Лекция 9. Закон сохранения энергии

9.1. Закон сохранения энергии (I закон термодинамики) (словесная формулировка)

«Для всякой системы можно ввести энергию $E_{\text{полн}}$, которая характеризует состояние системы и не зависит от процесса, с помощью которого система пришла в это состояние. Изменение полной энергии системы в любом процессе равно притоку энергии извне в виде работы внешних сил, притока тепла и других видов».

Состояние системы определяется набором некоторых параметров (температура, давление и т.д.), которые называются параметрами состояния. Состояние системы задано, если заданы значения параметров состояния.

Если в системе происходит некоторый процесс, то значения параметров состояния в общем случае изменяются.

9.2. Математическая формулировка закона сохранения энергии в символическом виде

Для малого элемента процесса (за малое время dt):

$$dE_{\text{полн}} = dA^e + dQ^e + dQ^{**}.$$

Здесь $dE_{\text{полн}}$ – изменение полной энергии $E_{\text{полн}}$ за малое время dt, дифференциал функции $E_{\text{полн}}$;

dA^e – работа внешних сил за малое время dt (не дифференциал A^e !);

dQ^e – приток тепла извне за малое время dt (не дифференциал Q^e !);

dQ^{**} – приток энергии за малое время dt в других формах, отличных от работы сил и тепла, («добавочный» приток энергии). Например, в качестве dQ^{**} могут быть работа внешних пар или энергия, идущая на намагничивание и поляризацию среды.

9.3. Внутренняя и кинетическая энергия сплошной среды.

Полную энергию $E_{\text{полн}}$ для сплошной среды обычно разбивают на сумму кинетической энергии $E_{\text{кин}}$ и внутренней энергии U:

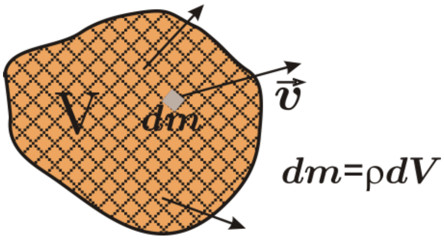
$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} + U .$$

Внутренняя энергия – это разность полной и кинетической энергий:

$$U = E_{\text{полн}} - E_{\text{кин}} .$$

Кинетическая энергия объема V сплошной среды

Кинетическая энергия материальной точки с массой m: $E_{\text{кин}} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$.



Для бесконечно малой частицы сплошной среды

$$E_{\text{кин}} = \frac{\upsilon^2}{2} dm = \frac{\upsilon^2}{2} \rho\, dV$$

Для всего объёма V :
$$E_{\text{кин}} = \int\limits_V \frac{\upsilon^2}{2} \rho\, dV .$$

Внутренняя энергия U (физический смысл)

Внутренняя энергия – это, в частности,

1) кинетическая энергия хаотического (теплового) движения молекул,
2) потенциальная энергия взаимодействия молекул.

Для газов потенциальная энергия взаимодействия молекул мала, так как в газе расстояния между молекулами относительно велики. Поэтому в газах часто можно считать, что внутренняя энергия зависит только от температуры (абсолютная температура есть средняя кинетическая энергия хаотического движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы).

Для твердых сред энергия взаимодействия молекул существенна. Поэтому внутренняя энергия твердых тел зависит не только от температуры, но и от деформации, то есть от изменения расстояний между частицами.

Формальное выражение для U

Вводят плотность внутренней энергии u: $u = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta U}{\rho \Delta V}$, где ΔU - внутренняя энергия малой частицы с массой $\rho \Delta V$. Для бесконечно малой частицы внутренняя энергия равна $u \rho dV$. Внутренняя энергия объёма V: $U = \int\limits_V u \rho dV$

Полная энергия объёма V сплошной среды: $E_{\text{полн}} = \int\limits_V (\dfrac{\upsilon^2}{2} + u) \rho dV$.

