Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Презентации лекций можно найти на сайтах

http://gidropraktikum.narod.ru/mss.htm

а также

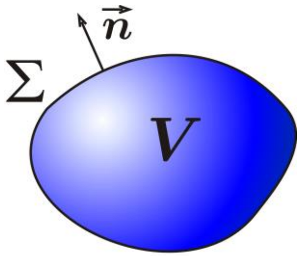
http://gidropraktikum.narod.ru/mss2020.htm

Механика сплошных сред. Лекция 2 (Эглит М.Э.)
Универсальные физические законы сохранения. Часть 1

2.0. Две важные математические формулы: формула Гаусса – Остроградского и формула дифференцирования интеграла по подвижному объему.
2.1. Закон сохранения массы (ЗСМ). Уравнение неразрывности. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды
2.2. Закон сохранения количества движения (импульса) (ЗСКД). Массовые и поверхностные силы. Плотность массовых сил. Вектор напряжений
2.3. Формула Коши для вектора напряжений. Тензор напряжений. Физический смысл компонент.
2.4. Дифференциальные уравнения движения
2.5. Закон сохранения момента количества движения (ЗСМКД). Учет внутреннего момента количества движения, а также массовых и поверхностных пар. Тензор моментных напряжений.
2.6. Дифференциальное уравнение момента количества движения.
2.7. Условия, при которых уравнение момента количества движения сводится к утверждению, что тензор напряжений симметричен

2.0. Две важные математические формулы, которые часто используются в МСС

Формула Гаусса – Остроградского (Г – О)



Формула Г – О дает преобразование интеграла по замкнутой поверхности Σ в интеграл по объему V, ограниченному этой поверхностью. В декартовых координатах x, y, z эта формула имеет вид

$$\int_{\Sigma} \left(P\cos(\widehat{nx}) + Q\cos(\widehat{ny}) + R\cos(\widehat{nz}) \right) d\sigma = \int_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

Здесь P, Q, R - произвольные дифференцируемые функции координат, $\cos(\widehat{nx})$, $\cos(\widehat{ny})$, $\cos(\widehat{nz})$ - косинусы углов между $\vec{n}$ и осями координат, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности Σ; $n_x = \cos(\widehat{nx})$, $n_y = \cos(\widehat{ny})$, $n_z = \cos(\widehat{nz})$

Другой вид формулы Г - О

$$\boxed{\int_{\Sigma} (P n_x + Q n_y + R n_z) d\sigma = \int_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV} \qquad (2.01)$$

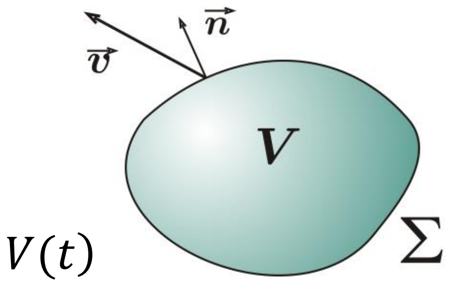
Если $P = v_x, \ \ Q = v_y, \ \ R = v_z$, то

$$\int_{\Sigma} (v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z) d\sigma = \int_{V} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV$$

Или, в краткой записи

$$\boxed{\int_{\Sigma} v_n d\sigma = \int_{V} \operatorname{div} \vec{v} \, dV}$$

Формула дифференцирования по времени t интеграла по подвижному объему



$V(t)$ - подвижный объем, Σ – его поверхность, $\vec{n}$ - единичная нормаль к поверхности Σ, направленная во внешнюю сторону.

В математическом анализе доказывается формула:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} A(x_i,t)dV = \int\limits_{V}\frac{\partial A}{\partial t}dV + \int\limits_{\Sigma} A\,\upsilon_n\ d\sigma} \qquad (2.02)$$

Здесь $A(x_i,t)$ - функция пространственных координат x_i и времени t, $\vec{\upsilon}$ - скорость точек поверхности Σ, υ_n- проекция $\vec{\upsilon}$ на внешнюю нормаль $\vec{n}$ к поверхности Σ

Поверхностный интеграл в формуле (2.02) можно преобразовать в объемный по формуле Гаусса – Остроградского

$$\int\limits_{\Sigma} A\upsilon_n d\sigma = \int\limits_{\Sigma}\left(A\upsilon_x n_x + A\upsilon_y n_y + A\upsilon_z n_z\right)d\sigma = \int\limits_{V}\left(\frac{\partial A\upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial A\upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial A\upsilon_z}{\partial z}\right)dV$$

