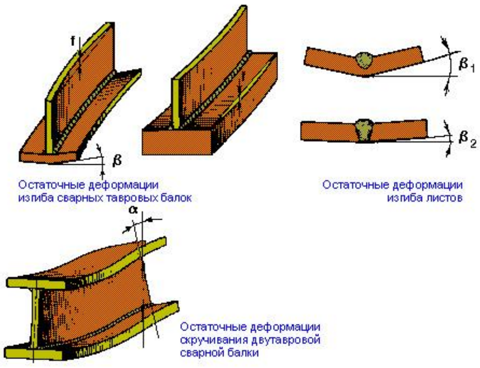
Лекция 2. Тензор деформаций

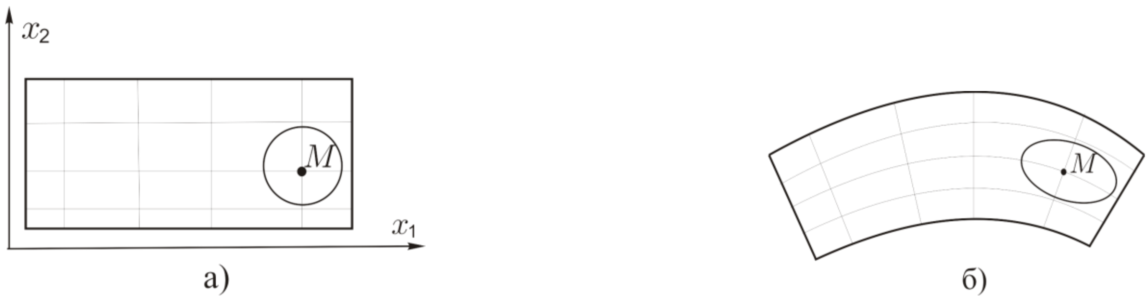
2.1. Тензор деформаций. Определение
2.2. Механический смысл компонент тензора деформаций

2.1. Тензор деформаций. Определение

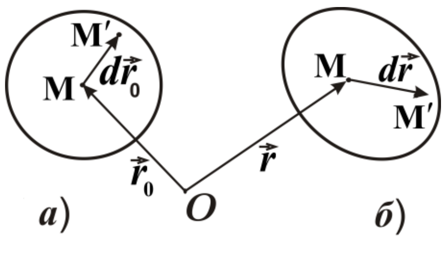
Деформации – это изменение длин всевозможных материальных отрезков и углов между ними по сравнению с начальным, недеформированным состоянием.



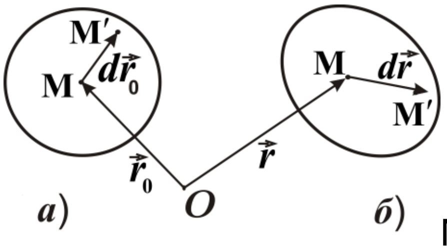
В разных частях тела деформации могут быть разными. Поэтому при количественном описании деформаций мы рассматриваем малую окрестность некоторой точки $\boldsymbol{M}$ сплошной среды.



а) начальное состояние; б) конечное (деформированное) состояние



Чтобы знать деформацию малой частицы, достаточно знать изменение длин всех малых отрезков в этой частице. Пусть $\boldsymbol{M'}$ – точка из малой окрестности точки $\boldsymbol{M}$. Изучим изменение длины $\boldsymbol{MM'}$ при деформировании.



