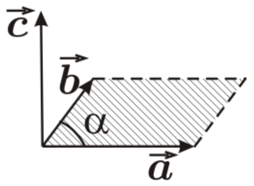
Лекция 8
Закон сохранения момента количества движения

8.1. Векторное произведение двух векторов
8.2. Закон сохранения момента количества движения (ЗСМКД) для материальной точки и для системы материальных точек
8.3. Закон сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды
8.4. Дифференциальное уравнение момента количества движения
8.5. Симметрия тензора напряжений как следствие закона сохранения момента количества движения (при некоторых условиях).

8.1. Векторное произведение двух векторов

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \text{ и } \vec{b} = b_k \vec{e}_k: \qquad \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -[\vec{b} \times \vec{a}]$$



$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\alpha|,$$

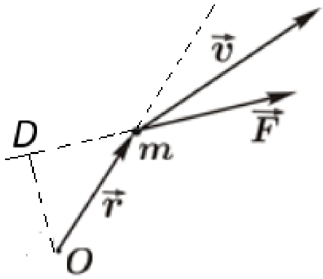
$$c_k = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]_k = a_i b_j - a_j b_i; \quad i, j, k - \text{круговая перестановка из } 1, 2, 3$$

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

8.2. Закон сохранения момента количества движения (ЗСМКД) для материальной точки и системы точек

ЗСМКД для материальной точки:

«Скорость изменения момента количества движения материальной точки равна моменту силы, действующей на точку»: $\dfrac{d\vec{M}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{\upsilon}]$



Материальная точка: масса m, скорость $\vec{\upsilon}$, $\vec{r}$ – радиус-вектор относительно точки O; $\vec{r} \times \vec{F}$ – момент силы, действующей на точку,

$m\vec{\upsilon}$ - количество движения точки;

$\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{\upsilon}] = m[\vec{r} \times \vec{\upsilon}]$ - момент количества движения.

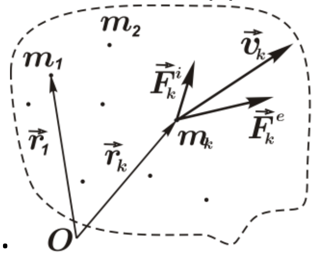
Для материальной точки ЗСМКД выводится из 2-го закона Ньютона $\dfrac{dm\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$ так: умножим это равенство векторно на $\vec{r}$: $\vec{r} \times \dfrac{dm\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$. Покажем, что слева стоит скорость изменения момента количества движения:

$$\vec{r} \times \frac{dm\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d[\vec{r} \times m\vec{\upsilon}]}{dt} - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{\upsilon}}_{=0} = \frac{d[\vec{r} \times m\vec{\upsilon}]}{dt} = \frac{d\vec{M}}{dt}, \text{ так как } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}, \quad \vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon} \equiv 0$$

ЗСМКД для <u>системы</u> материальных точек

«Скорость изменения момента количества движения системы N материальных точек равна сумме моментов <u>внешних</u> сил, действующих на точки системы»:

$\dfrac{d\vec{M}}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\,e}$, где $\vec{M} = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k [\vec{r}_k \times \vec{\upsilon}_k]$ - момент количества движения системы N точек. Этот закон выводится из 2-го и 3-го законов Ньютона.



Для точки с номером k : m_k, $\vec{\upsilon}_k$, $\vec{r}_k$ - масса, скорость, радиус-вектор ; $\vec{F}_k^{\,e}$, $\vec{F}_k^{\,i}$ - внешняя и внутренняя силы, действующие на эту точку;

$\dfrac{d\vec{M}_k}{dt} = \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i)$. Сложим эти равенства для всех точек системы.

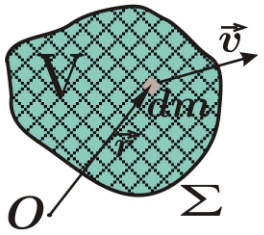
$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\,e}$ - сумма моментов внешних сил. Сумма моментов внутренних сил равна нулю в силу третьего закона Ньютона: $\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\,i} = 0$. Сумма моментов количества движения всех точек $\vec{M} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{\upsilon}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[\vec{r}_k \times \vec{\upsilon}_k\right]$ - момент количества движения системы.

