Лекция 7.

Тензор напряжений. Дифференциальные уравнения движения

7.1. Формула Коши для вектора напряжений

Формула Коши связывает вектор напряжений $\vec{P}_n$ на площадке с нормалью $\vec{n}$ с векторами напряжений на координатных площадках. Она выводится из закона сохранения количества движения (ЗСКД).

Закон сохранения количества движения (ЗСКД) для индивидуального объема сплошной среды:

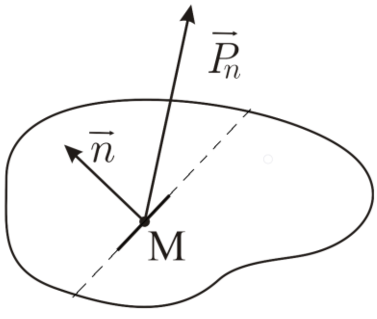
«Скорость изменения количества движения индивидуального объема сплошной среды равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем»:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}} \vec{\upsilon}\rho dV = \int\limits_{V} \vec{F}\rho dV + \int\limits_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma \quad \text{или} \quad \int\limits_{V} \rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} dV = \int\limits_{V} \vec{F}\rho dV + \int\limits_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma$$

Здесь $V_{инд}$ - индивидуальный объем среды, Σ - его поверхность, $\vec{F}$ - плотность массовых сил, $\vec{P}_n$ - плотность поверхностных сил или вектор напряжений.

Вектор напряжений $\vec{P}_n$ - это предел отношения поверхностной силы $\Delta\vec{F}_{пов}$ к площади $\Delta\sigma$ площадки, на которую она действует, при $\Delta\sigma \to 0$: $\vec{P}_n = \lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\dfrac{\Delta\vec{F}_{пов}}{\Delta\sigma}$. Индекс n в обозначении $\vec{P}_n$ указывает ориентацию площадки (площадка перпендикулярна $\vec{n}$), на которой действуют $\Delta\vec{F}_{пов}$ и $\vec{P}_n$.

Вектор напряжений вводится не только на внешней поверхности рассматриваемого объема, но также и для площадок, расположенных внутри среды. В этом случае $\vec{P}_n$ описывает действие части среды, расположенной по одну сторону площадки, на часть, расположенную по другую сторону площадки.



В данной точке среды можно и даже нужно рассматривать всевозможные площадки (с разными нормалями). Вектор напряжений на разных таких площадках – разный. Ориентация площадки определяется вектором $\vec{n}$: площадка перпендикулярна вектору $\vec{n}$, причем вектор $\vec{n}$ направлен в ту сторону, откуда действует сила на данную площадку.

Из ЗСКД выводится формула Коши, показывающая, что векторы напряжений на всех площадках в данной точке вычисляются, если известны только три вектора напряжений, действующие на координатных площадках!!!

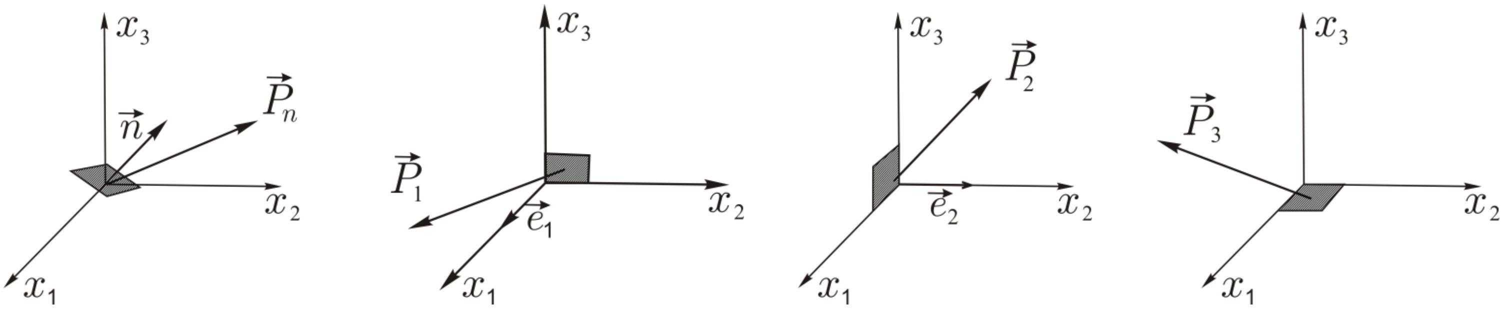
Формула Коши для вектора напряжений $\vec{P}_n$ имеет вид:

$$\vec{P}_n = \vec{P}_1 \cos(nx_1) + \vec{P}_2 \cos(nx_2) + \vec{P}_3 \cos(nx_3),$$

