

Заметки об ошибках в курсах гидродинамики

В советской литературе было принято обращать внимание на ошибочные положения в учебной и научно-популярной литературе (укажем для примера критические выступления Л.И.Седова, как с общими соображениями [38], так и по поводу конкретных ошибочных представлений [39, 40], и его учеников [6], Г.И.Петрова [27, стр. 295], К.П.Станюковича [43], Г.Ю.Степанова [44], отдельную главу «Ошибки и заблуждения в термодинамике» в книге И.П.Базарова [2] и др.).

Появление ошибочных утверждений в процессе развития науки является, очевидно, неизбежным даже у квалифицированных исследователей (например, в области гидродинамики известны ошибки Ньютона при описании вращательного движения вязкой жидкости, исправленные затем Д.Бернулли и Стоксом [28]; затруднения Стокса и Рэлея при формировании понятия ударной волны [52]; первоначальное представление С.А.Чаплыгина о невозможности стационарных сверхзвуковых течений [50]).

Многие ошибки появлялись повторно и, по-видимому, независимо у различных ученых в разные эпохи (так, при вычислении диссипации энергии в гидравлическом прыжке на мелкой воде Рэлей допустил ошибку [59], которая затем была им исправлена [59], а затем эта же ошибка была допущена в курсе Ландау и Лифшица [24]; при доказательстве теоремы о сохранении потенциальности Лагранж ошибочно основывал свои рассуждения на аналитичности искомых функций по времени [11, стр. 53], а позже доказательство сохранения потенциальности, основанное на этой же ошибочной идее, было приведено в курсе лекций Р.Фейнмана [49, стр. 240]¹⁾).

Цель настоящей заметки — обратить внимание на некоторые типичные ошибки, встречающиеся при изложении классических, устоявшихся разделов гидродинамики.

Закон Паскаля. Часто в учебной литературе «законом Паскаля» ошибочно называют утверждение о независимости давления от ориентации площадки в данной точке [16, 25, 29, 33, 42, 48]²⁾. Самое это утверждение, безусловно, верно, но оно не является законом Паскаля. Правильная формулировка закона состоит в утверждении о том, что при изменении давления в одной точке несжимаемой жидкости во всех остальных точках жидкости давление изменяется на такую же величину [31, стр. 238]. Ошибочное толкование возникло в результате неверного понимания выражения «давление передаётся во все стороны» в чеканной формулировке, кочующей из учебника в учебник.

Объяснение подъемной силы крыла. В учебной и справочной литературе иногда встречается элементарное объяснение возникновения подъемной силы крыла, в котором большее значение скорости на верхней поверхности крыла (и меньшее — на нижней) ошибочно [54, 61] мотивируется тем, что частицы жидкости, разделившись у передней кромки крыла, должны одновременно прийти к его задней кромке [9, 53]. В действительности жидкие частицы (вне пограничного слоя) движутся вдоль поверхностей крыла за разное время (фотографии реального явления приведены на рис. 1), не говоря уже о том, что в рамках модели идеальной жидкости выход жидкой частицы из точки торможения на любое конечное расстояние требует бесконечного времени, так что говорить о времени движения частицы (без специальных оговорок) бессмысленно.

¹⁾ Ошибочность обоих доказательств видна из того, что при незначительной модернизации они дают заведомо неверный результат — сохранение потенциальности в вязкой жидкости.

²⁾ Отметим, что в предисловии книги Рс.И.Нигматулина и А.А.Соловьева [29] авторы выражают «сердечную признательность» «коллективу кафедры гидромеханики МГУ за всестороннее обсуждение основных разделов книги и за высказанные ценные замечания», однако опрос всех сотрудников кафедры показал, что до опубликования книги ни один из авторов не обсуждал ее основные разделы с сотрудниками кафедры гидромеханики и не получал от них замечаний о ее содержании. По-видимому, эта благодарность появилась в результате технической ошибки.

