Лекция 14
Движения вязкой жидкости с малыми и большими числами Рейнольдса. Турбулентность

14.1. Математическая формулировка задачи об обтекании твердого тела потоком вязкой несжимаемой жидкости
14.2. Число Рейнольдса $\mathbf{Re}$ как характеристика отношения величин вязких и нелинейных инерционных членов в уравнениях Навье – Стокса
14.3. Приближение Стокса для течений с малыми $\mathbf{Re}$
14.4. Движение с большими $\mathbf{Re}$. Понятие о пограничном слое. Схема решения задач об обтекании тела при больших $\mathbf{Re}$
14.5. Турбулентность. Критерий Рейнольдса. Введение осредненных величин.
14.6. Уравнения Рейнольдса. Тензор турбулентных напряжений. Полуэмпирические модели турбулентности.

14.1. Математическая формулировка задачи об обтекании твердого тела потоком вязкой несжимаемой жидкости

Система уравнений (при постоянных коэффициентах вязкости)

а) уравнение неразрывности $\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0$

б) уравнения Навье – Стокса (в раскрытом виде)

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}\right)=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right)=\rho F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)=\rho F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2}\right)$$

Граничные условия

а) на поверхности неподвижного тела $\vec{\upsilon}\big|_{\text{на пов тела}}=0$, то есть,

$\upsilon_n\big|_{\text{на теле}}=0$ (непроницаемость) и $\vec{\upsilon}_\tau\big|_{\text{на теле}}=0$ (отсутствие проскальзывания);

б) в бесконечности (далеко от тела) $\vec{\upsilon}\big|_\infty=\vec{V}_\infty$

Начальные условия (для нестационарной задачи): $\vec{\upsilon}(x,y,z,t=0)=\vec{\upsilon}_0(x,y,z)$.

14.2. Число Рейнольдса как характеристика отношения величин вязких и инерционных членов в уравнениях Навье – Стокса

Задача, сформулированная в п.14.1. настолько сложна, что *ни одного аналитического решения таких задач* для уравнений Навье – Стокса построить не удалось. Поэтому были предложены различные упрощения уравнений Навье – Стокса путем пренебрежения некоторыми членами этих уравнений.

Сравним величины членов уравнений Навье – Стокса в задаче об обтекании тела потоком вязкой жидкости.

Характерная скорость и пространственный масштаб процесса.

Характерная скорость V определяется так, чтобы скорости почти во всех точках потока были по величине порядка V.

Пространственный масштаб L – это расстояние, на котором описывающие процесс параметры меняются на величину порядка их самих.

Это означает, что если изменение, например, координаты x (то есть, величина Δx) – порядка L, то соответствующее изменение какого-нибудь параметра f (то есть, величина Δf) – порядка f. Это записывается так: если $\Delta x \sim L$, то $\Delta f \sim F$. Здесь F - характерное значение f в рассматриваемом процессе. Тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} \sim \frac{f}{L} \sim \frac{F}{L}$. Учитывая, что $\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$, получаем оценку порядка производной

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{F}{L}.$$

Например, для производной компоненты скорости υ_x имеем $\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} \sim \frac{V}{L}$.

Заметим, что линейный масштаб может быть разным в разных областях течения (как на правом рисунке).

Кроме того, линейный масштаб может быть разным в разных направлениях. Например, вдоль оси x скорость может меняться медленно (линейный масштаб L_x), а вдоль оси y быстро (линейный масштаб L_y).

В задачах об обтекании тел обычно характерная скорость – это скорость набегающего потока, а линейный масштаб – это характерный линейный размер тела.

