Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 10
Плоские потенциальные течения несжимаемой жидкости. Применение функций комплексного переменного

Литература. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Т.I Гл.IV §11-22; Гл.VI §1-3; Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. Гл.V §43, 44.
М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Гл.I §1-3; Гл. II §1, 2.

Лекция 10. (Эглит М.Э.)

Плоские потенциальные течения несжимаемой жидкости. Применение функций комплексного переменного

10.1. Плоские (плоскопараллельные) течения

10.2. Плоские течения несжимаемой жидкости. Функция тока

10.3. Механический смысл функции тока

10.4. Уравнения Лапласа для потенциала скорости и функции тока потенциального течения несжимаемой жидкости

10.5. Применение функций комплексного переменного для плоских потенциальных течений несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал и комплексная скорость

10. 6. Примеры комплексных потенциалов

10.7. Формулировка задачи об обтекании тела как задачи о нахождении комплексного потенциала W(z)

10.8. Решение задачи об обтекании кругового цилиндра

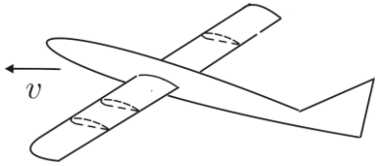
10.9. Метод конформных отображений для задач об обтекании тел

10.1. Плоские (плоскопараллельные) течения жидкости

Течение называется плоским или плоскопараллельным, если выполнены два условия: 1) скорости всех точек параллельны некоторой плоскости; 2) все характеристики движения не зависят от расстояния до этой плоскости, то есть, все происходит одинаково во всех плоскостях, параллельных этой плоскости.

Если эту плоскость принять за плоскость x, y, то для плоских течений $\boxed{\upsilon_z = 0, \;\; \upsilon_x = \upsilon_x(x,y,t), \;\; \upsilon_y = \upsilon_y(x,y,t)}$

Примеры: 1) обтекание средней части длинного крыла самолета, то есть части, находящейся на достаточном расстоянии от фюзеляжа и от конца крыла;
2)обтекание опоры моста вдали от дна и поверхности воды; 3) обтекание высокого здания



изучаем обтекание профиля крыла

Обтекание небоскреба ветром

10.2. Плоские течения несжимаемой жидкости. Функция тока

Если 1) течение плоское и 2) жидкость несжимаемая, то можно ввести так называемую функцию тока следующим образом. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости для плоских течений имеет вид

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}=0, \text{ то есть, } \frac{\partial}{\partial x}(\upsilon_x)=\frac{\partial}{\partial y}(-\upsilon_y) \qquad (10.1)$$

Рассмотрим дифференциальную форму $\upsilon_x(x,y)dy-\upsilon_y(x,y)dx$. Когда это есть дифференциал некоторой функции?

Математика: $A(x,y)dx+B(x,y)dy=df(x,y)$ *если и только если* $\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}$ (*)

Для нашей формы условие (*) удовлетворено – это условие (10.1) !

Поэтому существует функция ψ такая, что $\upsilon_x dy-\upsilon_y dx=d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при дифференциалах координат, получаем

$$\upsilon_x=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \upsilon_y=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (10.2)$$

Функция $\psi(x,y,t)$, для которой выполняются соотношения (10.2), называется функцией тока.

Подчеркнем, что функцию тока можно ввести, если выполнены следующие два условия: 1) жидкость несжимаемая, 2) течение плоское.

Течение при этом может быть как безвихревым (потенциальным), так и вихревым. Вычисления показывают, что

$$\omega_x=0,\ \omega_y=0, \qquad \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}-\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{2}\Delta\psi$$

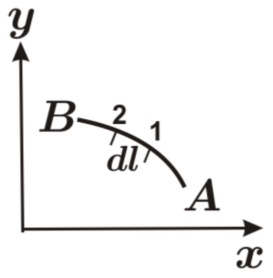
10.3. Механический смысл функции тока

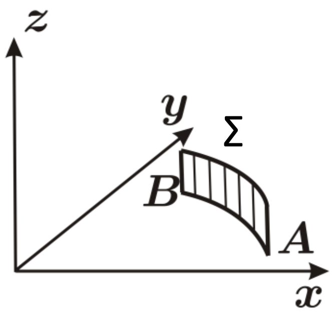
Механический смысл функции тока определяется следующими двумя ее свойствами. 1) ψ = const на линиях тока, то есть, уравнения линий тока имеют вид ψ = const; 2) Расход через любую линию АВ равен ψ(B)- ψ(A)