Тогда формула (2.02) запишется в виде

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} A(x_i,t)dV = \int\limits_{V}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A\upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial A\upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial A\upsilon_z}{\partial z}\right)dV} \qquad (2.2)$$

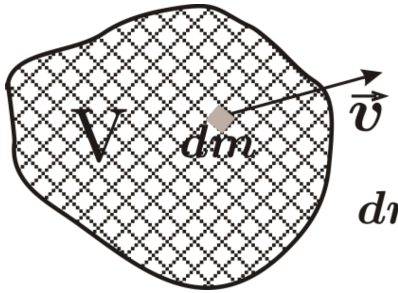
2.1. Закон сохранения массы (ЗСМ)

Масса M индивидуального объема постоянна : $M = \text{const}, \quad \dfrac{dM}{dt} = 0$

Индивидуальным объемом называется объем (часть среды), состоящий из одних и тех же материальных частиц

Бывает важно знать распределение массы по объему. Оно описывается плотностью ρ. В разных частях среды плотность может быть разной. Рассмотрим малую окрестность точки - частицу с объемом ΔV и массой Δm

Средняя плотность частицы: $\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$



$dm = \rho dV$

$$\boxed{\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}}$$ или $$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}, \; dm = \rho dV}$$

Масса объема V равна сумме масс всех частиц

$$\boxed{M = \int_V \rho \, dV}$$

Закон сохранения массы для индивидуального объёма среды

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \rho \, dV = 0}$$

$V_{\text{инд}} = V_{\text{инд}}(t)$ индивидуальный объем

Преобразование ЗСМ с помощью формулы дифференцирования интеграла по подвижному объему и формулы Г О

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_\Sigma \rho \upsilon_n d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{\upsilon} \right) dV = 0$$

Дифференциальное уравнение неразрывности

Из закона сохранения массы выводится дифференциальное уравнение неразрывности:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\vec{v} = 0}$$

или, в другой форме

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0\ .}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}}$$

- индивидуальная производная плотности по времени

150 км/час
≈ 40м/с

Уравнение неразрывности для несжимаемой среды

Среда называется несжимаемой, если в каждой индивидуальной частице этой среды плотность постоянна: $\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0}$

Несжимаемая среда – модель, которая используется, если изменение плотности частиц в рассматриваемых процессах мало и им можно пренебречь. Для несжимаемой среды уравнение неразрывности принимает вид:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v} = 0}$$

Отметим, что несжимаемая среда может быть неоднородной: плотность в разных частицах может быть разной. Тогда при эйлеровом описании частная производная плотности по времени может не равняться нулю, так как через точки пространства могут проходить частицы с разной плотностью.

При движении тела в воздухе со скоростью порядка 150 км/час можно воздух считать несжимаемым, при скоростях порядка скорости звука и больше сжимаемость воздуха учитывать надо.

2150 км/час. Число Маха 1.8

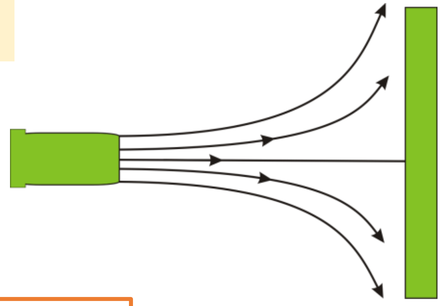
2.2. Закон сохранения количества движения (импульса) для индивидуального объема среды (ЗСКД)

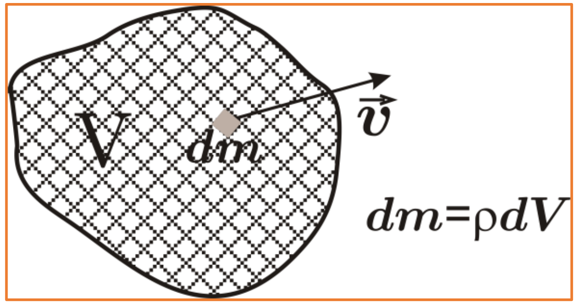
Количество движения материальной точки с массой m и скоростью $\vec{v}$ равно $\vec{Q}=\vec{v}m$.
Из 2-го закона Ньютона следует, что «скорость изменения количества движения материальной точки равна действующей на нее силе»

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}m}{dt} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}$$

Закон сохранения количества движения для индивидуального объема среды (ЗСКД)

«Скорость изменения количества движения индивидуального объема среды равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем»





Что такое количество движения объема V сплошной среды?
Скорости и плотности разных частиц разные!