Рассмотрим порядки членов уравнения Навье – Стокса в проекции на ось x для несжимаемой жидкости ($\nu = \mu/\rho$ – кинематический коэффициент вязкости)

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial z^2}\right)$$

Члены, стоящие в левой части, представляют собой ускорение. Будем называть их инерционными членами. Последние члены в правой части характеризуют действие вязкости. Это вязкие члены. Соответствующие порядки величин:

Нелинейные инерционные члены: $\upsilon_x \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} \sim V\dfrac{V}{L} = \dfrac{V^2}{L}$

Вязкие члены: $\nu \dfrac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} \sim \dfrac{\nu V}{L^2}$

Порядок отношения нелинейных инерционных членов к вязким таков:

$$\frac{\text{Нелинейные инерционные члены}}{\text{Вязкие члены}} \sim \frac{VL}{\nu} = \mathrm{Re}\,. \qquad (14.1)$$

Безразмерная комбинация $\mathrm{Re} = \dfrac{VL}{\nu} = \dfrac{\rho VL}{\mu}$ называется числом Рейнольдса.

Таким образом, в задачах об обтекании тел порядок отношения величин нелинейных инерционных и вязких членов в уравнении Навье – Стокса определяется числом Рейнольдса.

14.3. Приближение Стокса для течений с малыми числами Рейнольдса

Формула (14.1) показывает, что при малых числах Рейнольдса, то есть при

$$\mathrm{Re} << 1,$$

нелинейные инерционные члены малы по сравнению с вязкими. Уравнения, которые получаются при отбрасывании в уравнениях Навье – Стокса нелинейных инерционных членов, называются уравнениями Стокса. В векторном виде для несжимаемой жидкости они имеют вид

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \nu \Delta \vec{\upsilon}\,.$$

Уравнения Стокса существенно проще уравнений Навье – Стокса, так как они линейные. Приближение Стокса используется в задачах

а) о движении вязкой жидкости сквозь тонкие щели,

б) о движении жидкого смазочного масла в зазоре между вращающимся валом машины и неподвижной подушкой подшипника - в теории смазки

в) о движении частиц пыли и мелких дождевых капель в атмосфере, г) об оседании мелких частиц в вязкой жидкости, д) о фильтрации жидкостей и газов через пористую среду.

Приведем пример значений параметров течения с малыми числами Рейнольдса. Пусть частица движется в воде, $\nu = 0,01$см^2/с. Чтобы выполнялось условие Re<<1, нужно, чтобы было VL<<0,01 см/с. Если скорость частицы V = 1см/с, то для ее размера должно быть выполнено условие L<<0,01см.

С использованием приближения Стокса была получена формула Стокса для силы, действующей со стороны жидкости на шарик радиуса a при его равномерном движении в вязкой жидкости $F = 6\pi \mu a V$, где V - скорость шарика. На практике эта формула хорошо подтверждается при $\mathrm{Re} \le 10^{-2}$.

14.4. Движение с большими числами Рейнольдса. Понятие о пограничном слое.

Если $\mathrm{Re} >> 1$, то, *казалось бы*, можно пренебречь вязкими членами в уравнениях Навье – Стокса. Полученные при этом уравнения совпадают с уравнениями Эйлера для идеальной жидкости.

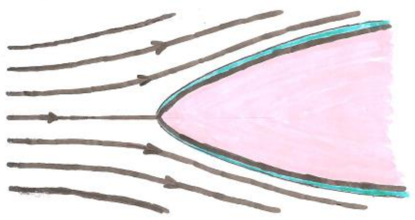
Но это неверно и вот почему.

Граничные условия прилипания на поверхности тела не зависят от величины числа Рейнольдса, должны быть выполнены всегда! А решения уравнений Эйлера подчиняются только условию непроницаемости на поверхности обтекаемого тела. Касательная составляющая скорости на теле получается отличной от нуля. Поэтому решения уравнений Эйлера ни при каких значениях Re не могут быть близкими к решению уравнений Навье – Стокса, по крайней мере, вблизи поверхности обтекаемого тела.