1) Покажем, что ψ = const на линии тока. Рассмотрим некоторую линию тока и ее малый элемент $d\vec{r}$ - малый вектор с компонентами $\{dx, dy\}$. Он направлен по касательной к линии тока. Вектор скорости тоже направлен по касательной к линии тока, поэтому его компоненты пропорциональны компонентам $d\vec{r}$. Итак, вдоль линии тока выполнено:

$$\boxed{\frac{dx}{\upsilon_x}=\frac{dy}{\upsilon_y},\quad \upsilon_y dx-\upsilon_x dy=0,\quad -\frac{\partial\psi}{\partial x}dx-\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=-d\psi=0,\quad \psi=\text{const}}$$

2) Теперь обсудим и докажем второе свойство функции тока. Под расходом Q через линию АВ подразумевается расход через поверхность Σ единичной высоты с направляющей АВ . Расход через поверхность Σ равен



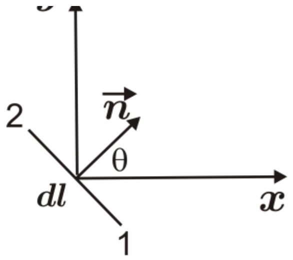


Расход через поверхность Σ равен $Q=\int\limits_{\Sigma}\upsilon_n d\sigma=\int\limits_A^B \upsilon_n dl\cdot 1$

$d\sigma=1\cdot dl$ $\quad dl$ - элемент линии АВ – отрезок между точками 1и 2 (рис)

$\upsilon_n=\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}=\upsilon_x n_x+\upsilon_y n_y$ – проекция скорости на нормаль к линии АВ

$$n_x=\cos\theta,\quad n_y=\sin\theta,\quad dy=y_2-y_1=dl\cos\theta,\quad dx=x_2-x_1=-dl\sin\theta$$



Следовательно,

$$\boxed{Q=\int\limits_A^B(\upsilon_x\cos\theta+\upsilon_y\sin\theta)dl=\int\limits_A^B(\upsilon_x dy-\upsilon_y dx)=\int\limits_A^B\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)=\int\limits_A^B d\psi=\psi(B)-\psi(A)}$$

10.4. Плоские потенциальные течения несжимаемой жидкости. Уравнения Лапласа для потенциала скорости и функции тока

Если плоское течение несжимаемой жидкости потенциально, то можно ввести не только функцию тока $\psi(x, y)$, но и потенциал $\varphi(x, y)$, так что

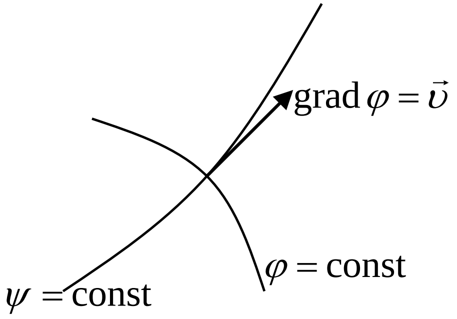
$$\boxed{\upsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \upsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}} \qquad (10.3) \qquad \text{и} \qquad \boxed{\upsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \upsilon_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}} \qquad (10.4)$$

При выполнении (10.3) и (10.4) и потенциал скорости, и функция тока удовлетворяют уравнению Лапласа

Соотношения (10.3) равносильны условию $\vec{\omega}$=0, а (10.4) – условию $\mathrm{div}\vec{v} = 0$

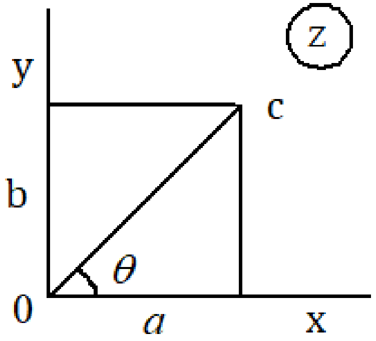
Условие $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ плюс (10.3) дают уравнение Лапласа для потенциала скорости

Условие $\vec{\omega}$=0 плюс (10.4) дают уравнение Лапласа для функции тока



Полезно отметить взаимное расположение линий тока и линий равного потенциала. Системы этих линий взаимно ортогональны

10.5. Применение функций комплексного переменного для плоских потенциальных течений несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал и комплексная скорость



Для плоских задач можно ввести плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$ и рассматривать все величины, являющиеся функциями координат точек на плоскости, как функции комплексной переменной z.

