т

Лекция 13
Модель линейно-вязкой (ньютоновской) жидкости

13.1. Вязкая жидкость или газ. Определение

Вязкой жидкостью или вязким газом называют среду, в которой тензор напряжений представляется в следующем виде

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \qquad (13.1)$$

где p – давление, которое не зависит явным образом от скорости,

τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, которые являются функциями компонент тензора скоростей деформаций e_{kl} и температуры T:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{kl}, T), \quad \text{причем} \quad \tau_{ij} = 0, \text{ если } e_{kl} = 0. \qquad (13.2)$$

Присутствие $\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{kl}, T)$ означает, что в движущейся вязкой жидкости, в отличие от идеальной, в общем случае имеются касательные напряжения. Эти касательные напряжения называют вязким трением.

В равновесии и в медленных процессах вязкость не играет роли. Поэтому связи между параметрами, которые явно не зависят от скорости, в моделях идеальных и вязких жидкостей одинаковы.

Например, что такое вязкий совершенный газ? Это газ, для которого

1) $p = R\rho T, \quad u = c_V T + \text{const}$, и

2) $p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, $\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{kl}, T)$.

Для конкретной модели вязкой жидкости или вязкого газа нужно задать конкретный вид функций $\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{kl}, T)$.

Определение. Соотношения $\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{kl}, T, ...)$, определяющие зависимость τ_{ij} от e_{kl} и других параметров, называются реологическими соотношениями. Они формулируются как обобщение зависимостей, полученных в экспериментах, и для разных сред – разные. Наука, в которой изучаются реологические соотношения для всевозможных сред, называется реологией.

т

13.2. Линейно-вязкая (ньютоновская) жидкость

Жидкость или газ называются линейно-вязкими или ньютоновскими, если τ_{ij} являются линейными функциями e_{kl}:

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} e_{kl} \tag{13.3}$$

Формулы (13.3) в раскрытом виде:

$$\tau_{11} = A_{1111}e_{11} + A_{1112}e_{12} + A_{1113}e_{13} + \ldots + A_{1133}e_{33},$$

$$\ldots$$

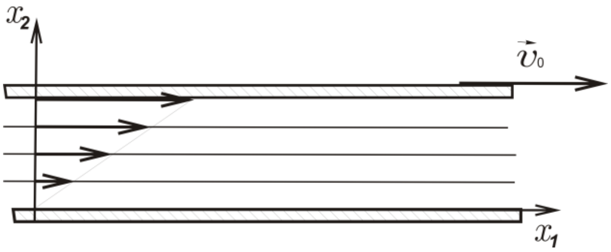
$$\tau_{33} = A_{3311}e_{11} + A_{3312}e_{12} + A_{3313}e_{13} + \ldots + A_{3333}e_{33}.$$

Коэффициенты A_{ijkl} в линейной связи между компонентами тензора скоростей деформаций и компонентами тензора вязких напряжений называются коэффициентами вязкости. A_{ijkl} - компоненты тензора четвертого ранга.

Опыт Ньютона

Формулы $\tau_{ij} = A_{ijkl} e_{kl}$ являются обобщением формулы для касательных напряжений, полученной экспериментально в так называемом опыте Ньютона, в котором изучается движение жидкости между двумя параллельными пластинами, одна из которых неподвижна, а другая движется со скоростью υ_0.

Расстояние между пластинами равно h. Движущаяся пластина увлекает за собой жидкость.



Первый факт, обнаруженный в этом опыте: скорость жидкости линейно зависит от поперечной координаты, а именно

$\upsilon_1 = \dfrac{\upsilon_0}{h} x_2,\ \upsilon_2 = 0,\ \upsilon_3 = 0$, причем $\upsilon_1 = \upsilon_0$ при $x_2 = h$, $\upsilon_1 = 0$ при $x_2 = 0$.

Второй факт: сила, с которой надо тянуть пластину, чтобы поддерживать ее равномерное движение, пропорциональна скорости пластины и обратно пропорциональна толщине слоя жидкости:

$$\tau = \mu \frac{\upsilon_0}{h}.$$

Здесь τ - величина силы в расчете на единицу площади пластины, μ - коэффициент пропорциональности.

