Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 13

I. Уравнения одномерной газовой динамики в характеристической форме
II. Волны Римана

Литература. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика том VI Гидродинамика §64, 70; *Г.Г. Черный*. Газовая динамика . Глава 2 §1- 7; *А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова*, Нелинейные волны в упругих средах, Глава 1; *А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, А.П. Чугайнова*. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. §1- 4. www.mi-ras.ru › noc › lectures

Лекция 13. (Эглит М.Э.)

13.1. Уравнения, описывающие баротропное одномерное движение газа, в характеристической форме.

13.2. Инварианты Римана

13.3. Метод характеристик для построения решения

13.4. Распространение малых возмущений в однородном потоке. Дозвуковые и сверхзвуковые потоки

13.5. Граничные условия. Правило для вычисления необходимого числа граничных условий (условия эволюционности границы)

13.6. Волны Римана

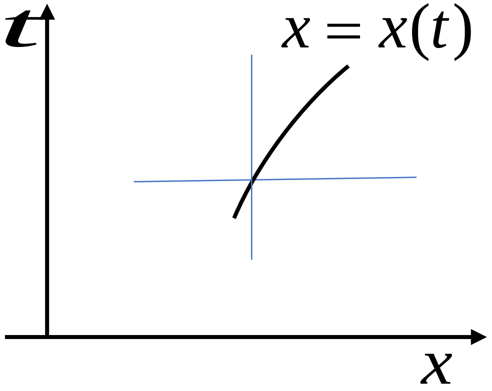
13.1. Уравнения, описывающие баротропное одномерное движение газа,в характеристической форме.

Одномерное движение с плоскими волнами, $p = p(\rho)$, массовых сил нет

(13.1)
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial x}=0\\ &\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0\\ &\text{где }\ \upsilon=\upsilon_x,\quad a^2(\rho)=\frac{dp}{d\rho}\end{aligned}}$$

В каждое уравнение системы (13.1) входят производные по двум направлениям в плоскости x, t – вдоль осей x и t . Комбинируя эти уравнения, можно получить другие два уравнения, такие, что каждое из них содержит производные от ρ и υ только по одному направлению (своему для каждого уравнения и в каждой точке).

Замечание. Система, для которой это возможно , называется системой гиперболического типа.



Производная f$(t, x(t))$ по направлению $\frac{dx}{dt} = \alpha$ в плоскости x, t:
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\alpha.$$

Умножая первое из уравнений (13.1) на некоторый множитель l , а второе на m и складывая их, получаем:

$$l\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\upsilon+\frac{m}{l}\frac{a^2}{\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]+m\left[\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\left(\upsilon+\frac{l}{m}\rho\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right]=0$$

Выражения в квадратных скобках - производные по одному и тому же направлению, если: $\upsilon+\frac{m}{l}\frac{a^2}{\rho}=\upsilon+\frac{l}{m}\rho$, то есть, $\boxed{\frac{l}{m}=\pm\frac{a}{\rho}}$

При $\frac{l}{m}=\frac{a}{\rho}$ получаем уравнение $\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0$, где $\frac{d}{dt}$ – производная по направлению $\frac{dx}{dt}=\upsilon+a$;

При $\frac{l}{m}=-\frac{a}{\rho}$ получаем уравнение $\frac{d\upsilon}{dt}-\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0$, где $\frac{d}{dt}$ – производная по направлению $\frac{dx}{dt}=\upsilon-a$

Уравнения в характеристической форме и уравнения характеристик

Итак, исходная система уравнений (13.1) приводится к виду (13.2) :

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0$$
$$\frac{d\upsilon}{dt}-\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0 \qquad (13.2)$$

Здесь $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+c_{\pm}\frac{\partial}{\partial x}$ означает производные по направлениям, определяемым формулами

$$\frac{dx}{dt}=c_{\pm}=\upsilon\pm a \qquad (13.3)$$

Знак «+» берется для первого уравнения (13.2), а «-» для второго.