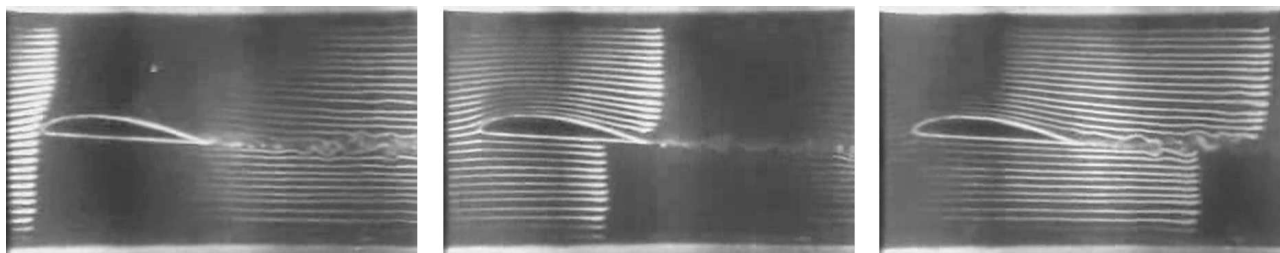


Рис. 1. При обтекании крылового профиля времена движения жидких частиц (вне пограничного слоя) вдоль верхней и нижней поверхностей различаются.

Еще одно часто встречающееся ошибочное объяснение состоит в том, что демонстрируется картина обтекания крылового профиля, говорится, что вектор скорости (а следовательно, и импульс потока) непосредственно за крылом приобретает вертикальную составляющую (рис. 2), и поэтому по третьему закону Ньютона на крыло должна действовать подъемная сила [1].

Подъемная сила крыла действительно может быть найдена из интегральных соотношений, выражающих баланс импульса (именно таким способом классическую формулу для подъемной силы получил сам Н.Е.Жуковский [18]), однако здесь требуется более тонкий анализ и при вычислениях нужно учитывать не только поле скорости, но и давления. Более того, при плоскопараллельном обтекании крылового профиля в рамках модели идеальной жидкости направления скорости потока далеко перед и за телом одинаковы, поэтому, если следовать логике рассуждений с изменением направления скорости, подъемная сила должна была бы быть нулевой.

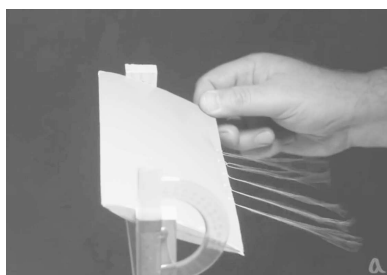


Рис. 2. Экспериментальная демонстрация отклонения потока непосредственно за крыловым профилем (ютьюб-канал «GetAClass», <https://youtu.be/QZQ9X0beL74>).

Физический смысл слагаемого с давлением в интеграле Бернулли. В учебной литературе распространено ошибочное (или, как минимум, вводящее в заблуждение) толкование слагаемого с давлением в интеграле Бернулли для несжимаемой жидкости как «потенциальной энергии давления» [29, стр. 121] (такая неверная интерпретация упоминается еще в лекциях Жуковского [21], изданных его учениками В.П.Ветчинкиным и др., и особенно часто встречается во втузовских учебниках по гидравлике; отметим, что в лекциях по гидродинамике [19, 20], написанных самим Жуковским, такой ошибочной интерпретации не встречается). В действительности, как известно, это слагаемое описывает работу, совершаемую силами давления, и не является мерой запаса какого-либо вида энергии.

Записывал ли Даниил Бернулли интеграл Бернулли? При формулировке утверждений, касающихся истории гидродинамики, требуется известная доля осторожности. Ча-

сто утверждается, что Даниил Бернулли опубликовал связь давления и скорости в 1738 году [42]. В действительности, как это хорошо известно историкам науки, в то время Д.Бернулли не вводил давление в жидкости (как функцию координат), а в соответствующем месте его «Гидродинамики» [10, стр. 369] давление вообще не фигурирует (в современном виде интеграл Бернулли будет получен его отцом Иоганном Бернулли [46]).

