

Хар-ки:

1. m - пористость



$V_{пор}$ - объем пор
 V - объем образца
 $m = \frac{V_{пор}}{V}$

$$0 \leq m \leq 1$$

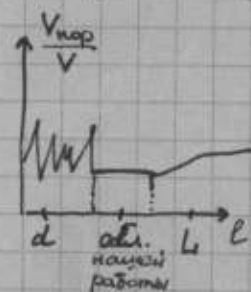
$m=0$ - ТТ

$m=1$ - чистая жидкость



дост. много пеллинок, но дост. мал. по хар-ным размерам $z \sim \eta(z)$

$d \ll l \ll L$
хар. размер пор



- сеп (поры не соединены)

Обычно m считается по $V_{пор}$, к-ые соединены ш/у собой.

2. n - просветность



- разрез пористой среды

S - площадь всего агения

$S_{пор}$ - площадь "дырок" в этом сечении

$$\Sigma = \frac{S_{пор}}{S}$$

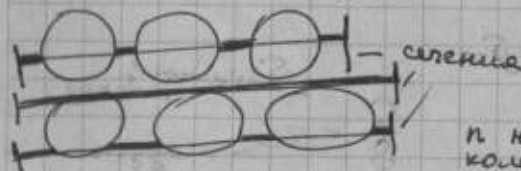
уд. пов. п. поров. пр-ва

$\Sigma_{ср} > \Sigma$,

тем $>$ интенсивность

$$0 \leq \frac{S_{пор}}{S} \leq 1; \quad n = \frac{S_{пор}}{S}$$

зависит от сечения



n на микроуровне колеблется



Введем сред. значение просветности для цил. образца: $\langle n \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h n(z) dz$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{hS} \int_0^h S n(z) dz = \frac{1}{hS} \int_0^h S_{пор}(z) dz = \frac{V_{пор}}{V} = m$$

$$= \frac{V_{пор}}{V} = m$$

$m \approx n$ в нек-рых случаях

Вобщем говоря, $m = m(x, y, z, t)$

3. Хар-ный размер порос- d (вводится условно)



$$\frac{V}{S_{пор} \cdot d} = d$$

или $R = d$ - радиус шара.

Этих хар-к не дост. для полного описания пористой среды. И-р:

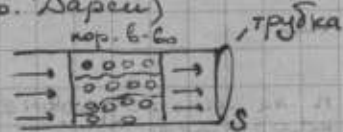


переломки

Они малый масштабы $\Rightarrow m$ не изм-ся, но св-во среды описать жидкость изм-ся.

Описание дв-я жидкости внутри пор. среды:

Скор. ф-ции $\vec{u}$
(скор. Дарси)



отлич. от скор.
с-ой дв-ся матер. з-ца

объемный расход
 $\frac{Q}{S} = u$ — модуль скорости ф-ции
мощ. потер. сев. трубки

$$[Q] = \frac{m^3}{c} \Rightarrow [u] = \frac{m}{c}$$

$$[S] = m^2$$

Мгновенно разрежем трубку поперек:



На пов-ти зерен скор. = 0
(усл.е приращения, т.к. жидк. вязкая)

Спор

профиль скор.
(аналогиче с течением Пуазюа в трубе):

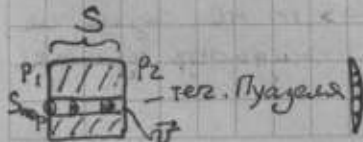
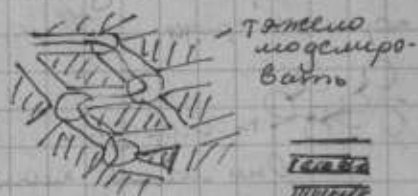
$$v_{\text{ср}} \cdot S_{\text{пор}} = Q = u \cdot S$$

ср. скор. матер. з-ца в жидк.

$$\Rightarrow v_{\text{ср}} \frac{S_{\text{пор}}}{S} = u$$

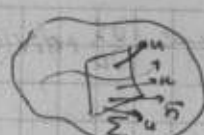
$$n \approx m, \text{ т.е. } v_{\text{ср}} = \frac{u}{m}$$

Рассм.



$$Q = S \cdot u$$

$$v_{\text{ср}} \cdot S_{\text{пор}} \Rightarrow v_{\text{ср}} = \frac{u}{m}$$



$Q = \int \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma$

$$Q_{\text{масс}} = \int \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma - \text{масс. расход}$$

$$[Q_{\text{масс}}] = \frac{kg}{c}$$

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$$

$\rho = \rho(x, y, z, t)$ — плотность жидк-ти внутри пор. ср.

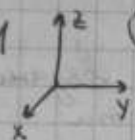
$p = p(x, y, z, t)$ — давл

... T, концентрация и т.д.

$$\rho = \frac{m_{\text{жидк.}}}{V_{\text{жидк.}}}$$

из интегр. з-нов сохранения:

1. ЗСМ



$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot m dV = - \int_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma$$

масса жидк. внутри V в пор.х

$$\text{т.к. } V \text{ - неогр.: } \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho m) dV = - \int_V \text{div}(\rho \vec{u}) dV$$

по Г-Остр.

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + \text{div}(\rho \vec{u}) \right) dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 - \text{з.е.м.}$$

ур-е неразр-ти.

Частный случай:

$\rho = \text{const}$ — неплотн. неодн.
 $m = \text{const}$
или $m = m(x, y, z)$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{u} = 0$$

Для сравнения: в гидродинамике $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

2. Ур-е баланса импульса
(случай, когда св-ва
к з. Дарси)

$$0 = -\text{grad } p + \rho \vec{F} - \frac{\mu}{k} \vec{u}$$

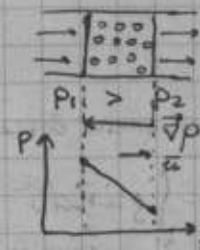
$\vec{F}$ - плотность масс. сил ($\vec{F} = \vec{g}$ - сила тяж.)

μ - коэф. упр. вязкости жидкости.

k - коэф. проницаемости [k] = м²

Частн. случ.:

I. $\vec{F} = 0 \Rightarrow \nabla p = -\frac{\mu}{k} \vec{u}$



Физика: жидк. фильтруется из обл. с большим p в обл. меньшую

Падение давления связано с действием вязкости.

$\vec{u} = \vec{v} = (?) \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (R^2 - r^2)$

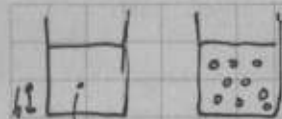
использ. коэф.

$v_{\text{ср}} \sim (?) \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} R^2$

$|\nabla p| \sim \frac{\mu}{R^2} v_{\text{ср}}$ - для течения в одной трубке

Обычно можно считать, что $k \sim d^2$
или порздор

II. $\vec{u} = 0 \Rightarrow 0 = -\nabla p + \rho \vec{F}$ - общ. ур-е равновесия жидкости



(если жидк. целиком заполняет поры) (иначе за счет капилляр. эффектов)

$p = p_{\text{атм}} + \rho g h$

$m, d, \dots$

$\hookrightarrow k$ опред. сложно (практич. невозм.)



$k \sim d^2 f(m)$

малые m : $k \sim m^3$

1. ЗСМ: $\frac{\partial \rho}{\partial t}(\rho m) + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$

2. Ур-е баланса имп. (2. случ. - з. Дарси):

$0 = -\nabla p + \rho \vec{F} - \frac{\mu}{k} \vec{u}$

[k] = м² - коэф. проницаемости

$k \sim d^2$ - хар-ный р-р пор (количественная оценка)

Пусть $\vec{F} = 0$: $\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \vec{u}$

$|\nabla p| = 1 \frac{\text{атм}}{\text{см}}$

$u = 1 \text{ см/с}$



падение в 1 атм.

$\mu = 0.01 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} \text{ (вода)} \Rightarrow k \approx 1.02 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2$

$k \approx 10^{-12} \text{ м}^2$

$k \approx 1 (\text{мкм})^2$

$k \approx 1 \text{ Дарси}$

k зависит только от геом. пор., т.е. k - хар-ка внутр. геометрии порового пр-ва (св-во пористой среды, а не жидк.)

Рассм. с-му ур-ий:

ЗСМ - 1 ур-е

ЗСМ - 3 ур-я

} 4 ур-я

Если $\vec{g} = \text{const}$: $m = m(x, y, z)$ - известна, $\vec{F}, \mu, k$ - изв.

Неизв.: $\vec{u}$ (3 проекции), p (1 неизв.)

4 ур-е на 4 неизв. — замк. с-ма.

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

Если газ: $p = p(s)$ — связь p и s в данн. процессе.

(Пр-р изотерм. процесса: $T = \text{const}$, $p = sRT \Rightarrow p = p(s)$)

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \\ p \end{array} \right\}$ 5 неизв. и 5 ур-ий

+ коэф. и гранич. усл-я.

Запись з. Дарси для ф-ции невязки жидкости в поле силы тяжести:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p - s \vec{g})$$

Выберем СК так, чтобы Oz направлена вверх:

$$\vec{g} = (0, 0, -g)$$

$$-s\vec{g} = (0, 0, sg) = sg \frac{(0, 0, 1)}{\vec{e}_z} = \text{grad}(sgz)$$

Подставим:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\text{grad } p + \text{grad}(sgz))$$

$$\vec{u} = -\frac{ksg}{\mu} \text{grad} \left(\frac{p}{sg} + z \right), \quad C = \frac{ksg}{\mu} \text{ — коэф. пр-ции}$$

$$[C] = \text{м/с}$$

C зависит от св-в пористой среды и от жидкости (k, μ, s). C — дост. малая величина.

$$\frac{p(x, y, z, t)}{sg} + z = H(x, y, z, t) \text{ — напор}$$

$$[H] = \text{м}$$

В сравнении с давлением:

показывая жидк-ть:

$$p = p_{\text{атм}} + \rho g(h - z)$$

p — переменна по высоте

$$H = \frac{p_{\text{атм}} + sg(h - z)}{sg} + z = \frac{p_{\text{атм}}}{sg} + h = \text{const}$$

4

Т.е. H постоянен в покое жидк-ти.

$$\vec{u} = -C \text{grad } H$$

Если Oz выбрана по-другому, h — не вертикально, то

$$H = \frac{p}{sg} + z \cos \alpha, \dots \text{ и т.д.}$$

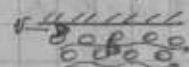
Типичные гранич. усл-я.



① Гр-ца пористой среды и непрониц. тв. стенки

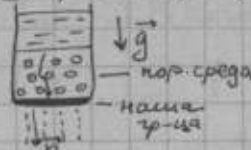
$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_r = 0 \text{ — усл. непротекания}$$

Замеч: на микроур-не на пов-ти зерен (усл. приращения)



$\vec{u}_\tau$ — касат. составляющая скор. ф-ции, и.д. подобн (ур-е не содержит произв. по к-там)

② Гр-ца пор. среды и атмосферы.



$$p|_r = p_{\text{атм}}$$

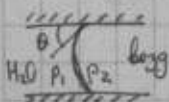
$\vec{u}$ на выходе?

$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ — жидк-ть вытекает (не может втекать)

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ — к-р $\vec{u}$ в стакане



жидк. в порах
гр-ца искривлена (строго говоря, есть перепад давл. за счет поверхностного натяжения)



Возникает разность давл., $p_2 > p_1$

$$p_2 - p_1 = G \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ — з. Лапласа}$$

θ - угол смачивания: $\theta < 90^\circ$ - вода смачивает стенку
 $\theta > 90^\circ$ - не смачивает.

σ - коэф. поверхн. натяжения.

R_1, R_2 - глав. радиусы в данн. точке

В нашей з-ге $R_2 - R_1 = \frac{2\sigma}{R}$

H_2O : $\sigma = 75 \frac{\text{дин}}{\text{см}}$
 (в с.м.е. см, г, с)
 СГС

$$1 \text{ дин} = 1 \frac{\text{г см}}{\text{с}^2}$$

$$1 \text{ Н} = 10^3 \text{ г} \cdot 10^2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 10^5 \text{ дин}$$

$$\rightarrow \text{Н-р: } 1 \text{ Дж} = 1 \frac{\text{кг м}^2}{\text{с}^2} \quad 1 \text{ эрг} = 1 \frac{\text{г см}^2}{\text{с}^2}$$

$$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$$

$$\sigma = 75 \frac{10^{-5}}{10^{-2}} \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$$

$$R \sim 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$\sigma \sim 10^{-1} \text{ Н/м}$$

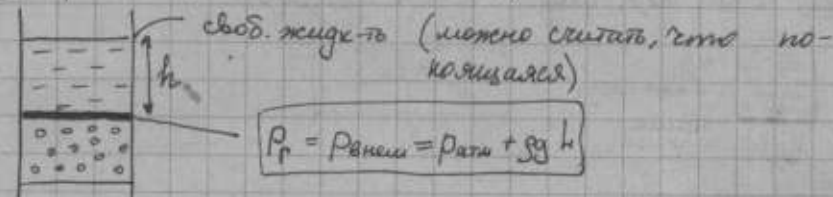
$$\sigma_p \sim 10^{-2} \text{ Па}$$

и.д. пов. натяж.

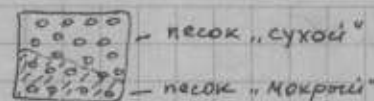
$$P_r - P_{\text{внеш}} = \frac{2\sigma}{R} = 0$$

промежуток высасывания

③ Гр-ца пор. средот и своб. жидкости



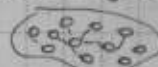
④ Гр-ца д-ти (внутри пор. ср.), занятой жидкостью и д-ти, свободной от жидкости



— пов-ть депрессии
 (т.е. понижения ур-ня), или
 еще своб. пов-ть.

Если $d \ll L$, то можно сказать, что L пов-ть, к-ую
 условно считаем гладкой пов-тью.

Строго говоря: гр-ца размазана
 из-за капилляр. сил.



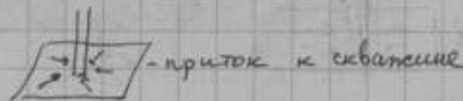
Гр-ца неизвестна
 (до реш-я з-га)

Т.к. гр-ца неизвестна, то усл-я два:

- ① $P_p = P_{\text{внеш}}$ (непр-ть давл-я)
- ② Если з-га стационарна: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ — скор.
 ф-ция на гр-це — по кас-ной.

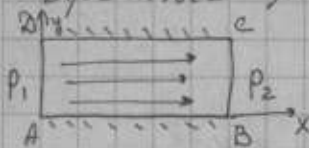
Эти усл-я ставятся одновременно.

