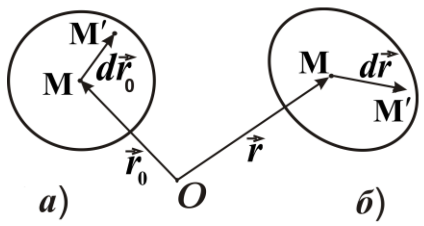
Лекция 3.
Тензор деформаций (продолжение).
Тензор скоростей деформаций

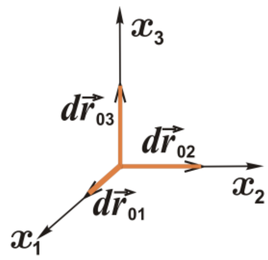
3.1. Тензор деформаций (напоминание)

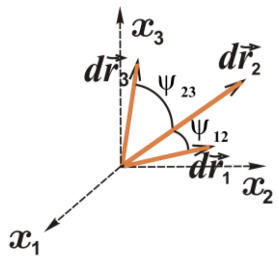
Компоненты тензора деформаций определяются формулами:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}}\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} - \delta_{kl}\right), \quad \text{при этом } ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{kl}dx_{0k}dx_{0l} \qquad (3.1)$$

x_{0i}, x_i - координаты индивидуальной точки до и после деформации.







Механический смысл компонент ε_{ik} в случае малых деформаций:

$$\varepsilon_{ii} = e_i \equiv \frac{ds_i - ds_{0i}}{ds_{0i}}$$ – это коэффициенты относительного удлинения e_i отрезков, которые до деформации были параллельны осям x_i соответственно.

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\chi_{ik} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{ik}\right) \text{ при } i \neq k$$ – это половины изменения углов χ_{ik} между отрезками, лежавшими до деформации параллельно осям x_i, x_k соответственно.

Матрица компонент ε_{kl} при малых деформациях:

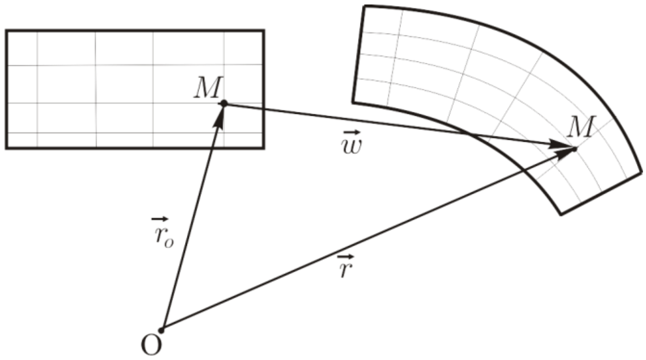
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \frac{1}{2}\chi_{12} & \frac{1}{2}\chi_{13} \\ \frac{1}{2}\chi_{21} & e_2 & \frac{1}{2}\chi_{23} \\ \frac{1}{2}\chi_{31} & \frac{1}{2}\chi_{32} & e_3 \end{pmatrix}$$

Главные оси тензора деформаций – оси декартовой системы координат, в которой матрица компонент тензора имеет диагональный вид: $\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$

Углы между отрезками, расположенными до деформации вдоль главных осей тензора деформаций, остаются прямыми и после деформации.

3.2. Выражение компонент тензора деформаций через производные от компонент вектора перемещения

Вектор перемещения $\vec{w}$ — это вектор, соединяющий начальное и конечное положения точек среды.



$\vec{r}_0$, $\vec{r}$ - радиус-векторы точки в начальном и конечном положениях,

$\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0$, тогда $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w}$.

В декартовой системе координат $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{r}_0 = x_{01}\vec{e}_1 + x_{02}\vec{e}_2 + x_{03}\vec{e}_3$,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w} \quad \Rightarrow \quad x_k = x_{0k} + w_k.$$

Подставляем эти выражения для x_k в формулы (3.1) для ε_{ij}:

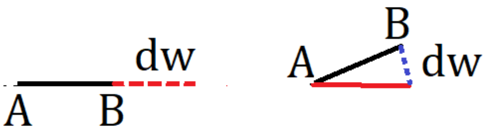
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_{0i}}\frac{\partial x_k}{\partial x_{0j}} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{\frac{\partial x_{0k}}{\partial x_{0i}}}_{\delta_{ik}} + \frac{\partial w_k}{\partial x_{0i}}\right)\left(\underbrace{\frac{\partial x_{0k}}{\partial x_{0j}}}_{\delta_{jk}} + \frac{\partial w_k}{\partial x_{0j}}\right) - \delta_{ij}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\delta_{ik}\delta_{jk}}_{\delta_{ij}} + \underbrace{\delta_{ik}\frac{\partial w_k}{\partial x_{0j}}}_{\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}}} + \underbrace{\delta_{jk}\frac{\partial w_k}{\partial x_{0i}}}_{\frac{\partial w_j}{\partial x_{0i}}} + \frac{\partial w_k}{\partial x_{0i}}\frac{\partial w_k}{\partial x_{0j}} - \delta_{ij}\right).$$