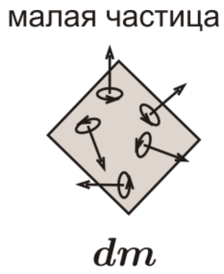
8.3. Закон сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды

«Скорость изменения момента количества движения индивидуального объёма среды равняется сумме моментов всех внешних сил и пар, действующих на этот объём»

Момент количества движения малой частицы с массой $dm = \rho dV$:

$$\left[\vec{r} \times \vec{\upsilon}\right]\rho dV + \vec{k}\rho dV .$$

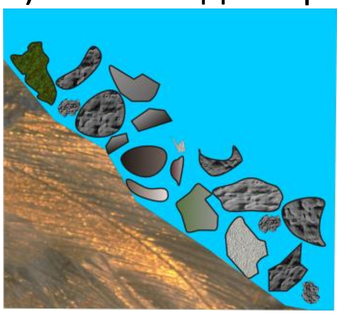




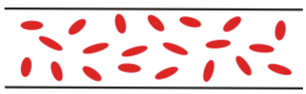
$\vec{k}$ - плотность собственного момента количества движения, то есть сумма моментов количества движения элементарных частиц внутри малой частицы среды, деленная на массу малой частицы.

Примеры потоков с вращением частиц ($\vec{k} \neq 0$):

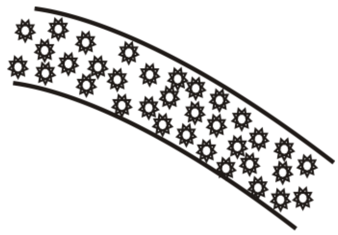
а) камнепад в горах, б) эритроциты в потоке крови; в) макаронные изделия



а)



б)



в)

Момент количества движения всего объема V : $\vec{M} = \int\limits_V \left([\vec{r} \times \vec{\upsilon}] + \vec{k} \right) \rho dV$.

Сумма моментов внешних массовых и поверхностных сил, действующих на объем V с поверхностью Σ:

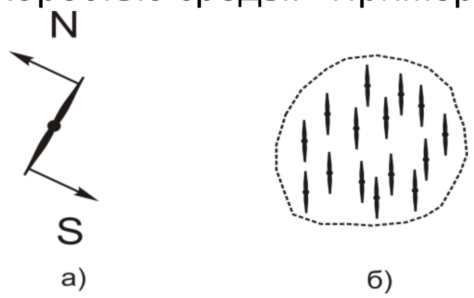
$$\int\limits_V \left[\vec{r} \times \vec{F} \right] \rho dV + \int\limits_\Sigma \left[\vec{r} \times \vec{P}_n \right] d\sigma.$$

Сумма моментов внешних массовых и поверхностных пар: $\int\limits_V \vec{h} \rho dV + \int\limits_\Sigma \vec{M}_n d\sigma$;

$\vec{h} \rho dV$ - момент массовых пар, действующих на частицу с массой ρdV

$\vec{M}_n d\sigma$ - момент поверхностных пар, действующих на площадке $d\sigma$ с нормалью $\vec{n}$, $\vec{M}_n$ - вектор моментных напряжений

Массовые и поверхностные пары могут быть обусловлены действием электромагнитного поля или переносом вращающихся микрочастиц через площадку, движущуюся со скоростью среды. Пример массовых пар



а) на стрелку компаса действует пара сил; б) среда из магнитных стрелок

Закон сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды (математическая формулировка)

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_{\text{инд}}} \left(\left[\vec{r} \times \vec{\upsilon} \right] + \vec{k} \right) \rho dV = \int\limits_V \left[\vec{r} \times \vec{F} \right] \rho dV + \int\limits_\Sigma \left[\vec{r} \times \vec{P}_n \right] d\sigma + \int\limits_V \vec{h} \rho dV + \int\limits_\Sigma \vec{M}_n d\sigma$$

Мы будем рассматривать так называемые классические среды, в которых

$$\vec{k} = 0, \;\; \vec{h} = 0, \;\; \vec{M}_n = 0$$

Это значит, что собственных моментов количества движения и моментных взаимодействий в этих средах нет. Такими средами являются вода, нефть, воздух, дерево, металлы и т.д.

Для классических сред ЗСМКД для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_{\text{инд}}} \left[\vec{r} \times \vec{\upsilon} \right] \rho dV = \int\limits_V \left[\vec{r} \times \vec{F} \right] \rho dV + \int\limits_\Sigma \left[\vec{r} \times \vec{P}_n \right] d\sigma \qquad (8.4)$$

8.4. Дифференциальное уравнение момента количества движения для классических сред

Члены, входящие в ЗСМКД, преобразуются так:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}}\left[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right]\rho dV=\int\limits_{V}\rho\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right]dV,\quad \int\limits_{\Sigma}\left[\vec{r}\times\vec{P}_n\right]d\sigma=\int\limits_{\Sigma}\left[\vec{r}\times\vec{P}_k\right]n_k d\sigma=\int\limits_{V}\frac{\partial\left[\vec{r}\times\vec{P}_k\right]}{\partial x_k}dV$$

Теперь можно записать ЗСМКД в следующем виде:

$$\int\limits_{V}\{\rho\frac{d}{dt}[\vec{r}\times\vec{\upsilon}]-\rho\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]-\frac{\partial\left[\vec{r}\times\vec{P}_k\right]}{\partial x_k}\}dV=0$$

Так как это верно для любого объема, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right]=\rho\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]+\frac{\partial\left[\vec{r}\times\vec{P}_k\right]}{\partial x_k}\tag{8.5}$$

Это дифференциальное уравнение момента количества движения для классических сред.