Линии $x = x(t)$, определяемые равенствами (13.3), есть характеристики системы уравнений (13.1), $c_{\pm}=\upsilon\pm a$ называются скоростями характеристик. Получилось, что для системы (13.1) имеется 2 семейства характеристик – одни со скоростями $c_{+}=\upsilon+a$ (назовем их A_+) и другие со скоростями $c_{-}=\upsilon-a$ (назовем их A_-).

Сами уравнения (13.2) называют уравнениями в характеристической форме или условиями на характеристиках.

13.2.Инварианты Римана

Условия на характеристиках (13.2) можно проинтегрировать вдоль характеристик:

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left[\upsilon+\int\frac{a(\rho)}{\rho}d\rho\right]=0$$
$$\frac{d\upsilon}{dt}-\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left[\upsilon-\int\frac{a(\rho)}{\rho}d\rho\right]=0$$

Система (13.2) сводится к следующим соотношениям

$$I_{+}=\upsilon+w=\mathrm{const} \quad \text{вдоль характеристик } A_{+} \quad \left(\frac{dx}{dt}=c_{+}=\upsilon+a\right)$$
$$I_{-}=\upsilon-w=\mathrm{const} \quad \text{вдоль характеристик } A_{-} \quad \left(\frac{dx}{dt}=c_{-}=\upsilon-a\right) \qquad (13.4)$$

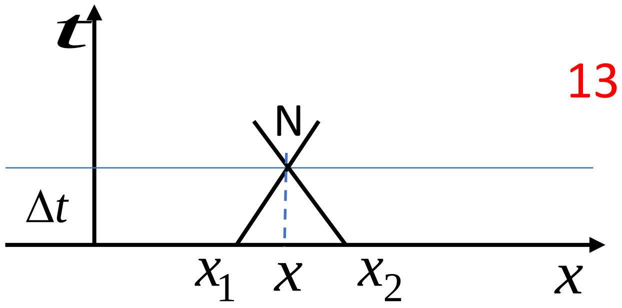
Обозначение: $w=\int\frac{a(\rho)}{\rho}d\rho$

Величины I_+ и I_- называются инвариантами Римана

Пример. Инварианты Римана и уравнения для адиабатического движения идеального совершенного газа

$$\boxed{p = A\rho^{\gamma}, \quad A = const}\ ; \quad a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}} \quad ; \quad w = \int \frac{a}{\rho} d\rho = \sqrt{A\gamma}\int \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} d\rho = \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}} = \frac{2a}{\gamma-1}\ ; \quad I_{\pm} = \upsilon \pm w = \upsilon \pm \frac{2a(\rho)}{\gamma-1}$$

Уравнения в характеристической форме $\upsilon + \dfrac{2a(\rho)}{\gamma-1} = \mathrm{const}$ вдоль A_+, $\upsilon - \dfrac{2a(\rho)}{\gamma-1} = \mathrm{const}$ вдоль A_-



13.3.Метод характеристик для построения решения

Опишем этот метод на примере решения задачи с начальными данными в безграничном пространстве: при $t = 0$ заданы $\upsilon(x, 0)$, $\rho(x, 0)$. Требуется найти значения $\upsilon(x, t)$, $\rho(x, t)$ при $t > 0$.

Решение. Рассмотрим момент времени $t = \Delta t$, Δt мало . Вычислим υ, ρ в точке N$(x, \Delta t)$. Для этого проведем через точку N характеристики A_+ , A_- (считаем, что при малом Δt наклоны характеристик мало отличаются от наклонов в точке $(x, 0)$. Эти характеристики пересекают ось $t = 0$ в точках $x = x_1$ и $x = x_2$, где значения υ, ρ известны.

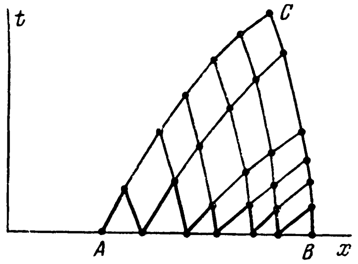
Вдоль характеристик соответствующие инварианты Римана сохраняются:

$$\begin{aligned} &1)\ \ \upsilon(x_1, 0) + w(x_1, 0) = \upsilon(x, \Delta t) + w(x, \Delta t) \\ &2)\ \ \upsilon(x_2, 0) - w(x_2, 0) = \upsilon(x, \Delta t) - w(x, \Delta t) \end{aligned} \qquad (13.5)$$

Отсюда находим $\upsilon(x, \Delta t)$, $\rho(x, \Delta t)$ в точке N. Так можно вычислить υ, ρ для любых x в момент Δt.

