Основы механики сплошной среды

(для студентов отделения математики, 5 курс)

Лектор проф. Эглит Маргарита Эрнестовна

Некоторые учебники по этому курсу

Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.1, Т.2
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/continuous.htm

Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. М., 2010
http://gidropraktikum.narod.ru/Eglit-OMSS.djvu

Механика сплошных сред в задачах. Под ред М.Э. Эглит. Т. 1. Теория и задачи.
М., Московский лицей, 1996
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Eglit_MSSzadach_t1_1996ru.djvu

Механика сплошных сред в задачах. Под ред М.Э. Эглит. Т. 2. Ответы и решения
М., Московский лицей, 1996
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Eglit_MSSzadach_t2_1996ru.djvu

(есть 2-ое издание, 2017. Классический учебник МГУ. 2 тома в одной книге)

Презентации лекций можно будет найти на сайте

http://gidropraktikum.narod.ru/mss2021.htm

Основы механики сплошной среды

Лектор проф. Эглит Маргарита Эрнестовна

Лекция 1. Лагранжево и Эйлерово описание движения сред. Индивидуальная производная по времени

1.1. Предмет механики сплошных сред.
1.2. Сплошная среда. Поле некоторой величины
1.3. Координаты. Координатные линии, векторы базиса.
1.4. Векторы. Сложение, представление в виде разложения по векторам базиса, компоненты вектора
1.5. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты
1.6. Что называется законом движения сплошной среды?
1.7. Два подхода к описанию движения: лагранжев и эйлеров
1.8. Материальная (индивидуальная, полная) производная по времени
1.9. Формулы для вычисления ускорения по скорости
1.10. Линии тока и траектории.
1.11. Установившееся и неустановившееся движение

1.1. Предмет механики сплошных сред (МСС)

Предмет механики сплошных сред – изучение движения, равновесия, силовых взаимодействий различных сред, таких, как вода, нефть, воздух, другие газы и жидкости, а также твердые деформируемые среды, например металлы, грунт, строительные материалы, ткани живых организмов и т. д.






Разные по своим свойствам среды изучаются в одной науке, потому что поведение всех сред подчиняется одним и тем же физическим законам (законам сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии, а также второму закону термодинамики).

МСС содержит общие основы следующих наук: гидромеханика, газовая динамика, сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности, магнитная гидродинамика, биомеханика и другие.

Основной метод МСС – математическое моделирование.

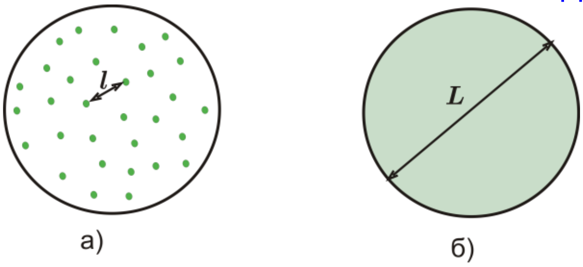
Математическая модель – это

1) набор количественных параметров, характеризующих изучаемые процессы,

2) уравнения и условия, которые позволяют рассчитать эти параметры.

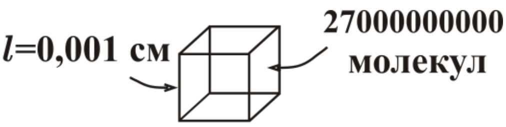
1.2. Сплошная среда

Сплошная среда — это среда, заполняющая занятую ею область непрерывно, то есть в любом сколь угодно малом объеме этой области содержится масса.



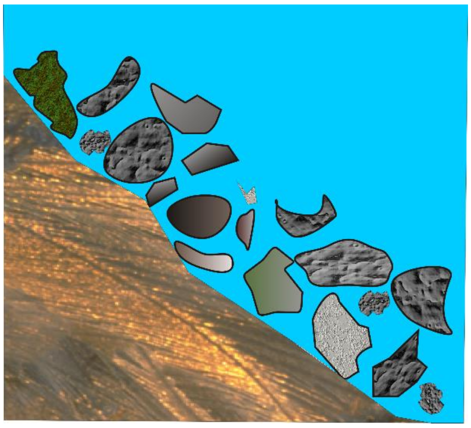
Фиг. 1.1. (а) реальная среда; (б) модель - сплошная среда