8.5. О симметрии тензора напряжений

Определение. Тензор с компонентами A_{ik} называется симметричным, если $A_{ik}=A_{ki}$

Уравнение момента количества движения для классических сред (8.5) сводится к условию симметрии тензора напряжений.

Покажем это.

Преобразование левой части уравнения (8.5):

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right]=\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\upsilon}\right]+\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]=\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right].$$

Второй член правой части (8.5):

$$\frac{\partial\left[\vec{r}\times\vec{P}_k\right]}{\partial x_k}=\left[\vec{r}\times\frac{\partial\vec{P}_k}{\partial x_k}\right]+\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_k}\times\vec{P}_k\right]=\left[\vec{r}\times\frac{\partial\vec{P}_k}{\partial x_k}\right]+\left[\vec{e}_k\times\vec{P}_k\right]$$

$\vec{r}$ - радиус-вектор, $\vec{r}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3=x_k\vec{e}_k$, поэтому $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_k}=\vec{e}_k$.

Уравнение момента количества движения (для классических сред)

$$\rho\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]=\rho\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]+\left[\vec{r}\times\frac{\partial\vec{P}_k}{\partial x_k}\right]+\left[\vec{e}_k\times\vec{P}_k\right]$$

или $$\left[\vec{r}\times\left(\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\rho\vec{F}-\frac{\partial\vec{P}_k}{\partial x_k}\right)\right]=\left[\vec{e}_k\times\vec{P}_k\right]$$

Левая часть последнего соотношения равна нулю в силу уравнения движения.

Следовательно, уравнение момента количества движения для классических сред приводится к виду

$$\left[\vec{e}_k\times\vec{P}_k\right]=0 \quad \text{(по } k \text{ суммирование от 1 до 3)} . \qquad (8.6)$$

Соотношение (8.6) означает симметрию тензора напряжений. Действительно:

$$\left[\vec{e}_k\times\vec{P}_k\right]=\left[\vec{e}_1\times\vec{P}_1\right]+\left[\vec{e}_2\times\vec{P}_2\right]+\left[\vec{e}_3\times\vec{P}_3\right]=\left[\vec{e}_1\times(p_{11}\vec{e}_1+p_{21}\vec{e}_2+p_{31}\vec{e}_3)\right]+$$
$$+\left[\vec{e}_2\times(p_{12}\vec{e}_1+p_{22}\vec{e}_2+p_{32}\vec{e}_3)\right]+\left[\vec{e}_3\times(p_{13}\vec{e}_1+p_{23}\vec{e}_2+p_{33}\vec{e}_3)\right]=$$
$$=p_{21}\vec{e}_3-p_{31}\vec{e}_2-p_{12}\vec{e}_3+p_{32}\vec{e}_1+p_{13}\vec{e}_2-p_{23}\vec{e}_1=$$
$$=(p_{21}-p_{12})\vec{e}_3+(p_{13}-p_{31})\vec{e}_2+(p_{32}-p_{23})\vec{e}_1=0.$$

Здесь было учтено, что $\vec{e}_1\times\vec{e}_1=0;$ $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3;$ $\vec{e}_1\times\vec{e}_3=-\vec{e}_2$ и т. д.

Приравнивая нулю коэффициенты при векторах базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, получим:

$$p_{32}-p_{23}=0; \quad -p_{31}+p_{13}=0; \quad p_{21}-p_{12}=0.$$

Следовательно, $p_{ik}=p_{ki}$, то есть, тензор напряжений симметричен.

Вывод: если собственных моментов количества движения и моментных взаимодействий нет, то уравнение момента количества движения сводится к условию симметрии тензора напряжений.

Поэтому для классических сред уравнение моментов используется в виде условия симметрии тензора напряжений; из 9-ти компонент тензора напряжений

независимых только 6: $$\begin{pmatrix} p_{11} & \underline{p_{12}} & p_{13} \\ \underline{p_{21}} & p_{22} & \underline{\underline{p_{23}}} \\ p_{31} & \underline{\underline{p_{32}}} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Если среда обладает собственным моментом количества движения и (или) имеются действующие на нее пары, то тензор напряжений может быть несимметричным.