Перепишем формулу для силы, вводя компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций. Очевидно, что $\tau = p_{12} = \tau_{12}$.

Вычислим компоненты тензора скоростей деформаций, используя, что

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right); \quad \upsilon_1 = \frac{\upsilon_0}{h} x_2,\ \upsilon_2 = 0,\ \upsilon_3 = 0$$

т

Получаем $e_{11}=0$, $\quad e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\upsilon_0}{h}$, $\quad e_{13}=e_{23}=e_{22}=e_{33}=0$.

Таким образом, $\frac{\upsilon_0}{h}=2e_{12}$, поэтому результат опыта Ньютона:

$$\tau_{12}=2\mu e_{12}.$$

На случай произвольного движения жидкости эта формула обобщается так:

$$\tau_{ij}=A_{ijkl}e_{kl}.$$

13.3. Изотропная линейно-вязкая жидкость.
Закон Навье – Стокса

Среда называется изотропной, если ее свойства одинаковы по всем направлениям.
Если жидкость изотропна, то величины A_{ijkl} должны быть одинаковыми во всех системах координат, получающихся друг из друга поворотом.
Пользуясь этим фактом, можно показать, что для изотропной линейно-вязкой жидкости все A_{ijkl} выражаются всего через два коэффициента, которые обозначаются λ и μ, а именно $A_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$, δ_{ij} - символы Кронекера.
Утверждение. Для изотропной жидкости формулы $\tau_{ij}=A_{ijkl}e_{kl}$ принимают вид

$$\tau_{ij}=\lambda\, I_1(e_{kl})\delta_{ij}+2\mu e_{ij}, \tag{13.4}$$

λ и μ называются коэффициентами вязкости. Здесь $I_1(e_{kl})$ - первый инвариант тензора скоростей деформаций: $I_1(e_{kl})=e_{11}+e_{22}+e_{33}$. Это утверждение проверяется вычислением.

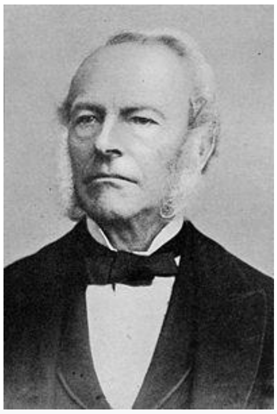
Известно, что $I_1(e_{kl})=e_{11}+e_{22}+e_{33}=\operatorname{div}\vec{\upsilon}$. Поэтому соотношения (13.4) часто записывают в виде

$$\tau_{ij}=\lambda\operatorname{div}\vec{\upsilon}\,\delta_{ij}+2\mu e_{ij}. \tag{13.5}$$

Соотношения (13.4) и (13.5) называют законом Навье – Стокса.

École Nationale des Ponts et Chaussées

Claude-Louis Navier
(1785—1836)



Сэр Джордж Габриэль Стокс
(1819-1903)

Т

Замечание 1. Вода, воздух, бензин, спирт – изотропные ньютоновские жидкости.
Существует большое количество анизотропных жидкостей, например, так называемые жидкие кристаллы.
Замечание 2. Существует большое количество сред, которые могут течь, но в которых связи между τ_{ij} и e_{kl} более сложные, нелинейные. Такие жидкости называются неньютоновскими.

13.4. Разложение тензора скоростей деформаций на шаровую часть и девиатор

Что такое девиатор тензора 2-го ранга?

Для любого тензора второго ранга H с компонентами H_{ij} его девиатор $H^{(d)}$ определяется следующими формулами для компонент:

$$H_{ij}^{(d)} \equiv H_{ij} - \frac{1}{3} I_1(H)\delta_{ij},$$

где $I_1(H) = H_{11} + H_{22} + H_{33}$ - первый инвариант тензора H.

