

Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 4. Второй закон термодинамики

Механика сплошных сред. Лекция 4 (Эглит М.Э.)

I. Универсальные физические законы сохранения. Часть 3.

Второй закон термодинамики.

II. Сводка уравнений, следующих из законов сохранения.

Понятие об определяющих соотношениях

- 4.1. Второй закон термодинамики. Общая формулировка, содержащая понятие энтропии
- 4.2. Формулировка второго закона термодинамики для индивидуального объема сплошной среды
- 4.3. Дифференциальное уравнение энтропии
- 4.4. Производство энтропии в процессе теплопроводности
- 4.5. Формулировка второго закона термодинамики, содержащая «некомпенсированное тепло».
- 4.6. Неравенство Клаузиуса

- 4.7. Сводка уравнений, следующих из законов сохранения.
- 4.8. Понятие об определяющих соотношениях.

4.1. Второй закон термодинамики

Существуют разные формулировки второго закона термодинамики, например: «Тепло не может само собой переходить от холодного тела к горячему» или «Невозможен вечный двигатель второго рода».

При математическом описании процессов используется формулировка второго закона термодинамики, содержащая понятие энтропии. Доказывается, что все три формулировки эквивалентны: каждая из них выводится из остальных.

Второй закон термодинамики. Общая формулировка, содержащая понятие энтропии

1. Для каждой термодинамической системы можно ввести функцию её состояния, называемую энтропией S . Изменение энтропии на любом малом участке процесса dS происходит 1) за счёт притока энтропии извне $d_e S$ и 2) за счёт производства энтропии внутри системы $d_i S$: $dS = d_e S + d_i S$.
2. Производство энтропии всегда неотрицательно: $d_i S \geq 0$; если процесс обратим, то в этом процессе $d_i S = 0$.
3. Приток энтропии извне $d_e S$ связан только с притоком тепла и массы извне.
4. Если притока массы нет и температура всех частей системы одна и та же, то $d_e S = dQ^e / T$, где dQ^e - приток тепла, T – абсолютная температура

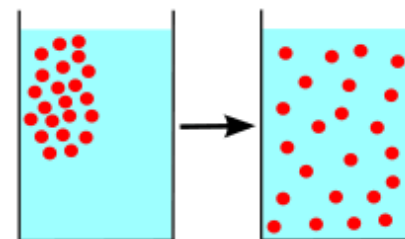
Краткая формулировка второго закона термодинамики в символическом виде:

$$dS = d_e S + d_i S, d_i S \geq 0 \quad (4.1.)$$

Подчеркнем, что здесь dS – дифференциал функции S , а $d_e S$ и $d_i S$ – не дифференциалы каких-то функций, а просто малые приращения энтропии S , обусловленные притоком извне и производством внутри системы.

Замечание о возможности притока массы в индивидуальный объем.

Приток массы к индивидуальному объему среды может происходить за счет диффузии



Обратимые и необратимые процессы

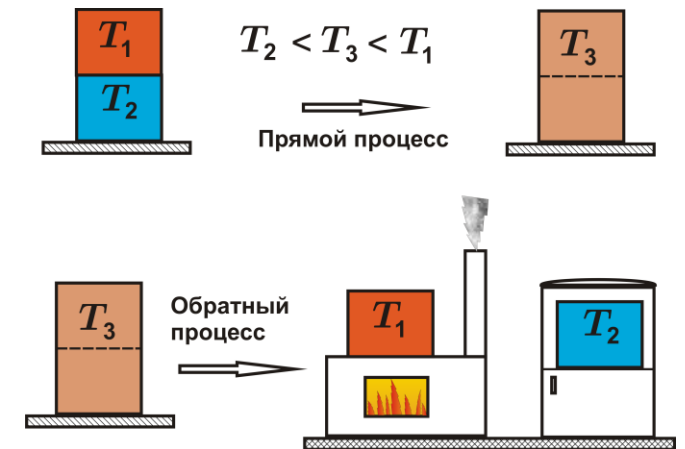
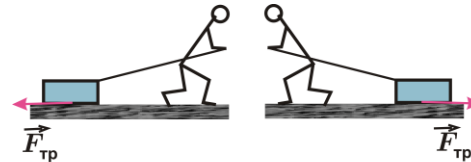
Обратимым называется процесс, для которого выполнены следующие два условия:

- 1) он может проходить через одни и те же состояния, как в прямом, так и в обратном направлении;
- 2) притоки энергии извне в прямом и обратном процессах на всех его участках и во всех частях системы отличаются только знаком.

