Лекция 15
Модель линейно-упругой среды. Закон Гука

15.1. Тензор малых деформаций (напоминание)
15.2. Модель упругой среды. Линейно-упругая среда. Закон Гука
15.3. Механический смысл модулей упругости
15.4. Температурные деформации и напряжения
15.5. Полная система уравнений линейной теории упругости при изотермическом деформировании

15.1. Тензор малых деформаций

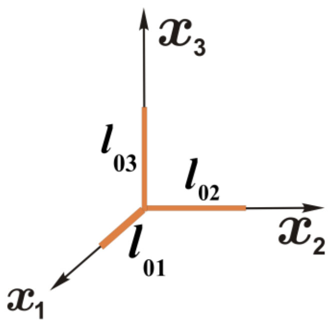
Тензор деформаций рассматривался подробно раньше. Матрица его компонент записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

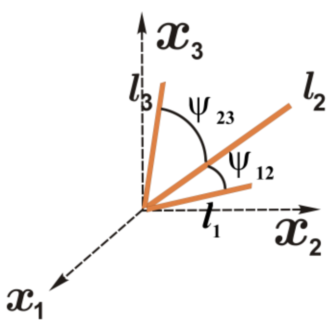
В линейной теории упругости деформации считаются малыми: $\varepsilon_{ij} << 1$.

Механический смысл компонент тензора малых деформаций

Пусть начальные длины отрезков, до деформации параллельных координатным осям $x_1,\ x_2,\ x_3$, равны l_{10}, l_{20}, l_{30}. В результате деформации эти отрезки изменят свое положение и длину, длины отрезков станут равны l_1, l_2, l_3.



а) начальное состояние



б) после деформирования

Механический смысл компонент ε_{ii} тензора малых деформаций: они равны коэффициентам относительного удлинения отрезков, до деформации параллельных координатным осям:

$$\varepsilon_{11} = \frac{l_1 - l_{01}}{l_{01}} = \frac{\Delta l_1}{l_{01}},\quad \varepsilon_{22} = \frac{l_2 - l_{02}}{l_{02}} = \frac{\Delta l_2}{l_{02}},\quad \varepsilon_{33} = \frac{l_3 - l_{03}}{l_{03}} = \frac{\Delta l_3}{l_{03}}$$

Механический смысл, например, ε_{12} выясняется при рассмотрении изменения угла между отрезками, которые до деформации были параллельны осям $x_1,\ x_2$, соответственно. Угол между этими отрезками до деформации $\psi_{12}^0 = \dfrac{\pi}{2}$, после деформации ψ_{12}. Изменение угла между рассматриваемыми отрезками $\chi_{12} = \psi_{12}^0 - \psi_{12}$, а $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\chi_{12}$.

Механический смысл компонент ε_{ij} при $i \neq j$ тензора малых деформаций: они равны половинам изменения углов между отрезками, которые до деформации были параллельны координатным осям x_i и x_j соответственно.

Механический смысл первого инварианта тензора малых деформаций $I_1(\varepsilon)$: это относительное изменение объема при деформации:

$$I_1(\varepsilon) = \frac{V - V_0}{V_0}.$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через производные компонент w_i вектора перемещений $\vec{w}$ по формулам

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)$$

Эти формулы справедливы в том случае, если малы не только деформации ε_{ij}, но и относительные повороты, то есть малы $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$.

Компоненты тензора деформаций удовлетворяют уравнениям совместности, которые в случае малых деформаций имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

15.2. Модель упругой среды. Линейно-упругая среда. Закон Гука

Упругой средой называют среду, в которой деформации определяются действующими нагрузками и температурой и полностью исчезают при медленном снятии нагрузок и возвращении температуры к исходному значению.

Математическое определение упругой среды

Среда называется упругой, если

1) компоненты тензора напряжений p_{ij} в этой среде представляют собой функции компонент тензора деформации ε_{kl} и температуры T

$$p_{ij} = p_{ij}(\varepsilon_{kl}, T);$$

2) процессы деформирования обратимы.

Рассмотрим сначала процессы деформирования при постоянной температуре.

Линейно-упругая среда – это упругая среда, в которой компоненты тензора напряжений p_{ij} являются линейными функциями ε_{kl}; при $T = \mathrm{const}$

$$p_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}; \qquad (15.1)$$

A_{ijkl} называются коэффициентами упругости или модулями упругости, A_{ijkl} для каждой частицы упругой среды являются заданными константами или функциями температуры.