9.4. Притоки энергии извне к индивидуальному объему сплошной среды

1) Работа внешних сил: $dA^e = dA^e_{\text{масс}} + dA^e_{\text{пов}}$.

$dA^e_{\text{масс}}$ – работа внешних массовых сил,

$dA^e_{\text{пов}}$ – работа внешних поверхностных сил.

Если $\vec{F}$ – плотность внешних массовых сил, то на каждую малую частицу объема сплошной среды действует сила $\vec{F} \rho dV$. Перемещение частицы за время dt равно $\vec{\upsilon}\, dt$, а работа массовой силы при перемещении частицы есть $(\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}) \rho\, dt\, dV$.

Работа внешних массовых сил в объеме V: $dA^e_{\text{масс}} = \int\limits_V (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}) \rho\, dt\, dV$.

На каждый элемент $d\sigma$ внешней поверхности Σ объема V действует поверхностная сила $\vec{P}_n d\sigma$. Работа внешних поверхностных сил:

$$dA^e_{\text{пов}} = \int\limits_\Sigma (\vec{P}_n \cdot \vec{\upsilon})\, dt\, d\sigma.$$

Итак, работа внешних сил над средой:

$$dA^e = \int\limits_V (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}) \rho\, dt\, dV + \int\limits_\Sigma (\vec{P}_n \cdot \vec{\upsilon})\, dt\, d\sigma. \qquad (9.1)$$

2) Приток тепла $dQ^e = dQ^e_{\text{масс}} + dQ^e_{\text{пов}}$.

$dQ^e_{\text{масс}}$ – массовый приток тепла, поступающий к частицам внутри объема.

$dQ^e_{\text{пов}}$ – поверхностный приток тепла, поступающий к среде через ее поверхность.

Примеры $dQ^e_{\text{масс}}$: джоулево тепло, а также тепло, поступающее в среду или уходящее от нее за счет излучения.

Формальное выражение $dQ^e_{масс}$ для объема V сплошной среды

Вводится $dq_{масс}$ – плотность массового притока тепла за время dt так:

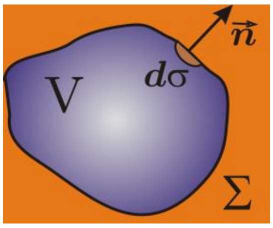
$$dq_{масс} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q_{масс}}{\rho \Delta V}$$; здесь $\Delta Q_{масс}$ – приток тепла к массе $\rho \Delta V$.

Массовый приток тепла к бесконечно малой частице есть $dq_{масс} \rho dV$,

а ко всему объёму $$dQ^e_{масс} = \int_V dq_{масс} \rho dV .$$

Выражение для $dQ^e_{пов}$.

Поверхностный приток тепла называют притоком тепла за счёт теплопроводности, потому что процесс передачи тепла от частицы к частице через поверхность их контакта называется теплопроводностью.



Σ - поверхность объема V , $\vec{n}$ - внешняя нормаль.

Введем величину q_n – количество тепла, которое поступает за единицу времени через единицу площади малой площадки с нормалью $\vec{n}$ в ту сторону, куда направлена нормаль $\vec{n}$: $q_n = \lim\limits_{\substack{\Delta\sigma \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \dfrac{\Delta Q_{пов}}{\Delta\sigma \, \Delta t}$. Здесь $\Delta Q_{пов}$ – количество тепла, которое поступает через малую площадку $\Delta\sigma$ за время Δt . Через бесконечно малую площадку $d\sigma$ с нормалью $\vec{n}$ за бесконечно малое время dt проходит количество тепла $q_n \, dt \, d\sigma$ (в ту сторону, куда направлена нормаль $\vec{n}$).

Если $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности объема V , то внутрь объёма через площадку $d\sigma$ поступает количество тепла $(-q_n \, dt \, d\sigma)$. Ко всему объёму V через его поверхность Σ поступает за время dt количество тепла $dQ^e_{пов} = -\int_\Sigma q_n \, dt \, d\sigma$.

