# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ $\lambda$ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Цель задачи: изучение закономерностей течения вязкой жидкости в трубах при ламинарном и турбулентном режимах, построение графика зависимости коэффициента сопротивления трубопровода $\lambda$ от числа Рейнольдса и сравнение экспериментальных результатов с имеющимися теоретическими и эмпирическими формулами, обобщение полученных на конкретной установке результатов методом механического подобия на другие трубопроводы.

## Элементы теории

При движении жидкостей в трубах существуют два качественно различных режима течения: ламинарный и турбулентный. Различие между ними можно проследить, наблюдая за движением отдельных частиц жидкости в достаточно длинной стеклянной трубке. Для того, чтобы визуализировать отдельные частицы, в поток вводят опилки, пудру или краску и следят за движением отмеченных ими частиц. Пусть это будет тонкая струйка краски. Оказывается, что при малых скоростях течения и большой вязкости жидкости подкрашенные частицы движутся параллельно оси трубки, сохраняя очертания струйки и не перемешиваясь с окружающей жидкостью. Такое течение, когда когда частицы движутся струйками или слоями, не перемешиваясь с соседними, называется ламинарным. При ламинарном течении в трубе скорость частиц имеет единственную составляющую, параллельную оси трубы.

Если в том же опыте увеличивать скорость, то при некотором вполне определенном ее значении слоистость течения исчезает, подкрашенная струйка расплывается и вся жидкость окрашивается. Частицы, кроме основной составляющей скорости вдоль оси трубы, приобретают еще малые поперечные составляющие (пульсации). Эти составляющие носят хаотический характер и в каждый момент времени невозможно указать их величину и направление. Тот же эффект достигается, если, не меняя скорость, уменьшить вязкость жидкости или увеличить сечение трубки. Такой режим течения называется турбулентным.

Опыт показывает, что критерием для осуществления того или другого из этих режимов служит число Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd/\nu$, где $v$ – средняя скорость движения вдоль трубы, $d$ – диаметр трубы, $\nu$ – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

В данной экспериментальной работе требуется, во-первых, определить при разных режимах течения сопротивление трубопровода, которое проявляется в факте падения давления в направлении движения (потери напора), и во-вторых, найти границу перехода от ламинарного режима к турбулентному, называемую критическим числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}$ (это нужно, чтобы знать область применимости теории ламинарного течения).

### Модель вязкой жидкости

В установившемся движении жидкости по трубам главным фактором, ведущим к потери давления в направлении движения (существованию сопротивления трубопровода) является свойство вязкости жидкости. В модели линейной вязкой жидкости связь между компонентами $p_{ij}$ тензора напряжений и компонентами $e_{ij}$ тензора скоростей деформации задается законом Навье (обобщенным законом трения Ньютона)

$$p_{ij} = (-p + \lambda \mathrm{div}\ \mathbf{v})\ g_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

Здесь $p$ – давление, $\lambda$ и $\mu$ – коэффициенты вязкости, $g_{ij}$ – компоненты метрического тензора. Закон Навье играет роль уравнений состояния и служит для замыкания системы уравнений механики сплошной среды. Уравнения Навье-Стокса движения вязкой жидкости имеют вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \mathrm{grad} p + (\lambda + \mu)\ \mathrm{grad\ div}\ \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}$$

Здесь $\mathbf{F}$ – плотность массовых сил, $\Delta \mathbf{v}$ – оператор Лапласа от вектора скорости.

Для несжимаемой однородной вязкой жидкости замкнутая система уравнений состоит из уравнения неразрывности и уравнений движения

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\ \mathrm{grad}\ p + \nu \Delta \mathbf{v} \tag{1}$$

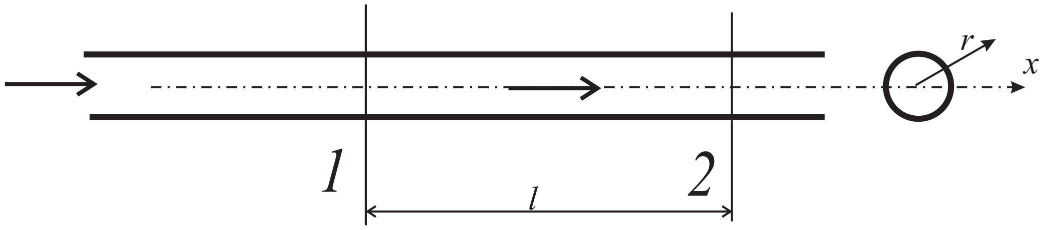
Коэффициент $\mu$ называется динамическим коэффициентом вязкости и имеет размерность $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$ в классе {масса, длина, время}. Отношение $\mu/\rho = \nu$ называется кинематическим коэффициентом вязкости и имеет размерность $[\nu] = L^2T^{-1}$. Для каждой среды коэффициенты вязкости обычно зависят только от температуры. При температуре $15^o$ С для воды $\mu$= 0.01 *г/см сек*, $\nu$=0.01 *см*$^2$*/сек*; для воздуха $\mu = 1.8 \cdot 10^{-4}$ *г/см сек*, $\nu$=0.15 *см*$^2$*/сек*.