Задание. а) написать в раскрытом виде выражение для всех компонент $H_{ij}^{(d)}$ девиатора тензора H_{ij}. б) Вычислить первый инвариант девиатора тензора H_{ij}.

Важное свойство девиатора:
первый инвариант девиатора тождественно равен нулю.

Доказательство. $I_1(H^{(d)}) = H_{11} + H_{22} + H_{33} - \frac{1}{3} I_1(H) \cdot \underbrace{(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})}_{=3} \equiv 0$.

Итак, любой тензор 2-го ранга представляется в виде суммы

$$H_{ij} = \frac{1}{3} I_1(H)\delta_{ij} + H_{ij}^{(d)}.$$

Тензор с компонентами $\frac{1}{3} I_1(H)\delta_{ij}$ является шаровым. Тензор называется шаровым, если его компоненты T_{ij} в декартовой системе координат имеют вид

$$T_{ij} = a\delta_{ij}, \quad I_1(T_{ij}) = 3a,$$

где a - скаляр. Тензорная поверхность, то есть поверхность, определяемая уравнением $T_{ij} x_i x_j = \mathrm{const}$, для шарового тензора представляет собой сферу $a\delta_{ij} x_i x_j = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \mathrm{const}$.

В частности, для тензора скоростей деформаций компоненты девиатора:

$$e_{ij}^{(d)} = e_{ij} - \frac{1}{3} I_1(e_{kl})\delta_{ij}. \quad \text{Тогда} \quad e_{ij} = \frac{1}{3} I_1(e_{kl})\delta_{ij} + e_{ij}^{(d)}$$

Т

13.5. Коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости

Итак, компоненты тензора скоростей деформаций e_{ij} можно записать в виде

$$e_{ij} = \frac{1}{3} I_1(e_{kl})\delta_{ij} + e_{ij}^{(d)}$$

Эта формула дает разложение тензора скоростей деформаций на сумму шарового тензора (первое слагаемое) и девиатора (второе слагаемое).

Физический смысл такого разложения следующий.

Первое слагаемое – определяется только изменением объема, так как $I_1(e_{kl}) = \mathrm{div}\vec{\upsilon}$ — это скорость относительного изменения объема; второе слагаемое – соответствует деформации без изменения объема (описывается девиатором, его первый инвариант всегда равен нулю). Деформации, при которых не происходит изменения объема, называются сдвигом.

Перепишем закон Навье - Стокса с использованием девиатора тензора скоростей деформаций:

$$\tau_{ij} = \lambda I_1(e_{kl})\delta_{ij} + 2\mu\left(\frac{1}{3} I_1(e_{kl})\delta_{ij} + e_{ij}^{(d)}\right) = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) I_1(e_{kl})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(d)},$$

то есть

$$\tau_{ij} = \zeta I_1(e_{kl})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(d)}, \text{ где } \zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \qquad (13.6)$$

Это третья форма закона Навье – Стокса. Эта форма показывает, что вязкие напряжения τ_{ij} разбиваются на сумму:

1) напряжений, связанных с объемными деформациями $(\zeta I_1(e_{kl})\delta_{ij} = \zeta\, \mathrm{div}\vec{\upsilon}\, \delta_{ij})$

и 2) напряжений, связанных со сдвиговыми деформациями $(2\mu e_{ij}^{(d)})$.

Коэффициент ζ (дзета), входящий в закон Навье – Стокса (13.6), называется коэффициентом объемной вязкости или вторым коэффициентом вязкости; он характеризует часть напряжений, связанную с изменением объема частицы среды.

μ – коэффициент сдвиговой вязкости (динамический коэффициент вязкости).

Вводится также кинематический коэффициент вязкости $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$.

Замечание о втором коэффициенте вязкости ζ

Часто коэффициент объемной вязкости ζ оказывается несущественным.

Например, для несжимаемой жидкости $I_1(e_{kl}) = \mathrm{div}\vec{\upsilon} = 0$, поэтому закон Навье - Стокса имеет вид $\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}$, ζ не входит в уравнения.