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, то процесс является **необратимым**.

Примеры необратимых процессов:

- 1) движение при наличии трения: работа внешних сил трения отрицательна как в прямом, так и в обратном движении;
- 2) выравнивание температур контактирующих сред



4.2. Формулировка второго закона термодинамики для индивидуального объема сплошной среды

Для сплошной среды вводят **плотность энтропии s** так:

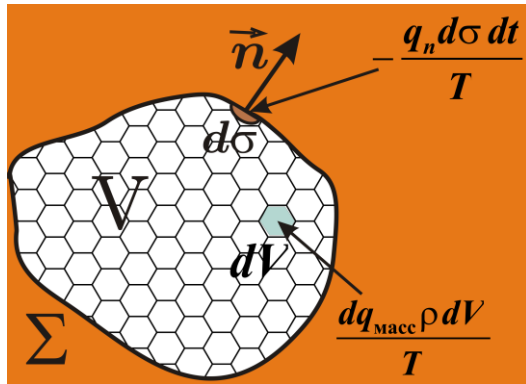
$$s = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\rho \Delta V} \quad \text{Тогда} \quad \Delta S \approx s \rho \Delta V$$

Энтропия объема V :

$$S = \int_V s \rho dV$$

Приток энтропии к объему V за время dt за счет притока тепла

$$d_e S = \frac{dQ^e}{T} ? \text{ нет!}$$



$$dQ^e = dQ_{\text{масс}}^e + dQ_{\text{пов}}^e$$

$$d_e S = (d_e S)_{\text{масс}} + (d_e S)_{\text{пов}}$$

$(d_e S)_{\text{масс}}$

К малой частице:

$$dQ_{\text{масс}} = dq_{\text{масс}} \rho dV$$

$$(d_e S)_{\text{масс}} = \frac{dQ_{\text{масс}}^e}{T} = \frac{dq_{\text{масс}} \rho dV}{T}$$

К объему V :

$$(d_e S)_{\text{масс}} = \int_V \frac{dq_{\text{масс}} \rho dV}{T}$$

Через малую площадку $d\sigma$ за время dt приходит количество энтропии:

$$\frac{q_n dt d\sigma}{T}$$

$(d_e S)_{\text{пов}}$

Приток энтропии через всю поверхность Σ

$$(d_e S)_{\text{пов}} = - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} dt d\sigma = - \int_V \text{div} \frac{\vec{q}}{T} dt dV$$

Использована формула Гаусса-Остроградского

Полный приток энтропии к объему V за время dt за счет массового и поверхностного притоков тепла, таков:

$$d_e S = (d_e S)_{\text{масс}} + (d_e S)_{\text{пов}} = \int_V \left(\frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \frac{1}{\rho} \text{div} \frac{\vec{q}}{T} dt \right) \rho dV = \int_V d_e s \rho dV$$

Обозначение: $d_e s$ – плотность притока энтропии за время dt

$$d_e s = \frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \frac{1}{\rho} \text{div} \frac{\vec{q}}{T} dt$$

Математическая формулировка второго закона термодинамики
для индивидуального объёма сплошной среды (при отсутствии диффузии)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} s \rho dV = \int_V \left(\frac{1}{T} \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} \right) \rho dV + \frac{d_i S}{dt}, \quad \frac{d_i S}{dt} \geq 0$$

