Лекция 6
Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

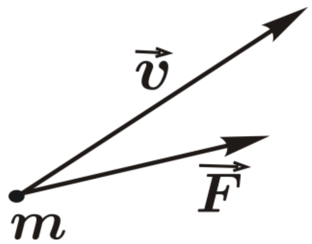
6.1. Закон сохранения количества движения (ЗСКД) для материальной точки и для системы материальных точек
6.2. ЗСКД для индивидуального объема сплошной среды. Словесная формулировка
6.3. Количество движения объема сплошной среды
6.4. Силы, действующие на среду: массовые и поверхностные. Плотность массовых сил. Плотность поверхностных сил. Вектор напряжений.
6.5. ЗСКД для индивидуального объема сплошной среды. Математическая формулировка

6.1. Закон сохранения количества движения (ЗСКД) для материальной точки и системы материальных точек

ЗСКД для <u>материальной точки</u>:

Скорость изменения количества движения материальной точки равна действующей на нее силе: $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}$

$\vec{Q} = m\vec{v}$ - количество движения (импульс) материальной точки с массой m



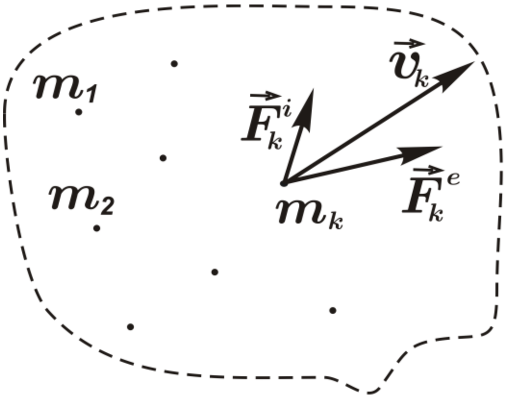
Фиг. 6.1. Материальная точка

Для материальной точки ЗСКД выводится из второго закона Ньютона:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\ , \quad m = \mathrm{const}\,, \quad \text{то есть} \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}.$$

ЗСКД для <u>системы</u> материальных точек: «Скорость изменения количества движения системы материальных точек равна сумме <u>внешних</u> сил, действующих на систему»:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k^e$$



Фиг. 6.2. Система материальных точек

Количество движения (импульс) системы материальных точек:

$$\vec{Q} = \sum_k m_k \vec{\upsilon}_k \,.$$

$\vec{F}_k^e$ - внешняя сила, то есть сила, действующая на k-тую точку со стороны объектов, не принадлежащих системе

$\vec{F}_k^i$ - внутренняя сила, то есть сила, действующая на k-тую точку со стороны других точек этой системы

Для системы материальных точек ЗСКД выводится из второго и третьего законов Ньютона:

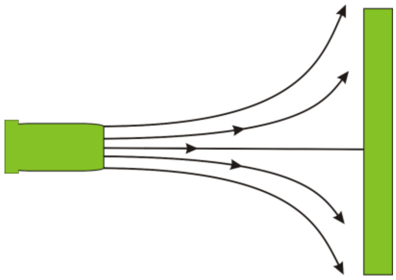
$$m_k \frac{d\upsilon_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \,, \qquad \sum_k \vec{F}_k^i = 0, \quad m_k = \text{const},$$

$$\frac{d}{dt}\sum_k m_k \upsilon_k = \sum_k \vec{F}_k^e + \sum_k \vec{F}_k^i = \sum_k \vec{F}_k^e$$, то есть $$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k^e$$

6.2. Закон сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды (словесная формулировка)

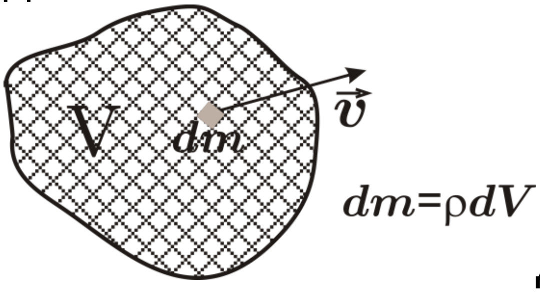
«Скорость изменения количества движения индивидуального объема сплошной среды равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем»

6.3. Количество движения объема сплошной среды



Фиг.6.3. Струя воды натекает на стенку. Разные частицы имеют разные скорости

Чтобы ввести количество движения $\vec{Q}$ объема V сплошной среды, разбиваем V на малые частицы; $\vec{Q}$ - сумма количеств движения малых частиц, составляющих объем V.



Для бесконечно малой частицы масса $dm = \rho dV$; количество движения $\vec{\upsilon}\, dm = \vec{\upsilon}\rho dV$.

Количество движения объема V сплошной среды $\vec{Q} = \int\limits_V \vec{\upsilon}\rho dV$.

6.4. Силы, действующие на сплошную среду: 1) массовые и 2) поверхностные

Массовые силы – это силы, которые действуют на каждую частицу внутри среды, и для малой частицы массовая сила пропорциональна ее массе.