Итак, выражение для притока тепла к объёму V извне

$$dQ^e = \int_V dq_{масс} \, \rho \, dV - \int_\Sigma q_n \, dt \, d\sigma . \qquad (9.2)$$

3) Аналогично (9.2), для притока добавочной энергии dQ^{**} можем написать:

$$dQ^{**} = dQ^{**}_{масс} + dQ^{**}_{пов} = \int_V dq^{**}_{масс} \, \rho \, dV - \int_\Sigma q^{**}_n \, dt \, d\sigma . \qquad (9.3)$$

В формуле (9.3) $dq^{**}_{масс}$ – плотность массового притока добавочной энергии,

$-q_n^{**}$ – это добавочная энергия, которая поступает к среде через поверхность за единицу времени в расчете на единицу площади, кроме работы сил и тепла.

Дальше мы будем рассматривать процессы, в которых энергия поступает к среде только в виде работы сил и тепла, то есть $dQ^{**} = 0$

9.5. Закон сохранения энергии для индивидуального объёма сплошной среды. Математическая формулировка (при $dQ^{**} = 0$).

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+u\right)\rho dV = \int\limits_V \rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})dV + \int\limits_\Sigma (\vec{P}_n\cdot\vec{\upsilon})d\sigma + \int\limits_V \frac{dq_{\text{масс}}}{dt}\rho dV - \int\limits_\Sigma q_n\, d\sigma \qquad (9.4)$$

9.6. Вектор потока тепла $\vec{q}$

Если температура в разных точках среды разная, то внутри среды происходит процесс теплопроводности, тепло передается от одной частицы к другой через границу их контакта. Поэтому при теплопроводности в любой точке среды для любой площадки (с нормалью $\vec{n}$) имеет смысл вводить величину q_n.

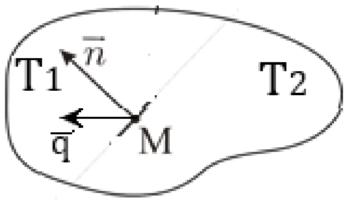
2 важных факта о q_n. 1) Из закона сохранения энергии выводится формула Коши для q_n:

$$q_n = q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3 = q_k n_k \qquad (9.5)$$

Здесь q_1, q_2, q_3 – это количества тепла, которые проходят через площадки, перпендикулярные осям координат x_1, x_2, x_3, в единицу времени в расчете на единицу площади.

2) Из формулы (9.5) и теоремы деления из теории тензоров следует, что

а) q_1, q_2, q_3 – компоненты вектора, его обозначают $\vec{q}$; б) $q_n = (\vec{q}\cdot\vec{n})$.



Определение. Вектором потока тепла называется такой вектор $\vec{q}$, что количество тепла q_n, которое проходит через площадку с нормалью $\vec{n}$ за единицу времени на единицу площади, равно скалярному произведению вектора $\vec{q}$ на нормаль $\vec{n}$:

$$q_n = (\vec{q}\cdot\vec{n}).$$

Существование такого вектора следует из закона сохранения энергии (из формулы Коши, которая выводится из закона сохранения энергии).

Вопрос. Каков физический смысл компонент вектора потока тепла?
Ответ – в пояснениях к формуле (9.5).