Гр. видн:



и.д. усл-я на чистоту
 ние хар-ки (объемн.
 расх. жидкости или
 на массовы, давле-
 ние)

Простые реш-ия з-2



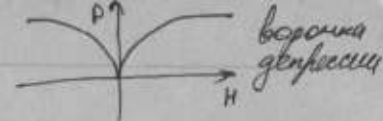
$$\vec{F} = 0$$

неизмн:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{u} = 0 \\ 0 = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u} \end{cases}$$

P_1, P_2 — постоянны, $P_1 > P_2$

$$\vec{u} = (u, 0, 0)$$



Гр. укл-а: AB, CD: $\vec{u} \cdot \vec{n}|_r = 0$

AD: $p = p_1$

BC: $p = p_2$

$\text{div } \vec{u} = 0$: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(x, y, z)$

O_x : $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{k} u$

O_y : $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$

O_z : $0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$

p -по лн. z -ну, u -постоянна:

$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} x$

$u = -\frac{k}{\mu} \frac{p_2 - p_1}{L} \rightarrow 0$

✓ Напорная пр-ая в гидр. пласе (исключе-
тригеская стационарная г-ра)



$g = \text{const}$, $c = \text{const}$



$H(z)$ -если статик.: $H = \frac{p}{\rho g} + z$

$\text{div } \vec{u} = 0$

$\vec{u} = -c \text{grad } H \Rightarrow \text{div grad } H = 0$

$\Rightarrow \Delta H = 0$

$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$

исключе-
одноат: $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = 0$

мож. $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$

В укл. СК: $\Delta H = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dH}{dr} \right) = 0$

Принтегрир: $r H'_r = C_1$

$H'_r = \frac{C_1}{r}$

$H = C_1 \ln r + C_2$ - общ. реш-е.

Расход (объемный): $Q = u(z=R) \cdot 2\pi R h$

$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r$

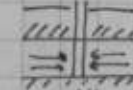


г. Дарси: $u = -c \frac{dH}{dz} = -c \frac{C_1}{r}$

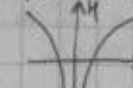
$\Rightarrow Q = -c \frac{C_1}{R} 2\pi R h = -c C_1 2\pi h$

Если $Q = \text{const} \Rightarrow C_1 = \frac{-Q}{2\pi h c}$

Реш-е: $H = -\frac{Q}{2\pi h c} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$



$Q < 0$



$Q < 0$ (выкач. из пласе)



или (в зав-ти от того, закачивают или
наб.) $Q = \text{const}$



$Q > 0$ (закачив. в пласе)

Напорная пр-а - без образования свод. пов-ти
Безнапорная - с образованием свод. пов-ти.

$H(z) = H = -\frac{Q}{2\pi h c} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$

$\frac{p}{\rho g} + z$

Если плас тонкий (z мало мен-ся), то

$H \sim p$

Замечание. Формально: $z \rightarrow 0 \Rightarrow \ln \frac{z}{z_0} \rightarrow -\infty$
 $H \rightarrow -\infty$

При $z = z_1$: $H(z_1) = H_1 = -\frac{Q}{2\pi h c} \ln \frac{z_1}{z_0}$

$z = z_2$: $H(z_2) = H_2 = -\frac{Q}{2\pi h c} \ln \frac{z_2}{z_0}$

$H_1 - H_2 = -\frac{Q}{2\pi h c} \ln \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow Q = -2\pi h c \frac{H_1 - H_2}{\ln z_1/z_2}$

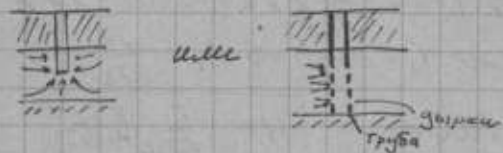
- ф-ла Дюпюи

Если знаем c , h и $H_1, H_2 \Rightarrow$ находим расход.

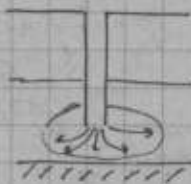
Скватина совершенная:

- щель находится в массе,
- жидкость может протекать к скватине по всей ее пов-ти.

Бывают несовершенн:



3-ья о сферически симм. течениях



$d \ll h$ - в окрестности можем рассм. 3-ью о сферич. симм. течениях.

$H(z)$, z - сферич. радиус.

$$\Delta H = 0 \rightarrow \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dH}{dz} \right) = 0$$

$$z^2 H_2' = C_1$$

$$H_2' = \frac{C_1}{z^2}$$

$$H = -\frac{C_1}{z} + C_2$$

Объемный расход $Q = 4\pi R^2 \left(-C \frac{C_1}{R^2} \right) \Rightarrow$



$$\vec{u} = -C \nabla H,$$

$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z + \dots$, но т.к. осесимм. 3-ья,

$$\nabla H = \frac{\partial H}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow Q = -4\pi C C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{-Q}{4\pi C}$$

$$H(z) = \frac{Q}{4\pi C} \cdot \frac{1}{z} + \text{const} \quad \text{-- реш-е}$$

$$H(z_1) = H_1 = \frac{Q}{4\pi C} \cdot \frac{1}{z_1} + \text{const}$$

$$H(z_2) = H_2 = \frac{Q}{4\pi C} \cdot \frac{1}{z_2} + \text{const}$$

$$H_1 - H_2 = \frac{Q}{4\pi C} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \Rightarrow$$

$$Q = 4\pi C \frac{H_1 - H_2}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}} \quad \text{-- ф-ла Дюпюи}$$

7

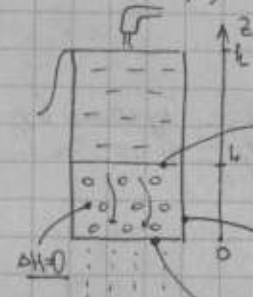
Дав. линии k : $\vec{g} = 0$, то $\vec{\nabla} p = -\frac{\rho}{k} \vec{u}$

Дав. линии C : $\vec{u} = -C \nabla H = -C \left(\frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z + \vec{e}_z \right)$

Если $\vec{\nabla} p = 0$, то $\vec{u} = -C \vec{e}_z$
(дв-ся не за счёт перепада давл., а за счёт $F_{\text{тяж}}$, $k-p$)

$$|\vec{u}| = C$$

или +:



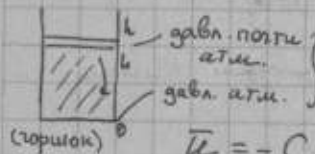
$$p = \rho g(h-L)$$

$$H = \frac{\rho g(h-L)}{\rho g} + L = h, \quad H = h$$

усл. непротек: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, т.е. $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$

$$p = p_{\text{атм}} = 0 \Rightarrow H = \frac{0}{\rho g} + 0 = 0 \quad \text{т.е. } H = 0$$

Смещ. 3-ья для ур-я Лапласа: $H = h \frac{z}{L}$
(гр. усл-я $H=0, H=h$ и $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$)



давл. поти

атм.

давл. атм.

$\Rightarrow$ дв-ие за счёт $F_{\text{тяж}}$.

$$\vec{u} = -C \nabla H = -C(0, 0, \frac{h}{L})$$

$$u_z = -C \frac{h}{L} < 0$$

$$\approx 1, \text{ если } h \approx L \Rightarrow |u_z| \approx C$$

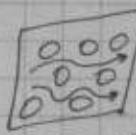
Пределы применимости з. Дарси.

3. Дарси применим, если

- жидк. целиком заполняет пор. среду;
- жидк. ньютоновская (т.е. подчин-ся з. Н-Ст.);
(или еще лим. - вязкая)

— скор. ф-ции (течение жидк-ти внутри пор.) мала
(по сравнению с течением внутри пор. ср.)

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} \ll 1, d - \text{хар-истич. размер пор.}$$



$$\vec{\nabla} p \text{ зав. от } \vec{u}$$

$$\vec{g} = 0 \text{ (масс. сил нет)}$$

$$\vec{\nabla} p = f(\vec{u}, \rho, \mu, m, d, \alpha_i)$$

геом. параметры

$\vec{\nabla} p / |\vec{u}|$ (для изотропной среды)
в-р зав. только от одного в-ра.

$\vec{\nabla} p = f(|\vec{u}|) \vec{u}$ (можно показать, что илге одному в-ру $|\vec{u}|$ соответ. неск-ко $\vec{\nabla} p$; это-то там про вращение СК)

$$|\vec{\nabla} p| = f(|\vec{u}|, \rho, \mu, m, d, \alpha_i)$$

П-теорема: 1. $\{L, M, T\}$

$$2. [p] = \frac{ML}{T^2 L^3}$$

$$[\nabla p] = \frac{M}{T^2 L^2}$$

$$[u] = \frac{L}{T}, [\rho] = \frac{M}{L^3}, [d] = L$$

$$[\alpha_i] = 1 \text{ или } [\alpha_i] = \frac{1}{L} \text{ — будем считать}$$

$$[\mu] = \frac{M}{L T}, [m] = 1$$

3. Размернонезав. подсим-ла: $M, |\vec{u}|, d$.

$$\Pi = \frac{|\vec{\nabla} p|}{M |\vec{u}| / d^2} = f_1 \left(\frac{\rho}{\mu}, m, \alpha_i \right)$$

$\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3$

$$|\vec{\nabla} p| = \frac{M |\vec{u}|}{d^2} f_1(Re, m, \alpha_i, \dots) \text{ — общ. вид 3-на ф-ции } (\vec{g} = 0)$$

$$\text{где } Re = \frac{\rho |\vec{u}| d}{\mu}$$

Частные случаи:

1) медл. течение:

$Re \ll 1$ — зав-тью от Re можно пренебречь

ур-я $\left\{ \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) &= -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} \\ \text{на } \text{микроур-не} \quad \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \right.$

Пусть зв-ие стационарно: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \sim \rho U \frac{U}{d}$

$$\mu \Delta \vec{v} \sim \mu \frac{U}{d^2}$$

$$\frac{|\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}|}{|\mu \Delta \vec{v}|} \sim \frac{\rho U^2}{\mu \frac{U}{d^2}} = \frac{\rho U d}{\mu} = Re$$

силы инерции — физ. смысл Re
силы вязк. трения

В нашей 3-ге сил инерции «силы трения» $\Rightarrow$ при $Re \ll 1$ $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ — не учитываем.

Замечание. Если $Re \gg 1$, наб.: $\rho \frac{d \vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v}$
ур-е невязкой (жидк-ти).

Вернемся к 3-ге: слева сказанная 0 $\Rightarrow \rho$ не входит в ур-я: $\left\{ \begin{aligned} 0 &= -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \right.$

Тогда $|\vec{\nabla} p| = \frac{M |\vec{u}|}{d^2} f_1(m, \alpha_i) = \frac{1}{k}$

$$|\vec{\nabla} p| = \frac{\mu}{k} |\vec{u}| \text{ — 3. Закон Дарси}$$

$$\vec{\nabla} p = - \frac{\mu}{k} \vec{u}$$

2) $Re \gg 1$ — быстрое течение внутри пор.
в глав член не должна входить μ .

$$\Rightarrow |\vec{\nabla} p| = \frac{\mu |\vec{u}|}{d^2} \left(\frac{\rho |\vec{u}| d}{\mu} + \dots \right) \sim \frac{\rho |\vec{u}|^2}{d} + \dots$$

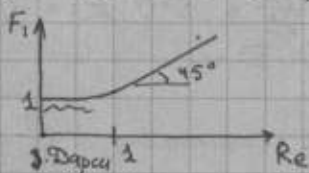
Re

∇p зав. от $|\vec{u}|$ квадратично.

Объединяя 1) и 2):

$$\nabla p = \frac{M|\vec{u}| \cdot k}{d^2 \cdot k} f_1(Re, \dots) = \frac{M|\vec{u}|}{k} F_1(Re, \dots)$$

$Re \ll 1, F_1 \rightarrow 1$
 $Re \gg 1, F_1 \sim Re^2$



Часто используют:

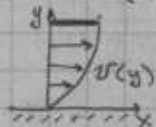
$$\text{з. ф.-ции } 0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} - \beta \frac{\rho u^2}{\sqrt{k}} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

(з. ф.-ции Форхгейма, дугленн. з. ф.-ции)

β -коэф., $\beta \sim 1$

$\sqrt{k}$, т.к. $k \sim d^2$, а мы пом-ли выше: $|\nabla p| \sim \frac{\eta |\vec{u}|^2}{d} + \dots$

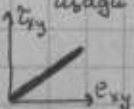
При очень малых скоростях ф.-ции накл-ся откло-нение: жидк-ти могут вести себя не как ньютоновские (н-р, как вязко-пластическая)



Ньютонов. жидк-ть

$$\tau_{xy} = 2\eta e_{xy} \quad (\eta = \text{const})$$

как-ное напр-е. вдоль по-и-и с норм. j по i

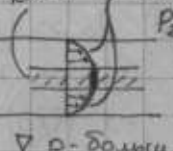
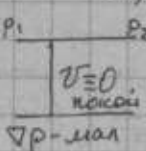


Жидк-ть Бингэма-Шведова (вязко-пластич.)

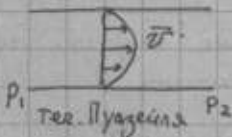


$\tau_0 = \text{const}$ - хар-ет св-ва среды

парав. мо. напр. скор.



Течение в трубе



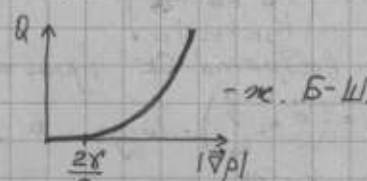
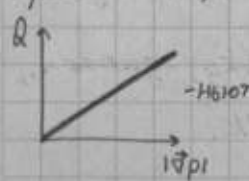
∇p -мал

∇p -больш.

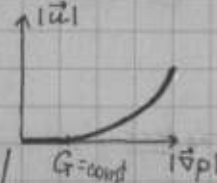
$$(p_1 - p_2) \frac{S_0}{4R^2} = \gamma \frac{2\pi R L}{S_{\text{бок}}}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{2\gamma}{R} \quad \text{радиус кап. (труба)}$$

При этом $|\nabla p|$ дв-ие начинается

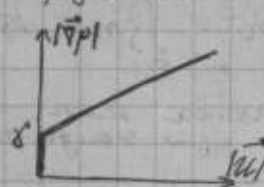


Ф.-ция неньют. жидк-ти:



В первом приближении можно считать

з. ф.-ции с предельным градиентом



Когда накл-ся отклонения от з. Дарси:

1. u -велика ($Re \gg 1$; $|\nabla p| = \frac{\eta}{k} u + \frac{\beta \rho u^2}{\sqrt{k}}$, н-р)
2. u -ог. мала (начинает сказываться отклонение жидк-ти от ньютоновских св-в и др. физ.-хим. эфф.)