В действительности все среды имеют дискретное строение, состоят из молекул размером d, находящихся на расстоянии $l \gg d$ друг от друга. Например, радиус молекулы водорода $d \sim 10^{-8}$ см, а радиус ядра в 100 000 раз меньше. Расстояние между молекулами $l \sim 10^{-5}$см, то есть в 1000 раз больше, чем размер молекулы.
В то же время расстояния l между частицами обычно много меньше размеров L изучаемых тел. Пример:



Кубик воздуха

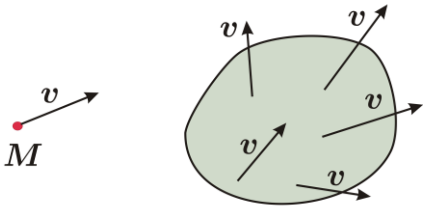
Если масштаб L изучаемого явления таков, что $L \gg l$, то можно использовать модель сплошной среды



Камнепад описывается как поток сплошной среды

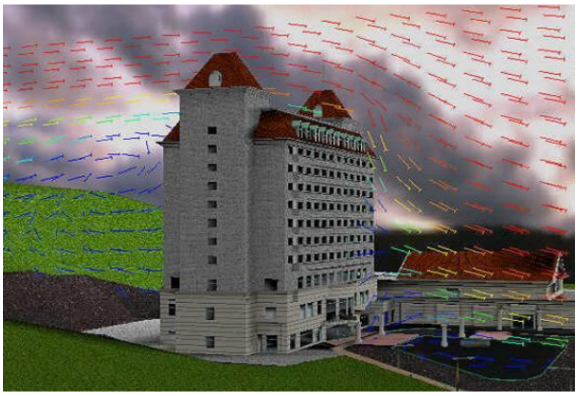
Поле некоторой величины.

Если некоторая величина задана во всех точках рассматриваемой области, то мы говорим о поле этой величины. Например, поле скорости — это совокупность скоростей всех точек среды в рассматриваемой области.



а) б)

а) материальная точка и ее скорость;
(б) поле скорости сплошной среды

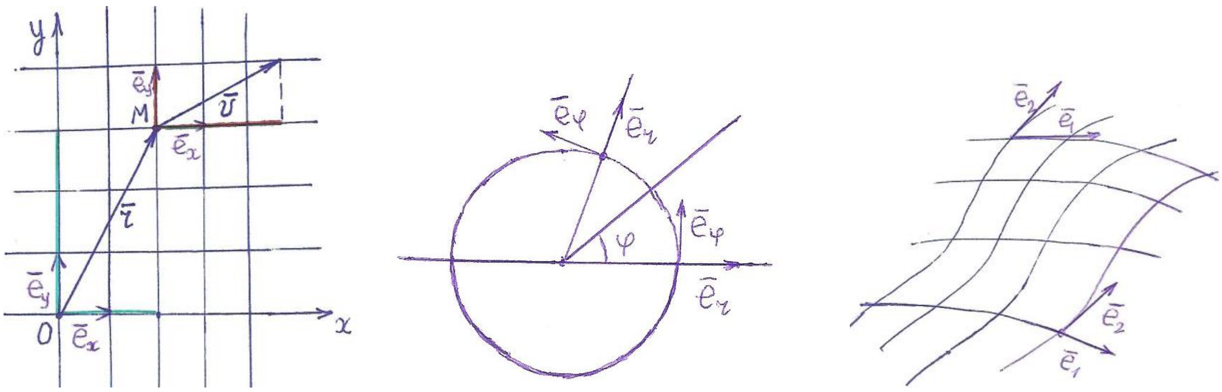


1.3. Координаты, координатные линии, векторы базиса

Координаты - 3 числа, x, y, z или x_1, x_2, x_3 или r, φ, z и т.д., которые задают положение точки в трехмерном пространстве

Координатные линии – линии, на которых две из координат постоянны, меняется лишь одна. Через любую точку проходят 3 координатные линии (в 3х-мерном пространстве)

Векторы базиса – направлены по касательным к координатным линиям, в декартовой системе координат они взаимно ортогональны и имеют единичную длину



(1) (2) (3)

Системы координат на плоскости

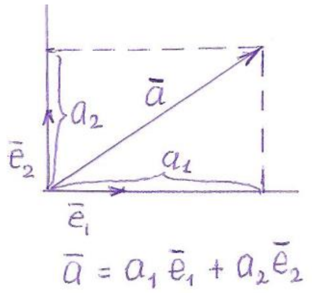
(1) декартова, $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ - векторы базиса, (2) - полярная, $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ - векторы базиса,

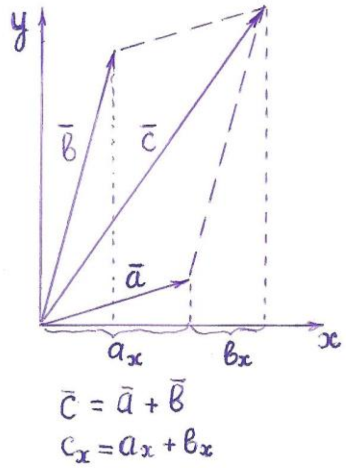
(3) - криволинейная, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - векторы базиса

В этом курсе мы будем, в основном, использовать декартову систему координат.