Формула дифференцирования интеграла по подвижному **индивидуальному** объёму

$$d_i S = \int_V d_i s \rho dV, \quad d_i s \geq 0$$

$d_i s$ - **плотность производства энтропии** за время dt

$$d_i S = \int_V d_i s \rho dV, \quad d_i s \geq 0$$

2-ой закон термодинамики для объёма среды V

$$\int_V \left(\frac{ds}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{d_i s}{dt} \right) \rho dV = 0, \quad \frac{d_i s}{dt} \geq 0$$

Дифференциальное уравнение энтропии

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} + \frac{d_i s}{dt}, \quad \frac{d_i s}{dt} \geq 0 \quad (4.2)$$

2-ой закон термодинамики (4.2) записывается кратко так $ds = d_e s + d_i s, \quad d_i s \geq 0$

Здесь $d_e s$ – плотность притока энтропии, $d_i s$ – плотность производства энтропии.

Соотношение (4.2) используется как **уравнение**, если выражение для $d_i s$ известно. Например, если все процессы в модели среды обратимы, то $d_i s = 0$. Если выражение $d_i s$ не известно, то соотношение (4.2) используется в виде неравенства.

4.5. Производство энтропии в процессе теплопроводности

Рассмотрим процесс теплопроводности в покоящейся среде. Это необратимый процесс. Пусть массового притока тепла нет, тепло поступает к каждой частице тела только за счет контакта с соседними частицами.

Представим объем V как совокупность малых частиц. Внутри малой частицы температуру можно считать одной и той же во всех точках этой частицы, то есть, теплопроводность **внутри малой частицы** отсутствует. Тогда для малой частицы необратимого процесса нет, поэтому $ds = \frac{dq}{T}$, и изменение энтропии всего объема V таково:

$$dS = \int_V ds \rho dV = \int_V \frac{dq}{T} \rho dV, \quad \text{где} \quad dq = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt. \quad \text{Таким образом,} \quad dS = -\int_V \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} dt dV. \quad (4.3.)$$

Сделаем следующее преобразование интеграла в правой части формулы (4.3):

$$\int_V \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} dt dV = \int_V \frac{1}{T} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dt dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_k}{T} \right) dt dV - \int_V q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right) dt dV = \int_{\Sigma} \frac{1}{T} q_n dt d\sigma + \int_V \frac{1}{T^2} q_k \frac{\partial T}{\partial x_k} dt dV.$$

Таким образом,
$$dS = -\int_{\Sigma} \frac{1}{T} q_n dt d\sigma - \int_V \frac{1}{T^2} q_k \frac{\partial T}{\partial x_k} dt dV.$$

Первый член в правой части формулы - это приток энтропии извне. Значит, второй член - это производство энтропии:

$$d_i S_{\text{теплопр}} = -\int_V \frac{1}{T^2} q_k \frac{\partial T}{\partial x_k} dt dV = -\int_V \frac{1}{T^2} (\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T) dt dV$$

Для производства энтропии на единицу массы в процессе теплопроводности получаем

$$(d_i s)_{\text{теплопр}} = -\frac{1}{\rho T^2} (\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T) dt$$

Если $\vec{q} = -\kappa \operatorname{grad} T$, то $d_i s_{\text{теплопр}} = \frac{\kappa}{\rho T^2} (\operatorname{grad} T)^2 dt \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \kappa \geq 0$

4.6. Формулировка второго закона термодинамики, содержащая «некомпенсированное тепло»

Рассмотрим сначала процессы в среде при условии, что температура во всех точках среды одна и та же, процесса теплопроводности внутри среды нет. Тогда:

$$d_e S = \frac{dQ}{T}; \text{ Второй закон термодинамики } dS = \frac{dQ}{T} + d_i S, \quad d_i S \geq 0 \quad \text{или} \quad TdS = dQ + dQ', \quad dQ' \geq 0,$$

Здесь введено обозначение $dQ' = Td_i S$. Величину dQ' называют **некомпенсированным теплом**

Теперь рассмотрим сплошную среду, в которой температура T может быть разной в разных точках. Напишем уравнение второго закона так: $Tds = dq + dq'$. Что такое dq' ?