Материальный отрезок MM' до и после деформации

	Начальное состояние	Конечное состояние
Координаты т. M	x_{01}, x_{02}, x_{03}	x_1, x_2, x_3
Координаты т. M'	$x_{0i} + dx_{0i},\ i = 1,2,3$	$x_i + dx_i,\ i = 1,2,3$
Вектор $\overrightarrow{MM'}$	$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}_0$ его компоненты: $dx_{0i},\ i = 1,2,3$	$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$ его компоненты: $dx_i,\ i = 1,2,3$
Квадрат длины отрезка MM'	$ds_0^2 = (dx_{01})^2 + (dx_{02})^2 + (dx_{03})^2 = \lvert d\vec{r}_0 \rvert^2 = dx_{0k}dx_{0k}$	$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \lvert d\vec{r} \rvert^2 = dx_i \cdot dx_i$

Разность квадратов длин отрезка MM' в конечном и начальном состояниях

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - dx_{0k}dx_{0k},$$

где $dx_i dx_i = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$; $dx_{0k}dx_{0k} = (dx_{01})^2 + (dx_{02})^2 + (dx_{03})^2$.

Пусть мы знаем координаты точек x_i после деформации как функции их координат до деформации: $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03})$. Тогда

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}}dx_{01} + \frac{\partial x_i}{\partial x_{02}}dx_{02} + \frac{\partial x_i}{\partial x_{03}}dx_{03} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}}dx_{0k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}}dx_{0l},$$

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - dx_{0k}dx_{0k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}}\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}}dx_{0k}dx_{0l} - dx_{0k}dx_{0k} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}}\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} - \delta_{kl}\right)}_{2\varepsilon_{kl}} dx_{0k}dx_{0l} = 2\varepsilon_{kl}dx_{0k}dx_{0l}, \qquad \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = l \\ 0, & \text{при } k \neq l \end{cases}$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = l \\ 0, & \text{при } k \neq l \end{cases}$$ называются символами Кронекера,

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}}\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} - \delta_{kl}\right) \quad \text{– компоненты тензора деформаций} \qquad (2.1)$$

Определение. Тензор, компоненты ε_{kl} которого определяются формулами (2.1), где x_i , x_{0k} - координаты точек после и до деформации, называется тензором деформации (Коши–Грина).

Формула для разности квадратов длин материальных отрезков:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{kl} dx_{0k} dx_{0l} \tag{2.2}$$

Вопросы к определению тензора деформаций.

1) Почему это тензор деформаций? 2) Зачем $\frac{1}{2}$ в формуле (2.1)?

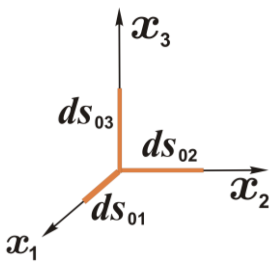
3) Почему это тензор и что такое вообще тензор?

Ответ на первый вопрос. Из соотношения (2.2) видно, что если все $\varepsilon_{kl} = 0$, то $ds^2 = ds_0^2$, то есть длины всех отрезков не меняются, деформации нет. И наоборот, если для любых dx_{0k}, $k = 1,2,3$ имеем $ds^2 = ds_0^2$, то все $\varepsilon_{kl} = 0$. Наконец, и это главное, если ε_{kl} известны, и выбран какой-то отрезок до деформации (т.е. известны ds_0 и dx_{0i}), то длина этого отрезка после деформации ds вычисляется по формуле (2.2).

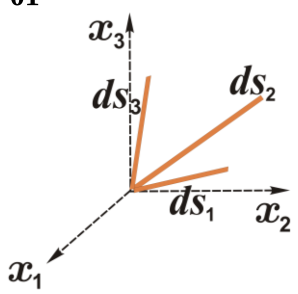
2.2. Механический смысл компонент тензора деформаций

Механический смысл компонент $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$.

Рассмотрим малый отрезок, который до деформации был параллелен оси x_1. Обозначим через ds_{01} его длину до деформации, ds_1 - длину после деформации. Для этого отрезка $dx_{01} \neq 0$, $dx_{02} = 0$, $dx_{03} = 0$, $ds_{01} = dx_{01}$.