Граничным условием на твердой неподвижной границе служит условие прилипания $\mathbf{v} = 0$ (т.е. $v_n = 0$ и $v_\tau = 0$).

### Течение Пуазейля

Ламинарное установившееся движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе в отсутствии массовых сил называют течением Гагена-Пуазейля. Для этой задачи система уравнений вязкой жидкости (1) с указанными граничными условиями может быть проинтегрирована.

Будем считать, что труба (как это выполнено в экспериментальной установке) имеет круглое сечение радиуса $a$, достаточно большую протяженность $L >> a$ и расположена горизонтально, что позволяет исключить действие силы тяжести. Движение обладает осевой симметрией. Описание удобно вести в цилиндрических координатах, ось $x$ – вдоль оси трубы и $r$ вдоль радиуса сечения.




В ламинарном течении вектор скорости $\mathbf{v}$ имеет только одну компоненту $v_x = v$ вдоль оси трубы. На границе условие непроницаемости $v_n = 0$ выполнено автоматически. Вследствие стационарности движения $\partial v/\partial t = 0$, и следовательно, $v = v(x, r), \quad p = p(x, r)$. Система уравнений (1) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v, \qquad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{2}$$

Из уравнения неразрывности видно, что $v = v(r)$, из уравнения движения в проекции на $r$ следует $p = p(x)$. Поэтому в уравнении движения в проекции на ось трубы одно из слагаемых зависит только от $x$, другое только от $r$. Чтобы это было возможно, необходимо, чтобы каждое из слагаемых было постоянной величиной

$$\frac{dp}{dx} = \mu \Delta v = -i = \mathrm{const}$$

Из первого уравнения получается линейное распределение давления вдоль трубы, и постоянная $i > 0$ находится по заданным (измеренным) значениям давления в двух сечениях трубы на расстоянии $l$ одно от другого

$$i = \frac{p_1 - p_2}{l}$$

Оператор Лапласа $\Delta v$ от осевой компоненты $v(r)$, когда она зависит только от $r$, в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)$$

Интегрируя два раза по $r$ уравнение движения $\mu \Delta v = -i$, получим

$$v(r) = -\frac{i}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C$$

Чтобы решение было ограниченным, необходимо потребовать $C_1 = 0$. Вторая постоянная $C$ находится из условия прилипания при $r = a$, где $a$ – внутренний радиус трубы. Получим $C = \dfrac{i}{4\mu}a^2$. В результате профиль скорости в ламинарном течении в каждом сечении имеет параболический вид

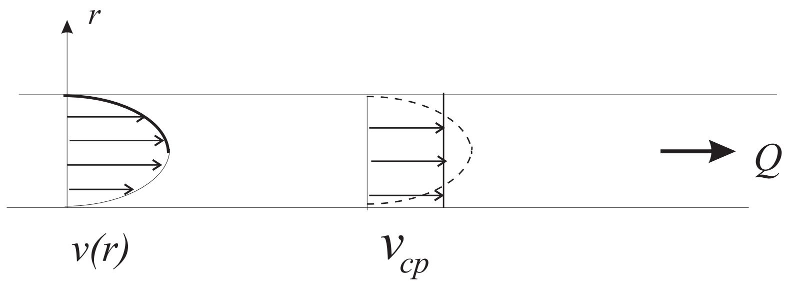
$$v(r) = \frac{i}{4\mu}(a^2 - r^2), \qquad \text{или} \qquad v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(a^2 - r^2) \tag{3}$$

Расход жидкости $Q$, представляющий собой количество жидкости, протекающее через сечение трубы в единицу времени, определяется интегрированием осевой компоненты скорости $v$ (3) по сечению трубы

$$Q = \int\limits_0^a v(r)2\pi r\,dr = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}2\pi\int\limits_0^a r(a^2 - r^2)\,dr = \pi\frac{p_1 - p_2}{8\mu l}a^4$$

Полезно ввести понятие средней по сечению скорости, которая определяется по расходу как $v_{cp} = Q/S$, где $S$ – площадь сечения трубы. Для ламинарного течения она вычисляется по формуле

$$v_{cp} = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l}a^2 \tag{4}$$




Из опыта известно, что при ламинарном режиме параболический профиль скорости устанавливается не сразу по выходе трубы из напорного бака, а на некотором расстоянии от него и таким остается вдоль всей остальной трубы. Поэтому для выполнения этой работы нужно, чтобы труба была достаточно длинная и измерения следует проводить достаточно далеко от начала трубы.