1.4. Векторы.

Правило сложения векторов. Разложение векторов по векторам базиса. Компоненты векторов





Коэффициенты при векторах базиса в разложении вектора по векторам базиса называют компонентами вектора в этом базисе. В декартовых координатах компоненты вектора равны проекциям вектора на координатные оси.

Задание. Дано векторное равенство $\vec{w} = 9\vec{\upsilon} + 15\vec{u}$. Написать это равенство в проекции на ось $\boldsymbol{z}$ декартовой системы координат $\boldsymbol{x, y, z}$. Для компонент используем обозначения w_x, w_y, w_z и т. д.

1.5. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты.

Пространственная система координат – это система, относительно которой изучается движение.

Пространственные или эйлеровы координаты (по имени знаменитого ученого 18-го века Л. Эйлера) — это координаты точек среды в пространственной системе координат. Мы будем обозначать их x_1, x_2, x_3 или x, y, z.

Если среда движется, то пространственные координаты $\boldsymbol{x_i}$ индивидуальных точек среды меняются со временем, то есть являются функциями времени – разными для разных точек:

$$x_i = x_i(t, \dots), \quad \text{здесь } \dots \text{ - «метка, имя» точки}$$

Чтобы отметить индивидуальные точки среды, можно, например, задать значения их пространственных координат в начальный момент времени x_{10}, x_{20}, x_{30} и использовать x_{10}, x_{20}, x_{30} в качестве метки (имени) частицы. Тогда для индивидуальных точек

$$x_1 = x_1(t, x_{10}, x_{20}, x_{30}),$$
$$x_2 = x_2(t, x_{10}, x_{20}, x_{30}),$$
$$x_3 = x_3(t, x_{10}, x_{20}, x_{30}).$$

Для параметров, выделяющих индивидуальные точки, часто используют обозначения $\xi_1, \xi_2, \xi_3,$. Их можно вводить по-разному, это не обязательно начальные координаты. Но чаще всего

$$\xi_1 = x_{10},\ \xi_2 = x_{20},\ \xi_3 = x_{30}\ .$$

Материальными или лагранжевыми координатами (по имени знаменитого ученого 18-го века Ж.Л. Лагранжа) называются параметры $\xi_1, \xi_2, \xi_3,$ которые выделяют индивидуальные точки среды. Для индивидуальной точки лагранжевы координаты не меняются в процессе движения.

1.6. Закон движения сплошной среды.

При движении среды пространственные координаты ее индивидуальных точек являются функциями времени и лагранжевых координат точки:

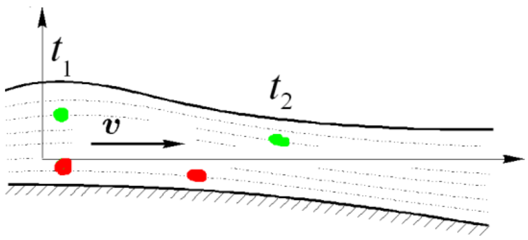
$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ x_2 &= x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ x_3 &= x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Эти соотношения называются законом движения среды.

Итак, закон движения – это соотношения, показывающие, как меняются со временем пространственные координаты индивидуальных точек среды.

1.7. Два подхода к описанию движения: лагранжев и эйлеров

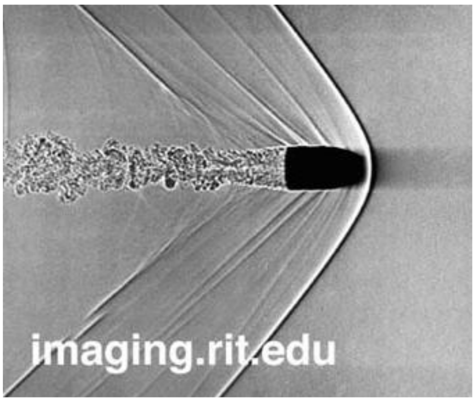
Лагранжев подход (лагранжево описание). При описании движения по Лагранжу мы следим за тем, что происходит в каждой индивидуальной точке среды.