Оказывается (Прандтль 1904г.), всю область течения при больших Re можно приближенно разбить на две части:

1) тонкий слой вблизи поверхности тела, внутри которого вязкость существенна (этот слой называют пограничным),

2) внешний поток, где жидкость можно считать идеальной и использовать уравнения Эйлера.



Внешний поток и пограничный слой при обтекании тела.

Пограничный слой показан зеленым цветом.

Оценка толщины пограничного слоя

Получим оценку толщины δ пограничного слоя. Пусть x - координата вдоль поверхности тела, y - по нормали к телу, V - характерное значение скорости υ_x во внешнем потоке. Продольный масштаб изменения скорости υ_x есть L. Однако в поперечном направлении υ_x меняется от нуля на поверхности тела до величины порядка V на расстоянии δ. Значит, в пограничном слое линейный масштаб вдоль нормали к телу есть δ.

Найдем порядок величины вязких членов в уравнении Навье – Стокса в проекции на ось x внутри пограничного слоя:

$$\nu\left(\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial z^2}\right)\sim\nu\left(\frac{V}{L^2}+\frac{V}{\delta^2}\right)\sim\frac{\nu V}{\delta^2}, \text{ т.к. } \delta<<L$$

Порядок нелинейных инерционных членов: $\upsilon_x\dfrac{\partial\upsilon_x}{\partial x}\sim\dfrac{V^2}{L}$.

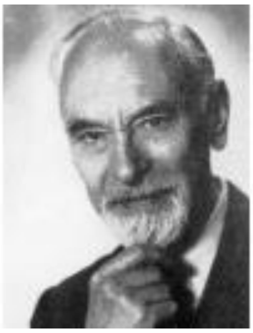
Условие, что внутри пограничного слоя инерционные и вязкие члены - одного порядка: $\dfrac{V^2}{L}\sim\dfrac{\nu V}{\delta^2}$, то есть, $\delta^2\sim L\dfrac{\nu}{V}=L^2\dfrac{\nu}{VL}$, то есть, $\delta\sim\dfrac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$, $\mathrm{Re}=\dfrac{VL}{\nu}$.

Пусть, например, $L=100$ м, $V=1$ м/с, $\nu=0,01\,\text{см}^2/\text{с}$ (корабль на воде).

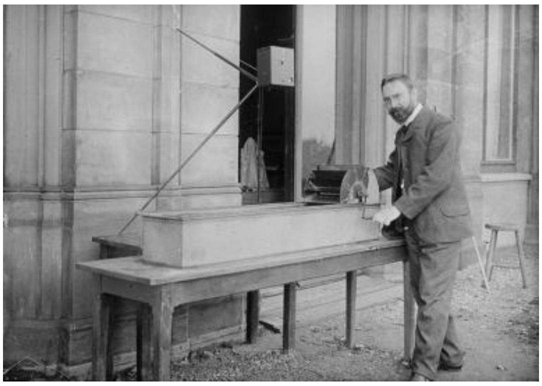
Тогда $\mathrm{Re}=10^8$, $\delta\approx1$ см.

При описанном подходе общая схема решения задачи такова. Решается в задача о внешнем потоке, при этом считается, что поток идеальной жидкости обтекает данное тело (без учета наличия пограничного слоя, так как слой тонкий).
Находится распределение давления на поверхности тела, и силы, обусловленные неравномерным распределением давления.
А силы, обусловленные трением, находятся из решения задачи в пограничном слое. При этом уравнения Навье – Стокса упрощают, так как некоторые члены в силу тонкости пограничного слоя оказываются малыми и их можно отбросить.
Полученные при этом уравнения называются уравнениями пограничного слоя.