Объем V есть сумма малых частиц с массой $dm = \rho dV$.
Количество движения каждой частицы $\vec{v}dm= \vec{v}\rho dV$.
Количество движения всего объема V – сумма количеств движения малых частиц, точнее, следующий интеграл:

$$\vec{Q} = \int_V \vec{v}\rho dV$$

Силы, действующие на среду: массовые и поверхностные

Массовые силы действуют на частицы внутри объема; для малой частицы массовая сила пропорциональна массе. Пример: сила тяжести: $\overrightarrow{\Delta F_{\text{масс}}}=\vec{g}\Delta m$

Плотность массовых сил это

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_{\text{масс}}}}{\rho \Delta V}$$

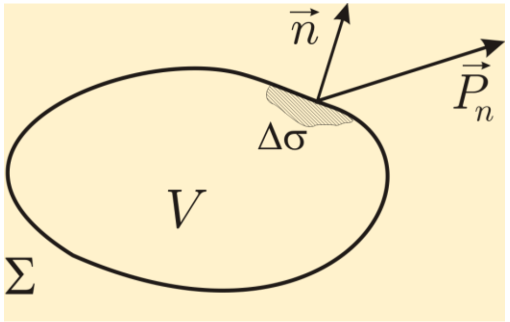
На малую частицу с массой $dm = \rho dV$ действует массовая сила $\vec{F}\rho dV$

Сумма массовых сил, действующих на V

$$\int_V \vec{F}\rho dV$$

Поверхностные силы. Вектор напряжений. Математическая формулировка ЗСКД

Поверхностные силы - это силы, приложенные в точках поверхности среды; для малого элемента поверхности они пропорциональны площади этого элемента.   Примеры поверхностных сил: давление, трение



Σ - поверхность объема V; Δσ малый элемент поверхности; $\vec{n}$ - нормаль к Δσ, направленная во внешнюю сторону, то есть в ту сторону, откуда действует внешняя сила, $\vec{P}_n$ - вектор напряжений   (иногда обозначается $\vec{P}^{(n)}$).

Что такое вектор напряжений?

Вектор напряжений - это поверхностная сила $\Delta\vec{F}_{\text{пов}}$, разделенная на площадь площадки Δσ , на которую она действует.   Точнее:

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta\vec{F}_{\text{пов}}}{\Delta\sigma}$$

Поверхностная сила, действующая на бесконечно малую площадку с нормалью $\vec{n}$ и площадью dσ равна $\vec{P}_n$dσ

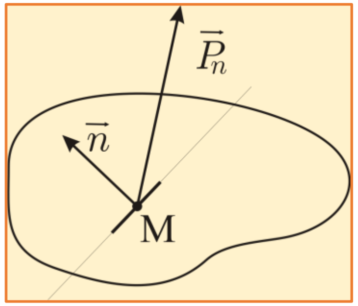
Сумма поверхностных сил, действующих на поверхность Σ , равна $\int_\Sigma \vec{P}_n d\sigma$

Математическая формулировка ЗСКД для индивидуального объема сплошной среды

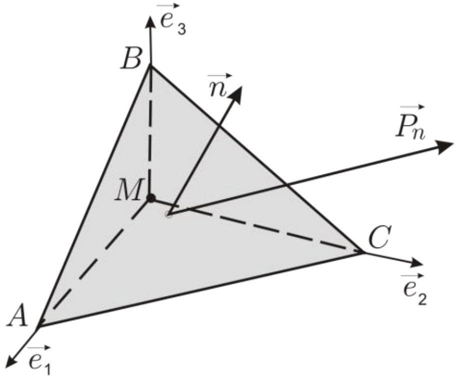
$$\frac{d}{dt}\int_{V_{\text{инд}}} \vec{\upsilon}\rho dV = \int_V \vec{F}\rho dV + \int_\Sigma \vec{P}_n d\sigma$$

Здесь $V_{\text{инд}}$ индивидуальный объем, Σ его поверхность,
$\vec{F}$ плотность массовых сил, $\vec{P}_n$ вектор напряжений

2.3. Формула Коши для вектора напряжений



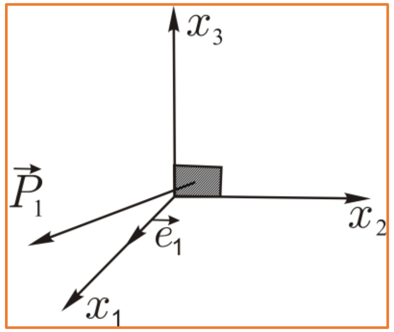
Вектор напряжений $\vec{P}_n$ можно и нужно вводить на разных площадках внутри среды. Тогда он описывает действие одной части среды на другую. В одной и той же точке можно рассматривать разные площадки (с разными нормалями). На разных площадках в одной и той же точке векторы напряжений разные.