Отметим также, что часто при популярном объяснении природных явлений интеграл Бернулли ошибочно применяется в тех случаях, когда он неприменим, например для описания затопленных струй воздуха (выдувание воздуха ртом, пульверизатором), где существенно влияние вязкости (на такие ошибки указывает еще Прандтль [35, прим. на стр. 168]), или не учитывается тот факт, что для разных линий тока константа в интеграле, вообще говоря, различна (аналогичные ошибки распространены и в западной популярной литературе; отсылаем читателя к разделу «Misapplications of Bernoulli's principle in common classroom demonstrations» в статье «Bernoulli's principle» в англоязычной «Википедии» [57]).

Поле давлений вокруг нестационарно движущейся сферы. При вычислении поля давлений при нестационарном движении сферы в идеальной жидкости встречается неверное применение интеграла Коши — Лагранжа, связанное с неучётом того, что центр сферы подвижен [12, 17]. По-видимому, ошибка ускользает от внимания авторов потому, что, несмотря на получение неверного распределения давления, результирующая сила в этом случае совпадает с правильной.

Отметим также, что при применении выражения для присоединенной массы при определении периода колебаний маятника, движущегося в жидкости, в некоторых учебниках не учитывают силу Архимеда [51, стр. 120], что приводит к неверному результату.

Направление закручивания воронки в ванной. В популярной литературе [45] встречается утверждение о том, что направление закручивания воронки в обычной ванне определяется силой Кориолиса¹⁾, связанной с суточным вращением Земли. Это, вообще говоря, ошибочное утверждение опровергается прямыми экспериментами с большим числом ванн, о которых, например, сообщает известный популяризатор Я.И.Перельман [32, стр. 92], а также отсутствием выделенного направления закрутки в аналогичных природных процессах схожего (лабораторное моделирование торнадо [13, стр. 236]) или даже большего (наблюдение пыльных смерчей [55]) масштаба. Выделенное направление закрутки, зависящее от полушария, удастся наблюдать только в специально поставленных опытах в условиях максимального снижения возмущений от всех остальных факторов (за подробностями отсылаем читателя к статье «Обратное закручивание воды при стоке» в русскоязычной «Википедии» [58]).

Конденсационные облака вокруг самолетов. В некоторых популярных книгах [36] и в Интернете встречается неверное объяснение образования облаков при полетах самолетов в условиях большой влажности (ошибочно утверждается, что это облако образуется за ударной волной, а самолет преодолевает звуковой барьер). В действительности же, хотя около самолета возникают местные сверхзвуковые зоны (в которых и происходит конденсация пара из-за понижения температуры), скорость самолета в этом случае дозвуковая, а ударные волны образуются в задней части облака (рис. 3).

Ньютон и закон вязкого трения Ньютона. В большом числе учебников ошибочно утверждается, что закон вязкого трения был установлен Ньютоном экспериментально [9, 29, 42, 51]. В действительности экспериментальное подтверждение закона вязкого

¹⁾ В словах, напрямую заимствованных в русский язык из французского, принято сохранять исходное положение ударения (на последнем слоге). Некоторые исключения (в современном русском языке), возникшие в результате тех или иных причин (*дело Дрейфуса, Эйфелева башня, атáнде, úгрек, дебаркадер* и др.), лишь подтверждают правило.