Начальное состояние



Деформированное состояние

Из $ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{kl} dx_{0k} dx_{0l}$ получаем: $ds_1^2 - ds_{01}^2 = 2\varepsilon_{11}(dx_{01})^2 = 2\varepsilon_{11}(ds_{01})^2$

Отсюда

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{ds_1}{ds_{01}}\right)^2 - 1\right]$$

Введём коэффициент относительного удлинения e

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1, \quad \frac{ds}{ds_0} = 1 + e$$

Для рассматриваемого отрезка коэффициент относительного удлинения e_1

$$e_1 = \frac{ds_1 - ds_{01}}{ds_{01}}, \quad \frac{ds_1}{ds_{01}} = 1 + e_1.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left[(1+e_1)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(2e_1 + e_1{}^2) = e_1 + \frac{1}{2}e_1{}^2 \qquad (2.3)$$

В случае малых деформаций $e_1 << 1$, $e_1{}^2 << e_1$, поэтому с точностью до малых первого порядка

$$\varepsilon_{11} = e_1. \qquad (2.4)$$

Из (2.4) ясен ответ на второй вопрос к определению тензора деформаций.

Рассматривая отрезки, лежавшие до деформации параллельно осям x_2 или x_3, получим формулы, аналогичные (2.3). Итак,

$$\varepsilon_{ii} = e_i + \frac{1}{2}e_i{}^2,$$ (здесь суммирования по i нет)

то есть, ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} определяются относительными удлинениями отрезков, до деформации параллельных соответственно осям x_1, x_2, x_3.

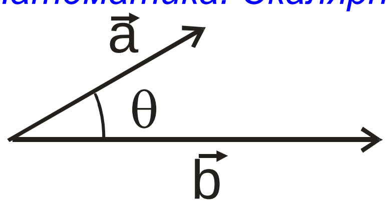
В случае малых деформаций

$$\varepsilon_{ii} = e_i,$$

ε_{ii} равны относительными удлинениями отрезков, которые до деформации были параллельны соответственно осям x_1, x_2, x_3.

Механический смысл компонент ε_{ik} при $i \neq k$.

Математика: Скалярное произведение векторов. 2 формулы



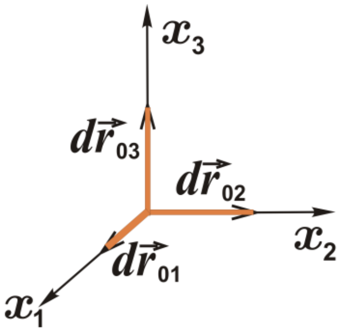
1) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$;

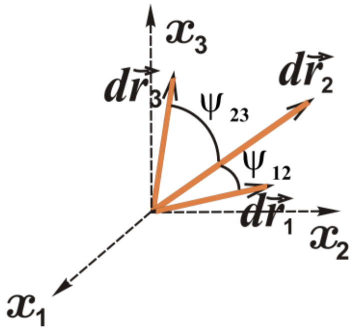
$$\left((\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c});$$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3, \quad \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k\right) = \delta_{ik};$$

2) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_ib_i$

Механический смысл ε_{12}.





Рассмотрим отрезки, которые до деформации были параллельны осям x_1 и x_2, соответственно. Векторы, соответствующие этим отрезкам в начальном состоянии - $d\vec{r}_{01}$ и $d\vec{r}_{02}$, угол между ними $\dfrac{\pi}{2}$, $|d\vec{r}_{01}| = ds_{01}$, $|d\vec{r}_{02}| = ds_{02}$.

В результате деформации векторы $d\vec{r}_{01}$ и $d\vec{r}_{02}$ переходят в $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$, угол между ними ψ_{12}.

Рассмотрим скалярное произведение векторов $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$:

$$(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = |d\vec{r}_1||d\vec{r}_2|\cos\psi_{12} = ds_1 ds_2 \cos\psi_{12}, \tag{2.5}$$

где ψ_{12} - угол между рассматриваемыми отрезками после деформации.

Вычислим это скалярное произведение другим способом - через компоненты векторов $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$, используя формулу $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Выпишем компоненты вектора $d\vec{r}_1$. Для любого вектора $d\vec{r}$ компонентами являются $\{dx_i\}$, причем $dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{01}} dx_{01} + \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{02}} dx_{02} + \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{03}} dx_{03}$.