Однако если изучаются процессы, в которых сжимаемость жидкости существенна, например, распространение ультразвуковых колебаний, то второй коэффициент вязкости важен. Например, для воды $\dfrac{\zeta}{\mu} = 2{,}81$ при 15°С, а для сероуглерода $\dfrac{\zeta}{\mu} = 1600$ при 20°С. Для воздуха при расчетах обтекания тел обычно принимают, что $\zeta = 0$, то есть $\lambda = -\dfrac{2}{3}\mu$.

13.6. Уравнения Навье – Стокса

Уравнения Навье – Стокса – это уравнения движения линейно-вязкой изотропной жидкости. Для вывода уравнений Навье – Стокса используются

1) общие дифференциальные уравнения движения сплошной среды (в напряжениях)

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j},$$

2) закон Навье – Стокса $p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, $\tau_{ij} = \lambda \operatorname{div}\vec{\upsilon}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$,

3) выражения e_{ij} через производные компонент скорости $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right)$.

Вычисления (при условии $\lambda = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$):

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \qquad \tau_{ij} = \lambda \operatorname{div}\vec{\upsilon}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{div}\vec{\upsilon}\,\delta_{ij} + \mu \frac{\partial^2 \upsilon_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x_j \partial x_j} =$$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{\upsilon} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} + \mu\Delta\upsilon_i = (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{\upsilon} + \mu\Delta\upsilon_i \tag{13.7}$$

При этом вычислении предполагалось, что $\lambda = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$. В действительности коэффициенты вязкости зависят от температуры, с увеличением температуры они для жидкостей уменьшаются, а для газов растут. Однако если температура в изучаемом движении меняется не сильно, то можно считать коэффициенты вязкости постоянными, соответствующими рассматриваемому диапазону температур.

Подставляя соотношения (13.7) в общие уравнения движения, получаем уравнения движения для линейно-вязких жидкостей и газов с постоянными коэффициентами вязкости

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\operatorname{div}\vec{\upsilon}\right) + \mu\Delta\upsilon_i, \quad i = 1,2,3.$$

Эти уравнения называются уравнениями Навье – Стокса.

В векторном виде уравнения Навье - Стокса записываются так:

$$\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho\vec{F} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\upsilon} + \mu\Delta\vec{\upsilon}. \tag{13.8}$$

т

Пусть координаты обозначаются x, y, z. Выпишем уравнения Навье – Стокса в проекции на ось x, раскрывая выражения для индивидуальной производной по времени, дивергенции и оператора Лапласа:

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}\right)=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial z^2}\right).$$

Замечание. Уравнения Навье – Стокса значительно сложнее, чем уравнения Эйлера, так как содержат вторые производные от компонент вектора скорости

Разделим обе части уравнения Навье – Стокса (13.8) на плотность ρ. Получим

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\upsilon}+\nu\,\Delta\vec{\upsilon}\ ,$$

где $\nu=\dfrac{\mu}{\rho}$, ν (ню) называется кинематическим коэффициентом вязкости.

Уравнения Навье - Стокса для несжимаемой жидкости с $\mu=\mathrm{const}$, имеют вид

$\dfrac{d\upsilon_i}{dt}=F_i-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\,\Delta\upsilon_i$, или в векторной форме: $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\,\Delta\vec{\upsilon}$.

13.7. Граничные условия на поверхности твердого тела в вязкой жидкости

Граничные условия на поверхности твердого тела в вязкой жидкости называются условиями прилипания. Они утверждают, что скорость жидкости на поверхности твердого тела равна скорости соответствующей точки тела:

$$\vec{\upsilon}\,|_{\text{на пов.тела}}=\vec{\upsilon}\,|_{\text{тела}}. \qquad (13.9)$$

Здесь три условия – для трех компонент вектора скорости.

Условия (13.6) можно подробнее записать так

$$\upsilon_n\,|_{\text{на пов.тела}}=\upsilon_n\,|_{\text{тела}}\ , \qquad (13.10)$$

$$\vec{\upsilon}_\tau\,|_{\text{на пов.тела}}=\vec{\upsilon}_\tau\,|_{\text{тела}} \qquad (13.11)$$

где υ_n и $\vec{\upsilon}_\tau$ - проекция скорости на нормаль к поверхности тела и составляющая в касательной плоскости к поверхности.