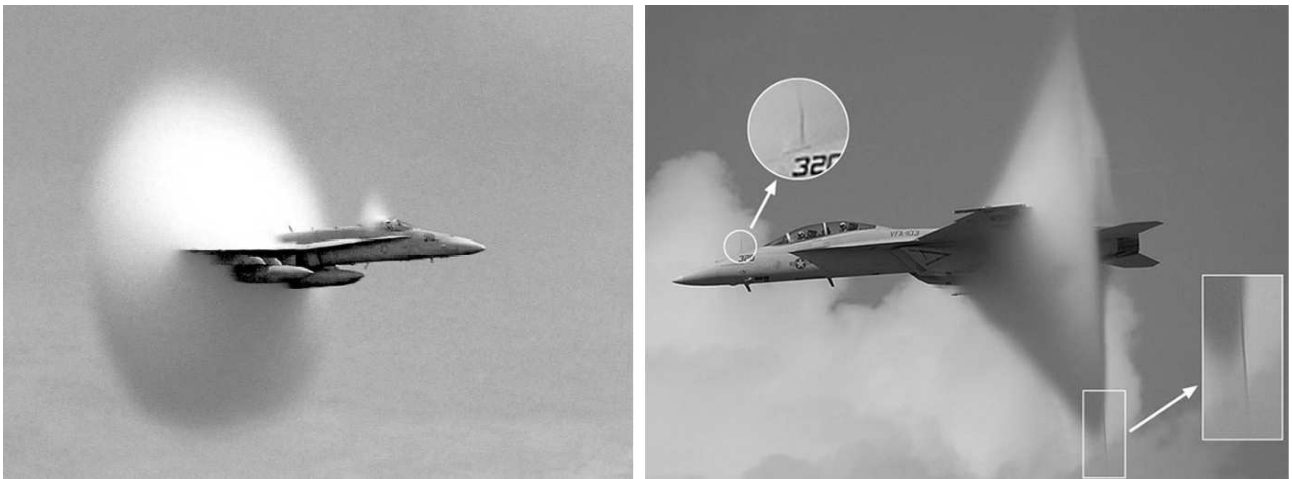


Рис. 3. При полете самолета на больших (но дозвуковых) скоростях образуются локальные сверхзвуковые зоны с пониженной температурой, в которых возможна конденсация атмосферного водяного пара. Возникающие в потоке ударные волны расположены в задней (а не передней) части облака и иногда бывают видны при обычной фотосъемке.

трения было получено только в первой половине XIX века (в экспериментах Кулона с крутильными весами, а потом в известных экспериментах Хагена и Пуазейля [56]). Сам Ньютон проводил эксперименты с падающими телами и затуханием колебаний маятников и, естественно, подтвердить линейный закон вязкого трения в этих условиях не мог (он выделял в законе сопротивления составляющие, пропорциональные различным степеням скорости, но основной вклад давала квадратичная зависимость). Интересно, что побуждающими мотивами проведения экспериментов были не практические приложения, а желание опровергнуть вихревую теорию Декарта (что видно уже из названия его труда — «Математические начала натуральной философии», вызывающе противопоставляемого «Началам философии» Декарта).

Отметим также, что часто встречаются ошибки при записи выражения для связи тензора турбулентных напряжений Рейнольдса и тензора скоростей деформаций, вычисленного по осредненным скоростям [51, стр. 214] (запись прямой пропорциональности с одним скалярным коэффициентом для несжимаемой жидкости ошибочна уже потому, что след левой части отличен от нуля, тогда как след правой тождественно равен нулю). **Начальные условия для несжимаемой жидкости.** Во многих учебниках встречается неверное (или неточное) утверждение о том, что для течений несжимаемой жидкости в качестве начальных условий нужно, наряду с полем скорости, задавать пространственное распределение давления [15, 29]. В действительности для несжимаемой жидкости в начальный момент достаточно задать давление только на границе (или на ее части), после чего давление во всех остальных точках единственным образом находится¹⁾ из решения соответствующей краевой задачи для уравнения Пуассона относительно давления. На это обстоятельство (необходимость задания давления только на границе во всё время движения) обращал внимание ещё Н.Е.Жуковский в «Лекциях по гидродинамике» [19, стр. 233]²⁾.

