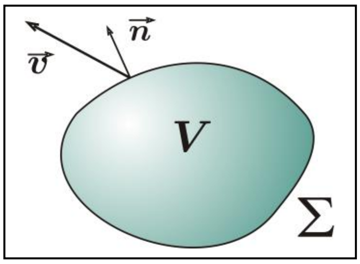
Лекция 5.
Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности

5.1. Дифференцирование по времени интеграла по подвижному объему



Пусть $V(t)$ – подвижный объем, Σ – его поверхность, $\vec{n}$ – единичная нормаль к Σ, направленная вовне, $A(x,t)$ – функция пространственных координат x_1, x_2, x_3 и времени t.

Как вычислить $\dfrac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} A(x,t)dV$?

Формула дифференцирования по t интеграла по подвижному объему такова:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} A(x,t)dV = \int\limits_{V}\frac{\partial A}{\partial t}dV + \int\limits_{\Sigma} A\,\upsilon_n\,d\sigma \tag{5.1}$$

Здесь $\vec{\upsilon}$ - скорость точек поверхности Σ, υ_n - проекция $\vec{\upsilon}$ на внешнюю нормаль $\vec{n}$ к поверхности Σ.

Вывод формулы (5.1)

Что такое производная по t от $\int\limits_{V(t)} A(x,t)dV$?

Стандартное определение производной:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} A(x,t)dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V(t+\Delta t)} A(x,t+\Delta t)dV - \int\limits_{V(t)} A(x,t)dV}{\Delta t} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V(t+\Delta t)} A(x,t+\Delta t)dV - \int\limits_{V(t+\Delta t)} A(x,t)dV}{\Delta t}}_{№1} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V(t+\Delta t)} A(x,t)dV - \int\limits_{V(t)} A(x,t)dV}{\Delta t}}_{№2}$$

(мы вычли и прибавили в числителе член $\int\limits_{V(t+\Delta t)} A(x,t)dV$).

Рассмотрим отдельно слагаемые №1 и №2 в последней формуле.

Слагаемое №1 – это $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\int\limits_{V(t+\Delta t)}\dfrac{A(x,t+\Delta t)-A(x,t)}{\Delta t}dV=\int\limits_{V(t)}\dfrac{\partial A}{\partial t}dV$.

Слагаемое №2 можно переписать в виде $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}A(x,t)dV$, где ΔV – разность областей $V(t+\Delta t)$ и $V(t)$. Способ вычисления этого слагаемого показан на рис. 5.1.

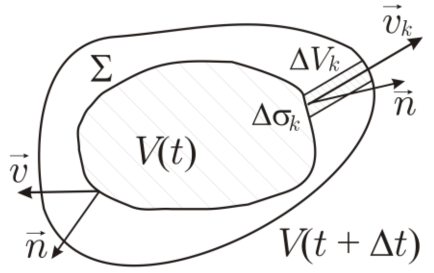


Рис.5.1. *Подвижный объем в моменты* t *и* $t+\Delta t$

Обозначим поверхность объема $V(t)$ через Σ. Разобьем Σ на сумму N элементарных площадок $\Delta\sigma_k$ $(k=1,\ldots N)$, а объем ΔV – на сумму объемов ΔV_k – элементарных цилиндров с площадью основания $\Delta\sigma_k$ и длиной образующей $|\vec{\upsilon}_k|\cdot\Delta t$; где $\vec{\upsilon}_k$ – скорость некоторой точки площадки $\Delta\sigma_k$. Объем каждого элементарного цилиндра равен $\Delta V_k=\Delta\sigma_k\upsilon_{nk}\Delta t$, где υ_{nk} – проекция $\vec{\upsilon}_k$ на нормаль к Σ. Интеграл по объему ΔV приближенно равен следующей сумме $\sum\limits_{k=1}^{N}A_k\Delta V_k=\sum\limits_{k=1}^{N}A_k\,\upsilon_{nk}\,\Delta t\,\Delta\sigma_k$, где A_k – значение $A(x,t)$ в некоторой точке площадки $\Delta\sigma_k$. При $N\to\infty$ и $\Delta\sigma_k\to 0$ суммы в левой и правой частях этого равенства переходят в интегралы соответственно по ΔV и по поверхности Σ. Таким образом

$\int\limits_{\Delta V}AdV=\int\limits_{\Sigma}A\,\upsilon_n\,\Delta t\,d\sigma$, и слагаемое №2 : $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}A\,dV=\int\limits_{\Sigma}A\,\upsilon_n\,d\sigma$.