Вывод формулы Коши (9.5) для q_n

Для вывода преобразуем закон сохранения энергии (9.4)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+u\right)\rho dV=\int\limits_V \rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})dV+\int\limits_\Sigma(\vec{P}_n\cdot\vec{\upsilon})d\sigma+\int\limits_V\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}\rho dV-\int\limits_\Sigma q_n d\sigma$$

следующим образом: 1) в левой части вносим $\dfrac{d}{dt}$ под знак интеграла;

2) в правой части преобразуем второй интеграл в объёмный:

$$\int\limits_\Sigma(\vec{P}_n\cdot\vec{\upsilon})d\sigma=\int\limits_\Sigma(\vec{P}_k n_k\cdot\vec{\upsilon})d\sigma=\int\limits_\Sigma(\vec{P}_k\cdot\vec{\upsilon})n_k d\sigma=\int\limits_V\frac{\partial(\vec{P}_k\cdot\vec{\upsilon})}{\partial x_k}dV.$$

Тогда закон сохранения энергии запишется так

$$\int\limits_V\left\{\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+u\right)-\rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})-\frac{\partial(\vec{P}_k\cdot\vec{\upsilon})}{\partial x_k}-\rho\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}\right\}dV=-\int\limits_\Sigma q_n d\sigma \qquad (9.6)$$

Дальше применяем (9.6) к малому объёму в виде тетраэдра Коши и проводим рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при выводе формулы Коши для вектора напряжений $\vec{P}_n$.

В результате получим $q_n=q_1n_1+q_2n_2+q_3n_3=q_kn_k$, т.е. формулу (9.5)

9.7. Дифференциальное уравнение энергии

Это уравнение выводится из закона сохранения энергии для объема сплошной среды в форме (9.6)

$$\int\limits_V\left(\rho\frac{d}{dt}(\frac{\upsilon^2}{2}+u)-\rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})-\frac{\partial\left(\vec{P}_k\cdot\vec{\upsilon}\right)}{\partial x_k}-\rho\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}\right)dV=-\int\limits_\Sigma q_n d\sigma$$

Поверхностный интеграл в правой части, с использованием формулы Коши для q_n (9.5) и формулы Гаусса– Остроградского, преобразуется в объемный:

$$-\int\limits_\Sigma q_n d\sigma=-\int\limits_\Sigma q_k n_k d\sigma=-\int\limits_V\frac{\partial q_k}{\partial x_k}dV=-\int\limits_V \operatorname{div}\vec{q}dV \qquad (9.7)$$

Получаем, что для любого объема среды (при $dQ^{**}=0$) закон сохранения энергии приводится к следующему виду:

$$\int\limits_V\left(\frac{d}{dt}(\frac{\upsilon^2}{2}+u)-(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\vec{P}_k\cdot\vec{\upsilon}\right)}{\partial x_k}-\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}+\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}\right)\rho dV=0.$$

Отсюда заключаем, что подынтегральное выражение равно нулю, то есть

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+u\right)=(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p_{ik}\upsilon_i)}{\partial x_k}+\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}-\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q} \qquad (9.8)$$

Это соотношение называется дифференциальным уравнением энергии.

В (9.8) использовано, что $\dfrac{\partial(\vec{P}_k\cdot\vec{\upsilon})}{\partial x_k}=\dfrac{\partial(p_{ik}\upsilon_i)}{\partial x_k}$.

Полезно отметить, что последний член в правой части уравнения (9.8) обусловлен теплопроводностью. Это ясно из формулы (9.7). Действительно, применяя формулу (9.7) к малой частице среды, видим, что за счет теплопроводности к частице с объемом dV поступает в единицу времени количество тепла $-\operatorname{div}\vec{q}\,dV$; деля это выражение на массу ρdV этой частицы, получаем $-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}$.

Уравнение энергии (9.8) часто записывают в виде

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+u\right)=\rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})+\frac{\partial(p_{ik}\upsilon_i)}{\partial x_k}+\rho\frac{dq}{dt}, \qquad (9.9)$$

где $\dfrac{dq}{dt}$ – сумма притоков тепла (в расчете на единицу массы и за единицу времени) за счет массового притока и притока тепла за счет теплопроводности:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}-\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}=\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}+\frac{dq_{\text{теплопр}}}{dt}$$

Здесь введено обозначение $\dfrac{dq_{\text{теплопр}}}{dt}=-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}$