Примеры массовых сил: 1) силы тяжести, 2) электромагнитные силы, 3) силы инерции.

(Для относительного движения $m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{f} - m\vec{a}_{\text{перен}} - m\vec{a}_{\text{кор}}$.)

Определение. Плотность массовых сил $\vec{F}$ — это массовая сила, приходящаяся на единицу массы, точнее

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_{\text{масс}}}{\rho \Delta V},$$

где $\Delta \vec{F}_{\text{масс}}$ - массовая сила, действующая на объем с массой $\rho \Delta V$.

Примеры. 1) Плотность сил тяжести: $\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\vec{g} \rho \Delta V}{\rho \Delta V} = \vec{g}$, где $\vec{g}$ - ускорение силы тяжести.

2) Плотность сил инерции: $\vec{F}_{\text{ин}} = -\vec{a}_{\text{перен}} - \vec{a}_{\text{кор}}$.

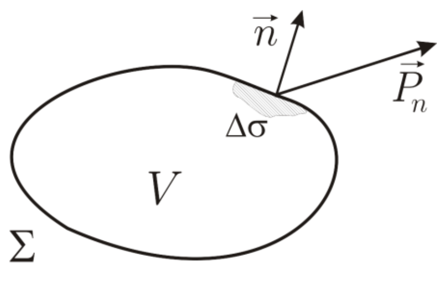
На бесконечно малую частицу с массой ρdV действует массовая сила $\vec{F} \rho dV$.

Сумма массовых сил, действующих на весь объем V, равна

$$\int_V \vec{F} \rho dV.$$

Поверхностные силы — это силы, приложенные в точках поверхности среды; для малого элемента поверхности они пропорциональны площади этого элемента.

Примеры поверхностных сил: давление, трение



Σ- поверхность объема V, $\Delta\sigma$ малый элемент поверхности Σ, $\vec{n}$- нормаль к $\Delta\sigma$, направленная во внешнюю сторону, то есть в ту сторону, откуда действует внешняя сила, $\Delta \vec{F}_{\text{пов}}$ - поверхностная сила, приложенная к площадке $\Delta\sigma$.

Определение. Плотность поверхностной силы или вектор напряжений $\vec{P}_n$ это поверхностная сила, разделенная на площадь площадки, на которую она действует, точнее

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta\vec{F}_{\text{пов}}}{\Delta\sigma}$$

Важно! Индекс n в обозначении $\vec{P}_n$ указывает лишь ориентацию площадки (определяемую вектором нормали $\vec{n}$ к ней), на которой действуют векторы $\Delta\vec{F}_{\text{пов}}$ и $\vec{P}_n$, а не направление этих векторов. В общем случае $\vec{P}_n$ не направлен по нормали к площадке.

Поверхностная сила, действующая на бесконечно малую площадку с нормалью $\vec{n}$ и площадью $d\sigma$, равна $\vec{P}_n d\sigma$.
Сумма поверхностных сил, действующих на поверхность Σ, равна

$$\int_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma.$$

6.5. Закон сохранения количества движения (ЗСКД) для индивидуального объема сплошной среды. Математическая формулировка

«Скорость изменения количества движения индивидуального объема сплошной среды равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем»:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{\text{инд}}} \vec{\upsilon}\rho dV = \int_{V} \vec{F}\rho dV + \int_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma \qquad (6.1)$$

Здесь $V_{\text{инд}}$ индивидуальный объем среды, Σ - его поверхность, $\vec{F}$ - плотность массовых сил, $\vec{P}_n$ - вектор напряжений.

Покажем, что

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{\text{инд}}} \rho\vec{\upsilon} dV = \int_{V} \rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} dV. \qquad (6.2)$$

Используем формулу дифференцирования интеграла по подвижному объему (5.1), формулу Гаусса-Остроградского и уравнение неразрывности:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}\rho\vec{\upsilon}dV=\int\limits_{V}\frac{\partial\rho\vec{\upsilon}}{\partial t}dV+\int\limits_{\Sigma}\rho\vec{\upsilon}\,\upsilon_n\,d\sigma=\int\limits_{V}\left(\frac{\partial\rho\vec{\upsilon}}{\partial t}+\frac{\partial\rho\vec{\upsilon}\upsilon_k}{\partial x_k}\right)dV=$$

$$=\int\limits_{V}\left[\vec{\upsilon}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho\upsilon_k}{\partial x_k}\right)+\rho\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k}\right)\right]dV=\int\limits_{V}\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dV$$

Другой способ вывода формулы (6.2).

Изменение количества движения объема $V_{\text{инд}}$ равно сумме изменений количеств движения $\vec{\upsilon}\rho dV$ малых частиц, составляющих объем; так как масса ρdV индивидуальной частицы постоянна, то $\frac{d}{dt}(\vec{\upsilon}\rho dV)=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\rho dV$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}}\vec{\upsilon}\rho dV=\int\limits_{V}\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dV,$$

где $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial z}$ - индивидуальная производная скорости по времени.