Объединяя формулы для первого и второго слагаемых, получаем, формулу (5.1) дифференцирования по t интеграла по подвижному объему $V(t)$, то есть:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}A(x,t)dV=\int\limits_{V}\frac{\partial A}{\partial t}dV+\int\limits_{\Sigma}A\,\upsilon_n\,d\sigma\ . \qquad (5.1)$$

5.2. Закон сохранения массы (ЗСМ) для индивидуального объёма сплошной среды

Общая формулировка. «Масса M индивидуального объёма, т.е. объёма, состоящего из одних и тех же материальных частиц, постоянна: $M=\mathrm{const},\ \dfrac{dM}{dt}=0$».

Перепишем эту формулировку, конкретизируя выражение для массы индивидуального объема сплошной среды.

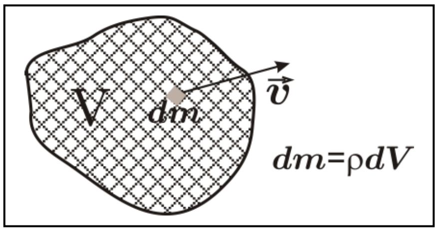
Распределение массы по объему описывается плотностью $\rho(x,t)$.

Плотность в точке среды определяется формулой

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{5.2}$$

где Δm – масса малой частицы (малой окрестности рассматриваемой точки), ΔV – ее объем и $\Delta V \to 0$ означает, что ΔV стягивается к рассматриваемой точке.

Формула (5.2) записывается также в виде $\rho = \dfrac{dm}{dV}$.



Масса dm бесконечно малой частицы: $dm = \rho\, dV$.

Масса в объеме V: $M = \int\limits_V \rho\, dV$.

Математическая формулировка закона сохранения массы для индивидуального объема сплошной среды такова:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} \rho\, dV = 0. \tag{5.3}$$

Здесь $V_{\text{инд}}$ – индивидуальный объем, $\rho(t, x_1, x_2, x_3)$ - плотность.

При движении форма и величина $V_{\text{инд}}$ меняется, $V_{\text{инд}} = V_{\text{инд}}(t)$.

5.3. Формулировка закона сохранения массы для неподвижного пространственного объема

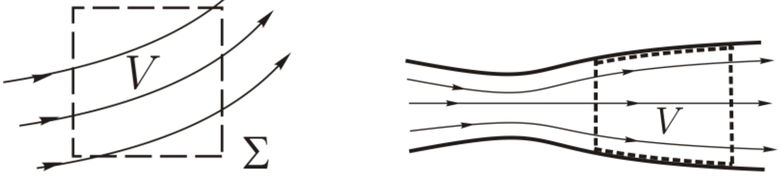
Используем формулу (5.1) для производной по времени от интеграла по подвижному объему при $A = \rho$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} \rho\, dV = \int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_\Sigma \rho\, \upsilon_n d\sigma.$$

Поэтому закон сохранения массы для объема V можно записать в виде

$$\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_\Sigma \rho\, \upsilon_n d\sigma = 0 \quad . \tag{5.4}$$

Соотношение (5.4) не содержит дифференцирования интеграла по t. Поэтому в формуле (5.4) можно считать, что V – неподвижный пространственный объём, область пространства, через которую протекает среда.



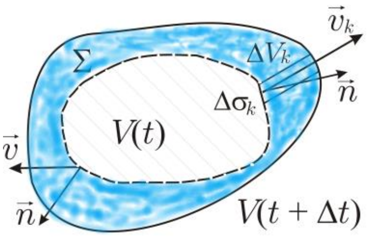
Примеры пространственных объемов

Но если V - неподвижный объем, то $\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV$,

и закон сохранения массы принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{простр}}} \rho\, dV = -\int\limits_{\Sigma} \rho\, \upsilon_n d\sigma \tag{5.5}$$

Физический смысл $\int\limits_{\Sigma} \rho\, \upsilon_n d\sigma$



Вернемся к рис. 5.1 и *теперь* будем рассматривать $V(t)$ не как подвижный индивидуальный объем, а как мысленно выделенный неподвижный пространственный объем V , через границу Σ которого может протекать среда. В момент t: $V = V(t)$. В момент $t+\Delta t$ частицы, находившиеся в объеме V занимают объем $V(t+\Delta t) = V + \Delta V$; изменение объема получилось за счет вытекания частиц среды через границу пространственного объема V . Рассуждения, аналогичные проведенным при выводе формулы (5.1), приводят к заключениям, что $\int\limits_{\Sigma} \upsilon_n d\sigma$ – объем жидкости, вытекшей (в ту сторону, куда указывает вектор нормали) через поверхность Σ за единицу времени (объемный расход); $\int\limits_{\Sigma} \rho\, \upsilon_n d\sigma$ – масса жидкости, вытекшей через поверхность Σ за единицу времени (массовый расход).

Соотношение (5.5) – это математическая формулировка закона сохранения массы для пространственного объёма: «Увеличение массы в пространственном объёме за единицу времени равно величине массы, которая за это время втекает в объём».