При лагранжевом описании все величины (скорость $\vec{\upsilon}$, температура T , давление p и. т. д.) рассматриваются как функции времени и лагранжевых координат:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),\ T = T(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),\ p = p(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

Эйлеров подход (эйлерово описание). При описании движения по Эйлеру мы изучаем, что происходит в точках пространства, через которые движется среда.

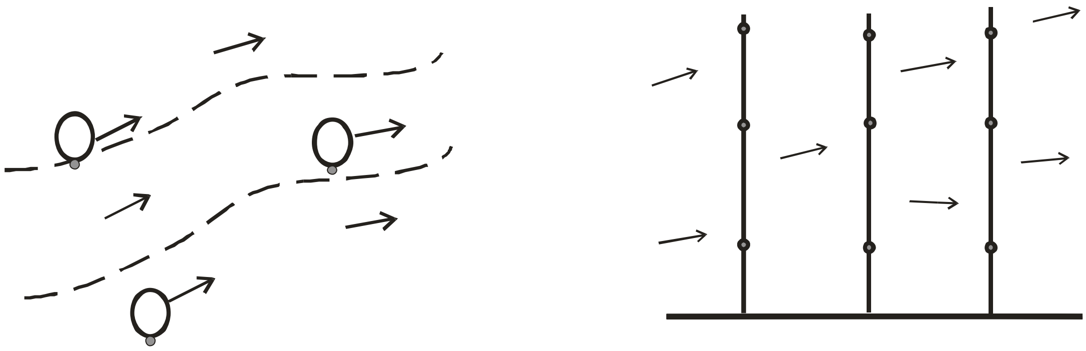


Величины, характеризующие движение сплошной среды, рассматриваются при эйлеровом подходе как функции пространственных координат x_1, x_2, x_3 и времени

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t, x_1, x_2, x_3)\,,\; T = T(t, x_1, x_2, x_3),\; p = p(t, x_1, x_2, x_3)$$

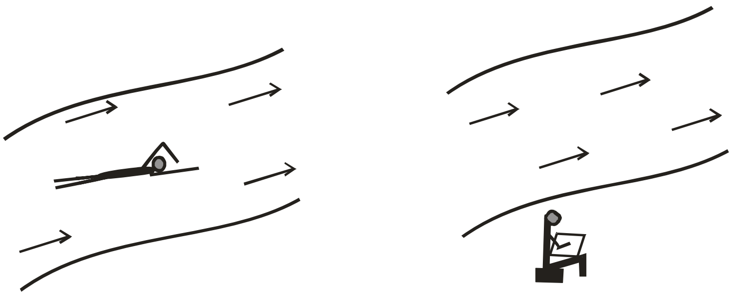
Отметим, что в этих формулах x_1, x_2, x_3 - координаты точек пространства, в которых мы наблюдаем или вычисляем параметры среды.

Сравнение лагранжева и эйлерова подходов



(а) *(б)*

а) Лагранжево описание: шары с измерительными приборами летят вместе с частицами воздуха; б) эйлерово описание: параметры воздушного потока измеряют приборы, помещенные на специальных мачтах.



а) б)

а) лагранжев подход; б) эйлеров подход.

1.8. Материальная (индивидуальная) производная по времени.

Материальная или индивидуальная производная по времени от величины f описывает, как меняется со временем величина f в индивидуальной точке среды. Это ее физический смысл.

В механике сплошных сред индивидуальная производная f по t обозначается $\dfrac{df}{dt}$.

Чему равна индивидуальная производная f по t, если f задана по способу Лагранжа, то есть $f = f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$? Так как для индивидуальной точки $\xi_1 = \mathrm{const}$, $\xi_2 = \mathrm{const}$, $\xi_3 = \mathrm{const}$, то при лагранжевом описании индивидуальная производная $f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ есть просто частная производная по t:

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t}\right|_{\xi=\mathrm{const}}$$

Здесь символом ξ обозначен набор ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Чему равна индивидуальная производная f по t, если f задана по способу Эйлера, то есть $f = f(t, x_1, x_2, x_3)$? Для индивидуальной точки x_i меняются со временем: $x_1 = x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_2 = x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_3 = x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Поэтому для индивидуальной точки f является сложной функцией времени: f зависит от t, x_i, а x_i зависят от t и ξ_k, и индивидуальная производная вычисляется как производная сложной функции:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\xi_k=\mathrm{const}} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_{\xi_k=\mathrm{const}} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\xi_k=\mathrm{const}}$$

Далее, производные по времени от x_i при постоянных ξ_k суть компоненты скорости частицы

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\xi_k=\mathrm{const}} = \upsilon_1, \quad \left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_{\xi_k=\mathrm{const}} = \upsilon_2, \quad \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\xi_k=\mathrm{const}} = \upsilon_3$$

Поэтому выражение для индивидуальной производной при эйлеровом описании таково

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial f}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\upsilon_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + \upsilon_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

В последнем выражении использовано соглашение о суммировании - правило Эйнштейна.