Из закона сохранения количества движения выводится, формула Коши, показывающая, что все векторы напряжений в данной точке вычисляются, если в этой точке известны три вектора напряжений на трех координатных площадках

$$\boxed{\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3 = \vec{P}_k n_k}$$ формула Коши

n_1, n_2, n_3 - компоненты вектора $\vec{n}$ для той площадки, где действует $\vec{P}_n$, а $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ векторы напряжений на координатных площадках. Например, $\vec{P}_1$ это вектор напряжений на площадке, перпендикулярной оси x_1.



Обозначения компонент векторов $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$:

$\vec{P}_1 \{p_{11}, p_{21}, p_{31}\}$

$\vec{P}_2 \{p_{12}, p_{22}, p_{32}\}$

$\vec{P}_3 \{p_{13}, p_{23}, p_{33}\}$

Формула Коши для проекции вектора $\vec{P}_n$ на ось x_i

$$\boxed{P_{ni} = p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3 = p_{ik}n_k}$$

Второй индекс у p_{ik} это номер площадки, на которой действует вектор напряжений

Первый индекс у p_{ik} показывает, на какую ось проектируется вектор напряжений

Тензор напряжений (stress tensor). Физический смысл компонент в декартовой системе координат

Тензором напряжений называется тензор, компоненты которого в декартовых координатах записываются в виде матрицы, в которой столбцы являются компонентами векторов напряжений на соответствующих координатных площадках

Обозначения компонент векторов $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$

$\vec{P}_1\ \{p_{11}, p_{21}, p_{31}\}$

$\vec{P}_2\ \{p_{12}, p_{22}, p_{32}\}$

$\vec{P}_3\ \{p_{13}, p_{23}, p_{33}\}$

Матрица компонент тензора напряжений

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

В других обозначениях

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{11} & \boldsymbol{\sigma}_{12} & \boldsymbol{\sigma}_{13} \\ \boldsymbol{\sigma}_{21} & \boldsymbol{\sigma}_{22} & \boldsymbol{\sigma}_{23} \\ \boldsymbol{\sigma}_{31} & \boldsymbol{\sigma}_{23} & \boldsymbol{\sigma}_{33} \end{pmatrix}$$

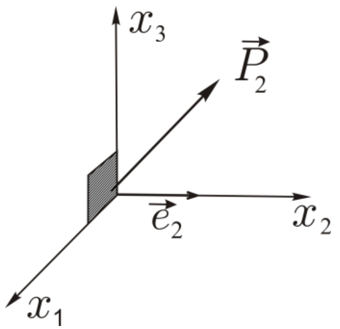
Формула Коши

$$P_{ni} = p_{\mathrm{ik}} n_{\mathrm{k}}$$

Каков физический смысл компоненты p_{12} тензора напряжений? *Ответ:* это проекция на ось x_1 вектора напряжений $\vec{P}_2$. Этот вектор действует на площадке, перпендикулярной оси x_2.

Каков физический смысл компоненты p_{22} ? *Ответ:* это проекция на ось x_2 вектора напряжений $\vec{P}_2$, действующего на площадке, которая перпендикулярна оси x_2.

p_{22} - это величина нормальной составляющей вектора напряжений $\vec{P}_2$



p_{ii} - это величина нормальной составляющей вектора напряжений $\vec{P}_i$

p_{ki} при $k \neq i$ - это величины касательных составляющих вектора напряжений $\vec{P}_i$

2.4. Дифференциальные уравнения движения (momentum equations)

Уравнения движения выводятся из ЗСМ для индивидуального объема среды с использованием формулы $\vec{P}_n = \vec{P}_k n_k$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} \vec{\upsilon}\rho dV = \int\limits_{V} \vec{F}\rho dV + \int\limits_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma$$

Уравнения движения в векторной форме

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{P}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\vec{P}_3}{\partial x_3}$$

Здесь $\frac{d\vec{v}}{dt}$ - ускорение, $\vec{F}$ - плотность массовых сил, $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ - векторы напряжений на координатных площадках