Резица в анизотропных средах (св-ва сред зависят от направления):

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p \text{ (изотр.)}$$

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \nabla_j p \text{ (анизотр.)}$$

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} - \text{симм., положит. определена}$$

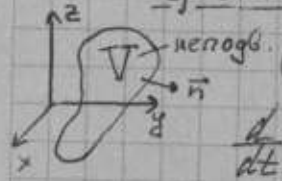
Можно выбрать СК, вдоль к-ой (k_{ij}) - диагон., т.е. $k_{ij} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$. Тогда в этой СК:

$$u_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$u_z = -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Ур-е нестационарной резицы



неподв. (2) Упт. з. сохр. массы:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho m dV = - \int_{\Sigma} \rho u_i n_i d\sigma = - \int_{\Sigma} \rho m v_n d\sigma$$

(2) Упт. соотношение для баланса инт. (для неподв. тл) Пор. среда покоится $\Rightarrow$ ее инт. = 0.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} m dV = - \int_{\Sigma} \rho \vec{u} m v_n d\sigma - \int_{\Sigma} m p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma} (\tau_{ij} n_j) m d\sigma + \int_V \rho \vec{g} F dV + \int_V \vec{F}_{тр} dV$$

(1) $\rho_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$ - из микроур-не

(2) $\tau_{ij} = \mu (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ - вязк. тенз.

(3) $\rho_{ij} = \rho u_i u_j$ - тенз. переноса импульса

(4) $\rho_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij}$ - тенз. переноса импульса

Покажем: (2) $\ll$ (1)

По 3. Дарси: $\nabla p \sim \frac{\mu}{k} u$
 $\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{\mu}{k} u$ δp - перепад давл. внутри V
 $h \gg d$

$$\tau_{ij} \sim \mu \frac{u}{d} \text{ (з. вязк. трения Н.-Стр.)}$$

$$(1) \sim \frac{\mu m}{d^2} S$$

$$(2) \sim \mu \frac{u}{d} S$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{\mu \cdot u \cdot S \cdot d^2}{d^2 \cdot \mu \cdot m \cdot d \cdot S} = \frac{d}{h} \ll 1 \Rightarrow (2) - \text{мало}$$

(А) Дифф. ур-е (если искл. граничные условия)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + \text{div}(\rho m \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m \vec{v}) + \nabla_k (\rho \vec{v} v^k m) = -\vec{\nabla}(\rho m) + \rho m \vec{F} + \vec{F}_{тр}$$

Част. случ: $m = \text{const}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla_k (\rho \vec{v} v^k) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{F} + \frac{1}{m} \vec{F}_{тр}$$

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

Если стационар:

$$\vec{v} - \text{мал.}, \text{ то } 0 = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{F} + \frac{1}{m} \vec{F}_{тр}$$

$\vec{v}^2 - \text{ог. мал.}$

$$\frac{1}{m} \vec{F}_{тр} = -\frac{\mu}{k} \vec{u} - \frac{\beta \rho u^2}{\sqrt{k}} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \text{ч. случ.}$$

Если не сильно нестационарно:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m \vec{v}) + \nabla_k (\rho \vec{v} v^k m) = -\vec{\nabla}(\rho m) + \rho m \vec{F} - m \left(\frac{\mu}{k} \vec{u} + \frac{\beta \rho u^2}{\sqrt{k}} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \right)$$

Пусть $\rho = \text{const}, m = \text{const}$:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p - \frac{\mu}{k} \vec{u} - \frac{\beta \rho u^2}{\sqrt{k}} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\nabla_k (v^k v^i) = \nabla_k v^k v^i + v^k \nabla_k v^i; \nabla_k v^k = \text{div} \vec{v} = 0 (\rho = \text{const})$$

$$\text{или: } \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) \\ \rho \left(\frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{m^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} - \frac{M}{k} \vec{u} - \frac{\beta \rho u^2}{\sqrt{k}} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \end{matrix}$$

обобщ. з. Дарси на случай нестат. дв-ия
($m = \text{const}$, $\beta = \text{const}$)

На практике можно не учитывать некие слагаемые. Оценка слагаемых:

(2) и (4) учитывают инерционность (в макро-масштабе и микромасштабе, соотв-но)

$$\left. \begin{matrix} (2) \sim \rho \frac{u^2}{L} \\ (4) \sim \frac{\rho u^2}{d} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{(2)}{(4)} \sim \frac{d}{L} \ll 1. \text{ Пренебрегаем (2)}$$

$$\frac{(1)}{(3)} \sim \frac{\rho k k}{m T \mu k}, \text{ где } T - \text{хар-ное время процесса}$$

$$\left. \begin{matrix} \rho \sim 1 \text{ г/см}^3 \\ k \sim 10^{-8} \text{ см}^2 \\ m \sim 10^{-1} \\ \mu \sim 10^{-2} \text{ г/см} \cdot \text{с} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{(1)}{(3)} \sim \frac{1 \cdot 10^{-8}}{10^{-1} \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{T(\text{сек})} = \frac{10^{-5}}{T(\text{сек})}$$

Если $T \sim 1$, то от. мал., а если T больше, то (1)/(3) еще меньше.

Вывод: (1) существенно только для быстроспро-кающих процессов (напр., вибрация)

③ Соотношения на разрывах.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \vec{n} \cdot d\vec{S} + \int_V c dV - \text{обм. вид з. сохр.}$$

$$\text{соотв.} \rightarrow [\rho \cdot D + \beta n] = \begin{matrix} 0 \\ I - \text{поверхн. источник} \end{matrix}$$

скор. дв-ия разрыва



$$\frac{d}{dt} \int_V \rho m dV = - \int_{B_n} \rho u_n dS \quad C=0$$

$$[\rho m D - \rho u_n] = 0$$

Баланс массы:

$$[\rho (m D - u_n)] = 0$$

$$[\rho m (D - u_n)] = 0$$

- если $u_n = D_n$, то нет притока

З. изм. или. (т.к. соотнош. векторное, то рассм. x-ую составляющую)

$$A = \rho m \vec{v}_x$$

$$\vec{B} = -\rho m \vec{v}_x \vec{v} - m p \vec{e}_x$$

$$C = \rho m F_x + F_{px}$$

Ан-но для O_y и O_z

$$\text{Тогда: } O_x: [\rho m \vec{v}_x D - \rho m \vec{v}_x u_n - m p n_x] = I = R_x - \text{поверхн. сила}$$

$$O_y: -//-$$

$$O_z: -//-$$

$$[\rho m \vec{v} D - \rho m \vec{v} u_n - m p \vec{n}] = \vec{R}$$

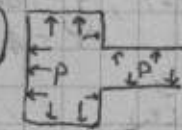
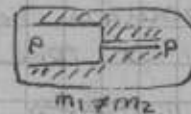
$$[\rho m \vec{v} (D - u_n) - m p \vec{n}] = \vec{R}$$

Вдобаве говоря, $\vec{R} \neq 0$
Пр-р: $\vec{u} = 0$, $[m] \neq 0$

$$m_1, m_2$$

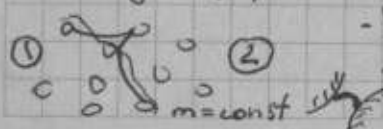
$$- [m p \vec{n}] = \vec{R}$$

$$- [m] p \vec{n} = \vec{R} \neq 0$$



По 3. Ньютона, стенка тоже дейст-ет на жидк., это и есть $\vec{R}$.

Еще один пр-р:



$$- [m p \vec{n}] = \vec{R}$$

$$- m [p] \vec{n} = \vec{R}$$

Вывод из (*).

Если $\vec{D} = \vec{v}_n \neq 0$, т.е. $\vec{v}$ пов-ть разрыва перетекает жидк-ть,

$\vec{v}$ по (*) в проекции на $\vec{z}$: $[\vec{v}_z] = 0$, т.е. $\vec{v}_z$ - непр.

Часто квадратичной скоростью можно пренебречь $\Rightarrow -[\text{tr} \vec{n}] = \vec{R}$ (можно считать) $m = \text{const}$, то $[p] = 0$

Применение методов ТФКП для решения классических 3-х.

Пусть: ρ -изм нестжим. однок. жидк-ти: $\rho = \text{const}$
 $C = \text{const}$ (коэф. тр-ции)
 ρ -изм в поле сил тяжести.


 $\text{div } \vec{u} = 0$
 $\vec{u} = -C \vec{\nabla} H$, $H = \frac{p}{\rho g} + y$
 Пусть $\boxed{\varphi = -CH}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{u} = \text{grad } \varphi}$
 комплексный потенциал скорости φ -ции
 $\text{div } \vec{u} = \text{div grad } \varphi = \boxed{\Delta \varphi = 0}$

$W = \varphi + i\psi$, φ - потенциал скор-ти φ -ции, $\varphi(x, y)$
 ψ - φ -ия тока, $\psi(x, y)$

$z = x + iy$

$W = W(z)$

$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - i u_y$ - комплексно-сопряж. скор.
 по лемме Коши

Вывод усл-ий К-Р:

$\text{div } \vec{u} = 0$

$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}$ - усл-е Лав дурр-на (по лемме Пуанкаре)¹²

$u_x dy - u_y dx = d\psi$

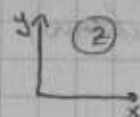
$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\}$ усл. К.-Р.

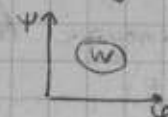
Докажем, что на линии тока $\varphi = \text{const}$:

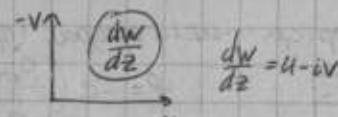
Если $\varphi = \text{const}$, то $d\varphi = 0$

$u_x dy - u_y dx = 0$

$\frac{u_x}{u_y} = \frac{dx}{dy}$ - усл-е того, что скор. касат.






 $\frac{dW}{dz} = u - iv$

① Гр-ца пор. среды и непроницаемой стенки

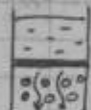


$\vec{u} \cdot \vec{n}|_r = 0$, $u_x + v_y = 0$ (*)

Если гр-ца-прямая, то (*) - прямая линия на $(\frac{dW}{dz})$, прох. $\vec{z}$ и $\vec{v}$.

$\psi|_r = \text{const}$ - прямая на (W)

② Гр-ца жидк-ти с пор. средой



$p|_r$ - известна



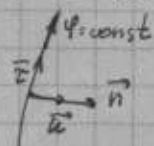
$p = p_{atm} + \rho g(h - y)$

$\varphi = -C \left(\frac{p_{atm} + \rho g(h - y)}{\rho g} + y \right) = \text{const}$ (не зав. от x и y)

$\varphi = \text{const}$ на (W)

Пл-ть горизонта = пл-ть скоростей (u_x, u_y) или $(u_x, -u_y)$

$\varphi = \text{const}$, то $\vec{u}$ гд. $\perp$ -на гр-це, т.к.:



$$\vec{u} = \nabla \varphi \quad | \times \vec{u} \text{ скалярно}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \text{производная в направлении } \vec{e}$$

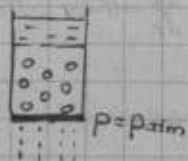
$\downarrow$

$$\vec{u} \perp \vec{e}, \quad \vec{u} \parallel \vec{n}$$

$$\frac{u_x}{n_x} = \frac{u_y}{n_y} \quad \text{или} \quad u n_y - v n_x = 0$$

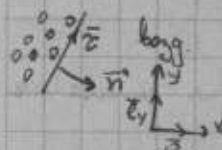
образ гр-цы на пл-ти $(\frac{dy}{dx})$

③ Пор. ср. — атмосфера (промежуток высаливания).



$$\varphi = -c \left(\frac{p_{atm}}{\rho g} + y \right)$$

$$\boxed{\varphi + cy = \text{const}} \quad \varphi(x, y) + cy = \text{const}$$



$$\vec{u} = -c \nabla H = -c \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{e}_y \right)$$

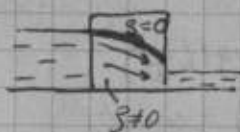
Спроектируем на $\vec{e}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = -c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{1}{\rho g} + \vec{e}_y \cdot \vec{e} \right) = -c \tau_y$$

$$\frac{u_x \tau_x + u_y \tau_y}{u} = -c \tau_y \quad \text{— прямая на } \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

(не прох. з/с наг. к-т)

④ Своб. пов-ть (пов-ть депрессии)



Гр-ца заранее неизвестна $\Rightarrow$ нужно ставить 2 фаз. усл-ия:

а) $p = p_{atm}$

б) стационар.: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (гр-ца — линия тока)

нестационар.: усл-е баланса массы:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = m \mathcal{D}$$

$$(1) [f(u_n - m \mathcal{D})] = 0$$

$$S^{(1)}(u_n^{(1)} - m^{(1)} \mathcal{D}^{(1)}) = 0, \quad \text{т.к. } S^{(1)} = 0$$

В стационар. случае $\varphi = \text{const}$ на (W)

Пусть пов-ть задана ур-ем $f(x, y, z) = 0$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(f'_x, f'_y)}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \quad \text{— единичн. нормаль к пов-ти}$$

$$\mathcal{D} = - \frac{f'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \quad \text{— скор. д-вие пов-ти. (в секунде)}$$

$$\varphi = -c \left(\frac{p_{atm}}{\rho g} + y \right), \quad \varphi + cy = \text{const} = A$$

$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + cy - A = 0$ — можем записать в таком виде

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = m \mathcal{D}$$

$$\vec{u} \cdot \nabla f \cdot \frac{1}{|\nabla f|} = m \left(- \frac{f'_z}{|\nabla f|} \right)$$

$$m \frac{\partial f}{\partial z} + \vec{u} \cdot \nabla f = 0$$

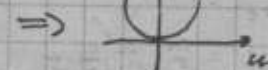
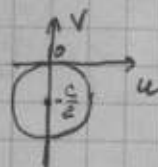
Подставим f :

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \right) = 0$$

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + c \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

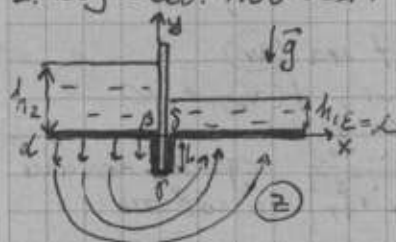
В стационар. случае: $\boxed{u^2 + v^2 + cv = 0}$ — на пл-ти $\left(\frac{dy}{dx} \right)$

$$u^2 + \left(v + \frac{c}{2} \right)^2 = \left(\frac{c}{2} \right)^2 \quad \text{— окр-ти}$$



Задачи

1. Без свобод. пов-тей:



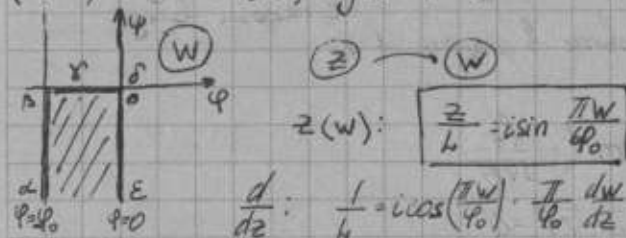
Рассм. ЛРДЭ

(DE): $\varphi = \text{const}$

Пусть $\varphi = 0$ (т.к. с точностью до const)