Переход от Δt к $2\Delta t$ делается аналогично.

Замечание. Решение таким способом может быть найдено всюду, если через каждую точку проходит только одна пара характеристик, то есть, характеристики одного и того же семейства нигде не пересекаются.



Область зависимости и область влияния начальных данных в задаче Коши

В задаче Коши решение в точке C в момент времени t_1 зависит только от начальных данных на отрезке AB ($x_{\mathrm{I}} \leq x \leq x_{\mathrm{II}}$) оси x, который вырезается характеристиками, проходящими через точку С на плоскости x, t (Рис 1 и 2а)

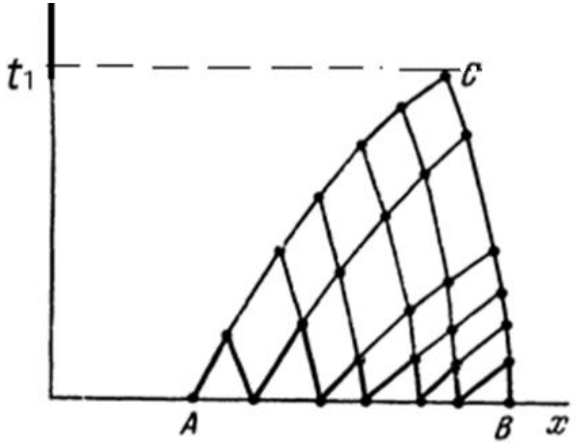


Рис 1

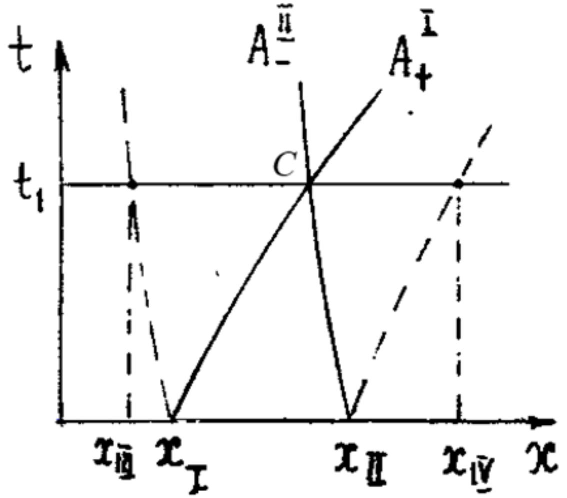


Рис 2а

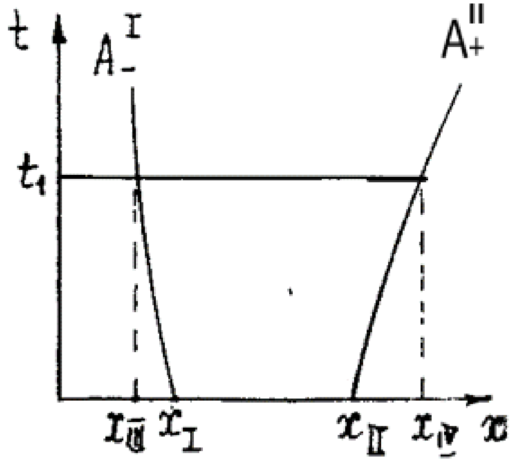


Рис 2б

С другой стороны, область влияния начальных данных, заданных на отрезке ($x_{\mathrm{I}} \leq x \leq x_{\mathrm{II}}$) оси x, в момент t_1 есть отрезок ($x_{\mathrm{III}} \leq x \leq x_{\mathrm{IV}}$) , высекаемый на линии $t = t_1$ характеристиками, выходящими из концов отрезка ($x_{\mathrm{I}} \leq x \leq x_{\mathrm{II}}$) оси x , где заданы начальные данные (Рис 2б).