Замечание. Понятие пограничного слоя было введено Людвигом Прандтлем в статье, представленной 12 августа 1904 года на III Международном конгрессе математиков в Гейдельберге, Германия



Людвиг Прандтль (1875-1953)



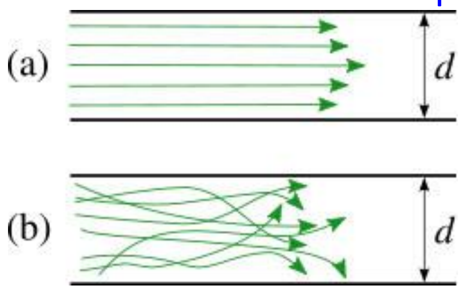
Экспериментальный канал. 1904 год

В дальнейшем было показано, что в решении *любых уравнений*, если в них *при члене со старшей производной стоит малый коэффициент,* то всегда вблизи границы имеется тонкий пограничный слой, где этот член надо учитывать.
При численном счете вблизи поверхности тела необходимо использовать расчетную сетку гораздо **более густую**, чем в области внешнего потока.

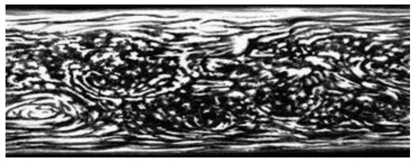
14.5. Турбулентность.

При больших Re течения становятся турбулентными!!!

Движение называют турбулентным, если характеристики движения испытывают нерегулярные пульсации в пространстве и во времени.



Ламинарный (a) и турбулентный (b) потоки



Турбулентный поток

Возникновение турбулентного режима течения зависит от величины $\mathbf{Re}$!!!

Для каждого течения можно указать критическое значение числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$, такое, что при $\mathbf{Re} < \mathbf{Re}_{\text{кр}}$ течение ламинарное, а при $\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{\text{кр}}$ возникает турбулентность (Рейнольдс 1883г). Это критерий Рейнольдса.

Для течений в трубе $\mathbf{Re}_{\text{кр}} \equiv \left(\dfrac{VD}{\nu}\right)_{\text{кр}} \approx \mathbf{2000}$ (D - диаметр трубы). Если V=1м/с, диаметр трубы 3см, $\nu = 10^{-6}\,\text{м}^2/\text{с}$ (вода), то $\mathbf{Re}$=30000. Течение турбулентное.

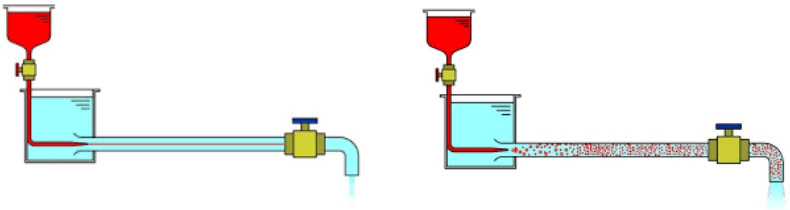


Схема опыта Рейнольдса (1883г)

Как описать турбулентное движение?

На практике часто важны только средние значения характеристик.

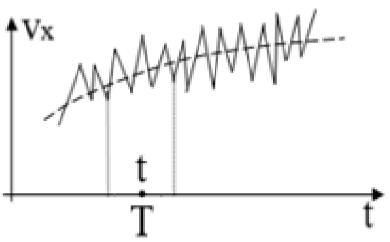


График $V_x(t)$ в точке турбулентного потока

Для вычисления средних значений характеристик возможны 2 пути:

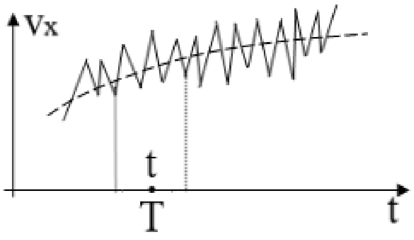
1) прямое численное моделирование (**DNS**) с учетом пульсаций параметров во времени и в пространстве, а потом осреднение полученных данных, или

2) предварительно осреднить уравнения и решать задачу для осредненных величин с помощью осредненных уравнений (**RANS**–Reynolds Averaged Navier Stokes)

Введение средних величин

Для каждого момента времени t рассмотрим промежуток времени T, такой, что 1) за время T происходит много пульсаций, 2) T достаточно мал, так что за время T средние характеристики потока приближенно не меняются.