Бывают ли потенциальные течения вязкой жидкости? В некоторых учебниках встре-

¹⁾ И, следовательно, не может произвольным образом задаваться.

²⁾ Отметим, что ещё в конце XIX века по этому вопросу не было полной ясности (см. стр. 205–206 в девятом томе полного собрания сочинений Н.Е.Жуковского).

чается неточное утверждение о невозможности потенциальных течений в вязкой жидкости [15, стр. 232–233]. Во многих случаях это, конечно, верно, но при некоторых обстоятельствах такие течения возможны (например, при вращении бесконечного цилиндра в вязкой жидкости или при радиальных колебаниях газового пузырька в вязкой жидкости).

«Кровавые» опыты Пуазейля. В большом числе учебников встречается неверное [3, стр. 144], [26, стр. 244] (или сформулированное так, что может быть воспринято как неверное [29, стр. 135]) утверждение о том, что известные опыты Пуазейля проводились с течением крови. В действительности Пуазейль, как и Хаген, проводил свои опыты с водой, хотя мотивом для его экспериментов было изучение кровообращения. По-видимому, в значительной степени на распространение этого заблуждения повлияло нечеткое изложение в нескольких местах в классическом учебнике Л.Г.Лойцянского [25, стр. 26, 474].

Другое распространенное ошибочное утверждение состоит в том, что параболический профиль скорости при течении Пуазейля был установлен Пуазейлем [29, стр. 135]. В действительности как Пуазейль, так и Хаген экспериментально получили только связь между расходом, радиусом, градиентом давления и вязкостью (точнее, температурой жидкости).

Получение парадокса Д'Аламбера при стремлении вязкости к нулю. В учебной литературе встречается неверная попытка получить парадокс Д'Аламбера из формулы Стокса для сопротивления сферы при стремлении вязкости к нулю [34, стр. 134]. Ошибочность этого рассуждения следует уже из того, что формула Стокса справедлива только при малых числах Рейнольдса, поэтому при стремлении вязкости к нулю получается случай нулевой скорости (покоящейся сферы).

Закон Дарси для идеальной жидкости. В некоторых учебниках встречается неточное утверждение о том, что фильтрация жидкости в пористой среде следует законам движения идеальной жидкости [22, стр. 402], а иногда ошибочно говорится об идеальной жидкости внутри порового пространства, причем соответствующие разделы излагаются до разделов, посвященных вязкой жидкости [34, стр. 106]. В действительности, доминирующим фактором при движении жидкости в пористой среде (в условиях применимости закона Дарси) является вязкость, явно входящая в коэффициент пропорциональности в законе Дарси, и можно говорить только о кинематической аналогии (тогда как распределения давления при фильтрации и при течении идеальной жидкости принципиально различаются).

Отметим также, что при выводе закона фильтрации некоторые авторы формально используют уравнения невязкой жидкости (уравнения Эйлера), добавляя к ним объемные силы сопротивления [15, стр. 259, 264]. Хотя этот способ изложения восходит к Н.Е.Жуковскому (в понимании которым физической сущности изучаемого явления не возникает ни малейшего сомнения), этот способ, по-видимому, может вводить читателя в заблуждение и не может рекомендоваться.

Попутно упомянем ещё, что в литературе по подземной гидродинамике встречается ошибочное доказательство симметричности тензора коэффициентов проницаемости [4, 5]. В действительности симметрия тензора следует либо из результатов неравновесной термодинамики (из принципа Онзагера), либо из теории осреднения (для пористых сред с периодической [7, 37, 62] или случайной [8] микроструктурой).