Комплексные числа записываются в виде $c = a + ib = |c|e^{i\theta}$, θ – угол между ОС и осью x

В частности, вектор скорости можно представлять как комплексное число $\upsilon = \upsilon_x + i\upsilon_y$

Из соотношений $\upsilon_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\upsilon_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\upsilon_x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $\upsilon_y = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ следует, что

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}} \qquad (10.5)$$

Соотношения (10.5) называются условиями Коши-Римана для φ, ψ. Их выполнение означает, что комбинация $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ есть функция одной переменной $z = x + iy$: $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = W(z)$ и $W(z)$ - аналитическая, т. е., дифференцируемая, причем производная не зависит от направления дифференцирования в плоскости z.

Определение. Функция $W(z) = \varphi + i\psi$, где φ – потенциал скорости, а ψ – функция тока, называется комплексным потенциалом

Докажем, что $\dfrac{dW}{dz} = \upsilon_x - i\upsilon_y = \bar{\upsilon}$ (черта над буквой означает комплексное сопряжение):

$$\boxed{\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \upsilon_x - i\upsilon_y}$$

(Вычисляем производную по z, дифференцируя по направлению x)

Величина $\dfrac{dW}{dz}$ называется комплексной скоростью

10.6. Примеры комплексных потенциалов

1) Комплексный потенциал поступательного потока.

Комплексный потенциал поступательного потока вдоль оси x со скоростью υ_0: $\boxed{W = \upsilon_0 z = \upsilon_0 x + i\upsilon_0 y}$ $\quad \dfrac{dW}{dz} = \upsilon_0$

Контрольный вопрос. Чему равен комплексный потенциал поступательного потока вдоль оси y со скоростью υ_0 ?

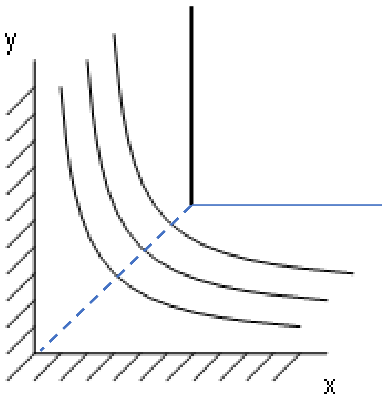
2) Течение внутри прямого угла.

Рассмотрим следующий комплексный потенциал: $\boxed{W = az^2 = a(x+iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy}$ $\quad a$ – действительное

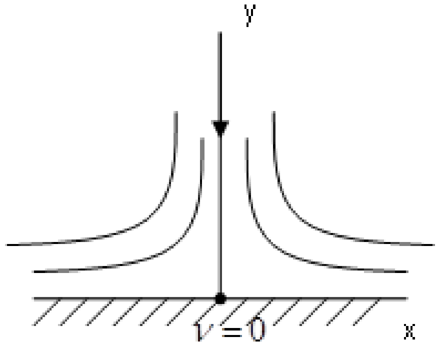
$\boxed{\varphi = a(x^2 - y^2), \quad \psi = 2axy}$

Линии ψ = const - - линии тока. Их уравнения :
а) $y = 0$ (ось x); б) $x = 0$ (ось y); в) $y = \mathrm{const}/2ax$

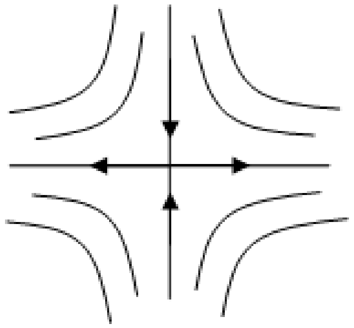
Рассматриваемый потенциал описывает 1) течение внутри прямого угла, а также 2) течение вблизи критической точки при натекании потока на плоскость или 3) течение при столкновении двух потоков

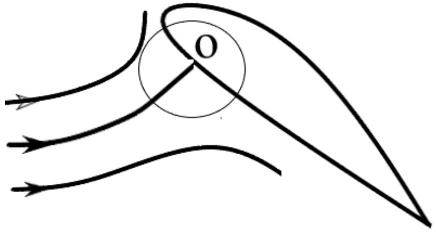


оси y и x – линии тока



критическая точка





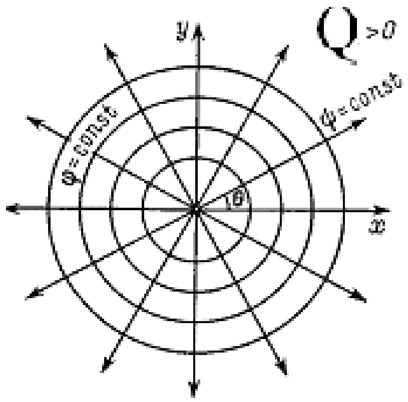
Точка O – критическая точка
$\upsilon = 0$, $W = az^2 + \cdots$

3) Источник или сток на плоскости

$$W=\frac{Q}{2\pi}\ln z=\frac{Q}{2\pi}\ln(re^{i\theta})=\frac{Q}{2\pi}(\ln r+i\theta)$$

$Q=Q(t)$ – действительное.