Отсюда следуют 2 факта.

1) Границы влияния этих начальных данных распространяются в пространстве со скоростями характеристик $\upsilon \pm a$, а относительно движущихся частиц среды – со скоростями $\pm a$.

2) Изменение начальных данных внутри интервала ($x_{\mathrm{I}} < x < x_{\mathrm{II}}$) с сохранением непрерывности на границах не влияет на решение в областях правее и левее характеристик $\mathrm{A}_{-}^{\mathrm{I}}$, $\mathrm{A}_{+}^{\mathrm{II}}$. Значит, решения, определенные по начальным данным из отрезка ($x_{\mathrm{I}} \leq x \leq x_{\mathrm{II}}$), можно склеивать вдоль характеристик с разными решениям во внешних областях. Граничные характеристики будут тогда в общем случае линиями слабого разрыва решения.

Распространение малых возмущений в однородном потоке

В Лекции 7 мы рассмотрели распространение малых возмущений в виде плоских волн в покоящейся жидкости. Нашли, что они распространяются со скоростями $\pm a_0$ и назвали характеристиками линии $\frac{dx}{dt} = \pm a_0$.
Можно считать, что на самом деле имеется не покоящаяся жидкость, а однородный поток со скоростью υ_0, но мы рассматривали это явление в системе координат, движущейся вместе с жидкостью. По отношению к этой подвижной системе координат жидкость была неподвижна. Если теперь перейти к системе координат, связанной с пространством, относительно которого движется жидкость, то скорость жидкости будет υ_0, а скорости характеристик (скорости распространения малых возмущений) $\upsilon_0 \pm a_0$.

Это можно получить и формально, рассматривая линеаризованные уравнения (13.1)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \upsilon_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \upsilon'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \upsilon'}{\partial t} + \upsilon_0 \frac{\partial \upsilon'}{\partial x} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \qquad (13.1')$$

где $\upsilon = \upsilon_x, \quad a^2(\rho) = \frac{dp}{d\rho}$

Эти уравнения в характеристической форме

$$\frac{d\upsilon'}{dt} + \frac{a_0}{\rho_0}\frac{d\rho'}{dt} = 0 \text{ вдоль } \frac{dx}{dt} = c_{0+} = \upsilon_0 + a_0$$

$$\frac{d\upsilon'}{dt} - \frac{a_0}{\rho_0}\frac{d\rho'}{dt} = 0 \text{ вдоль } \frac{dx}{dt} = c_{0-} = \upsilon_0 - a_0$$

Инварианты Римана

$$I_+ = \upsilon' + \frac{a_0}{\rho_0}\rho'$$

$$I_- = \upsilon' - \frac{a_0}{\rho_0}\rho'$$

Характеристики в этом случае – прямые линии, скорости распространения возмущений $\upsilon_0 \pm a_0$.
Если $\upsilon_0 < a_0$ (поток дозвуковой), то $\upsilon_0 + a_0 > 0$, $\upsilon_0 - a_0 < 0$, возмущения распространяются как вниз по течению, так и вверх по течению, против потока.
Если $\upsilon_0 > a_0$ (поток сверхзвуковой), то $\upsilon_0 + a_0 > 0$, $\upsilon_0 - a_0 > 0$, возмущения распространяются только вниз по течению! Сверхзвуковой поток не знает, что где-то впереди есть источник возмущений.

13.5. Задачи с граничными условиями. Необходимое число граничных условий.

Пусть имеется движущаяся заданным или неизвестным заранее образом (в частном случае неподвижная) граница потока, например, стенка, поршень в трубе, или некоторая мысленно выделенная граница области, где проводится расчет течения. Пусть $x = X(t)$ - уравнение границы (линия в плоскости *x, t)* , а решение ищется в области $x > X(t)$.

Нужно ли задавать на $x = X(t)$ граничные условия, сколько их должно быть и какой они могут иметь вид?