Вывод соотношений на разрывах из дифференциальных уравнений. В гидродинамической литературе встречаются принципиально ошибочные попытки получения соотношений на поверхностях разрыва путем интегрирования дифференциальных уравне-

ний «через разрыв» [4, стр. 111], [30, стр. 517]. Как это неоднократно отмечалось [14, стр. 273], [47, стр. 45], такой подход может приводить к получению различных соотношений на разрывах при разных формах записи дифференциальных уравнений. Специальное предостережение от ошибок такого рода приводится Л.И.Седовым [41, стр. 229].

Теория подобия и размерностей. Укажем на ряд типичных неточностей, встречающихся при изложении теории подобия и размерностей.

Определения основных единиц периодически меняются (так, в XX веке в разное время было три принципиально различных определения метра и секунды), что приводит к тому, что в некоторых учебниках при описании систем единиц используются устаревшие сведения [34, стр. 123].

Часто встречается неверное утверждение о том, что показатели в формуле размерности могут быть целыми или дробными числами [51, стр. 170], тогда как на самом деле они могут быть любыми вещественными числами.

Далее, встречается представление о том, что размерность величины может говорить о ее физическом смысле. Например, в [34, стр. 138] говорится: «Еще одна формулировка первого закона термодинамики, говорящая об эквивалентности тепла работе, следует из размерности величины Q :

$$[Q] = 1 \text{ кал} \approx 4,186 \text{ Дж},$$

причём $10^{-7} \text{ Дж} = 1 \text{ эрг} = 1 \text{ см}^2 \cdot \text{г}/\text{с}^2$. Калория, джоуль и эрг служат для измерения Q ». В действительности, размерность, вообще говоря, никак не связана с физическим смыслом величины. Так, момент силы и работа силы, будучи величинами совершенно разной природы, имеют одинаковую размерность, не говоря уже о безразмерных величинах, которые, несмотря на то, что они вводятся в совершенно различных областях, все имеют одинаковую (нулевую) размерность.

В учебной литературе также встречается неверная трактовка результатов применения пи-теоремы. Например, при ее применении возможна запись зависимостей между безразмерными величинами в различных формах, которые, как известно, принципиально эквивалентны, тогда как в подобном случае в [51, стр. 175] ошибочно утверждается, что «теория размерностей не может нам указать, какая из этих формул является правильной».

В западной литературе пи-теорему обычно называют теоремой Бакингема или теоремой Ваши, поэтому для справки¹⁾ отметим, что, по-видимому, впервые пи-теорема была доказана Ж.Бертраном в 1878 г. Бертран рассмотрел частные примеры задач из электродинамики и теории теплопроводности, однако его изложение содержало в отчетливом виде все основные идеи современного доказательства пи-теоремы, а также ясное указание на применение пи-теоремы для моделирования физических явлений. Широкую известность методика применения пи-теоремы («the method of dimensions») получила благодаря работам Рэля (первое применение пи-теоремы *в общем виде* к зависимости падения давления в трубопроводе от определяющих параметров относится, вероятно, к 1892 г., эвристическое доказательство с использованием разложения в степенной ряд — к 1894 г.). Формальное обобщение пи-теоремы на случай произвольного числа величин было впервые сформулировано Ваши в 1892 г., а позже и, по-видимому, независимо — А. Федерманом, Д. Рябушинским в 1911 г. и Бакингом в 1914 г. Последнему принадлежит введение обозначения безразмерных величин греческой буквой «пи», которое дало название теореме.

Ошибочные доказательства на основе теории подобия. Применение соображений подобия и пи-теоремы требует осторожности, о чем свидетельствуют поучительные ошиб-

¹⁾ Подробнее см.: <http://gidropraktikum.narod.ru/pi-theorem-history.htm>.

ки, имеющиеся в литературе.