Среднее значение $\langle \varphi(x_i,t)\rangle$ любой величины $\varphi(x_i,t)$ определяют формулой:



$$\langle \varphi(x_i,t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x_i,\tau)d\tau\,, \tag{14.2}$$

Рассмотрим еще $\varphi' = \varphi - \langle \varphi\rangle$ – отличие истинного значения φ от ее среднего значения. Тогда $\varphi = \langle \varphi\rangle + \varphi'$; φ' называется пульсационной добавкой.

Среднее значение φ' равно нулю: $\langle \varphi'\rangle = \langle \varphi - \langle \varphi\rangle\rangle = \langle \varphi\rangle - \langle\langle \varphi\rangle\rangle = \langle \varphi\rangle - \langle \varphi\rangle = 0$.

6 свойств операции осреднения

1. Если $c = \mathrm{const}$, то $\langle c\rangle = c$; 2. $\langle\langle \varphi\rangle\rangle = \langle \varphi\rangle$; 3. $\langle \varphi + f\rangle = \langle \varphi\rangle + \langle f\rangle$;

4. $\langle f\varphi\rangle = \langle f\rangle\langle \varphi\rangle + \langle f'\varphi'\rangle$, где $\varphi' = \varphi - \langle \varphi\rangle$; 5. $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle = \frac{\partial\langle \varphi\rangle}{\partial x_i}$; 6. $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\rangle = \frac{\partial\langle \varphi\rangle}{\partial t}$.

14.6. Уравнения Рейнольдса

Уравнения Рейнольдса – это уравнения, которые получаются для турбулентного движения при осреднении уравнений движения.

Уравнения движения для любой сплошной среды

$$\rho\frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \quad i = 1,2,3$$

Левую часть удобно преобразовать к так называемому дивергентному виду:

$$\rho\frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_k\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right) + \upsilon_i\overbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\upsilon_k}{\partial x_k}\right)}^{=0} = \frac{\partial \rho\upsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho\upsilon_i\upsilon_k}{\partial x_k}$$

Теперь уравнения движения записываются так : $\dfrac{\partial \rho\upsilon_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho\upsilon_i\upsilon_k}{\partial x_k} = \rho F_i + \dfrac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$.

Проведем осреднение этих уравнений по формуле (14.2) для случая, когда жидкость однородная и несжимаемая, то есть $\rho = \mathrm{const}$ (тогда пульсации плотности равны нулю). Учитывая свойства операции осреднения (1)-(6), в частности, что $\langle \rho\upsilon_i\upsilon_k\rangle = \rho\langle \upsilon_i\rangle\langle \upsilon_k\rangle + \rho\langle \upsilon_i'\upsilon_k'\rangle$, и перенеся член с производной от $\rho\langle \upsilon_i'\upsilon_k'\rangle$ в правую часть осредняемого уравнения, получим уравнения:

$$\frac{\partial\rho\langle\upsilon_i\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\rho\langle\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_k\rangle}{\partial x_k}=\rho\langle F_i\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\langle p_{ik}\rangle+\overbrace{\left(-\rho\langle\upsilon_i'\upsilon_k'\rangle\right)}^{T_{ik}}\right)$$

Введем обозначения: $-\rho\langle\upsilon_i'\upsilon_k'\rangle=T_{ik}$. Кроме того, используя осредненное уравнение неразрывности, можно показать, что $\frac{\partial\rho\langle\upsilon_i\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\rho\langle\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_k\rangle}{\partial x_k}=\rho\frac{d\langle\upsilon_i\rangle}{dt}$.

В итоге осредненные уравнения движения запишутся в виде

$$\rho\frac{d\langle\upsilon_i\rangle}{dt}=\rho\langle F_i\rangle+\frac{\partial(\langle p_{ik}\rangle+T_{ik})}{\partial x_k}$$

Это и есть уравнения Рейнольдса.