Уравнения движения в краткой записи

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{\partial\overrightarrow{P_k}}{\partial x_k}$$

Уравнения движения в проекции на оси x_i

$$\rho\frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3$$

Уравнения движения в проекциях на координатные оси <u>в раскрытом виде</u>

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}\right) = \rho F_1 + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_2}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_3}\right) = \rho F_2 + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3}$$

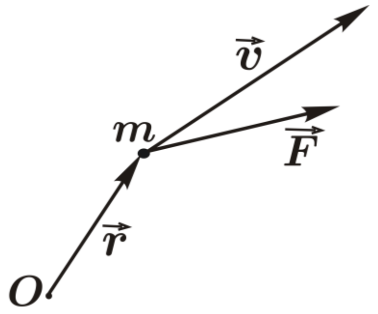
$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_3}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}\right) = \rho F_3 + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}$$

2.5. Закон сохранения момента количества движения (ЗСМКД)

ЗСМКД для материальной точки

«Скорость изменения момента количества движения $\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{\upsilon}]$ материальной точки равна моменту силы, действующей на точку»

$$\frac{d[\vec{r} \times m\vec{\upsilon}]}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

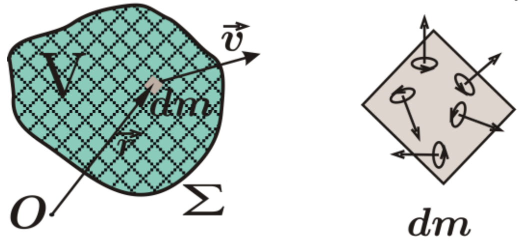


ЗСМКД для индивидуального объема сплошной среды

«Скорость изменения момента количества движения индивидуального объёма среды равняется сумме моментов всех внешних сил и пар, действующих на этот объём»

Как написать выражение для момента количества движения малой частицы среды?

$[\vec{r} \times \vec{\upsilon}]\, \rho dV$? – НЕ ВСЕГДА!



Если среда содержит мелкие частицы, которые могут вращаться, то момент, связанный с их вращением, входит в выражение момента количества движения среды. Момент количества движения частицы $([\vec{r} \times \vec{\upsilon}] + \vec{k})\rho dV$

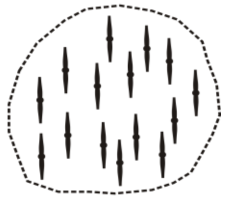
ЗСМКД для индивидуального объема среды

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} \left(\left[\vec{r} \times \vec{\upsilon}\right] + \vec{k}\right)\rho\, dV = \int\limits_{V}\left[\vec{r} \times \vec{F}\right]\rho dV + \int\limits_{\Sigma}\left[\vec{r} \times \vec{P}_n\right]d\sigma + \int\limits_{V}\vec{h}\rho dV + \int\limits_{\Sigma}\vec{M}_n d\sigma \qquad (2.1)$$

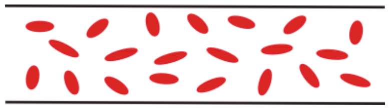
Красные интегралы - моменты массовых и поверхностных пар

Массовые и поверхностные пары могут быть обусловлены действием электромагнитного поля. На рис. а) на магнитную стрелку действует пара сил б) среда с намагниченными металлическими частицами

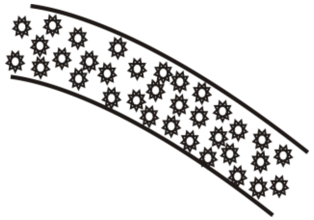
а)


б)

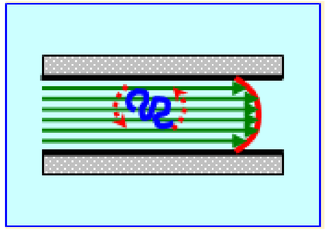
Примеры сред , для которых необходим учет вращения частиц, $\vec{k}\neq 0$, а также моментов пар ($\vec{h}\neq 0$, $\vec{M}_n \neq 0$) :