В первом томе курса Ландау и Лифшица [23, стр. 34] содержится ошибочное доказательство третьего закона Кеплера на основе соображений о механическом подобии¹). В действительности, третий закон Кеплера не вытекает из стандартной процедуры применения пи-теоремы. В самом деле, если считать известным (гипотеза!), что орбита является замкнутой, то как размер полуоси орбиты R , так и время обращения T зависят от произведения гравитационной постоянной и массы центрального тела GM и двух параметров, определяющих конкретную орбиту, например скорости v на наименьшем расстоянии планеты от центрального тела и самого этого расстояния d . Отсюда получаются две зависимости между безразмерными параметрами

$$\frac{T^2 GM}{d^3} = f\left(\frac{v^2 d}{GM}\right), \quad \frac{R}{d} = g\left(\frac{v^2 d}{GM}\right),$$

что в случае общего положения эквивалентно зависимости $T^2 GM/R^3 = h(R/d)$, не определяемой без использования дополнительных соображений. Доказательство, приведенное в [23], справедливо только для семейства геометрически подобных орбит (т.е. для фиксированного отношения R/d), а не для произвольной формы орбиты.

Литература

1. Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Курс общей физики. Механика. Под ред. В.А.Алешкевича. М.: Физматлит, 2011. 472 с.
2. Базаров И. П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991. 376 с. Переиздание расширенной главы 9: Базаров И. П. Заблуждения и ошибки в термодинамике. М.: Едиториал УРСС, 2003. 120 с.
3. Баранов В. Б. Гидроаэромеханика и газовая динамика. Ч. 1. М.: Издательство Московского университета, 1987. 184 с.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
5. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
6. Бармин А. А., Любимов Г. А., Регирер С. А. Рецензия на книгу профессора В.А.Веникова «Теория подобия и моделирование (применительно к задачам электроэнергетики)» // Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, с. 188–190.
7. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
8. Беляев А. Ю. Усреднение в задачах теории фильтрации. М.: Наука, 2004. 200 с.
9. Бендерский Б. Я. Аэрогидрогазодинамика. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2012. 500 с.
10. Бернулли Д. Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 552 с.
11. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М.: ИЛ, 1963. 244 с.
12. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
13. Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н. Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 344 с.

¹) Другое доказательство, приведенное в этом же томе, которое основано на явном вычислении параметров орбиты, естественно, правильно.

14. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977. 440 с.
15. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
16. Грац Ю. В. Лекции по гидродинамике. М.: Ленанд, 2014. 216 с.
17. Давыдова М. А. Лекции по гидродинамике. М.: Физматлит, 2011. 216 с.
18. Жуковский Н. Е. О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов. В кн.: Полное собрание сочинений. В 16 т. Т. 5. Вихри. Теория крыла. Авиация. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937, с. 232–257.
19. Жуковский Н. Е. Полное собрание сочинений. В 16 т. Т. 2. Гидродинамика. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 359 с.
20. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. 812 с.
21. Жуковский Н. Е. Теоретические основы воздухоплавания. Ч. 1. Вып. 1. М.: Студенческое издательское общество при ИМГУ. Типолитография И.Х.Кавыкина, 1911. 112 с. = Полное собрание сочинений. Лекции. Вып. 1. Ч. 1: Теоретические основы воздухоплавания / Под ред. В.П.Ветчинкина. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938. 539 с.
22. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 1. Механика. М.: Физматлит, 1958. 208 с.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
25. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
26. Малкин А. Я., Исаев А. И. Реология: концепции, методы, приложения. СПб.: Профессия, 2007. 560 с.
27. Материалы юбилейной международной конференции «Гидроаэромеханика и космические исследования», посвященной 100-летию со дня рождения академика Г.И.Петрова / Под ред. проф. В.Б.Баранова. М.: Изд-во Московского университета, 2012. 300 с.
28. Михайлов Г. К. Становление гидравлики и гидродинамики в трудах петербургских академиков (XVIII век) // Изв. АН СССР, МЖГ, 1999, № 6, с. 7–25.
29. Нигматулин Р. С., Соловьев А. А. Основы гидромеханики. М.: Литтерра, 2012. 400 с.
30. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. В кн.: Николаевский В.Н. Собрание трудов. Геомеханика. Т. 3. Землетрясения и эволюция коры. Скважины и деформации пласта. Газоконденсат. М.-Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2012. 644 с.
31. Паскаль Б. Трактат о равновесии жидкостей. В кн.: Начала гидростатики. Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль. М.-Л.: ГТТИ, 1932, с. 233–255.
32. Перельман Я. И. Знаете ли вы физику? М.: Наука, 1992. 272 с.
33. Петкевич В. В. Основы механики сплошных сред. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 400 с.
34. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
35. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 576 с.
36. Претор - Пинни Г. Занимательное волноведение. Волнения и колебания вокруг нас. М.: Лайвбук, 2012. 416 с.