(AB): $\varphi = \text{const} = -C(h_2 - h_1) = -\varphi_0$
 $\varphi_0 = C(h_2 - h_1) > 0$

(BDE): $\psi = \text{const}$; пусть $\psi = 0$



$$z(w): \frac{z}{h} = i \sin \frac{\pi w}{\varphi_0}$$

$$\frac{dz}{dw}: \frac{1}{h} = i \cos \left(\frac{\pi w}{\varphi_0} \right) \cdot \frac{\pi}{\varphi_0} \frac{dw}{dz}$$

ψ -расход
(формально, расход
→ ∞, т.к. дно сжи-
таем в точку)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\varphi_0}{h \pi i \cos \frac{\pi w}{\varphi_0}}$$

$$\cos \frac{\pi w}{\varphi_0} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi w}{\varphi_0}} = \pm \sqrt{1 + \frac{z^2}{h^2}}$$

$$\frac{dw}{dz} = \pm \frac{\varphi_0}{\pi i \sqrt{h^2 + z^2}}$$

Если $z = \pm i h$, то $\frac{dw}{dz} \rightarrow \infty$ (как при обтекании пластины)

Пусть: $z = x$ ($\text{Im } z = 0$)

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = \pm \frac{\varphi_0}{\pi \sqrt{h^2 + x^2}} \cdot (-i)$$

$$u = 0, \quad v = \mp \frac{\varphi_0}{\pi \sqrt{h^2 + x^2}}$$

Тогда $Q = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \text{реш.}$

14

Линии тока:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \quad z = x + iy$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + i \cos x \sin(iy)$$

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = -i \sinh y$$

Приведем эту формулу:

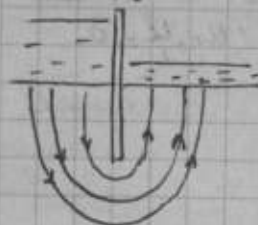
$$\frac{x + iy}{h} = i \left(\sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \cosh \frac{\pi \psi}{\varphi_0} + i \cos \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \sinh \frac{\pi \psi}{\varphi_0} \right)$$

$$\text{Re: } \frac{x}{h} = -\cos \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \sinh \frac{\pi \psi}{\varphi_0}$$

$$\text{Im: } \frac{y}{h} = \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \cosh \frac{\pi \psi}{\varphi_0}$$

Вдоль линии тока $\psi = \hat{\psi} = \text{const}$. Тогда:

$$\left(\frac{x}{h \sinh \frac{\pi \hat{\psi}}{\varphi_0}} \right)^2 + \left(\frac{y}{h \cosh \frac{\pi \hat{\psi}}{\varphi_0}} \right)^2 = 1 - \text{эллипс.}$$



3-ья решена.

2. На (z) форма области течения неизвестна



Интенсивность источника 2Q

$$\psi = Q$$

$$(d\delta): \psi = 0$$

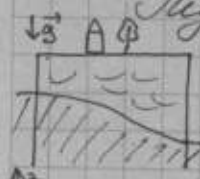
$$(d\varphi): \psi = Q$$

т.е. пусть там $\psi = 0$

(ориентация не имеет)



Гидравлическая теория фруи.

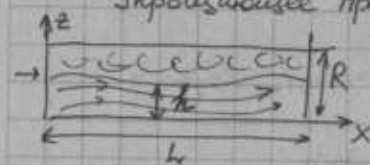


- пограничное течение со свобод. пов-тью

$$\rho = \text{const}$$

$$\Delta \varphi = 0$$

Упрощающее предположение: $h_x \gg h_z$



$$R \ll h$$

$h(x)$ - свобод. пов-ть
 $h'_x \ll 1$, т.е. свобод. пов-ть почти

горизонтальна, тогда можно считать, что $\vec{u} = (u_x, u_z, 0)$

z - на плоская

$$1) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$2) u_x = -C \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho g} + 0 \right)$$

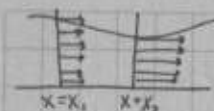
$$3) u_z = -C \left(\frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho g} + 1 \right)$$

Пусть $u_z = 0$, $u_x = u(x, z)$ - т.е. по высоте скорость не меняется

$$1) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$3) \Rightarrow 0 = -C \left(\frac{p'_x}{\rho g} + 1 \right) \Rightarrow p - C - \rho g z = p_{atm} + \rho g (h - z)$$

$$2) u_x = -\frac{C}{\rho g} \rho g h'_x = -C h'_x$$



Для области м/у x_1 и x_2 запишем инт. закон сохр. масс:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho m h(x, t) dx = \rho C h'_x \cdot h|_{x=x_1} - \rho C h'_x \cdot h|_{x=x_2}$$

$$\rho = \text{const}, m = \text{const}, C = \text{const}$$

$$\text{Тогда: } \int_{x_1}^{x_2} m \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (C h h'_x) dx$$

$$m h'_t = C (h h'_x)'_x = \frac{C}{2} (h^2)'_{xx}$$

В двумерном случае: $h = h(x, y, t)$

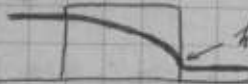
$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{C}{2m} \Delta h^2(x, y, t)}$$
 - ур. Буссинеска (1904)

Ур-е нелинейное, т.к. входит h^2 .

Стационар. случаи: $\Delta h^2 = 0$



Гидравлическая теория безнапорной ф-ции неприменима, когда $|h'_x| \gg 1$



$h'_x \gg 1 \Rightarrow$ теория неприменима.

Частный случай: стационар. равном. течение.

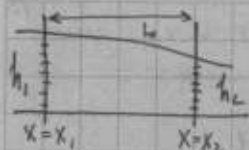
$$\text{Ур-е Буссинеска: } \frac{\partial^2}{\partial x^2} h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = Ax + B$$

$$h = \sqrt{Ax + B}$$

Формально



теория неприменима



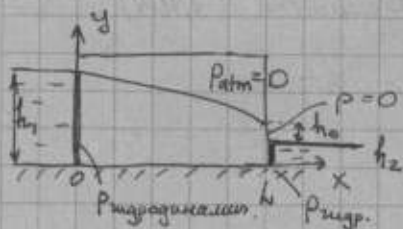
Расход одинаков

Объемный расход $Q = -C h'_x h =$
 $= -\frac{C}{2} (h^2)'_x = -\frac{C}{2} A = \text{const}$, т.е. $A = -\frac{2Q}{C}$ - конст. A .

$h_1^2 = Ax_1 + B \Rightarrow h_1^2 - h_2^2 = A(x_1 - x_2) \Rightarrow$
 $h_2^2 = Ax_2 + B$

$A = \frac{h_1^2 - h_2^2}{x_1 - x_2} = -\frac{2Q}{C} \Rightarrow Q = \frac{C}{2} \frac{h_1^2 - h_2^2}{x_2 - x_1}$

Ф-ла Дюпюи (для
 безнапорной ф-ции)
 Расход з/з параметр
 сечения



Показывается, что ф-ла
 Дюпюи справедлива для
 этой з-ли (течение з/з
 прямоуг. перемешку)

$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ (ЗСМ)

$u_x = -C \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho g} + 0 \right)$
 $u_y = -C \left(\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{\rho g} + 1 \right)$ } з. Парсе

Пусть $h(x)$ - высота

$Q = \int_{h(x)} u_x dy = -\frac{C}{\rho g} \int_0^{h(x)} \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} dy = \text{const}$ (т.к. неиск. масс.)

Введем вспомогат. ф-цию $P = \int_0^y p(x, y) dy$

$P = P(x)$

$\frac{d}{dx} P = \int_0^{h(x)} \frac{\partial p}{\partial x} dy + p(x, h(x)) h'(x)$
 $- \rho g h / c = \text{const}$ $p_{atm} = 0$

$\Rightarrow$

$P = C_1 - \frac{\rho g}{c} x = P(x)$

$P(0) = \int_0^{h_1} \rho g (h_1 - y) dy = \frac{\rho g h_1^2}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g h_1^2}{2}$

$P(h) = \int_0^{h_2} \rho g (h_2 - y) dy + 0 = \frac{\rho g h_2^2}{2} \Rightarrow C_1 - \frac{\rho g h_2^2}{2} = \frac{\rho g h_1^2}{2}$

Тогда $\frac{\rho g h_1^2}{2} = \frac{\rho g h_2^2}{2} (h_1^2 - h_2^2)$

$Q = \frac{C}{2h} (h_1^2 - h_2^2)$

Замечание. Если бы мы считали по гидра-
 влической теории, то было бы:

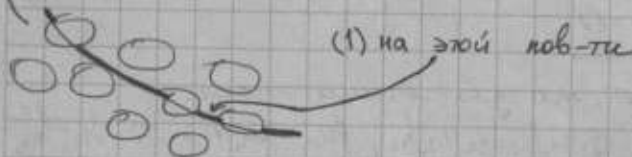


- не верно

Уравнение баланса энергии
 (жидк. + скелет)

$\frac{d}{dt} \int_V (\rho U_m + \rho_c U_c (1-m)) dV = - \int_{\Sigma} U \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma +$
 $+ \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} m dV - \int_{\Sigma} \rho \vec{n} \cdot \vec{v} m d\sigma + \int_{\Sigma} \dots - \int_{\Sigma} q_n d\sigma$
 (1) (2) (3)

U - внутр. эн-ия жидкости (газа),
 U_c - внутр. эн-ия скелета,
 $\vec{q}$ - вектор потока тепла.



(1) на этой пов-ти

(2) мощность вязких составляющих (оно мало)

мощность всех сил на пов-ти зерен = 0
сила вязкого трения не совершает ра-
боту (если скелет не деформируется)

(3) - поток тепла из-за теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U m + \rho_e U_e (1-m)) = -\text{div}(\rho \vec{u} U) + \rho \vec{F} \cdot \vec{u} - \text{div}(\rho \vec{u} \vec{e}) - \text{div} \vec{q}$$

Ур-е баланса эн-ии

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T$$

коэф. теплопроводности

Т считаем одинаковой и у жидкости, и у ске-
лета (т.к. быстро выравнивается) (в первом приближ.)
Этот сложную зав-ть от κ_0 и κ_m

$$\frac{d}{dt} \int_V A dV = - \int_S B_n dS + \int_V C dV$$

$$[A D - B_n] = I \cdot \text{приток эн-ии}$$

$$[(\rho U m + \rho_e U_e (1-m)) D - (\rho \vec{u} U + \rho \vec{u} \vec{e} + \vec{q}) \cdot \vec{n}] = I_e$$

Поверхн. приток эн-ии $I_e \neq 0$ (вообще говоря)
- фаз. переход или трение...

Если течение стационарное:

Ур-е баланса эн-ии: $0 = -\text{div}(\rho \vec{u} U + \rho \vec{u} \frac{P}{\rho} + \vec{q}) + \rho \vec{F} \cdot \vec{u}$

$U + \frac{P}{\rho} = h$ - энтальпия (для сов. газа $u = C_v T, h = C_p T$)

$$\text{div}(\rho \vec{u} h + \vec{q}) = 0$$

Если $\vec{q}$ - мало, то для линии тока:

$\rho_1 u_1 h_1 = \rho_2 u_2 h_2, \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \neq 0 \Rightarrow h_1 = h_2$

Пр-р. сов. газ: $U = C_v T, P = \rho R T, h = C_p T$ 17
стационарное течение

ЗСМ: $\text{div}(\rho \vec{u}) = 0$

$\vec{q} = -\kappa \nabla T$ - 3. Дурое для с-мы скел-жидк.

Оценим:

$\rho u h \sim \rho u C_p T$

(2) $\text{div}(\rho \vec{u} h) \sim \frac{\rho u C_p \delta T}{L}, \delta T$ - хар-рное изм. темп-ры

(1) $\text{div} \vec{q} \sim \frac{\kappa \delta T}{L^2}$

(1) $\sim \frac{\kappa \delta T \cdot L}{L^2 \rho u C_p \delta T} = \frac{\kappa \rho u L}{\rho C_p \delta T \cdot L} = \frac{\kappa \rho u}{\rho C_p \delta T}$

(2) $\sim \frac{\kappa \delta T \cdot L}{L^2 \rho u C_p \delta T} = \frac{\kappa \rho u L}{\rho C_p \delta T \cdot L} = \frac{\kappa \rho u}{\rho C_p \delta T}$



$\delta p \sim 10 \text{ атм} = 10^6 \text{ Па}$

$k \sim 0,1 \text{ Вт} = 10^{-13} \text{ Вт}$

$C_p \sim 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$

$\rho \sim 10 \text{ кг/м}^3$ ($\rho = \rho R T$)

$M \sim 10^{-5} \text{ кг/м}^3$ - вода: $M = 0,01 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

$\kappa \sim 1 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ - $\frac{10^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ Вт}}{10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}} = 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

Воздух в 50 раз меньше воды.

Тогда (1) $\sim \frac{1 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-13}} = 10^{-2}$

Можно пренебречь теплопроводностью.

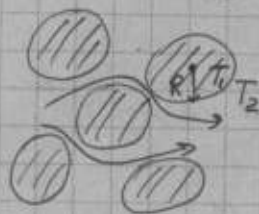
Тогда ЗСМ: $\text{div}(\rho \vec{u} h) = 0$

① $\rho_1 u_1 h_1 S_1 = \rho_2 u_2 h_2 S_2$
② $\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \Rightarrow h_1 = h_2$,
т.к. $h = C_p T$, то $T_1 = T_2$.

Оценка времени выравнивания T_0 и $T_{изжидк.}$
 $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$ - ур. теплопроводности в ТТ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \Delta T$$

α - коэф. температуропроводности.

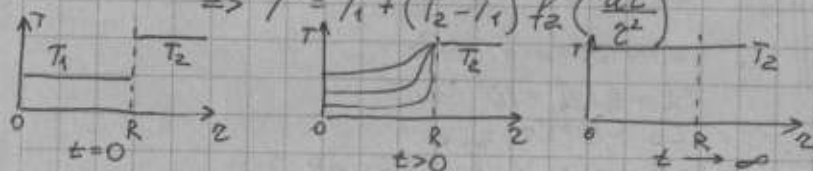


$$T = f(t, z, \alpha, T_1, T_2)$$

$T = T_1 + (T_2 - T_1) f_1(t, z, \alpha)$ - в асимптотической ур-я теплопроводности.