$T_{ik}=-\rho\langle\upsilon_i'\upsilon_k'\rangle$ называются компонентами тензора турбулентных напряжений,

p_{ik} – компоненты тензора молекулярных напряжений.

Проблема замыкания системы уравнений Рейнольдса

В изотропной линейно-вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости

$$\langle p_{ik}\rangle=-\langle p\rangle\delta_{ik}+2\mu\langle e_{ik}\rangle=-\langle p\rangle\delta_{ik}+\mu\left(\frac{\partial\langle\upsilon_i\rangle}{\partial x_k}+\frac{\partial\langle\upsilon_k\rangle}{\partial x_i}\right)$$

$T_{ik}=-\rho\langle\upsilon_i'\upsilon_k'\rangle$ не связаны непосредственно со средними характеристиками движения, являются добавочными неизвестными. Для получения замкнутой системы уравнений необходимы соотношения, определяющие T_{ik}.

Универсальных добавочных соотношений, годных для любых движений рассматриваемой жидкости, построить не удается, так как турбулентные напряжения зависят от величины пульсаций, которые в свою очередь зависят от действующих сил, наличия границ и других условий.

Поэтому для разных классов движений строятся разные добавочные соотношения, замыкающие систему уравнений Рейнольдса. Эти соотношения строятся на основе опытных данных и гипотез физического характера, поэтому они называются полуэмпирическими. При этом разные авторы предлагают разные соотношения (разные полуэмпирические модели турбулентности)

Добавление. Уравнения Рейнольдса в координатах x, y, z:

$$\rho \frac{d\left\langle \upsilon_x \right\rangle}{dt} = \rho \left\langle F_x \right\rangle + \frac{\partial(\left\langle p_{xx} \right\rangle + T_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\left\langle p_{xy} \right\rangle + T_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\left\langle p_{xz} \right\rangle + T_{xz})}{\partial z}$$

$$\rho \frac{d\left\langle \upsilon_y \right\rangle}{dt} = \rho \left\langle F_y \right\rangle + \frac{\partial(\left\langle p_{yx} \right\rangle + T_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\left\langle p_{yy} \right\rangle + T_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\left\langle p_{yz} \right\rangle + T_{yz})}{\partial z}$$

$$\rho \frac{d\left\langle \upsilon_z \right\rangle}{dt} = \rho \left\langle F_z \right\rangle + \frac{\partial(\left\langle p_{zx} \right\rangle + T_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\left\langle p_{zy} \right\rangle + T_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\left\langle p_{zz} \right\rangle + T_{zz})}{\partial z}$$

Здесь угловые скобки означают осреднение по Рейнольдсу; $T_{xx} = -\rho \left\langle \upsilon'_x \upsilon'_x \right\rangle$, $T_{yx} = -\rho \left\langle \upsilon'_y \upsilon'_x \right\rangle$, $T_{zx} = -\rho \left\langle \upsilon'_z \upsilon'_x \right\rangle$ $T_{yy} = -\rho \left\langle \upsilon'_y \upsilon'_y \right\rangle$, $T_{yz} = -\rho \left\langle \upsilon'_y \upsilon'_z \right\rangle$,$T_{zz} = -\rho \left\langle \upsilon'_z \upsilon'_z \right\rangle$ – компоненты тензора турбулентных напряжений, $\upsilon'_x = \upsilon_x$ -$\left\langle \upsilon_x \right\rangle$ и т.д. ; $\left\langle F_x \right\rangle$, $\left\langle F_y \right\rangle$,$\left\langle F_z \right\rangle$ – средние значения компонент плотности массовых сил; $\left\langle p_{xx} \right\rangle$, $\left\langle p_{xy} \right\rangle$, и т.д. – средние значения компонент тензора молекулярных напряжений.