Изотропная линейно-упругая среда. Закон Гука

В изотропной линейно-упругой среде соотношения (15.1) принимают вид

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad (15.2)$$

где λ, μ - модули упругости, их называют также параметрами Ламе.

Здесь $I_1(\varepsilon)$ – первый инвариант тензора деформаций; в декартовых координатах $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Соотношения (15.2) представляют собой закон Гука для изотропной среды.

Замечание. Первоначально закон Гука формулировался как утверждение, что при растяжении упругого стержня его удлинение пропорционально растягивающей силе. Более точно: если стержень длиной l_0 с площадью поперечного сечения S растягивается силами F, приложенными к его торцам, то его удлинение Δl связано с F формулой

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}, \quad E \text{ - константа}$$

Вводя компоненты тензоров напряжений и деформаций, можно переписать эту формулу в виде (если ось x_1 - вдоль оси стержня)

$$p_{11} = E\varepsilon_{11}.$$

Закон (15.1) – обобщение этой формулы на случай произвольного деформированного состояния.

Перепишем закон Гука (15.2) в другой форме, в которой деформации выражены через напряжения. Из соотношений $p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ получаем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}p_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu}I_1(\varepsilon)\delta_{ij}.$$

Отсюда $\quad I_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\mu}I_1(p) - \frac{3\lambda}{2\mu}I_1(\varepsilon), \quad$ где $\quad I_1(p) = p_{11} + p_{22} + p_{33}$.

Следовательно, $(3\lambda + 2\mu)I_1(\varepsilon) = I_1(p)$.

Поэтому $\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}p_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}I_1(p)\delta_{ij}.$

Введем обозначения $\dfrac{1}{2\mu}=\dfrac{1+\nu}{E}$, $\dfrac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}=\dfrac{\nu}{E}$,

то есть, введем новые коэффициенты E,ν, связанные с λ, μ формулами

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},\quad \lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Коэффициент E называется модулем Юнга, ν - коэффициентом Пуассона.

Закон Гука, разрешенный относительно компонент тензора деформаций:

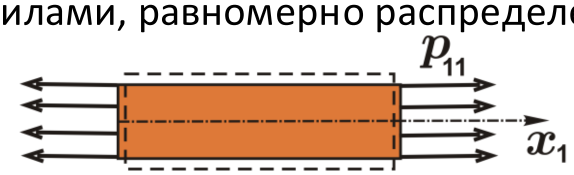
$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}p_{ij}-\frac{\nu}{E}I_1(p)\delta_{ij}. \tag{15.3}$$

15.3. Механический смысл модулей упругости E, μ, ν

Опыт на простое растяжение стержня.

Простое растяжение вдоль оси x_1 – это состояние, в котором $p_{11}\neq 0$, а остальные $p_{ij}=0$.

Оно осуществляется, если стержень, боковые стороны которого свободны от нагрузки, растягивается силами, равномерно распределенными по торцам.



Простое растяжение стержня. Пунктир – начальная форма стержня

В этом случае $I_1(p)=p_{11}$, и из закона Гука $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1+\nu}{E}p_{ij}-\dfrac{\nu}{E}I_1(p)\delta_{ij}$ получаем

$$\varepsilon_{11}=\frac{1+\nu}{E}p_{11}-\frac{\nu}{E}p_{11}=\frac{1}{E}p_{11},\quad \text{то есть}\quad p_{11}=E\varepsilon_{11}\quad \text{или}\quad \frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l}.$$

Итак, модуль Юнга E — это коэффициент пропорциональности между растягивающим напряжением и относительным удлинением при простом растяжении стержня.

Остальные компоненты тензора деформаций при простом растяжении стержня:

$$\varepsilon_{12}=\frac{1+\nu}{E}p_{12}-\frac{\nu}{E}I_1(p)\delta_{12}=0,\quad \varepsilon_{13}=0,\quad \varepsilon_{23}=0,$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1+\nu}{E}p_{22}-\frac{\nu}{E}p_{11}=-\frac{\nu}{E}p_{11}=-\nu\varepsilon_{11},\quad \varepsilon_{33}=-\frac{\nu}{E}p_{11}=-\nu\varepsilon_{11}.$$

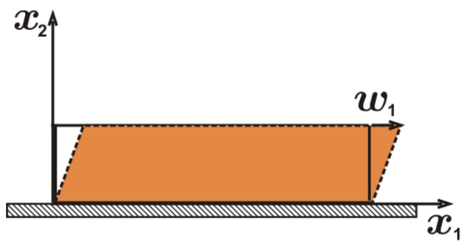
Итак,

$$\varepsilon_{22}=\frac{\Delta l_2}{l_2}=-\nu\frac{\Delta l_1}{l_1},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\Delta l_3}{l_3}=-\nu\frac{\Delta l_1}{l_1}.$$

Видим, что коэффициент Пуассона ν — это отношение относительного поперечного сжатия к относительному продольному удлинению при простом растяжении стержня.