или

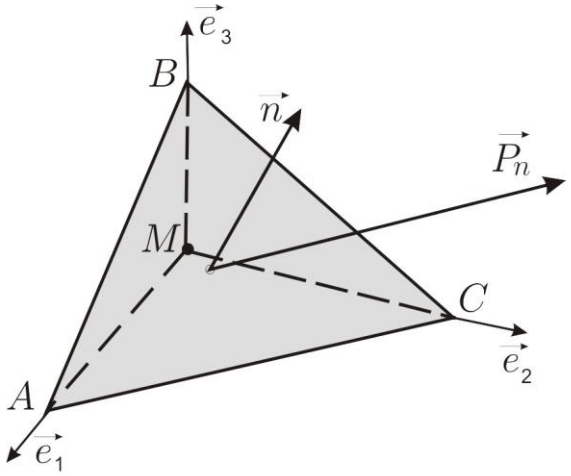
$$\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3 \quad \text{или} \quad \vec{P}_n = \vec{P}_k n_k \tag{7.1}$$

В этой формуле $\vec{P}_n$ - вектор напряжений на площадке с нормалью $\vec{n}$; $n_1 = \cos(nx_1)$, $n_2 = \cos(nx_2)$, $n_3 = \cos(nx_3)$ - компоненты вектора нормали $\vec{n}$; $\vec{P}_1$ - вектор напряжений на площадке с нормалью $\vec{e}_1$ (эта площадка перпендикулярна оси x_1); $\vec{P}_2$- вектор напряжений на площадке с нормалью $\vec{e}_2$ (эта площадка перпендикулярна оси x_2); $\vec{P}_3$ - вектор напряжений на площадке с нормалью $\vec{e}_3$ (площадка перпендикулярна оси x_3).



Вывод формулы Коши

Применим ЗСКД к малому объему среды в виде тетраэдра АВСМ . $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ \vec{e}_3$ - единичные векторы вдоль координатных осей x_1, x_2, x_3. Наклонная грань перпендикулярна выбранному вектору $\vec{n}$



Объем тетраэдра равен $V = \dfrac{1}{3}hS$,

h - высота, опущенная из т. M , S - площадь грани АВС

Грань АВС: нормаль $\vec{n}$, площадь S, вектор напряжений $\vec{P}_n$.

Грань СМВ: нормаль $-\vec{e}_1$, площадь $S\cos(nx_1)$, вектор напряжений $\vec{P}_{(-\vec{e}_1)}$.

Грань АМВ: нормаль $-\vec{e}_2$, площадь $S\cos(nx_2)$, вектор напряжений $\vec{P}_{(-\vec{e}_2)}$.

Грань АМС: нормаль $-\vec{e}_3$, площадь $S\cos(nx_3)$, вектор напряжений $\vec{P}_{(-\vec{e}_3)}$.

Пишем ЗСКД $\displaystyle\int\limits_V \rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dV = \int\limits_V \vec{F}\rho dV + \int\limits_\Sigma \vec{P}_n d\sigma$ для малого тетраэдра АВСМ:

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\frac{1}{3}hS = \vec{F}\rho\cdot\frac{1}{3}hS + \vec{P}_n S + \vec{P}_{(-\vec{e}_1)} S\cos(nx_1) + \vec{P}_{(-\vec{e}_2)} S\cos(nx_2) + \vec{P}_{(-\vec{e}_3)} S\cos(nx_3).$$

Разделим это равенство на S и устремим h к нулю, т. е. тетраэдр стягиваем в точку М. Получаем

$$0 = \vec{P}_n + \vec{P}_{(-\vec{e}_1)}\cos(nx_1) + \vec{P}_{(-\vec{e}_2)}\cos(nx_2) + \vec{P}_{(-\vec{e}_3)}\cos(nx_3) \qquad (7.2)$$

Один из выводов из соотношения (7.2) следующий.

При $\vec{n} \to \vec{e}_1$ (7.2) дает: $\vec{P}_{(\vec{e}_1)} + \vec{P}_{(-\vec{e}_1)} = 0$, т. е. $\vec{P}_{(\vec{e}_1)} = -\vec{P}_{(-\vec{e}_1)}$. Но направление $\vec{e}_1$ мы можем выбрать как угодно. Значит, для любого $\vec{n}$ верно равенство $\vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}$.