5.5. Уравнение неразрывности

Дифференциальное уравнение, которое выводится из закона сохранения массы, называется уравнением неразрывности.

Вывод уравнения неразрывности

Возьмем закон сохранения массы в форме (5.4)

$$\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_{\Sigma} \rho\, \upsilon_n\, d\sigma = 0$$

Интеграл по поверхности Σ преобразуем по формуле Г – О. Это можно сделать, так как $\rho\upsilon_n = \rho(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}) = \rho\upsilon_1 n_1 + \rho\upsilon_2 n_2 + \rho\upsilon_3 n_3$. Получим:

$$\int_{\Sigma} \rho\, \upsilon_n d\sigma = \int_{V} \mathrm{div}\, \rho \vec{\upsilon}\, dV \,.$$

Тогда закон сохранения массы принимает вид

$$\int_{V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \vec{\upsilon} \right) dV = 0 \qquad (5.6)$$

Это соотношение верно для любого объема, занятого средой! Отсюда выводится заключение, что подынтегральное выражение должно быть равно нулю в каждой точке области, занятой средой.

f-Теорема : «Если $\int_{V} f\, dV = 0$ для любого объёма в области, где f определена и непрерывна, то $f = 0$ во всех точках этой области».

Доказательство: если $f \neq 0$ в какой-то точке A, например $f > 0$ в точке A, то $f > 0$ и в некоторой малой окрестности V_A точки A, тогда $\int_{V_A} f\, dV > 0$ - что невозможно по условию теоремы. Значит, $f = 0$ во всех точках.

Пользуясь f-Теоремой, из (5.6) получаем
дифференциальное уравнение неразрывности:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \vec{\upsilon} = 0} \qquad (5.7)$$

Это первая форма уравнения неразрывности.

Получим другую форму этого уравнения. Раскроем в (5.7) $\mathrm{div} \rho \vec{\upsilon}$:

$$\mathrm{div} \rho\, \vec{\upsilon} = \frac{\partial \rho\, \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho\, \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho\, \upsilon_z}{\partial z} = \upsilon_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \rho}{\partial z} +$$

$$+ \rho \underbrace{\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} \right)}_{\mathrm{div} \vec{\upsilon}}$$

Тогда (5.7) переписывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} \right) = 0 \,,$$

или

$$\boxed{\frac{d \rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div} \vec{\upsilon} = 0 \,.} \qquad (5.8)$$

Это вторая форма уравнения неразрывности.

5.6. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды

Несжимаемая среда – это среда, в каждой индивидуальной частице которой плотность $\rho = \text{const}$, следовательно, $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$.

Несжимаемая среда – модель, которая используется, если изменение плотности частиц в рассматриваемых процессах мало и им можно пренебречь.

Для несжимаемой среды уравнение неразрывности (5.8) принимает вид:

$$\operatorname{div}\vec{\upsilon} = 0 \tag{5.9}$$

Если несжимаемая среда неоднородна (то есть плотность ρ в разных частицах различна), то $\dfrac{\partial\rho}{\partial x}, \dfrac{\partial\rho}{\partial y}, \dfrac{\partial\rho}{\partial z}$ не равны нулю, а, следовательно, в общем случае, и $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$ (при эйлеровом описании). Для неоднородной несжимаемой среды условие несжимаемости $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$, то есть, соотношение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0,$$

представляет собой дифференциальное уравнение для нахождения распределения плотности в пространстве.

Замечание. Несжимаемая жидкость – модель, которую можно применять, когда изменения плотности влияют на интересующие нас параметры несущественно. Например, при движении автомобиля или самолета со скоростью порядка 150 км/час можно воздух считать несжимаемым. При скоростях порядка скорости звука и больше сжимаемость учитывать надо.

150 км/час

2150 км/час. Число Маха 1.8

Вода почти всегда рассматривается как несжимаемая жидкость. Однако для описания, например, распространения звука в воде, необходимо учитывать малые изменения плотности частиц воды.

Задачи к лекции 5

Задача 1.
Поле скорости в некоторой среде имеет вид

$$\upsilon_x = ax,\ \ \upsilon_y = ay,\ \ \upsilon_z = az\ ,\ \ a > 0 - \text{константа}$$

Увеличивается или уменьшается плотность в индивидуальных частицах среды?

Задача 2.
Поле скорости в некоторой среде таково: $\upsilon_x = 2bxzt,\ \upsilon_y = 0,\ \upsilon_z = -bz^2t\ ,\ b = const$
Изменяется ли при движении плотность в индивидуальных частицах среды?

Задача 3.
Для потенциального движения несжимаемой жидкости получить из уравнения неразрывности уравнение для потенциала скорости.