Правило Эйнштейна: если в одночлене какой-то индекс повторяется дважды, то по этому индексу производится суммирование от 1 до 3, а знак суммы не пишется:

$$\upsilon_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \sum_{k=1}^{3} \upsilon_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

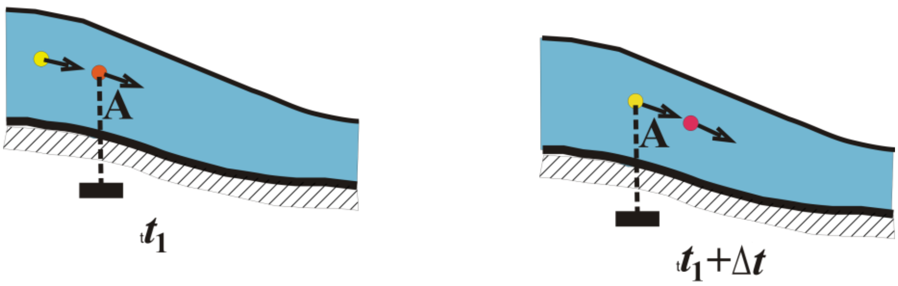
Физический смысл частной производной $\dfrac{\partial f(t, x_k)}{\partial t}$.

Величина $\dfrac{\partial f(t, x_k)}{\partial t}$ описывает изменение f со временем в фиксированной точке пространства; она называется локальной производной f по времени.

Если среда движется, то в рассматриваемой точке пространства в разные моменты времени находятся разные индивидуальные точки среды.

Приближенное значение $\dfrac{\partial f(t, x_k)}{\partial t}$ в точке A в момент времени t_1 измеряется так:

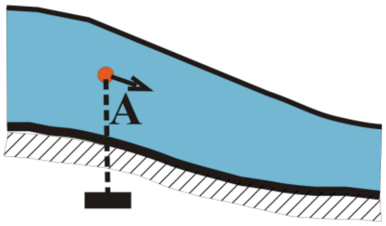
$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{\text{жёлт}}(t_1 + \Delta t, x_A) - f_{\text{красн}}(t_1, x_A)}{\Delta t}$$



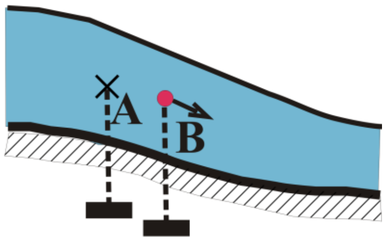
Физический смысл индивидуальной производной $\dfrac{df(t, x)}{dt}$

Для измерения величины индивидуальной производной в данной точке A в момент времени t_1 надо измерить f при $t = t_1$ в той частице, которая находится в этот момент в точке A, затем в близкий момент $t_1 + \Delta t$ измерить f в той же самой индивидуальной частице (которая в этот момент находится уже не в точке A, а в точке B!) и разность полученных значений разделить на Δt:

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f_{\text{красн}}(t_1+\Delta t, x_B) - f_{\text{красн}}(t_1, x_A)}{\Delta t}$$



t_1



$t_1+\Delta t$

1.9. Формулы для вычисления ускорений по скоростям

Ускорение $\vec{a}$ индивидуальной точки есть скорость изменения ее скорости со временем, то есть

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt},$$

где $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ - индивидуальная производная скорости по времени.

