2l}{\tau}, \quad p_{yg} = p_1 - p_0$$

Полученные в эксперименте величины следует сравнить с полученными по теории Жуковского.

Эксперимент проводят несколько раз при разных начальных режимах, чтобы обнаружить теоретически обнаруженную линейную зависимость  $p_{yg}$  от начальной скорости потока  $u_0$ .

Явление гидравлического удара можно использовать для диагностики повреждения трубы. Если труба в некотором месте (М) повреждена, в ней появилось отверстие, контактирующее с атмосферой, то давление в этом месте меньше, чем давление в трубе. Фронт повышенного давления  $p_1$  доходит до этого места, где происходит отражение в виде волны разрежения.

Скорость  $a_0$  известна, так что с помощью диаграммы давления для этого случая можно найти величину  $l_*$  расстояния от датчика давления до места повреждения, измерив на диаграмме отрезок  $\tau_*$  времени прохождения волн  $l_* = \frac{a_0 \tau_*}{2}$ .