Для ответа попытаемся найти v и ρ методом характеристик. Пусть в момент t_n v и ρ всюду при $x \geq X(t)$ известны, а надо найти v и ρ в близкий момент $t_n + \Delta t$ всюду, в том числе на границе $x = X(t)$. Возможны 3 случая взаимного расположения границы и характеристик A_+ и A_- в момент t_n, а значит и в близкий момент $t_n + \Delta t$ (рис. (1-3)).

$$1)\ c_+ < \frac{dX}{dt},\ c_- < \frac{dX}{dt}.$$

Обе характеристики приходят на границу из области, где решение известно. Параметры на границе вычисляются из системы (13.5). Ни одного граничного условия не нужно (если граница известна).

$$2)\ c_- < \frac{dX}{dt} < c_+.$$

Только одна характеристика A_- приходит на границу из области, где решение известно; A_+ уходит от границы. Для нахождения v и ρ на границе имеем только одно (второе) из уравнений (13.5). Необходимо 1 граничное условие.

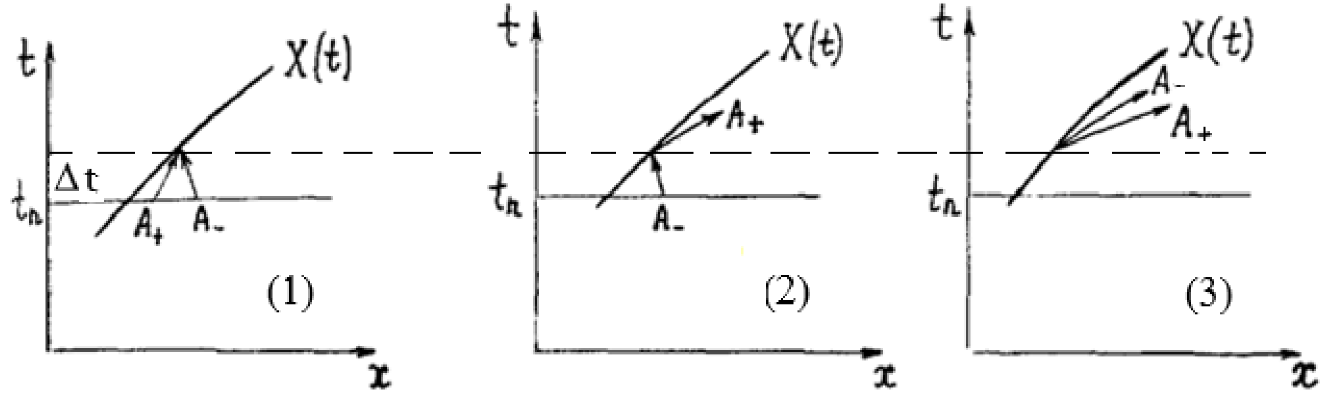
$$3)\ c_+ > \frac{dX}{dt},\ c_- > \frac{dX}{dt}.$$

Обе характеристики уходящие.
Необходимы 2 граничных условия

Правило

Если положение границы не задано, то число граничных условий N должно быть равно числу уходящих характеристик $N_{уходящ}$ плюс одно, определяющее положение границы:

$$N = N_{уходящ} + 1$$



Если это правило выполнено, то граница называется эволюционной: можем описать развитие (эволюцию) решения во времени.

13.6. Волны Римана (простые волны)

Простыми волнами или волнами Римана называют решения одномерных уравнений с плоскими волнами, в которых искомые функции зависят не отдельно от x, t, а только от некоторой их комбинации $\varphi(x,t)$:

Здесь и далее φ – не потенциал скорости, а просто какая-то комбинация x, t

Подставим в систему (13.1) $\upsilon=\upsilon(\varphi), \quad \rho=\rho(\varphi), \quad \varphi=\varphi(x,t)$. Получим

$$\frac{d\rho}{d\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\rho\frac{d\upsilon}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

$$\frac{a^2}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{d\upsilon}{d\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0 \qquad (13.6)$$

Чтобы эта система относительно $\frac{dv}{d\varphi}, \frac{d\rho}{d\varphi}$ имела ненулевые решения, надо, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=0$$

то есть

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\upsilon\pm a=c_\pm \qquad (13.7)$$

Величина $-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ определяет наклон линий φ=const в плоскости x, t:

вдоль φ=const $\quad d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt=0$, то есть, $\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x}$