37. Санчес - Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
38. Седов Л. И. Научная критика и ответственность ученых. В кн.: Седов Л.И. Размышления о науке и об ученых. М.: Наука, 1980, с. 345–350.
39. Седов Л. И. Некоторые критические замечания по курсу общей физики Д.В.Сивухина // Вестник АН СССР, 1989, № 1, с. 95–97.
40. Седов Л. И. О понятиях простого нагружения и о возможных путях деформации // ПММ, 1959, т. 23, вып. 2, с. 400–402.
41. Седов Л. И. Теоретические конструкции выделения действительных событий из мысленно возможных. В кн.: Седов Л.И. Размышления о науке и об ученых. М.: Наука, 1980, с. 221–236.
42. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1979. 520 с.
43. Станюкович К. П. Рецензия на книгу «Газовая динамика» // Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, с. 190–192; От редакции // Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2, с. 168.
44. Степанов Г. Ю. О некоторых неточностях в разъяснениях теории крыла // Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3, с. 188–190.
45. Сурдин В. Ванна и закон Бэра // Квант, 2003, № 3, с. 12–14.
46. Трусделл К. Очерки по истории механики. М.-Ижевск: ИКИ, 2002. 316 с.
47. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
48. Учайкин В. В. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб: Лань, 2016. 860 с.
49. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 7. Физика сплошных сред. М.: Мир, 1966. 292 с.
50. Чаплыгин С. А. О газовых струях // Избранные труды по механике и математике. М.: ГИТТЛ, 1954, с. 9–89.
51. Черняк В. Г., Суетин П. Е. Механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2006. 352 с.
52. Чёрный Г. Г. К истории развития представления о разрывных движениях газов и жидкостей // Аэромеханика и газовая динамика, 2003, № 2, с. 89–92.
53. Юделович М. Я. Подъемная сила. В кн.: БСЭ. 3-е изд. 1975, т. 20, с. 141–142.
54. Babinsky H. How do wings work? // Physics education, 2003, vol. 38, no. 6, p. 497–503, doi:10.1088/0031-9120/38/6/001.
55. Carroll J. J., Ryan J. A. Atmospheric vorticity and dust devil rotation // Journal of geophysical research, 1970, v. 75, no. 27, p. 5179–5184, doi:10.1029/JC075i027p05179.
56. <http://gidropraktikum.narod.ru/equations-of-hydrodynamics.htm>
57. http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli%27s_principle#Misapplications_of_Bernoulli.27s_principle_in_common_classroom_demonstrations
58. http://ru.wikipedia.org/wiki/Обратное_закручивание_воды_при_стоке
59. Rayleigh Note on tidal bores // Scientific papers, v. 5, Cambridge: University Press, 1912, p. 495–496.
60. Rayleigh On the theory of long waves and bores // Scientific papers, v. 6, Cambridge: University Press, 1920, p. 250–254.
61. Weltnер K. A comparison of explanations of the aerodynamic lifting force // American journal of physics, 1987, vol. 55, no. 1, p. 50–54, doi:10.1119/1.14960.
62. Whitaker S. The method of volume averaging / Theory and application of transport in porous media. Vol. 13. Springer, xvi + 220 p.