По π -теор: $[t] = c, [z] = m, [\alpha] = m^2/c$

$$\Rightarrow T = T_1 + (T_2 - T_1) f_2\left(\frac{\alpha t}{z^2}\right)$$



Хар-ное время прогрева $T_{хар} \sim \frac{R^2}{\alpha}$

$\kappa \sim 1 [\kappa]$ в см

$\rho c \sim 10^3 \text{ кДж/м}^3$

$c \sim 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$

$$\Rightarrow \alpha \sim \frac{1}{10^3 \cdot 10^3} = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$R = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м} \Rightarrow$$

$$T \sim \frac{10^{-6}}{10^{-6}} = 1 \text{ с}$$

$$R = 1 \text{ м} \Rightarrow T = 10^6 \text{ с} \sim 10 \text{ суток}$$

Изотермическая ф-ция газа.

$$1. \frac{\partial}{\partial t}(\rho m) + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$2. \vec{u} = -\frac{k}{m} \vec{\nabla} p. \text{ Виской тяжести пренебрегаем}$$

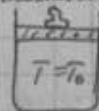
3. Усл-е изотермичности: $T = T_0 = \text{const}$

$$1. 4. \begin{cases} \rho = \rho(p) \\ m = m(p) \end{cases} \text{ ур-я состояния}$$

$$(5) \begin{cases} m = \text{const} \\ k = \text{const} \end{cases} \text{ скелет не деф-ся}$$

$\rho, m, p, \vec{u}$ - ? ρ -ма замк.

Замечание. Почему можно считать скелет несжимаемым, хотя газ сжимаемый?



$$\rho_{газ}: p = \rho R T_0, \rho \sim p$$

$$\delta p \sim \delta \rho$$

$$\delta p = \frac{p_0}{\rho_0} \delta \rho$$

$$\delta p = p_0 \frac{\delta \rho}{\rho_0}$$

$$p_0 \sim 10^6 \text{ Па}$$

относит. изм. плотности.

Скелет: $\rho_{ij} \sim E_{ij}$ - относит. деформация

коэф. пропорц-ти $\sim E, E \sim 10^9 \text{ Па}$

Подставим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(p)) - \text{div}\left(\frac{1}{m(p)} \vec{\nabla} p\right) = 0 \quad \text{одно ур-е отн-но } p.$$

$$\rho(x, y, z, t) \rightarrow \rho(p)$$

$$\text{Хотим: } \frac{\rho(p)}{m(p)} \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} P$$

$$P(p) = \int \frac{\rho(p)}{m(p)} dp. \text{ Тогда } \vec{\nabla} P = \frac{\rho(p)}{m(p)} \vec{\nabla} p$$

$$P(p) - \text{возвр. ф-я, т.к. } \frac{\rho(p)}{m(p)} > 0$$

$\rightarrow p = p(P)$
 ф-я Лейбензона.

Частн. случаи: а) сов. газ: $p = \rho R T_0$
 б) $m = \text{const}$ (не зав. от p)

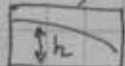
$$\rho = \frac{p}{RT_0}$$

$$\frac{m}{RT_0} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \operatorname{div} \left(\frac{p}{RT_0} \nabla p \right)$$

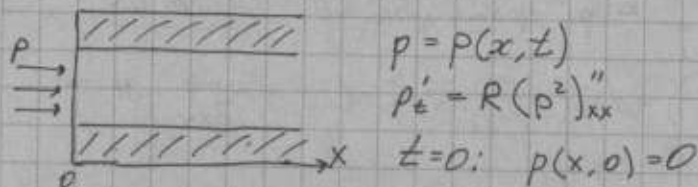
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{m\mu} \operatorname{div} (p \nabla p) \quad , \quad R = \frac{k}{2m\mu}$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = R \Delta(p^2)} \quad \text{— ур. изотермич. ф-ции сов. газа.}$$

Ур-е не линейно (p^2)

Ур-е совн. с ур-ем для безнапорной ф-ции (в случае полной своб. пов-ти)  $p = \text{const}$

3-я о закачке газа в порубеж. машин.



Пусть p изм-ся по лин. з-му:

$$x=0: p = \Delta t, \Delta = \text{const}$$

$$x \rightarrow +\infty: p \rightarrow 0$$

$$\text{П-теор: } p = f(x, t, R, \Delta)$$

$$[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \quad [R] = \frac{\text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг}}$$

$$p = \Delta t f \left(\frac{R}{x \Delta^2} \right)$$

$$L T M^{-1} = L^A T^B M^C L^E T^{-3C}$$

$$C = -1, B = -2, A = 2$$

$$p = \Delta t \cdot F \left(\frac{x}{t \sqrt{R \Delta}} \right) = \Delta t \cdot F(\xi(x, t))$$

19

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{x}{t^2 \sqrt{R \Delta}} = - \frac{\xi}{t}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{t \sqrt{R \Delta}} = \frac{\xi}{x}$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial p}{\partial t} = \Delta F(\xi) + \Delta t F'_{\xi} \left(- \frac{\xi}{t} \right) = \Delta F(\xi) - \Delta \xi F'_{\xi}$$

$$p^2 = \Delta^2 t^2 F^2(\xi)$$

$$\frac{\partial p^2}{\partial x} = \Delta^2 t^2 \cdot 2 F F'_{\xi} \cdot \frac{\xi}{x} = \frac{\Delta^2 t}{\sqrt{R \Delta}} (F^2)'_{\xi}$$

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} = \frac{\Delta^2 t}{\sqrt{R \Delta}} \cdot 2 \left((F'_{\xi})^2_{\xi} + F F''_{\xi} \cdot \frac{\xi}{x} \right) =$$

$$= \frac{\Delta^2 t}{\sqrt{R \Delta}} \cdot \frac{1}{t \sqrt{R \Delta}} 2 (F F'_{\xi})'_{\xi} = \frac{\Delta}{R} (F^2)''_{\xi}$$

Подставим в ур-е:

$$\Delta F - \Delta \xi F'_{\xi} = \Delta (F^2)''_{\xi}$$

$$\begin{cases} F - \xi F'_{\xi} = (F^2)''_{\xi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F \rightarrow 0, \xi \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \text{— ОДУ}$$

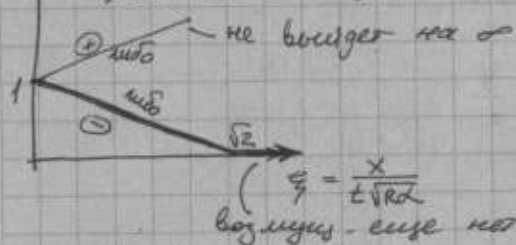
$$\text{т.к. } p = \Delta t \cdot F(\xi)$$

Пусть $F(\xi) = A + B \xi$ Подставим в ур-е и про-верим, угодит ли:

$$A + B \xi - B \xi = 2 B^2 \Rightarrow A = 2 B^2$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow B = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

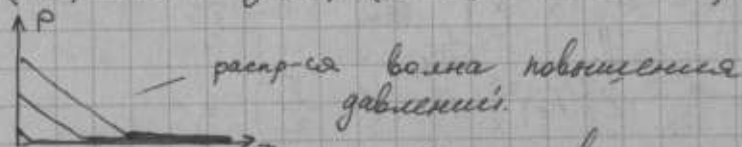
$F = P/Lt$ — профиль давления



Поставшая до-
определишь реше-
нием при $\xi \gg \sqrt{2}$

$$F(\xi) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \xi$$

Нужно проверить, что на слабом разрыве
($\sqrt{2}$) выпадает з. сопр. (масс, имп., эн.)



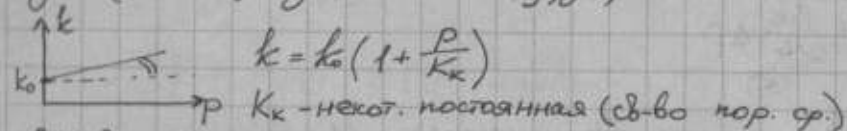
Вообще говоря, в распр. возмущ. — комбина

Необходимо проверить, что на разрыве выпадает ЗСМ.

Углубленный режим физики.
— физия жидк-ти с учетом а слабой сти-
мации, а также слабой стимуляции
скелета.

(Капельная жидк. — вода, нефть)

Пусть (относит.) изменения K, ρ, μ, m — малые.



$[K_k] = \text{Па}$ — размерность давления

$$\rho = \rho_0(1 + \frac{P}{K_\rho}), \quad m = m_0(1 + \frac{P}{K_m}), \quad \mu = \mu_0(1 + \frac{P}{K_\mu})$$

Обычно $K_k, K_\rho, K_m, K_\mu \gg p$

Пр-р: вода $K_\rho \sim 2 \cdot 10^9 \text{ атм}$

$$1. \text{ЗСМ} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho m) + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$2. \text{З. Давле} \quad \vec{u} = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p$$

$$3. \text{Имп. соотнош.} \quad \rho = \rho_0(1 + \frac{P}{K_\rho}), \quad m = m_0(1 + \frac{P}{K_m}) \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m) - \text{div}(\rho m \frac{k(p)}{\mu(p)} \vec{\nabla} p) = 0 \quad - \text{т.к. } p \text{ — отн. к } p.$$

$$\frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} m(p) + \rho(p) \frac{dm}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} - \left\{ \frac{d\rho}{dp} \vec{\nabla} p \frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p + \rho \frac{dk}{dp} \vec{\nabla} p \mu \vec{\nabla} p + \right. \\ \left. + \rho k \frac{d(1/\mu)}{dp} \vec{\nabla} p \cdot \vec{\nabla} p + \frac{\rho k}{\mu} \Delta p \right\} = 0,$$

$$\text{т.к.} \quad \text{div}(\vec{A}) = \nabla_k A^k$$

$$\text{div}(\vec{AB}) = \nabla_k (AB^k) = \nabla_k A B^k + A \nabla_k B^k$$

$$\frac{d\rho}{dp} = \text{const} \quad (\text{т.к. имп. пр-ия})$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\mu}{\mu_0} \left(1 - \frac{p}{K_\mu}\right), \quad \frac{1}{1+\alpha} \approx 1-\alpha \quad \text{т.к. всё равно всё пишем с точностью до лн. членов}$$

$$\left(\frac{\rho_0}{K_g} m_0 + \rho_0 \frac{m_0}{K_m}\right) \frac{\partial p}{\partial t} = \left[\frac{\rho_0}{K_g} \frac{k_0}{\mu_0} + \frac{\rho_0}{\mu_0} \frac{k_0}{K_k} - \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0 K_\mu}\right] (\nabla p)^2 + \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \Delta p \quad (2)$$

При малых возмущениях (1) = 0.

Оценка:

$$(1) \sim \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0 K} \left(\frac{\delta p}{h}\right)^2$$

$$(2) \sim \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \frac{\delta p}{h^2}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \sim \frac{(\delta p)^2 \cdot h^2}{h^2 K \delta p} = \frac{\delta p}{K} \ll 1$$

Тогда ур-е станет линейным:

$$\rho_0 m_0 \left(\frac{1}{K_g} + \frac{1}{K_m}\right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \Delta p$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{E} \Delta p \quad \text{— ур-е теплопроводности}$$

$$\mathcal{E} = \frac{k_0}{\mu_0 m_0 \left(\frac{1}{K_g} + \frac{1}{K_m}\right)} \quad \text{— коэф. теплопроводн.}$$

Типичные значения $\mathcal{E}$:

$$k_0 \sim 10^{-12} \text{ м}^2$$

$$\mu_0 \sim 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \quad (\text{H}_2\text{O})$$

$$m \sim 10^{-1}$$

$$K_m, K_g \sim 10^9 \text{ Па}$$

Хар. время переходного процесса: $\mathcal{E} \sim h^2/T, T \sim h^2/\mathcal{E}$

$$h = 1 \text{ м} \Rightarrow T \sim 1/10 \text{ с}$$

$$h = 100 \text{ м} \Rightarrow T \sim 10^3 \text{ с}$$

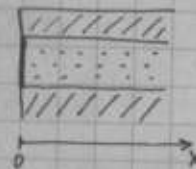
Типичные ур. д-л-я:

a)  $u_n = 0$ (усл. непротек.)
↓ погр-е Дарси

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_r = 0$$

b)  $p|_r = f(x, y, z, t)$ — задано

3-ья: скачкообразное повышение давления на гр-це полупрост. пласта.



$$t=0: p=0 = \text{const}$$

$$t>0: p=\delta p = \text{const на } x=0$$

$$x \rightarrow +\infty: p \rightarrow 0$$

$$p_t = \mathcal{E} p_{xx}$$

$$p = p(x, t, \mathcal{E}, \delta p)$$

$$\text{Ур. линейно} \Rightarrow p = \delta p f_1(x, \mathcal{E}, t)$$

$$p = \delta p \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{\mathcal{E} t}}\right) = f$$

$$\xi=0 \Rightarrow f=1$$

$$\xi \rightarrow +\infty \Rightarrow f \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{x}{\sqrt{\mathcal{E} t}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E} t}}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E} t}}$$

$$p'_x = p'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} = p'_\xi \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E} t}}, \quad p''_{xx} = p''_{\xi\xi} \frac{1}{\mathcal{E} t}$$

$$-\frac{1}{2} \rho'_{\xi} \cdot \frac{1}{\xi} \frac{x}{\sqrt{x t}} = x \frac{\rho''_{\xi}}{x t}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \xi \cdot f'_{\xi} = f''_{\xi} \\ f(0) = 1 \\ f(+\infty) = 0 \end{cases}$$

$$f'_{\xi} = g$$

$$-\frac{1}{2} \xi g = g'$$

$$-\frac{1}{2} \xi d\xi = \frac{dg}{g}$$

$$-\frac{1}{4} \xi^2 = \ln|g| - \ln A$$

$$\frac{g}{A} = \exp(-\frac{\xi^2}{4})$$

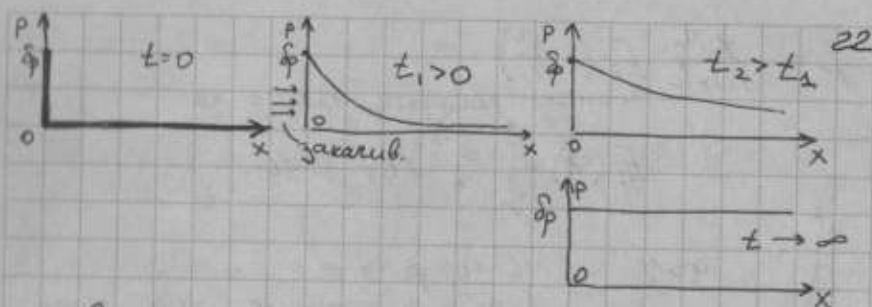
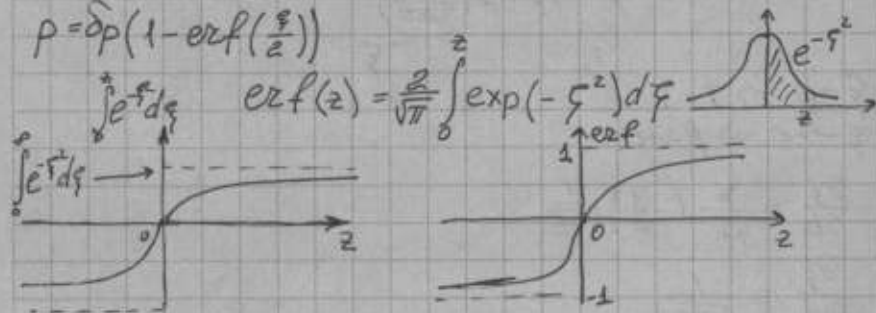
$$f'_{\xi} = A \exp(-\frac{\xi^2}{4})$$

$$f(\xi) = A \int e^{-\xi^2/4} d\xi + B$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$f(+\infty) = 0 \Rightarrow 0 = 1 + A \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/4} d\xi \Rightarrow A = \dots$$

$$\rho = \delta p (1 - \operatorname{erf}(\frac{\xi}{2}))$$



Весиметрическая з-га (о пуске скважины с постоянным объемным расходом)



$$t=0: p=0$$

$$z \rightarrow \infty: p \rightarrow 0$$

Толщиной скважины пренебрегаем.