Вообще для любой функции $B(t,x_i)$ верна формула

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}}B\rho dV=\int\limits_{V}\rho\frac{dB}{dt}dV \qquad (6.3)$$

Пользуясь формулой (6.2), перепишем закон сохранения количества движения (6.1) в виде

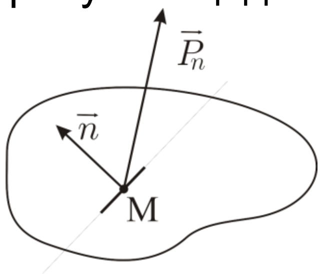
$$\int\limits_{V}\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dV=\int\limits_{V}\vec{F}\rho dV+\int\limits_{\Sigma}\vec{P}_n d\sigma \qquad (6.4)$$

Далее будем из ЗСКД в форме (6.4) получать два следствия:

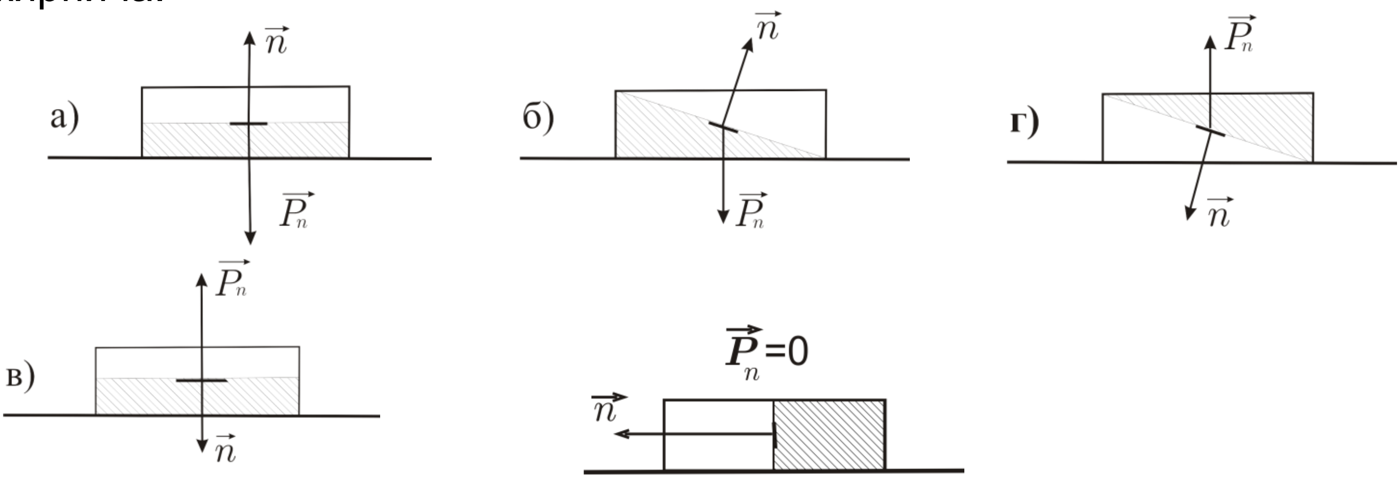
1) докажем существование тензора напряжений,
2) выведем дифференциальные уравнения движения.

6.7. О векторах напряжений во внутренних точках среды

Вектор напряжений можно и нужно вводить для площадок, расположенных внутри среды. В этом случае $\vec{P}_n$ описывает действие части среды, расположенной по одну сторону площадки, на часть, расположенную по другую сторону площадки.



Вектор напряжений в <u>данной точке</u> на <u>разных</u> площадках – разный.
Ориентация площадки определяется вектором $\vec{n}$: площадка перпендикулярна вектору $\vec{n}$, причем вектор $\vec{n}$ направлен в ту сторону, откуда действует сила на данную площадку.
Пример: рассмотрим тяжелый твердый кирпич, лежащий на столе и векторы напряжений на различных площадках, проходящих через центр кирпича.



Совокупность векторов напряжений на всех площадках в данной точке определяет напряженное состояние в этой точке.

Из ЗСКД выводится формула Коши, показывающая,
что векторы напряжений на всех площадках в данной точке вычисляются, если известны только три вектора напряжений, действующие на трех координатных площадках.

Задачи к лекции 6.

Задача 1. В каких единицах измеряется величина вектора напряжений в системе СИ? Получить ответ, исходя из определения вектора напряжений.

Задача 2. Вертикальная колонна стоит на гладкой горизонтальной поверхности фундамента. Масса колонны $m = 10000\,\text{кг}$, площадь основания $S = 0.49\,\text{м}^2$. Найти величину и направление вектора напряжений 1) на поверхности фундамента под колонной; 2) на нижнем основании колонны.
Распределение напряжений на фундаменте под колонной предполагается равномерным. Атмосферным давлением пренебречь.