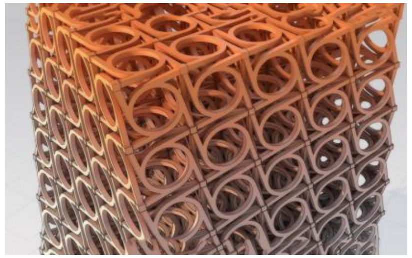
а) эритроциты в крови



б) поток макаронных изделий



в) макромолекулы в потоке



метаматериал

https://slideshare.ru/metamateriali-37804

Применяя ЗСМКД для индивидуального объема среды (2.1) к малому объему в форме тетраэдра получаем формулу Коши для плотности момента поверхностных пар (вектора моментных напряжений $\vec{M}_n$)

$$\vec{M}_n = \vec{M}_k n_k \quad \text{или, в проекции на координатные оси,} \quad \boxed{M_{ni} = M_{ik} n_k} \qquad (2.2)$$

M_{ik} – компоненты тензора моментных напряжений (couple-stress tensor)

С учетом формулы (2.2) из ЗСМКД (2.1) выводятся дифференциальные уравнения момента количества движения

$$\boxed{\rho \frac{d}{dt}\left(\left[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right]+\vec{k}\right)=\rho\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\vec{r}\times\vec{P}_k\right]+\rho\vec{h}+\frac{\partial \vec{M}_k}{\partial x_k}} \qquad (2.3)$$

О симметрии тензора напряжений

Если нет внутренних моментов количества движения ($\vec{k}$=0),
а также моментов пар ($\vec{h}$=0, $\vec{M}_n$=0),
то закон сохранения момента количества движения для индивидуального объема среды (2.1) записывается так:

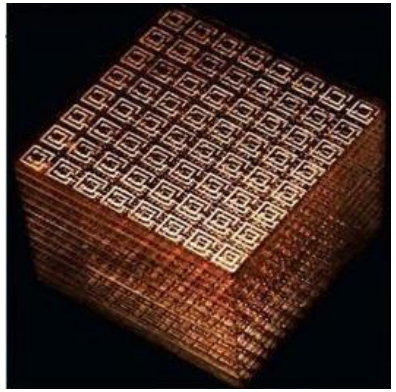
$$\frac{d}{dt}\int_{V_{\text{инд}}}\left[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right]\rho\, dV=\int_{V}\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]\rho\, dV+\int_{\Sigma}\left[\vec{r}\times\vec{P}_n\right]d\sigma$$

Дифференциальные уравнения моментов (2.3) принимают вид

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right]=\rho\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\vec{r}\times\vec{P}_k\right]$$

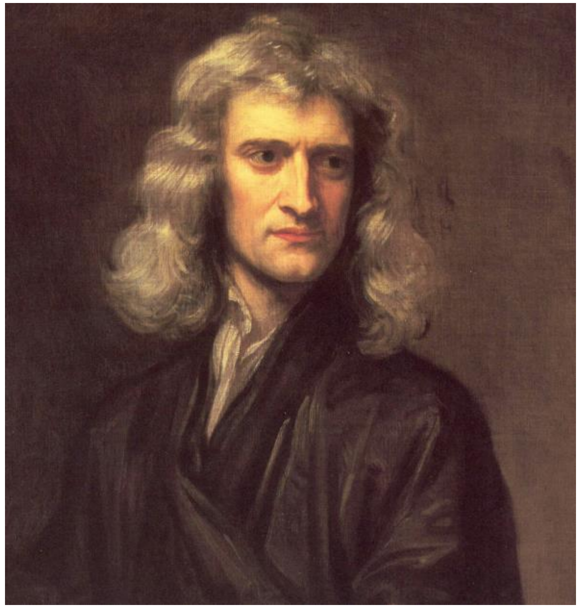
С использованием уравнений движения это уравнение сводится к соотношениям: $p_{ik}= p_{ki}$,
которые означают, что тензор напряжений симметричен .

Условие симметрии тензора напряжений p_{ik}=p_{ki} используется в большинстве классических моделей сплошных сред, которые с успехом применяются для описания движения воды и воздуха, деформирования металлов и многих других сред.



Однако современная техника все больше имеет дело со сложными материалами, в том числе искусственно созданными (композиты со сложной структурой – так называемые метаматериалы, а также жидкости, содержащие микро и нано частицы). В этих средах моментные взаимодействия и внутренние вращения могут быть существенны, тензор напряжений может быть не симметричным, могут возникать моментные напряжения (couple stress). https://slide-share.ru/metamateriali-37804

Конец Лекции 2



Isaac Newton

Исаáк Ньютóн
1642-1727

Законы сохранения
количества движения
и момента
количества движения

Augustin Louis Cauchy

Огюсте́н Луи́ Коши́
1789-1857

Тензор напряжений

Eugène Cosserat
(1866-1931),

Эжен Косcерá

Упругость с
моментными
напряжениями
1909