Опыт на простой сдвиг.

Простой сдвиг вдоль x_1 параллельно плоскости x_1x_3 - это состояние, в котором отлична от нуля только компонента перемещения w_1, причем $w_1 = w_1(x_2)$, а $w_2 = w_3 = 0$.



Простой сдвиг вдоль оси x_1 параллельно плоскости x_1x_3.

Вычислим ε_{ij} при простом сдвиге:

$$\varepsilon_{11} = 0,\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial w_1}{\partial x_2},\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0,\ \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0,\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0.$$

По закону Гука, согласно формуле (15.2)

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{13} = p_{31} = p_{23} = p_{32} = 0,\quad p_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\frac{\partial w_1}{\partial x_2} = p_{21}$$

Итак, при простом сдвиге $p_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\chi_{12}$, где χ_{12} - это изменение угла между отрезками, которые до деформации были параллельны осям x_1, x_2, соответственно; χ_{12} называют углом сдвига. Таким образом, $\mu = \dfrac{p_{12}}{\chi_{12}}$ при простом сдвиге. Величина μ называется модулем сдвига.

В технике часто для модуля сдвига вместо μ используют обозначение G.

15.4. Температурные деформации и напряжения

Если не действуют никакие силы, то при изменении температуры происходит расширение или сжатие среды и длины всех материальных отрезков меняются. Обычно при отсутствии сил относительное изменение длины материального волокна пропорционально изменению температуры:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha(T - T_0),$$

α называется коэффициентом линейного теплового расширения.

Для изотропной среды относительные удлинения материальных отрезков при изменении температуры в отсутствие сил не зависят от направления отрезков и изменение углов между ними отсутствует. Поэтому

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \alpha(T - T_0),\quad \varepsilon_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

То есть

$$\varepsilon_{ij} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij}.$$

Если происходит изменение температуры, и в то же время действуют силы, то деформации представляются в виде суммы деформаций, вызванных силами и вызванных тепловым расширением. Тогда для линейно-упругой изотропной среды

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} p_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1(p)\delta_{ij} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}$$

Эти соотношения иногда называют обобщенным законом Гука или соотношениями Дюамеля-Неймана.

Третье слагаемое в этой формуле — это температурные деформации.

Если разрешить обобщенный закон Гука относительно компонент тензора напряжений, то получим

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)\delta_{ij}.$$

Третий член в этой формуле представляет собой температурные напряжения. Видно, что даже если деформации не допускаются ($\varepsilon_{ij} = 0$), но температура меняется, то в теле возникают напряжения. Температурные напряжения могут быть очень большими и могут иногда приводить к разрушению конструкций.

Пример возникновения температурных напряжений

Рассмотрим рельсы, которые сварены на стыках. Тогда их длина фиксирована, $\varepsilon_{11} = 0$.

Фиг.15.4. Температурные напряжения в рельсах при отсутствии зазоров.

Пусть сварка происходила весной при температуре $T_0 = 15^\circ$ С. Предположим, что летом, на солнце, рельсы нагрелись до $T = 55^\circ\mathrm{C}$. Будем считать, что $\varepsilon_{11} = 0$, $p_{11} \neq 0$, остальные $p_{ij} = 0$. Тогда из обобщенного закона Гука получим

$$\varepsilon_{11} = 0 = \frac{1+\nu}{E} p_{11} - \frac{\nu}{E} p_{11} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}.$$

Следовательно, за счет нагревания в рельсах возникает напряжение $p_{11} \neq 0$:

$$p_{11} = -E\alpha(T - T_0).$$

При $T - T_0 > 0$ напряжение $p_{11} < 0$, оно сжимающее. Для стали $E = 2 \cdot 10^6\,\text{кГ/см}^2$, $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{K}^{-1}$. Тогда при $T - T_0 = 40^\circ$ будем иметь $|p_{11}| = 1000\ \text{кГ/см}^2$. Здесь через кГ обозначен килограмм силы, то есть вес одного килограмма массы.