Вводим обозначения $\vec{P}_1 = \vec{P}_{\vec{e}_1}$, $\vec{P}_2 = \vec{P}_{\vec{e}_2}$, $\vec{P}_3 = \vec{P}_{\vec{e}_3}$

Тогда (7.2) принимает вид $\vec{P}_n = \vec{P}_1 \cos(nx_1) + \vec{P}_2 \cos(nx_2) + \vec{P}_3 \cos(nx_3)$.

Это соотношение и есть формула Коши (7.1).

7.2. Тензор напряжений. Определение.

Введем компоненты векторов $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$:

$$\vec{P}_1 = \{p_{11}, p_{21}, p_{31}\}, \qquad \vec{P}_2 = \{p_{12}, p_{22}, p_{32}\}, \qquad \vec{P}_3 = \{p_{13}, p_{23}, p_{33}\}.$$

Индексы у компонент ставим так: второй индекс – это номер координатной площадки, на которой действует рассматриваемый вектор напряжений. А первый индекс показывает, на какую ось проектируется этот вектор напряжений.

Напишем матрицу, в которой по столбцам стоят компоненты векторов напряжений, действующих на координатных площадках:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

9 величин p_{ik} представляют собой компоненты тензора, который называется тензором напряжений.

Тензором напряжений называется тензор второго ранга, компоненты которого в декартовых координатах записываются в виде матрицы, столбцами которой являются компоненты векторов напряжений на координатных площадках.

Если координаты обозначаются x, y, z, то используются следующие обозначения:

$$\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_x}, \quad \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P_y}, \quad \overrightarrow{P_3} = \overrightarrow{P_z}$$

$$\overrightarrow{P_x} = \{p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}\}, \quad \overrightarrow{P_y} = \{p_{xy}, p_{yy}, p_{zy}\}, \quad \overrightarrow{P_z} = \{p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}\}$$

Матрица компонент тензора напряжений

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

(компоненты тензора напряжений часто обозначаются не p_{ij}, а σ_{ij}).

Если компоненты тензора напряжений p_{ij} известны, то можно вычислить компоненты P_{ni} вектора напряжений на любой площадке с нормалью $\vec{n}$, используя формулу Коши $\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3$ в проекциях на координатные оси:

$$P_{n1} = p_{11}\, n_1 + p_{12}\, n_2 + p_{13}\, n_3$$
$$P_{n2} = p_{21}\, n_1 + p_{22}\, n_2 + p_{23}\, n_3$$
$$P_{n3} = p_{31}\, n_1 + p_{32}\, n_2 + p_{33}\, n_3$$

или, в краткой записи,

$$P_{ni} = p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3\,, \quad i = 1, 2, 3$$

или, ещё более кратко,

$$P_{ni} = p_{ik} n_k\,, \quad i = 1,2,3, \quad \text{по } k \text{ - суммирование от 1 до 3.} \qquad (7.3)$$

Другое (равносильное) определение тензора напряжений

Тензором напряжений называется тензор с компонентами p_{ik} такими, что компоненты P_{ni} вектора напряжений на площадке с нормалью $\vec{n}$ вычисляются через них по формуле Коши $P_{ni} = p_{ik} n_k$, где n_k - компоненты вектора нормали $\vec{n}$.

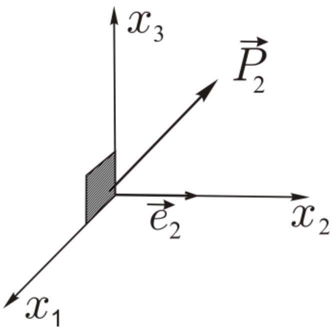
Вопрос: почему p_{ik} - компоненты тензора? Для доказательства применяем Теорему деления к равенству (7.3): P_{ni} - компоненты вектора, n_k - тоже компоненты вектора, а p_{ik} - коэффициенты в их линейной связи.

7.3. Механический смысл компонент тензора напряжений в декартовой системе координат

p_{ik} — это проекция на ось x_i вектора напряжений, действующего на площадке, перпендикулярной оси x_k.

Например, каков физический смысл компоненты p_{12} тензора напряжений? *Ответ:* это проекция на ось x_1 вектора напряжений $\vec{P}_2$. Этот вектор действует на площадке, перпендикулярной оси x_2.