Ответ виден из следующего преобразования

$$ds = d_e s + d_i s = \frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} dt + d_i s = \frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \frac{1}{\rho T} \operatorname{div} \vec{q} dt + \frac{1}{\rho T^2} q_k \frac{\partial T}{\partial x_k} dt + d_i s = \frac{dq}{T} + \left(d_i s - (d_i s)_{\text{теплопр}} \right) = \frac{dq}{T} + \overline{\overline{d_i s}}, \quad \text{где} \quad \overline{\overline{d_i s}} = d_i s - (d_i s)_{\text{теплопр}} \quad (4.4.)$$

$\overline{\overline{d_i s}}$ - это плотность производства энтропии во всех необратимых процессах, кроме теплопроводности

Итак, уравнение второго закона можно записать в виде

$$Td_s = dq + dq', \quad \text{где} \quad dq' = T \overline{\overline{d_i s}}, \quad \overline{\overline{d_i s}} \equiv d_i s - (d_i s)_{\text{теплопр}}$$

Величина dq' называется **плотностью некомпенсированного тепла**. Если процесс теплопроводности не зависит явно от других необратимых процессов, то из второго закона термодинамики следует, что

$$dq' \geq 0$$

$$Td_s \geq dq \quad (4.5.)$$

4.6. Неравенство Клаузиуса

Исключим из неравенства энтропии (4.5.) приток тепла. Для этого используем уравнение притока тепла:

$$Tds \geq dq$$

$$dq = du - \frac{1}{\rho} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dt,$$

$$du - \frac{1}{\rho} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dt - Tds \leq 0$$

Неравенство Клаузиуса

Оно должно выполняться для всех процессов во всех средах.

4.7. Сводка уравнений, следующих из законов сохранения

Что такое **математическая модель сплошной среды**? – Это:

- 1) система количественных характеристик рассматриваемых процессов в среде,
- 2) система уравнений, решая которые можно рассчитать характеристики любого изучаемого процесса в этой среде.
- 3) Для расчета конкретных процессов, кроме уравнений, обычно требуется задать так называемые граничные и начальные условия.

Полная система уравнений для любой среды состоит из

- 1) **универсальных** уравнений (то есть выполняющихся для всех сред),
- 2) **определяющих соотношений**, которые описывают свойства конкретной среды или группы сред.

Универсальные уравнения выводятся из законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии, а также второго закона термодинамики

Система универсальных уравнений для **классических** сред ($\vec{k} = 0, \vec{h} = 0, \vec{M}_n = 0, dQ^{**} = 0$)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{- уравнение неразрывности (1 ур);}$$

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho F_k + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i} \quad \text{- уравнения движения (3 ур);}$$

$$p_{ik} = p_{ki} \quad \text{- уравнения момента количества движения (3 ур);}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) + \frac{\partial (p_{ik} v_i)}{\partial x_k} + \rho \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad \text{- уравнение энергии (1 ур);}$$

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho}{T} \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} + \rho \frac{d_i s}{dt}, \quad \frac{d_i s}{dt} \geq 0 \quad \text{- уравнение энтропии (1 ур).}$$

Здесь **9** уравнений с **20** неизвестными величинами:

$$\rho, v_i, p_{ik}, u, q_i, T, s, d_i s$$

(массовые силы и массовые притоки тепла обычно являются заданными).

Необходимы, по крайней мере, **11 добавочных соотношений**.

Понятие об определяющих соотношениях

Для многих сред выполняются следующие 3 соотношения (закон Фурье)

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

В качестве необходимых добавочных восьми соотношений для многих сред задаются

- 1) выражение для плотности внутренней энергии
- 2) выражение для плотности производства энтропии или некомпенсированного тепла
- 3) Выражения p_{ij} как функций ρ, T , компонент тензора скоростей деформаций или тензора деформаций



Конец Лекции 4

Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888)



Николя Леона́р Сади́ Карно́ (1796-1832)



Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824-1907)