Если рельсы не сварены, между ними есть зазор, который не закрывается при нагревании, то $p_{ij} = 0$, и при увеличении температуры относительное удлинение рельсов равно $\dfrac{\Delta l}{l} = \alpha(T - T_0) = 125 \cdot 10^{-7}\mathrm{K}^{-1} \cdot 40^{\circ} = 5 \cdot 10^{-4}$.

Если $l = 10$ м, то $\Delta l = 5 \cdot 10^{-3}$ м=5мм. Такова должна быть минимальная ширина зазора, чтобы в рассмотренных условиях в рельсах не возникли сжимающие напряжения.

15.5. Система уравнений линейной теории упругости

Линейная теория упругости — это теория упругости, в которой предполагается, что

1) относительные перемещения (а значит и деформации) малы,

2) выполняется закон Гука.

Система уравнений линейной теории упругости линейна.

Если температура не меняется, то система механических уравнений получается замкнутой: напряжения, деформации и перемещения вычисляются без использования уравнений термодинамики.

Система уравнений линейной изотермической теории упругости

1. Уравнение неразрывности
2. Уравнения движения (или равновесия)
3. Закон Гука
4. Связи между компонентами тензора деформаций и вектора перемещения или, что равносильно, 4а. уравнения совместности деформаций.

1. Уравнение неразрывности в линейной теории упругости

Уравнение неразрывности следует из закона сохранения массы. В теории упругости, в основном, изучаются состояния равновесия различных конструкций под действием сил. Тогда скорости всех точек среды равны нулю, и уравнение неразрывности в форме, используемой в гидромеханике, удовлетворяется тождественно.

Однако из закона сохранения массы каждой частицы следует соотношение, связывающее величины плотности частицы до и после деформации, а также компоненты тензора деформаций. Это соотношение и есть уравнение неразрывности.

Вывод уравнения неразрывности

Пусть ρ_0, V_0 - плотность и объем малой частицы до деформации, ρ, V - плотность и объем этой же малой частицы после деформации. Закон сохранения массы: $\rho V = \rho_0 V_0$.

Отсюда $$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{V_0}{V - V_0 + V_0} = \frac{1}{\dfrac{V - V_0}{V_0} + 1}.$$

При малых деформациях относительное изменение объема равно первому инварианту тензора деформаций $I_1(\varepsilon)$: $\dfrac{V - V_0}{V_0} = I_1(\varepsilon)$, следовательно

$\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{1}{1 + I_1(\varepsilon)}$, причем $I_1(\varepsilon) << 1$. Поэтому

$\dfrac{1}{1 + I_1(\varepsilon)} = (1 + I_1(\varepsilon))^{-1} = 1 - I_1(\varepsilon) + o(\varepsilon)$, где $o(\varepsilon)$ - малый член высшего порядка по сравнению с $I_1(\varepsilon)$, в линейной теории упругости им следует пренебречь.

Уравнение неразрывности в теории упругости с малыми деформациями записывается в виде

$$\rho = \rho_0(1 - I_1(\varepsilon)) = \rho_0 - \rho_0 I_1(\varepsilon). \qquad (15.4)$$

2. Уравнения движения в линейной теории упругости

Уравнения движения для любой сплошной среды имеют вид

$$\rho a_i = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}.$$

Если деформации, перемещения, скорости и ускорения малы, то эти уравнения упрощаются следующим образом:

1) ρ заменяется на ρ_0 - заданную начальную плотность;

2) упрощается выражение для ускорения: при малых перемещениях и скоростях

$$a_i = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_k \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t}, \quad \upsilon_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \upsilon_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial w_i}{\partial t},$$

так как $\upsilon_k \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}$, $\upsilon_k \dfrac{\partial w_i}{\partial x_k}$ - малые второго порядка. Поэтому $a_i = \dfrac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}$.

Уравнения движения в линейной теории упругости записываются в виде:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}. \qquad (15.5)$$

Обычно в этих уравнениях опускают индекс « 0 » в обозначении начальной плотности; начальную плотность обозначают просто буквой ρ и считают ее известной.

3. Закон Гука

Закон Гука при $T = T_0$ имеет вид

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (15.6)$$

4. Выражения ε_{ij} через компоненты вектора перемещения w_i:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \qquad (15.7)$$

Уравнения (15.4) – (15.7) содержат 16 искомых неизвестных ρ, p_{ij}, w_i, ε_{ij}. Количество уравнений тоже 16 – система замкнута.

Заметим, что вместо уравнений (15.7) можно использовать

4а. У равнения совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} = 0. \qquad (15.8)$$