Каков физический смысл компоненты p_{22}? *Ответ:* это проекция на ось x_2 вектора напряжений $\vec{P}_2$, действующего на площадке, которая перпендикулярна оси x_2.



p_{22} — это величина нормальной составляющей вектора напряжений $\vec{P}_2$.

Вообще,

p_{ii} - это величина нормальной составляющей вектора напряжений $\vec{P}_i$

p_{ik} при $k \neq i$ — это величины касательных составляющих вектора напряжений $\vec{P}_i$

7.4. Дифференциальные уравнения движения (momentum equations)

Дифференциальные уравнения движения выводятся из ЗСКД

$$\int\limits_V \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\rho dV = \int\limits_V \vec{F}\rho dV + \int\limits_\Sigma \overrightarrow{P_n} d\sigma .$$

Для вывода преобразуем поверхностный интеграл $\int\limits_\Sigma \overrightarrow{P_n} d\sigma$, используя формулы Коши и Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_{\Sigma}\overrightarrow{P_n}d\sigma=\int\limits_{\Sigma}(\overrightarrow{P_1}n_1+\overrightarrow{P_2}n_2+\overrightarrow{P_3}n_3)d\sigma=\int\limits_{\Sigma}(\overrightarrow{P_1}\cos(\hat{nx_1})+\overrightarrow{P_2}\cos(\hat{nx_2})+\overrightarrow{P_3}\cos(\hat{nx_3}))d\sigma=$$

$$=\int\limits_{V}\left(\frac{\partial\overrightarrow{P_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overrightarrow{P_2}}{\partial x_2}+\frac{\partial\overrightarrow{P_3}}{\partial x_3}\right)dV$$

Тогда ЗСКД записывается в виде:

$$\int\limits_{V}\left(\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\rho\vec{F}-\frac{\partial\overrightarrow{P_1}}{\partial x_1}-\frac{\partial\overrightarrow{P_2}}{\partial x_2}-\frac{\partial\overrightarrow{P_3}}{\partial x_3}\right)dV=0,$$

и это верно для <u>любого</u> объёма V и <u>любой</u> его части. Отсюда следует, что подынтегральное выражение равно нулю (f-Теорема):

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\rho\vec{F}+\frac{\partial\overrightarrow{P_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overrightarrow{P_2}}{\partial x_2}+\frac{\partial\overrightarrow{P_3}}{\partial x_3}\qquad(7.3)$$

Это равенство называется уравнением движения в векторной форме. Оно является обобщением второго закона Ньютона.

В краткой записи уравнение движения: $\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\rho\vec{F}+\frac{\partial\overrightarrow{P_k}}{\partial x_k}$

Уравнение движения в проекциях на координатные оси x_1, x_2, x_3 декартовой системы координат:

$$\rho\frac{d\upsilon_1}{dt}=\rho F_1+\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{13}}{\partial x_3}$$

$$\rho\frac{d\upsilon_2}{dt}=\rho F_2+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{23}}{\partial x_3}$$

$$\rho\frac{d\upsilon_3}{dt}=\rho F_3+\frac{\partial p_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}$$

В краткой форме: $\rho\frac{d\upsilon_i}{dt}=\rho F_i+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k},\ i=1,2,3$.

Если координаты обозначаются x, y, z, то дифференциальные уравнения движения (в раскрытом виде):

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}\right)=\rho F_x+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_y}{\partial z}\right)=\rho F_y+\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_z}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)=\rho F_z+\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}$$

Задачи к лекции 7

Задача 7.1.(Z4.5)

Матрица компонент тензора напряжений такова: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.1.1. Записать разложение вектора напряжений на площадке, перпендикулярной оси x_1, по векторам базиса. (ф-ла: $\vec{P}_1 = p_{11}\vec{e}_1 + \ldots\vec{e}_2 + \ldots\vec{e}_3$)

7.1.2. Чему равна нормальная к площадке составляющая этого вектора?

7.1.3. Чему равна касательная к площадке составляющая этого вектора?

7.1.4. Найти компоненты вектора напряжений $\vec{P}_n$ на площадке

с нормалью $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3$

(Формула Коши: $\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3$, $P_{ni} = p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3$, $i = 1,2,3$)

7.1.5. Вычислить проекцию вектора $\vec{P}_n$ на направление $\vec{n}$.

7.1.6. Найти угол между вектором $\vec{P}_n$ и нормалью к площадке

7.1.7. Чему равен первый инвариант тензора напряжений?