В числ. СК:

$$P_z = x \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z \frac{\partial p}{\partial z})$$

$$S_{\text{об.}} \cdot u_n = 2\pi z h (-\frac{\partial p}{\partial z}) \frac{k_0}{\mu_0} - \text{объемн. расход жидк. з/з цилиндр радиуса z.}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0+} (2\pi z h (-\frac{\partial p}{\partial z}) \frac{k_0}{\mu_0}) = q = \text{const}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0+} (z \frac{\partial p}{\partial z}) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q \mu_0}{h k_0}$$

$$p = p(z, t, x, \frac{q \mu_0}{h k_0})$$

$$\text{Игн. тм: } p = \frac{q \mu_0}{h k_0} f(\frac{z}{\sqrt{x t}})$$

Подставим в д-е, получаем ОДУ. В итоге:

$$-f'_{\xi} [1 + \frac{\xi^2}{2}] = \xi f''_{\xi}$$

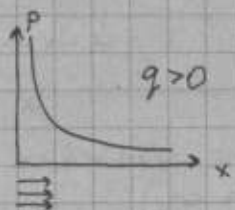
$$f(+\infty) = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (\xi f'_{\xi}) = -\frac{1}{2\pi}$$

$$p = -\frac{2M_0}{4\pi k_0 h} E_i\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

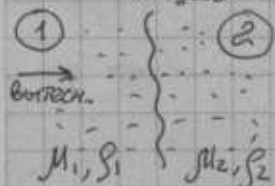
интегр. показательная ф-ия

$$E_i(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad z < 0$$



$z \rightarrow 0: p \rightarrow \infty$
(как и в источнике, там тоже формально $\rightarrow \infty$)

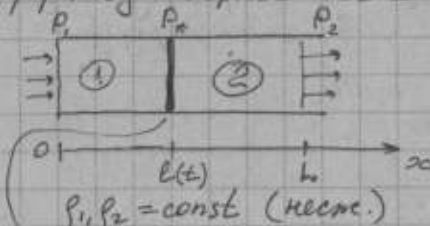
Физия неск-ких жидкостей.



Сначала вытекает за счет перепада давл., а потом вытесняется водой (поршневое вытеснение, вообще говоря, идеализация)

Вытеснение жидк. в пор. среде.

Пр-р: одномерное тег-е с плоскими границами:



$$\textcircled{1} \quad \text{div } \vec{u}_1 = 0$$

$$0 = -\vec{\nabla} p_1 - \frac{M_1}{k} \vec{u}_1$$

$$\textcircled{2} \quad \text{div } \vec{u}_2 = 0$$

$$0 = -\vec{\nabla} p_2 - \frac{M_2}{k} \vec{u}_2$$

$\beta_1, \beta_2 = \text{const}$ (несм.)

Усл-я на скачке:

а) Баланс массы $[p(u_n - mD)] = 0$

$D = \dot{l}$

б) Баланс масс. $[mp] = 0$

$$\beta_1(u_{n1} - mD) = \beta_2(u_{n2} - mD)$$

нет потока масс-ы в разрыв (т.к. вытеснение поршневое)

$$u_{n1} = u_{n2} = mD$$

$$p_1 = p_2 - \text{давл. непр-но.}$$

Пр. усл-я: $x=0 \quad p = p_1 = \text{const}$

$x=l \quad p = p_2 = \text{const}$

$u = u(t)$ — не зав. от x (т.к. $\text{div } \vec{u} = 0$), и одна и та же в обеих обл-ях.

Интегрируем з. Дарси:

$$\textcircled{1}: \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{M_1}{k} u(t)$$

$$\textcircled{2}: \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{M_2}{k} u(t)$$

$$p_1 - p_1 = -\frac{M_1}{k} u(t) l(t)$$

$$p_2 - p_1 = -\frac{M_2}{k} u(t) (l - l(t))$$

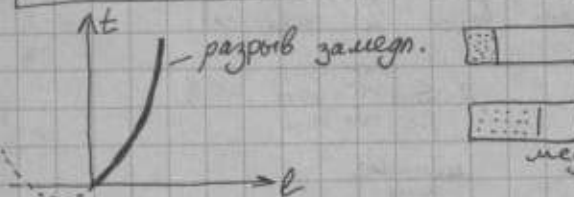
$$p_1 = p_1(t)$$

$$\begin{cases} p_2 - p_1 = -\frac{u(t)}{k} (M_1 l(t) + M_2 (l - l(t))) \\ u = m \dot{l} \quad (\text{из 3CM}) \end{cases} \quad u(t, l(t)) = ?$$

Получим ОДУ: $\begin{cases} p_2 - p_1 = -\frac{m \dot{l}}{k} (M_2 l + (M_1 - M_2) l(t)) \\ l = 0 \text{ при } t = 0 \end{cases}$

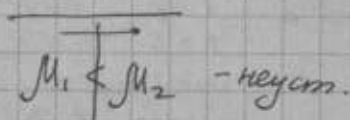
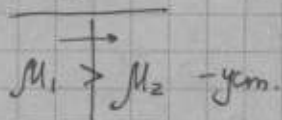
$$\int_0^t (p_2 - p_1) dt = -\frac{m}{k} \int_0^t (M_2 l + (M_1 - M_2) l) dl$$

$$(p_2 - p_1)t = -\frac{m}{k} (M_2 l^2 + \frac{M_1 - M_2}{2} l^2)$$

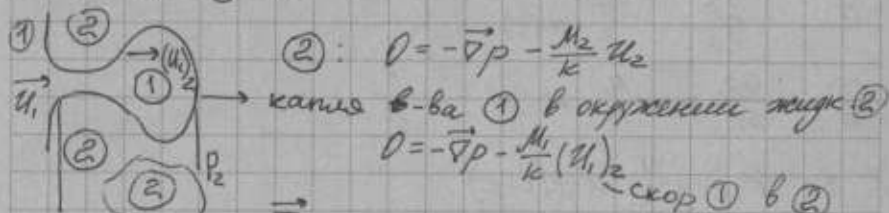


медленнее продвиж.

$$g=0:$$



Сленка возмущим жидк-ть и посмотрим, что произойдет:



$$\textcircled{2}: 0 = -\vec{\nabla} p - \frac{M_2}{\kappa} u_2$$

$$0 = -\vec{\nabla} p - \frac{M_1}{\kappa} (u_1)_2 \quad \text{скор } \textcircled{1} \text{ в } \textcircled{2}$$

$\vec{\nabla} p$ - одинак.

$$\vec{\nabla} p = -\frac{M_2}{\kappa} u_2$$

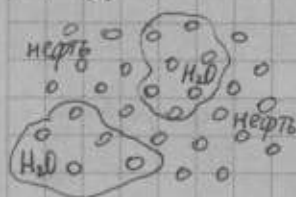
$$\vec{\nabla} p = -\frac{M_1}{\kappa} (u_1)_2$$

$$1 = \frac{M_2 u_2}{M_1 (u_1)_2}, \quad \frac{(u_1)_2}{u_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

Если $\frac{(u_1)_2}{u_2} > 1$, то $\frac{M_2}{M_1} > 1$ - неуст-ть.

$\frac{(u_1)_2}{u_2} < 1$, то $\frac{M_2}{M_1} < 1$ - уст-ть

Обобщно: $M_{H_2O} < M_{нефть}$ → всплывание нефти в воде неустойчиво (если справедлива эта приближ. теория; в реальности ситуация более сложная). Образуется смесь воды и нефти.



$d \lesssim \text{размер связанных обл-тей} \ll L$

меньше или порядка

Многоскоростная ф-ция.

S_i - обемн. концентрация i -ой фазы, $i=1 \dots N$

$$S_i = \frac{V_i}{V_{\text{всех фаз внутри пор пр-ва}}}$$

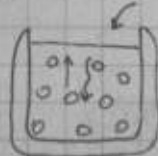
$$0 \leq S_i \leq 1, \quad \sum S_i = 1$$

$$\text{Пр-р: } N=2 \quad \begin{cases} S_1 = S \\ S_2 = 1-S \end{cases}$$

Если 1-ая фаза - вода, то S_1 - водонасыщенность.

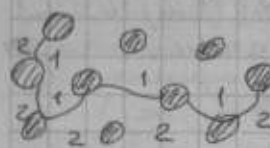
$\vec{u}_i$ - скор. ф-ция i -ой фазы ($i=1 \dots N$)

$$\int \vec{u}_i \cdot \vec{n} d\Omega = Q_i \quad \text{обемн. расход } i\text{-ой фазы из пов-ти } \Sigma$$



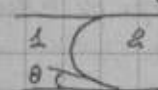
модель многоскоростного континуума.

p_i - давл. в i -ой фазе.



перепад давл. мжу фазами за счет капилляр. сил.

Двухфазная ф-ция.



Фаза 1 - более смачивающаяся

Фаза 2 - менее смачивающаяся

Н-р, вода - более смачив. ($\theta < 90^\circ$)

$$\text{Ф-ла Лапласа: } p_2 - p_1 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

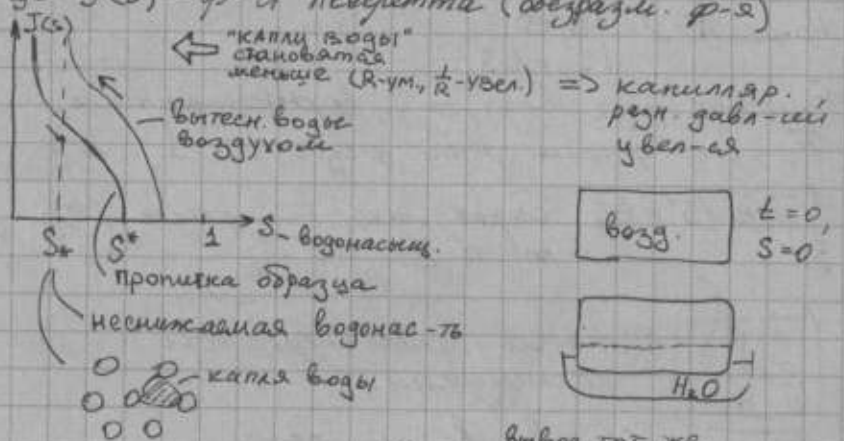


$$\delta p = p_2 - p_1 \sim \frac{\sigma}{R}, \quad R - \text{хар. геом. размер}$$

Перепад давл. из-за давлен. $p_2 - p_1 = F(s, \theta, k, m, \dots)$

Пор. ср:  - зав-ть S от $p_2 - p_1$

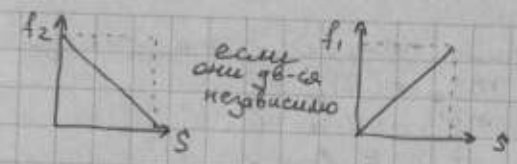
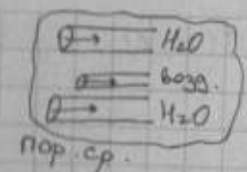
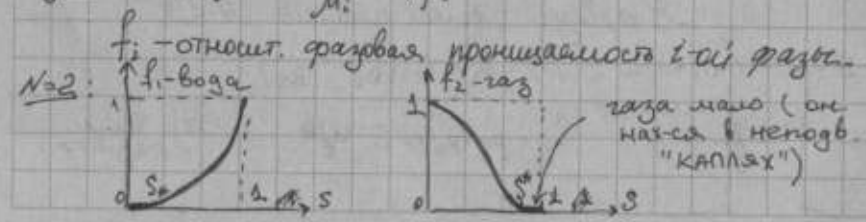
Обработка эксперимента: $p_2 - p_1 = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J(s)$,
где $J(s)$ - ф-я Петерсена (образцы ф-я)



ЗСМ: для i -ой фазы: $\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i m S_i) + \text{div} (\rho_i \vec{u}_i) = 0, i=1, \dots, N$
здесь нет S, t, k, m так определим $\vec{u}_i$.

ρ_i - истинная плотность i -ой фазы (не размаз.)
 $\sum_{i=1}^N: \frac{\partial}{\partial t} (m \sum_{i=1}^N \rho_i S_i) + \text{div} (\sum_{i=1}^N \rho_i \vec{u}_i) = 0$
 ρ_m - ср. скор. ф-ции

Ур. баланса имп. (обобщенные у. Дарси)
 $\vec{g} = 0: \vec{u}_i = - \frac{k f_i(s)}{\mu_i} \vec{\nabla} p_i$



$N=2$, одномерное течение, $\rho_1, \rho_2 = \text{const}$.

Измв: $u_1(x, t), u_2(x, t), p_1(x, t), p_2(x, t), S, s = S(x, t)$.

$$\begin{cases} (ms)' + (u_1)' = 0 \\ (m(1-s))' + (u_2)' = 0 \\ u_1 = - \frac{k f_1(s)}{\mu_1} (p_1)' \\ u_2 = - \frac{k f_2(s)}{\mu_2} (p_2)' \\ p_2 - p_1 = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J(s) \end{cases}$$

Соотношения на разрыве:

$$\begin{cases} [ms]D - [u_1] = 0 \\ [m(1-s)]D - [u_2] = 0 \end{cases} \text{ Баланс массы}$$

+ баланс импульса

В пренебрежении разностью давл. в фазах: $p_1 = p_2 = p(x, y, z, t)$
 $p_0 \ll p_1, p_2$, где $p_0 = p_2 - p_1$.

Оценка по порядку:

$p_0 \sim \frac{\sigma}{d}$ - ср. ($\Rightarrow$ хар. р-р 3-ей большой).