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln r,\quad \psi=\frac{Q}{2\pi}\theta$$



$$\bar{\upsilon}=\frac{dW}{dz}=\frac{Q}{2\pi z}=\frac{Q\bar{z}}{2\pi r^2}$$

$$\upsilon=\frac{Qz}{2\pi r^2}=\frac{Q}{2\pi r}e^{i\theta}$$

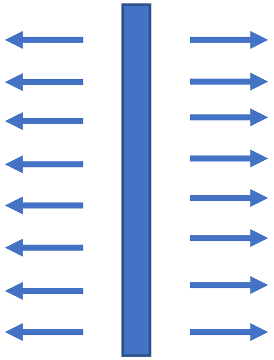
На линиях тока $\psi=const$, то есть, $\theta=const$

Следовательно, линии тока – это лучи, исходящие из начала координат – жидкость либо вытекает из начала координат, либо втекает в эту точку. Количество жидкости, протекающей через линию AB в единицу времени равно

$$\psi(B)-\psi(A)=\frac{Q}{2\pi}(\theta_B-\theta_A)$$

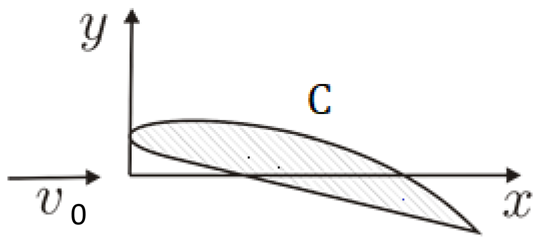
Если линия AB – замкнутый контур, охватывающий начало координат, то $\theta_B-\theta_A=2\pi$ и количество жидкости, протекающей через этот контур в единицу времени, равно Q. При $Q>0$ – источник, при $Q<0$ - сток

Замечание. Мы рассмотрели, что происходит на плоскости (x,y) . Но на самом деле течение происходит в пространстве, одинаковое во всех плоскостях, параллельных плоскости (x,y) . Это означает, что в данном случае мы имеем источники или стоки, расположенные на оси, перпендикулярной плоскости (x,y) . Жидкость растекается от оси, если $Q>0$ (например, движение, возникающее при взрыве вертикального шнура) или притекает к оси, если $Q<0$ (приток нефти к скважине).



10.7. Формулировка задачи об обтекании тела как задачи о нахождении комплексного потенциала W(z)

Каким условиям должна удовлетворять функция $W(z)$, чтобы она была комплексным потенциалом потока, имеющего скорость на бесконечности $v_0 = v_{0x} + iv_{0y}$ и обтекающего заданный контур C ?



Этих условий три.

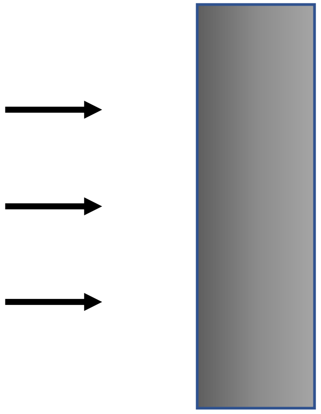
1) $W(z)$ должна быть аналитической, то есть дифференцируемой в области, занятой жидкостью (тогда выполнены условия Коши-Римана и, следовательно, удовлетворяется уравнение Лапласа для потенциала скорости).
2) На контуре C мнимая часть $W(z)$ (то есть, функция тока ψ) должна быть константой (так как по условию непроницаемости скорость на контуре направлена по касательной к контуру, контур есть линия тока).
3) Должно удовлетворяться условие в бесконечности: $\dfrac{dW}{dz} \to v_{0x} - iv_{0y}$ при $z \to \infty$

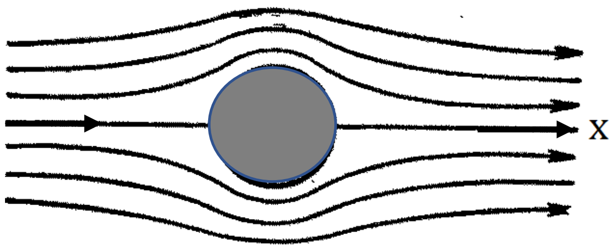
Формулировка задачи для $W(z)$: для заданного контура С и заданной скорости набегающего потока найти $W(z)$, удовлетворяющую условиям (1) – (3)

10.8. Решение задачи об обтекании кругового цилиндра

Рассмотрим следующую функцию $\boxed{W = \upsilon_0\left(z + \dfrac{a^2}{z}\right)}$, где $\upsilon_0 > 0, a > 0$ – действительные числа (10.6)

Проверим, что эта функция представляет собой комплексный потенциал потока, обтекающего цилиндр радиуса a , если ось x направлена параллельно скорости набегающего потока.