Итак, **выражение** компонент тензора деформаций через производные компонент вектора перемещений в декартовых координатах таково

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial w_j}{\partial x_{0i}} + \frac{\partial w_k}{\partial x_{0i}}\frac{\partial w_k}{\partial x_{0j}}\right). \qquad (3.2)$$

Пусть относительные перемещения малы, то есть, $\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}} << 1$. Это значит, что малы деформации и относительные повороты всех отрезков. Пример на рисунке:



AB –материальный отрезок, конец A неподвижен, B движется

Если $\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}} << 1$, то в формуле (3.2) можно пренебречь произведениями производных компонент перемещения по сравнению с линейными членами. Тогда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial w_j}{\partial x_{0i}}\right). \qquad (3.3)$$

В этой формуле производную по x_{0i} можно заменить на производную по x_i, так как

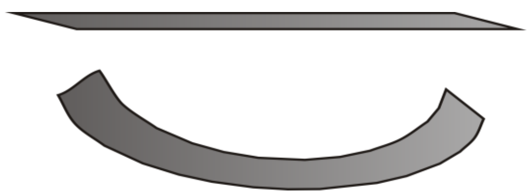
$$\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial w_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial w_i}{\partial x_k}\left(\delta_{kj} + \frac{\partial w_k}{\partial x_{0j}}\right) = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_i}{\partial x_k}\frac{\partial w_k}{\partial x_{0j}} \approx \frac{\partial w_i}{\partial x_j}.$$

При малых относительных перемещениях формула, выражающая компоненты тензора деформаций через производные компонент вектора перемещений, такова

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.4)$$

Важное замечание. Относительные перемещения $\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}}$ могут быть большими даже при малых деформациях, если относительные повороты отрезков не малы.

Для тела, размеры которого во всех направлениях одного порядка, при малых деформациях относительные повороты тоже малы. Но для пластинок, оболочек, стержней возможны конечные относительные повороты при малых деформациях. Например, металлическую линейку можно легко согнуть, при этом она практически не растягивается, но ее элементы поворачиваются друг относительно друга



Тогда связи между деформациями и перемещениями нелинейные, определяются формулами (3.3), даже при малых деформациях. Соответствующие теории называются геометрически нелинейными.

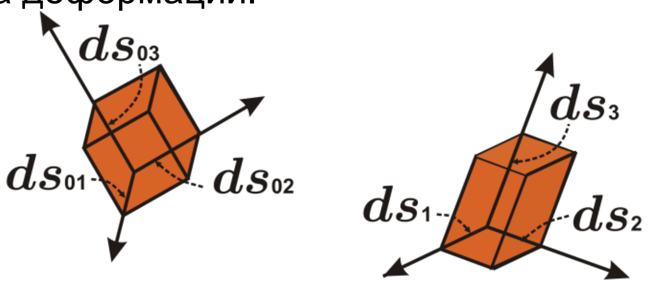
3.3. Две формулы для коэффициента относительного изменения объема при деформации

Коэффициентом относительного изменения объема при деформации среды называется следующая величина

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0},$$

где dV_0 и dV - объемы малой частицы соответственно в начальном и деформированном состояниях.

Рассмотрим малый объем в виде параллелепипеда с ребрами, параллельными главным осям тензора деформаций.



Главными осями тензора называются, как известно, оси декартовой системы координат, в которой матрица компонент тензора имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$. Углы между материальными отрезками, лежавшими до деформации на главных осях, остаются прямыми после деформации. Поэтому рассматриваемый прямоугольный параллелепипед переходит в результате деформации снова в прямоугольный параллелепипед, и $dV_0 = ds_{01} ds_{02} ds_{03}$, $dV = ds_1 ds_2 ds_3$. Здесь ds_{0i} - длина ребра параллелепипеда, параллельного оси x_i до деформации, ds_i - его длина после деформации. Тогда

$$\theta = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{ds_{01} ds_{02} ds_{03}} - 1.$$

Коэффициенты относительного удлинения ребер параллелепипеда:

$$e_i = \frac{ds_i - ds_{0i}}{ds_{0i}} = \frac{ds_i}{ds_{0i}} - 1.$$

Поэтому

$$\theta = (e_1 + 1)\cdot(e_2 + 1)\cdot(e_3 + 1) - 1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 e_3 \quad (3.5)$$

При малых деформациях $e_i << 1$, $\varepsilon_{ii} = e_i$,

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = I_1(\varepsilon_{ij})$$

где $I_1(\varepsilon_{ij}) \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ - первый инвариант тензора деформаций.
Итак, при малых деформациях коэффициент относительного изменения объема равен первому инварианту тензора деформаций:

$$\theta = I_1(\varepsilon_{ij}). \tag{3.6}$$

Это первая формула для θ.