Если скорость задана по Лагранжу, то есть, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t,\ \xi_k)$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}(t,\xi_k)}{\partial t}.$$

Если скорость задана по Эйлеру, то есть, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t,\ x_k)$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_3}$$

Для проекций ускорения на координатные оси x_1, x_2, x_3 декартовой системы это равенство дает:

$$a_1 = \frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3}$$

$$a_2 = \frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3}$$

$$a_3 = \frac{d\upsilon_3}{dt} = \frac{\partial \upsilon_3}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}$$

Если декартовы координаты обозначены x, y, z, то формулы для компонент ускорения имеют вид

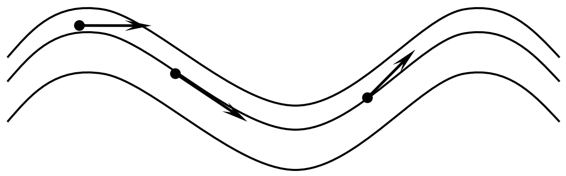
$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}$$

1.9. Линии тока и траектории.

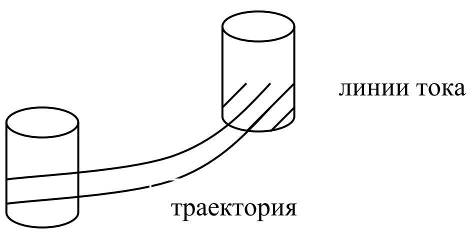
Линия тока – это линия, которая определяется для фиксированного момента времени и обладает тем свойством, что в каждой её точке направление касательной совпадает с направлением вектора скорости среды. Отметим, что в рассматриваемый момент времени в разных точках линии тока находятся разные частицы.



Линии тока.

Траектория – это путь индивидуальной частицы; в каждой точке траектории направление касательной к траектории совпадает с направлением вектора скорости. Здесь имеется в виду скорость одной и той же частицы в разные моменты времени, в то время как, говоря о линии тока, мы рассматриваем скорости разных частиц в один и тот же момент времени.

Пример. Поступательное движение стакана с жидкостью по криволинейной траектории.



Линии тока в каждый момент времени – параллельные прямые. При этом траектории всех частиц – криволинейные.

1.10. Установившееся и неустановившееся движение.

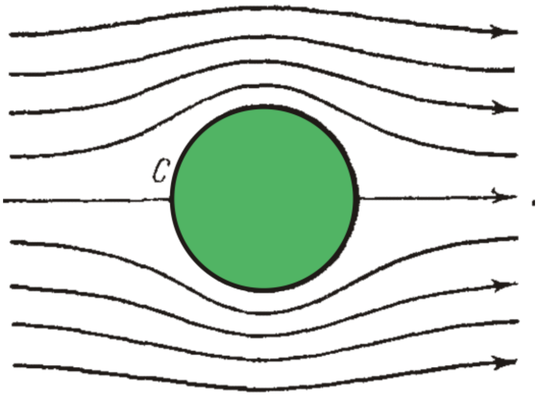
Движение называется установившимся или стационарным, если <u>в каждой точке пространства</u>, через которое движется среда, все характеристики происходящих процессов не меняются со временем.

Это означает, что при эйлеровом описании в установившемся движении частные производные по времени от всех параметров при постоянных пространственных координатах равны нулю:

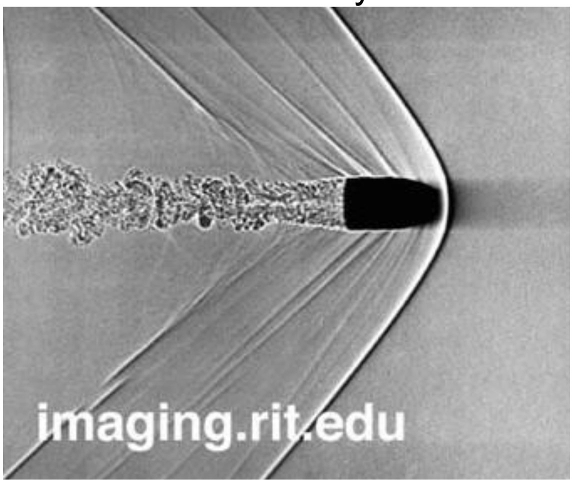
$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial t} = 0,\ \ldots$$

Часто при неменяющихся внешних условиях движение является установившимся.

Замечание 1. Индивидуальные производные по времени при установившемся движении могут быть отличны от нуля. Например, при обтекании тел жидкостью с постоянной скоростью движение установившееся, но ускорение частиц не равно нулю: при подходе к телу частицы тормозятся, меняют направление своего движения, потом разгоняются и так далее.



Замечание 2. Понятие стационарности относительно. Например, в системе отсчета, связанной с летящим с постоянной скоростью телом, параметры воздуха вокруг тела не зависят от времени, движение воздуха установившееся. В системе отсчета, связанной с землей, это же движение является неустановившимся.



==