1) Производная $\dfrac{dW}{dz}$ в области $r \geq a$ существует

2) Покажем, что условие непроницаемости на поверхности цилиндра выполнено. Найдем потенциал и функцию тока:

$$\boxed{W = \upsilon_0\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{re^{i\theta}}\right) = \upsilon_0\left(r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{a^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)}$$

$$\boxed{\varphi = \upsilon_0 r\cos\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)} \qquad \boxed{\psi = \upsilon_0 r\sin\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}$$

На оси x: $\theta = 0$, $\psi=0$. Ось x – линия тока. На окружности $r = a$: $\psi=0$, окружность $r = a$ – линия тока, поэтому условие непроницаемости выполнено при $r = a$.

3) Проверим, что υ_0 - это скорость набегающего потока (скорость на бесконечности):

$$\boxed{\upsilon_x - i\upsilon_y = \frac{dW}{dz} = \upsilon_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)} \qquad \boxed{\frac{dW}{dz} \to \upsilon_0 \text{ при } z \to \infty}$$

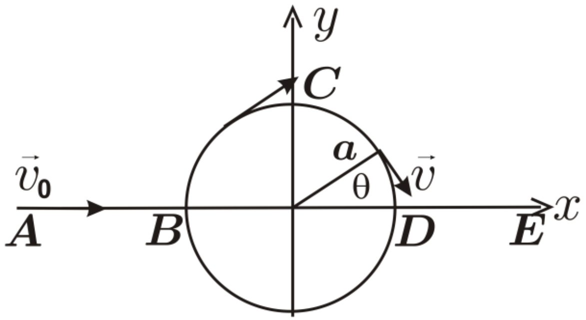
Таким образом, рассматриваемый комплексный потенциал (10.6) действительно описывает обтекание круга $r = a$ или – в пространстве – цилиндра $r = a$

Распределение скорости на поверхности обтекаемого цилиндра

На поверхности цилиндра скорость $\vec{\upsilon}$ направлена по касательной к окружности $r = a$.

Проекция $\vec{\upsilon}$ на касательную к окружности равна $\upsilon_s = \dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$, где s - расстояние вдоль окружности;

$ds = a d\theta$, если мы движемся в направлении возрастания θ.



$$\upsilon_s\Big|_{r=a} = \frac{\partial\varphi}{a\partial\theta}\Big|_{r=a} = -2\upsilon_0 \sin\theta$$

$$\boxed{|\vec{\upsilon}| = 2\upsilon_0 |\sin\theta|}$$

Скорость обращается в нуль при $\theta = 0$, $\theta = \pi$ (точки B, D); это критические точки.
Скорость максимальна при $\theta = \pm\pi/2$ (точка C и противоположная); $\upsilon_{max} = 2\upsilon_0$

Распределение давления на поверхности обтекаемого цилиндра

Если υ_0 не зависит от времени, то можно использовать интеграл Бернулли вдоль линии тока $ABCDE$.

Интеграл Бернулли $\boxed{\dfrac{\upsilon^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} = \dfrac{\upsilon_0^{\,2}}{2} + \dfrac{p_0}{\rho}}$ $\boxed{\upsilon^2 = 4\upsilon_0^{\,2}\sin^2\theta}$ $\Rightarrow$ $\boxed{p = p_0 + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_0^{\,2}(1 - 4\sin^2\theta)}$ (Массовыми силами пренебрегли)

Давление максимально в критических точках B, D $\boxed{p_{\max} = p_0 + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_0^{\,2}}$

Давление минимально в точках с $\theta = \pm\pi/2$ $\boxed{p_{\min} = p_0 - \dfrac{3}{2}\rho\upsilon_0^{\,2}}$

При увеличении скорости набегающего потока именно в этих точках впервые может начаться кавитация. Течения с кавитацией нашим решением не описывается.

Конец Лекции 10

Гео́рг Фри́дрих Бе́рнхард Ри́ман
1826-1866

Диссертация «Основания теории функций комплексной переменной»
1851г.