Что такое инварианты тензора

Инвариантами тензора называются комбинации его компонент, сохраняющие свои значения при преобразованиях координат, хотя сами компоненты при этом, конечно, меняются. Доказывается, что величина $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ не меняется при переходе от одной декартовой системы координат к другой, то есть является инвариантом.

Вторая формула для коэффициента относительного изменения объема
Она получается, если выразить компоненты тензора деформаций через перемещения. При малых деформациях и малых относительных поворотах
$\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}$, $\varepsilon_{22} = \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2}$, $\varepsilon_{33} = \dfrac{\partial w_3}{\partial x_3}$, тогда

$$\theta = I_1(\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{w} \tag{3.7}$$

Выражение $\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{w}$ называется дивергенцией вектора $\vec{w}$

Определение

Дивергенцией любого вектора $\vec{a}$ называется скалярная величина, которая в декартовой системе координат вычисляется по формуле:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

3.4. Уравнения совместности для компонент тензора деформаций

Деформации в разных частицах сплошной среды в общем случае разные, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_i)$. Оказывается, $\varepsilon_{ij}(x_i)$ не могут быть произвольными функциями координат, а должны удовлетворять некоторым условиям, которые называются уравнениями совместности деформаций. Причиной этого является то, что
6 функций ε_{ij} выражаются через 3 функции w_i:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial w_j}{\partial x_{0i}} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial w_k}{\partial x_{0i}}\frac{\partial w_k}{\partial x_{0j}}\right).$$

При заданных функциях $\varepsilon_{ij}(x_{0i})$ эти соотношения можно рассматривать как систему шести уравнений уравнения для нахождения трех функций w_i.

Эта система совместна, то есть имеет решения, только если $\varepsilon_{ij}(x_i)$ удовлетворяют определенным условиям, которые и составляют уравнения совместности.

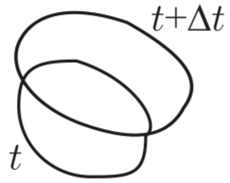
Уравнения совместности в случае малых относительных перемещений называются уравнениями совместности Сен-Венана и имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \tag{3.8}$$

Здесь 81 соотношение, но можно показать, что из них независимы только 6.

3.5. Тензор скоростей деформаций. Определение

Рассмотрим положения частицы в два близких момента времени – в момент t и в момент $t + \Delta t$.



Обозначим через $\Delta\varepsilon_{ij}$ компоненты тензора малых деформаций в момент времени $t + \Delta t$ по отношению к состоянию в момент времени t.

Тензором скоростей деформаций называется тензор, компоненты e_{ij} которого определяются формулами

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t}. \tag{3.9}$$

3.6. Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций

Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций выводится из его определения с учетом того, что если Δt мало, то $\Delta\varepsilon_{ij}$ малы. В частности,

$$e_{ii} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ii}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_i}{\Delta t}$$

Таким образом, e_{ii} — это скорости относительного удлинения отрезков, лежащих в данный момент времени вдоль координатных осей.

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\chi_{ij}}{\Delta t} \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

значит, e_{ij} при $i \neq j$ - это половины скорости изменения углов между отрезками, в данный момент времени параллельными осям x_i и x_j, соответственно.

3.7. Выражение компонент тензора скоростей деформаций через производные от компонент вектора скорости

Пусть Δw_i - компоненты вектора перемещения в момент времени $t + \Delta t$ по отношению к состоянию в момент времени t. Тогда, т.к. относительные перемещения за малое время Δt малы, можем использовать формулы

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta w_j}{\partial x_i} \right).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta w_i}{\Delta t} = \upsilon_i$, получаем следующие формулы, выражающие компоненты тензора скоростей деформаций через производные от компонент вектора скорости:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \right). \tag{3.10}$$

Задача 1 к лекциям 2, 3

Связи между координатами точек до и после деформации таковы:

$x_1 = x_{01} - 0{,}03 x_{02}^2$, $\quad x_2 = x_{02} + 0{,}01 x_{02}^2 + 0{,}02 x_{03}^2$, $\quad x_3 = x_{03} + 0.02 x_{01} + 0.05 x_{02}$

Вычислить компоненту ε_{21} тензора деформаций в точке M, начальные координаты которой (3, 2, 1)

1. Считая деформации малыми, вычислить относительное удлинение отрезка, в начальном состоянии параллельного оси x_1, в окрестности точки M.

2. Считая деформации малыми, вычислить относительное изменение объема малой окрестности точки M

Задача 2 к лекции 3

Поле перемещений в декартовой системе координат x, y, z таково

$$w_x = 0.001 y^2, \; w_y = -0.002 y, \; w_z = 0.002 z$$

Относительные перемещения малы.

В малой окрестности точки М с начальными координатами (0, 0.01, 0.02)

1) увеличивается или уменьшается угол между материальными отрезками, которые до деформации были параллельны осям x, y?

2) увеличивается или уменьшается объем частицы с центром в точке М?

3) увеличиваются или уменьшаются длины материальных отрезков, которые до деформации были параллельны осям x, y, z?