Для вектора $d\vec{r}_1$ компоненты равны $dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{01}} dx_{01}$, так как $dx_{02} = dx_{03} = 0$.

Для вектора $d\vec{r}_2$ компоненты такие: $dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{02}} dx_{02}$ (т.к. $dx_{01} = dx_{03} = 0$).

Поэтому $(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{02}} dx_{01} dx_{02}$. Из формулы $\varepsilon_{kl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial x_{0k}} \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} - \delta_{kl} \right)$ при $k = 1, l = 2$ видно, что $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{02}} = 2\varepsilon_{12}$. Таким образом,

$$(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = 2\varepsilon_{12} dx_{01} dx_{02} = 2\varepsilon_{12} ds_{01} ds_{02} \tag{2.6}$$

Сравнивая соотношения (2.5) и (2.6), получаем

$$ds_1 ds_2 \cos\psi_{12} = 2\varepsilon_{12} ds_{01} ds_{02},$$

то есть

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\frac{ds_1}{ds_{01}}\frac{ds_2}{ds_{02}}\cos\psi_{12} = \frac{1}{2}(1+e_1)(1+e_2)\sin\chi_{12} \qquad (2.7)$$

где $\chi_{12} = \frac{\pi}{2} - \psi_{12}$ - изменение угла между рассматриваемыми отрезками при деформации (угол между ними до деформации был $\frac{\pi}{2}$); χ – греческая буква «хи».

В случае малых деформаций e_i малы, χ_{ij} малы, $\sin\chi_{12} \approx \chi_{12}$. Поэтому в случае малых деформаций

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\chi_{12}. \qquad (2.8)$$

Таким образом, в случае малых деформаций ε_{12} — это половина изменения угла между отрезками, лежавшими до деформации параллельно осям x_1, x_2, соответственно. Аналогично выводится механический смысл ε_{13} и ε_{23}.

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(1+e_i)(1+e_k)\sin\chi_{ik} \approx \frac{1}{2}\chi_{ik} \quad \text{при } i \neq k; \quad \chi_{ik} = \frac{\pi}{2} - \psi_{ik}$$

Главные оси тензора деформаций

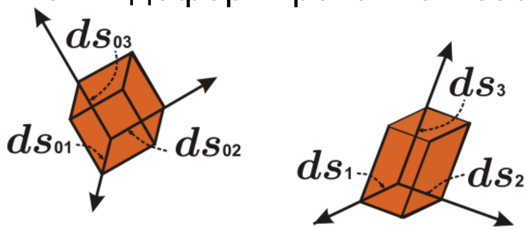
Известно, что всякую симметричную матрицу можно с помощью преобразования координат преобразовать к диагональному виду, то есть к виду, в котором все элементы, кроме диагональных, равны нулю, т.е. $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Главными осями симметричного тензора 2-го ранга называются оси декартовой системы координат, в которой матрица компонент тензора имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Физический смысл главных осей тензора деформаций состоит в следующем: так как в главных осях $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то углы между отрезками, лежавшими до деформации вдоль осей, направленных по главным осям тензора деформаций, остаются прямыми и после деформации. Это означает, что в общем случае преобразование частицы представляет собой комбинацию поворота как твердого тела и растяжение (сжатие) вдоль направлений главных осей.

Частица в форме параллелепипеда с ребрами, параллельными главным осям тензора деформаций,
– в начальном и деформированном состояниях



Задачи к Лекции 2

1. Какова размерность компонент тензора деформаций? Получить ответ, исходя из определения компонент тензора деформаций.
2. Написать в раскрытом виде формулу (2.1) для компоненты ε_{13} тензора деформаций.
3. Связи между координатами точек до и после деформации таковы:

$$x_1 = x_{01} + 0,02x_{03}^2, \qquad x_2 = x_{02} + 0,05x_{01}, \qquad x_3 = x_{03}$$

Вычислить компоненту ε_{13} тензора деформаций в точке M, начальные координаты которой (2, 5, 1)