Итак, линии φ=const должны быть либо характеристиками A_+ , либо характеристиками A_- . Соответственно можно получить два решения, каждое из которых является простой волной. С учетом (13.7) уравнения (13.6) дают

Вариант I: $-\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}+\frac{d\upsilon}{d\varphi}=0$, а линии $\varphi=\mathrm{const}$ – это характеристики A_+

Вариант II: $\frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}+\frac{d\upsilon}{d\varphi}=0$, а линии $\varphi=\mathrm{const}$ – это характеристики A_-

(13.8)

Вспоминая определение инвариантов Римана, видим, что в варианте (I) $I_-=\mathrm{const}$, а в варианте (II) $I_+=\mathrm{const}$

Волны Римана (продолжение)

Итак, 2 решения, каждое из которых является простой волной, определяются формулами:

Решение I: $\upsilon = \upsilon(\varphi)$, $\rho = \rho(\varphi)$, линии $\varphi = \mathrm{const}$ – это характеристики A_+, $I_- = \upsilon - \int \frac{a}{\rho} d\rho = \mathrm{const}$ во всем потоке

Решение II: $\upsilon = \upsilon(\varphi)$, $\rho = \rho(\varphi)$, линии $\varphi = \mathrm{const}$ – это характеристики A_-, $I_+ = \upsilon + \int \frac{a}{\rho} d\rho = \mathrm{const}$ во всем потоке

Рассмотрим, например, решение I, в котором $\boxed{I_- = \upsilon - \int \frac{a}{\rho} d\rho = \mathrm{const} = M\,.}$

Это значит, в частности, что $\upsilon = M + \int \frac{a}{\rho} d\rho = \upsilon(\rho)$, $I_+ = \upsilon + \int \frac{a}{\rho} d\rho = M + 2\int \frac{a}{\rho} d\rho = I_+(\rho)$, $c_+ = M + \int \frac{a}{\rho} d\rho + a = c_+(\rho)$

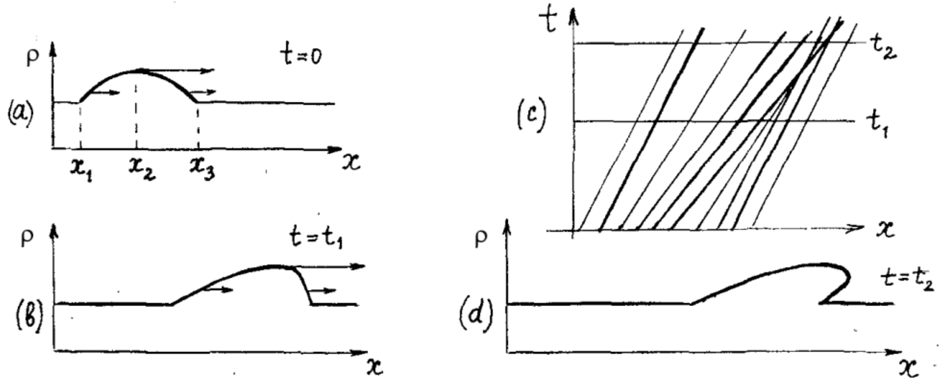
Так как всегда $I_+ = \mathrm{const}$ вдоль характеристики A_+, то в решении I вдоль A_+ имеем $\rho = \mathrm{const}$, а значит $c_+ = \mathrm{const}$

Значит, в решении I характеристики A_+ - прямые линии, их уравнения $x - c_+ t = \mathrm{const}$

Так как семейство линий $\varphi = \mathrm{const}$ совпадает с семейством A_+, то $\boxed{\varphi = x - c_+ t,\ \ \upsilon = \upsilon(x - c_+ t),\ \ \rho = \rho(x - c_+ t)}$

Каждое значение ρ и соответствующее ему значение υ переносятся без изменения вдоль оси x со скоростью c_+

Значит, это волна, но так как $c_+ = c_+(\rho)$, то форма этой волны при перемещении меняется



Куликовский Андрей Геннадьевич.
академик РАН.

Конец Лекции 13

Свéшникова Елéна Ивáновна
Профессор кафедры
гидромеханики