Для крупномасш. задач p_0 - можно пренебречь.

$$p_2 \approx p_1 \approx p \quad \vec{\nabla} p \text{ еще больше.}$$

(1)+(2): $\text{div} (u_1 + u_2) = 0$
 $u_1 + u_2 = q(t)$ - в 1-мер. случае.
сумм. объемн. расход смеси зав. только от t , не зав. от x (для плоск. волны)

Хотим получить одно ур-е для $S(x, t)$

$$m s'_t + (u_1)_x' = 0$$

$$m s'_t - (u_2)_x = 0$$

$$u_1 = -\frac{k}{\mu_1} f_1(s) p'_x$$

$$u_2 = -\frac{k}{\mu_2} f_2(s) p'_x$$

$$u_1 + u_2 = q(t)$$

p - общ., т.к. пренебрегаем капил. силами.

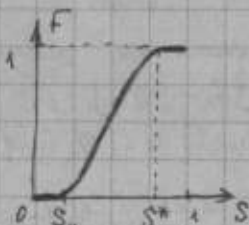
$$(3) \rightarrow (1): m s'_t - \frac{k}{\mu_1} (f_1(s) p'_x)' = 0$$

$$(3) + (4): q(t) = -k p'_x \left(\frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right)$$

$$m s'_t + \frac{k}{\mu_1} \left(f_1(s) \frac{q(t)}{k \left(\frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right)} \right)' = 0$$

$q(t)$ - заданная ф-я.

$$\frac{f_1(s)}{\mu_1 + \frac{f_2(s)}{\mu_2}} = F(s)$$



Рез. смеем: $\frac{14,1}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{14,1}{19,1}$ - какую долю в расходе занимает 1 фаза, $1 - F(s)$ - 2 фаза.

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + q(t) \frac{\partial}{\partial x} (F(s(x, t))) = 0$$

$$\frac{m}{q(t)} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \text{ - замена времени.}$$

$$\tau = \int_0^t \frac{q(t_1)}{m} dt_1$$

$$\text{Пр-р: } q = \text{const} \Rightarrow \tau = \frac{q_0}{m} t$$

Тогда ур-е примет вид:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + (F(s))'_x = 0 \text{ - автономная (не содержит } t)$$

или

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + F'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \text{ - тип ур-е}$$

$x(t)$ - на этой прямой $S(t, x(t))$

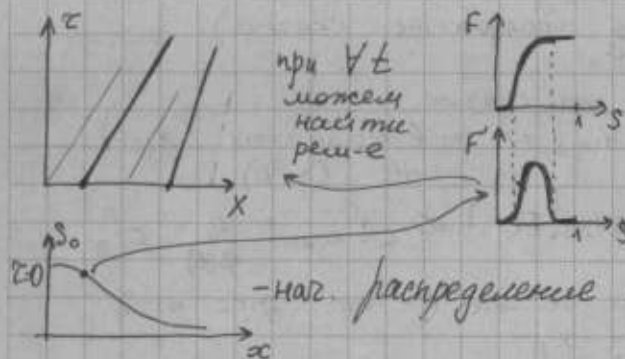
Скор. изменения s при дв-ии вдоль кривой $x(t)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

$$\text{Если } \frac{dx}{dt} = F'(s).$$

$$\frac{ds}{d\tau} = 0 \text{ (насыщ. не мен-ся) вдоль кривой}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = F'(s(x, \tau)) \text{ (вдоль хар-ки)}$$



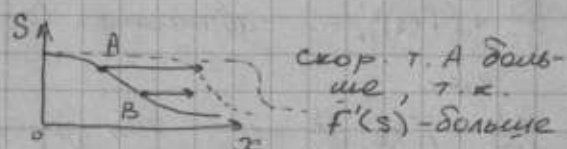
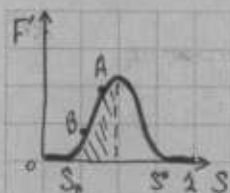
при $\forall t$ можем найти реш-е

- наг. распределение s

$$x = \tau F'(s) + x_0(s)$$

$$x = \tau F'(s(x, \tau)) + x_0(s) \text{ - реш-е } 3\text{-го в неявном виде.}$$

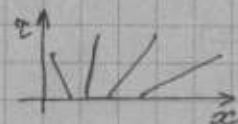
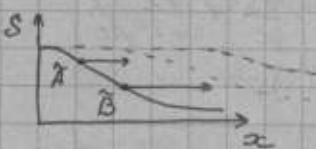
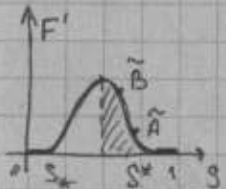
$$\text{При } \tau = 0: x = x_0(s) \Rightarrow s_0 = s_0(x)$$



скор. т. А больше, т.к. $F'(s)$ - больше



- неоднозначность, сб-ся скачок насыщенности (т.е. пов-ть разрыва)



- не П-ся (не происходит образование скачка)

Соотношения на скачке:

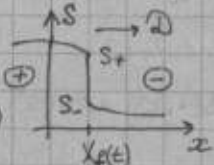
$$m[S]D - [u_n] = 0 \text{ — в переменных } (x, t), \text{ а не } (x, z)$$

$$m[s] \frac{dx}{dt} - q(t)[F(s)] = 0 \leftarrow \text{подст. } \frac{u_n}{q(t)} = F(s)$$

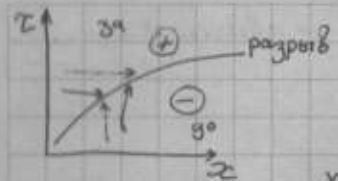
$x(t)$ - з. дв-ия скачка (к-та фронта)

$$[S] \frac{dx}{dt} \left(\frac{m}{q(t)} \right) = [F]$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[F]}{[S]} = \frac{F(s_+) - F(s_-)}{s_+ - s_-}$$

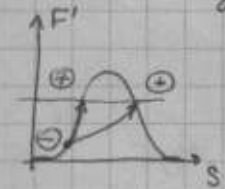


доп. соотношение на скачке (если скачок есть)



Для того, чтобы разрыв был эволюционным, число соотношений на разрыве = числу входящих от разрыва характеристик + 1 (иначе разрыв неустойчив)

В нашем случае: $1 = 0 + 1$
баланс масс

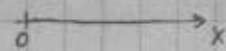


На разрыве (на графике $F'(s)$) скачок вверх (с увеличением $F'(s)$)

Автоматическая з-га о з-тке жидк-ти в макс-те.



$t=0: S=S_0$ - нач. насыщ.
 $t>0: S|_{x=0} = S_1$



$$\frac{\partial S}{\partial t} + F(s) \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[F]}{[S]} \text{ — на скачке}$$

$$S(x, 0) = S_0 \text{ — нач. усл.}$$

$$S(0, t) = S_1 \text{ — гр. усл.}$$

$F(s)$ - безразм. ф-ия

$$S = S(x, t, \dots)$$

безразм. наргам.

$$[z] = [x] \text{ — размерности}$$

По Π -теореме: $S=S(\frac{x}{L}, \dots)$ - автомодельн.:

$$S=S(\xi), \quad \xi = \frac{x}{L}$$

Подставим в ур-е:

$$S'_\xi \left(-\frac{x}{L^2}\right) + F'(S(\xi)) \cdot S'_\xi \cdot \frac{1}{L} = 0$$

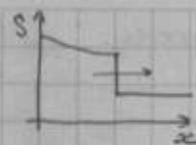
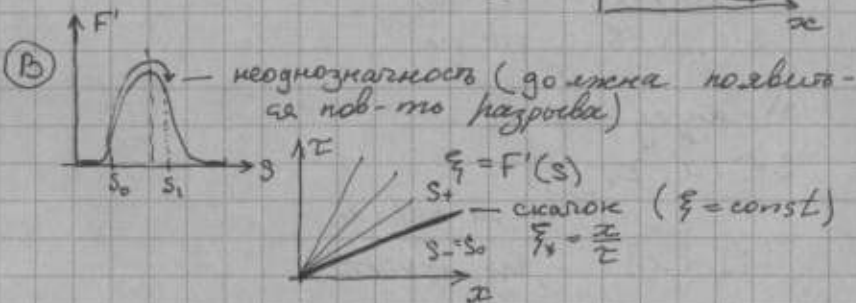
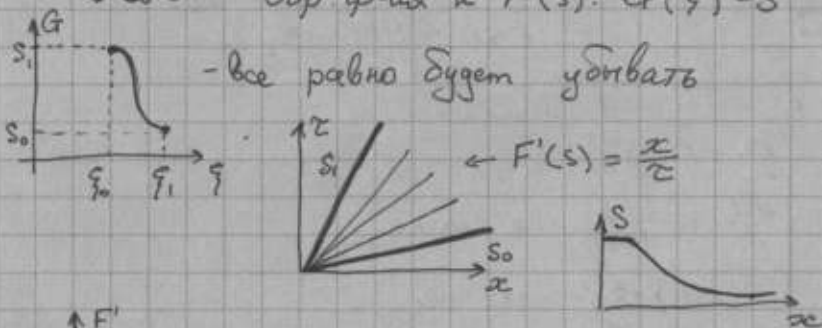
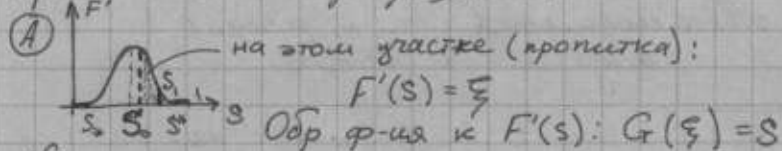
$$-S'_\xi \cdot \xi + F'(S) \cdot S'_\xi = 0$$

$$S'_\xi (F'(S) - \xi) = 0$$

$$S'_\xi = 0 \Rightarrow S = \text{const} \quad (\text{трив. сол.})$$

$\xi = F'(S)$ - решение в неявном виде.

Нужно склеить кстр. решение:



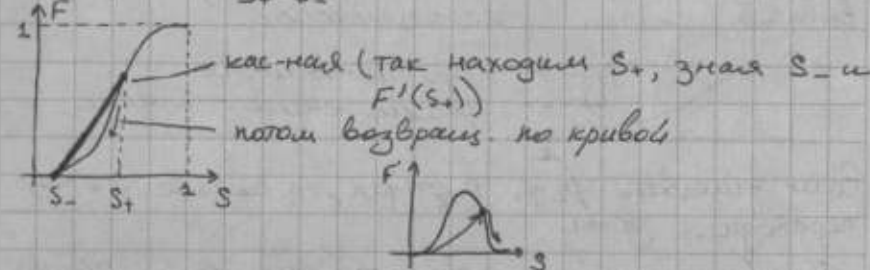
С одной стороны: $\xi_* = F'(S_+)$ (из заданого реш-я)

С др. стороны: должен вып-ся баланс масс:

$$\frac{dx}{dt} = \xi_* = \frac{F(S_+) - F(S_-)}{S_+ - S_-}$$

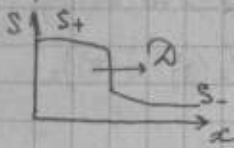
в нашей 3-ье

$$F'(S_+) = \frac{F(S_+) - F(S_-)}{S_+ - S_-}$$



Теория без учета капилл. сил - теория Бакли-Леверетта

Пренебрегаем p_c , то ин. ур-е: $ms'_t + q(t)(F(s))'_x = 0$

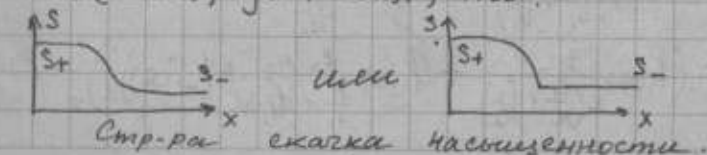


Если учитывать p_c , то: $ms'_t + q(t)(F(s))'_x + (A(s)s'_x)'_x = 0$

парад. ур-ие

Если искать реш-е в виде бегущей волны:

$S = S(x - Vt)$, где $V = \text{const}$, то:



Стр-ра стая. скачка насыщенности.

$$(1) mS'_t + (u_1)'_x = 0$$

$$(2) mS'_t - (u_2)'_x = 0$$

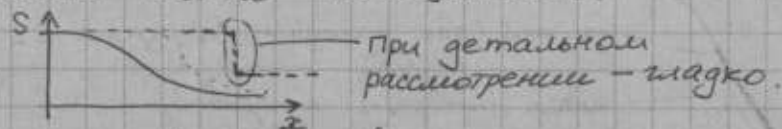
$$(3) u_1 = -\frac{k}{M_1} f_1(s) (p_1)'_x$$

$$(4) u_2 = -\frac{k}{M_2} f_2(s) (p_2)'_x$$

$$(5) p_2 - p_1 = \frac{\beta \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J(s) \quad \text{и} \quad \frac{\beta}{2}$$

$\rightarrow \beta = \text{const}$

Если $p_1 \approx p_2 = p$, то в рещ-ии могут образо-
вываться скачки насыщенности.



Если учитывать p_2, p_1 в разд-х, то скачок $\rightarrow$ непр.
переходная зона.

Из др-ий хотим получить одно ат-но $S(x, t)$

$$u_1(s) \rightarrow (4), p_2: u_1 = -\frac{k}{M_1} f_1(s) (p_1)'_x$$

$$u_2 = -\frac{k}{M_2} f_2(s) ((p_1)'_x + \beta (J(s))'_x)$$

$$u_1 + u_2 = q(t) = -k (p_1)'_x \left(\frac{f_1}{M_1} + \frac{f_2}{M_2} \right) - \frac{k\beta}{M_2} f_2(s) (J(s))'_x$$

Подставим в ЗЕМ u_1 :

$$(3) \rightarrow (1): mS'_t - \frac{k}{M_1} (f_1(s) (p_1)'_x)'_x = 0$$

В рез-те получим одно ур-е:

$$(p_1)'_x = -\frac{q(t)}{k \left(\frac{f_1}{M_1} + \frac{f_2}{M_2} \right)} - \frac{\beta (J(s))'_x f_2/M_2}{\frac{f_1}{M_1} + \frac{f_2}{M_2}}$$

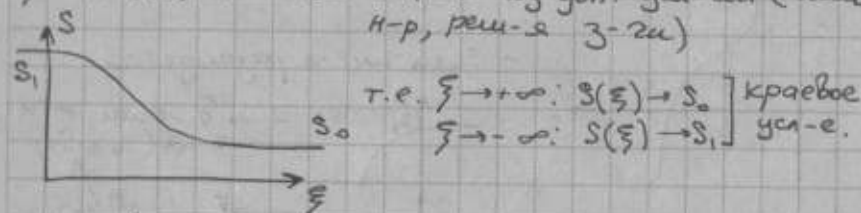
$$mS'_t + \frac{k}{M_1} \left(f_1(s) \frac{q(t)}{k \left(\frac{f_1}{M_1} + \frac{f_2}{M_2} \right)} + f_1(s) \frac{f_2/M_2}{\frac{f_1}{M_1} + \frac{f_2}{M_2}} \beta (J(s))'_x \right)'_x = 0$$

$$\underbrace{mS'_t}_{\text{изб.}} + \underbrace{q(t)}_{\text{наиб.}} \underbrace{(F(s))'}_{\text{неизб.}} + \underbrace{\frac{\beta k}{M_2}}_{\text{неизб.}} \underbrace{(F(s) f_2(s) J'(s) S'_x)'_x}_{\text{Ур-е Равнопорта-Лиса}} = 0$$

Ищем $S(x, t)$.

$$\beta = \frac{\beta \cos \theta}{\sqrt{k/m}} \text{ - если им пренебрегаем, то уже знакомое ур-е.}$$

Ищем рещ-ю $S(\xi(x, t))$ в виде бегущей волны:
 $\xi = x - Vt$, $V = \text{const}$ - нах-ся из доп. усл-ий (или, н-р, рещ-я 3-го)



Подставим $S(\xi)$ и получим ОДУ:

$$S'_t = S'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} = -VS'_\xi$$

$$S'_x = S'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} = S'_\xi$$

$$-mVS'_\xi + q(t) \underbrace{(F(s))'}_{\xi} + \frac{\beta k}{M_2} (F(s) \cdot f_2(s) J'_s(s) S'_\xi)'_\xi = 0$$

ОДУ.

t -параметр.

$$\text{Пропируем: } -mVs + q(t) F(s) + \frac{\beta k}{M_2} F(s) f_2(s) J'_s(s) S'_\xi = \text{const}$$

$$\text{Из ур-я: } \xi \rightarrow +\infty: \text{const} = -mVs_0 + q(t) F(s_0) + 0 \text{?}$$

$$\xi \rightarrow -\infty: -mVs_1 + q(t) F(s_1)$$

Если это не уходит на ∞ .