Условие (13.10) есть условие непроницаемости, как в идеальной жидкости.

В вязкой жидкости добавляются условия (13.11), которые говорят об отсутствии проскальзывания – касательные составляющие скорости жидкости равны касательным составляющим скорости тела (no-slip conditions).

В качестве наглядного примера проявления условия прилипания приводят тот факт, что при вращении вентилятора крупные пылинки с его лопастей сдуваются, но мельчайшие остаются; это значит, что воздух в очень тонком слое на поверхности лопастей относительно них не движется (скорость воздуха равна скорости поверхности лопасти).

т

Существуют явления, в которых условие прилипания на поверхности твердого тела не выполняется. Это, например, движение разреженных газов или полимеров с длинными молекулами. Тогда на границе вместо условия прилипания задается условие, определяющее скорость проскальзывания жидкости относительно поверхности тела.

13.8. Граничные условия на свободной поверхности в вязкой жидкости

Приливный бор. Китай, Ханьчжоу (Hangzou)

Снежная лавина (Швейцария)

Потоки со свободными поверхностями

Пусть уравнение свободной поверхности $f(t,x,y,z)=0$. В общем случае эта поверхность движется, обозначим скорости точек этой поверхности $\vec{D}$.
Форма свободной поверхности, то есть, функция $f(t,x,y,z)$ заранее не известна, она должна находиться в процессе решения задачи.

На свободной поверхности ставятся следующие **4** граничные условия.

1) Условие, что жидкость не пересекает свою поверхность и не отрывается от нее (кинематическое граничное условие)

$$\upsilon_n\big|_{f=0} = D_n \tag{3.12}$$

2) Вектор напряжений $\vec{P}_n$ в жидкости на свободной поверхности равен вектору напряжений $\vec{P}_{n\ \text{внешн}}$ во внешней среде (динамическое граничное условие)

$$\vec{P}_n\Big|_{f=0} = \vec{P}_{n\ \text{внешн}}\Big|_{f=0} \tag{3.13}$$

$\vec{P}_{n\ \text{внешн}}\Big|_{f=0}$ должно быть заданным. В проекциях на координатные оси динамические граничные условия записываются в виде следующих трех условий на компоненты тензора напряжений на свободной границе

$$p_{ik}n_k\big|_{f=0} = p_{ij\ \text{внешн}}n_j\big|_{f=0} \tag{3.13a}$$

О величинах коэффициентов вязкости

Единицей динамического коэффициента вязкости в системе СГС является пуаз (П): (1 П=1 г/(см·с)), а в СИ – Па·с.
Единицей кинематического коэффициента вязкости в СГС является стокс (Ст), (1Ст=1 см^2/с), а в СИ – м^2/с.

Величины коэффициентов вязкости при комнатной температуре

для воды: $\mu = 10^{-3}\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}} = 10^{-3}\,\text{Па}\cdot\text{с}$, $\nu = 10^{-6}\,\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}$;

для воздуха: $\mu = 18\cdot 10^{-6}\,\text{Па}\cdot\text{с}$, $\nu = 15\cdot 10^{-6}\,\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

С повышением температуры вязкость жидкостей уменьшается, а вязкость газов увеличивается. Для описания зависимости динамического коэффициента вязкости жидкостей используют эмпирические формулы, например

$$\mu = \mu_0 e^{-a(T-T_0)}\text{, или }\ \mu = Ae^{B/T},\quad A, B = \text{const}$$

где μ и μ_0 - значения динамического коэффициента вязкости при температурах T и T_0 ; a - коэффициент, зависящий от рода жидкости.

Зависимость кинематического коэффициента вязкости воды от T

T °C	0	15	20	25	30	50	100
ν, Ст	0,0179	0,0114	0,0101	0,0090	0,0080	0,0055	0,0029