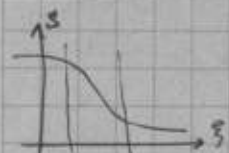
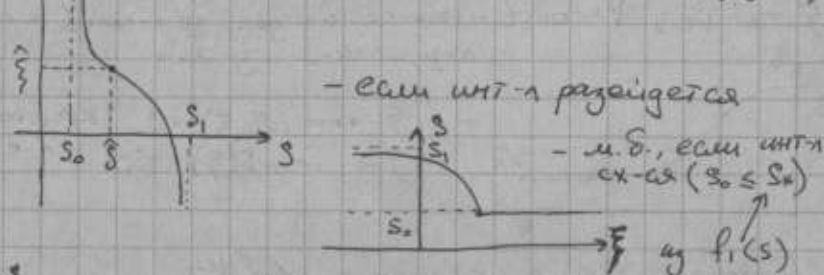
Отсюда найдем V :

$V = \frac{q(t)}{m} \cdot \frac{F(s) - F(s_0)}{s_1 - s_0}$ - скор. дв-ия переходной зоны ("стр-от скачка")

$$\frac{\beta k}{M_2} F(s) f_2(s) J_s'(s) S_s' = m V (s - s_0) - q(t) (F(s) - F(s_0))$$

Интегрируем: $\int_{s_0}^{s_1} \frac{ds \cdot \frac{\beta k}{M_2} F(s) f_2(s) J_s'(s)}{m V (s - s_0) - q(t) (F(s) - F(s_0))} = \int_{s_0}^{s_1} d\xi$

$\rightarrow \xi = 0$, если $s = s_0$
 $\rightarrow s = s_1$ (из-за V)



$\sim (10-100)$ см - в крут. з-гах переходными-рокий, т.е.

Замечание. Глобальное описание - реш-е с разрывами
 Мелкомасштаб. описание - учитываются доп. физ. мех-змы $\Rightarrow$ реш-е негр.

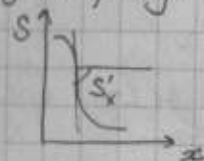
Замечание. Общ. стр-ра: $S_s + \frac{F_s'(s) \cdot S_s'}{\sim 1/h} + \frac{(G(s) S_s')_x}{\sim 1/h^2} = 0$

Оценка влияния (важности) слагаемых:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \sim \frac{\partial S}{h}, \quad \frac{\partial S}{\partial x^2} \sim \frac{\partial S}{h^2}$$

Если h -велико, то $\square < \square$

В узк. переходных зонах $\square \equiv$ считаем с $\square$ 30



Физ. взаиморастворимых жидк-тей.
 Одна фаза $\rightarrow$ одно давл. $p(x, t)$
 $\rightarrow$ одна скор. ф-ции $\bar{u}(x, t)$
 $\rightarrow$ одна плотность $\rho(x, t)$

Концентрация i -го компонента (в-ва):

$$C_i = \frac{m_i}{\sum_{k=1}^N m_k} \quad \text{— доля } i\text{-ой фазы}$$

$$\sum_{i=1}^N C_i = 1, \quad [C] = 1$$

$$N=2: C_1 = C, C_2 = 1 - C$$

ЗЕМ: ρ - плотность жидк-ти

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \rho c) + \text{div}(\rho \vec{q}) = 0, \quad \rho \vec{q} \text{ — масс. поток } 1^{\text{го}} \text{ в-ва}$$

$$\rho \vec{q} = \rho (c \vec{u} - D_{ij} \nabla^j c \vec{e}_i)$$

конвект. поток, тенз., перенос в-ва за счет диффузии (конвект.)

$$\Rightarrow ① (m \rho c)_t + \text{div}(\rho (c \vec{u} - D_{ij} \nabla^j c \vec{e}_i)) = 0 \quad \text{— } 1^{\text{я}} \text{ комп-та}$$

$$② (\rho m)_t + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{— сжим. баланс масс.}$$

$$③ \bar{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad \text{— ур. дв-ия (з. Дарси)}$$

$$④ \mu = \mu(c), \rho = \rho(c), D_{ij} = D_{ij}(\bar{u}, \dots)$$

Но обычно $\mu \approx \text{const}, \rho \approx \text{const}$ (в первом приближении)

$$D_{ij} = D_{ij}(\bar{u}, \rho, \mu, D, d_0, \dots)$$

коэф. молекул. диффузии

Дифф. в пограничном слое: $\vec{g} = -\rho D \vec{\nabla} c$

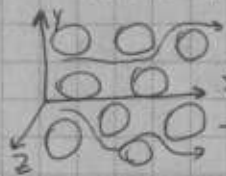
$$[\vec{g}] = \frac{M}{s} = \frac{M^2}{M^2 s}$$

$$[\vec{g}] = \frac{M}{M^2 s} - \text{масса } 1^{\circ} \text{ в.ва за } 1\text{-ую единицу времени} \\ \text{на } 1\text{-ую площадь}$$

$$[D] = M^2/c$$

Сур-ии (если $M, \rho = \text{const}$)

$c(x, t), p(x, t), \vec{u}(x, t) - ?$ c -малая величина

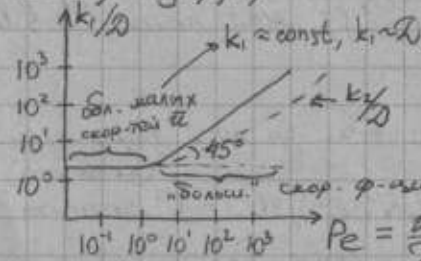


Разные z -изог - по разным траекториям; одна движется быстрее, др. - медленнее. Происходит размазывание в-ва. Конвект. дифф. - из-за слож. стр-ры порового пр-ва.

$$(D_{ij}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \quad k_1 - \text{коэф. продольной диффузии}$$

k_2 - коэф. попереч. диффузии.

Обычно $k_1 \gg k_2$ (поперек - в меньшей степени; молекул. дифф.)



$k_1 \sim u$
 k_1 растет с ростом u .
конвект. перенос
молекул. перенос

d_0 - хар. р-р пор

Замечание. В теплопроводности: $\rho c_v (\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T) = \rho \kappa \Delta T$
коэф. теплопр.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{\rho}{\rho c_v} \Delta T$$

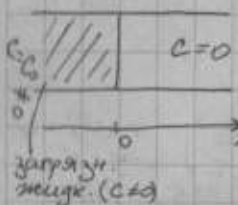
за счет конвекции χ - коэф. температуропроводн.

$$\chi / \kappa \sim \chi \Delta T / \kappa \cdot h / \Delta T = \chi h / \kappa = Pe \text{ (перенос за счет конвекции)}$$

Пр.р.

31

Одномерная (с плоскими валами) z -га о "размазывании" скачка концентрации примеси.



Пусть $\vec{u} = u_0 \vec{e}_x, u_0 = \text{const}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + (\rho u_0 c)_x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m c) + (\rho u_0 c - \rho A_0 c'_x)_x = 0 \quad (1)$$

$$u_0 = -\frac{k}{\mu} p'_x \quad (3)$$

Пусть c - мала, и $\rho \approx \text{const}, \mu = \text{const}, A_0 = A_0(u_0) = \text{const}, \text{т.е. } u_0 = \text{const}$

$$(1): m \frac{\partial c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial c}{\partial x} - k_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

$$t=0: c(x) = \begin{cases} c_0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Можем перейти в покр. ск, где $u_0 \frac{\partial c}{\partial x} = 0$:
 $(x, t) \rightarrow (\chi, \tau)$

$$\begin{cases} \tau = t \\ \chi = x - \frac{u_0}{m} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = \tau(x, t) \\ \chi = \chi(x, t) \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} (F(\tau(x, t), \chi(x, t))) = \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{u_0}{m}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \chi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{u_0}{m} \frac{\partial}{\partial \chi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}$$

Подставим: $m(c_z - \frac{k_0}{m} c_x') + \mu c_x' - k_1 c_{xx}'' = 0$

$$\begin{cases} z=0: c(x) = \begin{cases} c_0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_z' = \frac{k_1}{m} c_{xx}'' \end{cases}$$

$$c = c(z, x, \frac{k_1}{m}, c_0)$$

По Т-теор.: $c = f(c_0, \frac{z}{\sqrt{\frac{k_1}{m} t}}) = c_0 f(\frac{z}{\sqrt{\frac{k_1}{m} t}})$ т.к. от c_0 ур-е ин-но.

Ищем $c = c(\xi)$

$$c_z' = c_\xi' \frac{z}{\sqrt{k_1/m}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}} \right)$$

$$c_x' = c_\xi' \frac{1}{\sqrt{\frac{k_1}{m} t}}$$

$$c_{xx}'' = c_{\xi\xi}'' \frac{1}{\frac{k_1}{m} t}$$

Подставляем в ур-е: $-\frac{z}{2\sqrt{\frac{k_1}{m} t}} c_\xi' = \frac{k_1}{m} \frac{1}{\frac{k_1}{m} t} c_{\xi\xi}''$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \xi c_\xi' = c_{\xi\xi}'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(-\infty) = c_0 \\ c(+\infty) = 0 \end{cases}$$

$$c_\xi' = G(\xi): -\frac{1}{2} \xi G = G_\xi'$$

$$-\frac{1}{2} \xi d\xi = \frac{dG}{G}$$

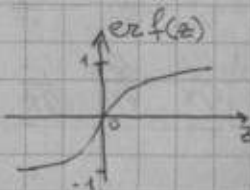
$$-\frac{1}{4} \xi^2 = \ln G + \ln(\text{const})$$

$$c_\xi' = \text{const} \cdot \exp(-\xi^2/4)$$

$$c = \alpha + \beta \int_0^\xi \exp(-\xi^2/4) d\xi$$

α, β - из ур. условия

Фун. Шуби: $\text{erf } f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi$



Отв. $c = \frac{c_0}{2} (1 - \text{erf}(\frac{\xi}{2}))$



32

В исх. переменных:

$$c = \frac{c_0}{2} (1 - \text{erf}(\frac{x - \frac{u_0}{m} t}{2\sqrt{\frac{k_1}{m} t}})) = c(x, t)$$



h - шир. перех. зонит: $h \sim \sqrt{\frac{k_1}{m} t}$ - расширяется со временем.



Трещины: $h \sim 1 \text{ м}$

Поры: $d \sim 1 \text{ мм}$

Описание в рамках МС: $h \gg \text{р-р блоков} \gg d$

p_T - давл. в с-ме трещин.

p_b - давл. в блоках.

n_T

n_b

m_T - объемная доля пустот (в расчете на весь объем образца)

Обычно: $m_T \sim 0,01$

$m_b \sim 0,1-0,2$

$m_c \gg m_T$

1. Баланс массы для блоков: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_0) + \text{div}(\rho \bar{u}_0) = q$

приток
массы из трещин
в блоки.

2. для трещин: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_1) + \text{div}(\rho \bar{u}_1) = -q$

3. З. Дарси для блоков: $\bar{u}_0 = -\frac{k_0}{\mu} \nabla p_0$

4. для трещин: $\bar{u}_1 = -\frac{k_1}{\mu} \nabla p_1$ (если с-ма трещин изотропна; если анизотропна, то вместо k_1 - тензор)

5. Соотнош. для перетока масс:

$$q = f(p, A, p_2, \mu, l, \dots)$$

p-p блоков

Если $p_1 = p_2$, то $q = 0$

$k_0 \ll k_1$
 $m_0 \gg m_1 \Rightarrow \alpha_1 \gg \alpha_0$, где $\alpha \sim \frac{k}{\mu}$ - коэф. проницаемости.
 $p_2 = p_0 p$

$$[q] = \frac{m^2}{m^2 \cdot c}$$



$$p_0 > p_1$$

$$\rho u \sim \frac{k}{\mu} \nabla p$$

$q \sim \rho$ Если $\rho_k = \text{const}$, то $q \sim \rho \frac{p_1 - p_2}{\mu} k_0$

Если газ, то $\rho \neq \text{const}$, $\rho u = -\rho \frac{k}{\mu} \nabla p$ - поток массы

Если $T = \text{const}$, $p = \rho R T$

$$\rho \sim p, \quad \rho u \sim p \nabla p = \nabla \left(\frac{p^2}{2} \right)$$

$$q \sim \frac{1}{\mu} (p_1^2 - p_2^2) - \text{для стаци. течения}$$

6. Соотнош. для $m_0, m_1, k_0, k_1, \dots$

$$m_0 = m_p(p_0), \quad k_0 = k_0(p_0)$$

$$m_1 = m_t(p_1), \quad k_1 = k_1(p_1)$$

Для жидк: $\rho = \rho(p)$. В трещ.: $\rho = \rho(p_1)$
В блоках: $\rho = \rho(p_0)$

Типичное упрощение:

$$в 2: \frac{\partial}{\partial t}(\rho m_1) = 0$$

$$в 1: \text{div}(\rho \bar{u}_0) = 0, \text{ т.к. } |\bar{u}_0| \ll |\bar{u}_1|$$

Разлика:

- 2: трещинот сужат проводником жидк-ти;
- 1: блоки явл-ся накопителями жидк-ти.