Для турбулентного режима дело обстоит сложнее. Из-за хаотического характера изменения параметров турбулентного движения обычными приборами можно измерить только их осредненные значения. В связи с этим при построении теоретических моделей турбулентных течений обычно применяют метод осреднения системы уравнений с целью получить закономерности, связывающие осредненные характеристики потока. Для получения замкнутой системы осредненных уравнений требуются дополнительные гипотезы. Построение таких моделей сложно, не является универсальным для разных типов задач и поэтому здесь рассматриваться не будет.

## Сопротивление трубопровода

Рассматривается стационарное течение в горизонтальной трубе кругового сечения постоянного диаметра $d$. Понятие стационарности для турбулентных режимов применимо только к осредненным величинам и определяется постоянством расхода $Q$ или средней скорости $v_{cp} = Q/S$, где $S$ – площадь поперечного сечения трубы. Как показывают наблюдения, при стационарном течении и в ламинарном, и в турбулентном режиме происходит падение давления вдоль трубы в направлении течения, т.е. имеются потери напора. Эти потери, называемые сопротивлением трубопровода, необходимо уметь рассчитывать при строительстве и эксплуатации трубопроводов, предназначенных для транспортировки различных жидкостей (воды, нефти, крови и др.), а также газов (так как при стационарном движении с умеренными скоростями учет сжимаемости не нужен).

Сопротивлением трубопровода принято считать силу $F$, пропорциональную потери давления $p_1 - p_2$ на участке трубы между сечениями 1 и 2.

$$F = (p_1 - p_2)S$$

Как показывают наблюдения, главной причиной, вызывающей потери давления, является свойство вязкости жидкости, проявляющееся при ее движении. Кроме того, сопротивление трубы существенно зависит от качества внутренней поверхности труб, которое характеризуется уровнем шероховатости. В данной работе влияние этого параметра изучать не предполагается, а потому в число определяющих аргументов для функции $F$ включать его не будем. Не будут рассматриваться и возможные потери, которые могли бы возникнуть из-за центробежных сил в местах изгиба трубопровода. Для этого рабочий участок трубы выбирается прямолинейный. Таким образом, считаем, что единственной причиной, приводящей к потери давления, является вязкость, и определяющими параметрами служат свойства жидкости плотность $\rho$ и вязкость $\mu$, геометрические характеристики трубопровода $d$ и $l$ и характеристика режима течения расход $Q$, или средняя скорость $v_{cp} = Q/S$.

$$F = F(\rho, \mu, v_{cp}, d, l)$$

Следуя правилам теории размерности, это соотношение можно переписать в безразмерных переменных в классе систем единиц измерения $\{M, L, T\}$ (масса, длина, время)

$$\Pi = \frac{(p_1 - p_2)S}{\rho v_{cp}^2 d^2} = f\left(\frac{l}{d}, \frac{\rho d v_{cp}}{\mu}\right) = f\left(\frac{l}{d}, \mathrm{Re}\right)$$

Здесь $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho d v_{cp}}{\mu}$ –число Рейнольдса.

Целью работы является экспериментальное отыскание вида функции $f$. При этом следует опираться на уже существующие результаты исследования этой задачи. Из них прежде всего известно, что не только при ламинарном режиме (как было указано теорией), но и при турбулентном тоже, потери давления $p_1 - p_2$ происходят линейно вдоль трубы. Чтобы убедиться в этом, следует произвести измерения перепада давления в трубопроводе на участках различной длины. Установка для проведения этих измерений оборудована измерителями давления (манометрами), расположенными в нескольких (в 5-и) сечениях трубопровода. Это позволяет произвести измерения и убедиться в том, что при каждой скорости течения (разных Re) справедливо утверждение $(p_1 - p_2)/l = \text{const}$ . Это означает, что

$$\Pi = \frac{l}{d}\ \varphi(\text{Re})$$

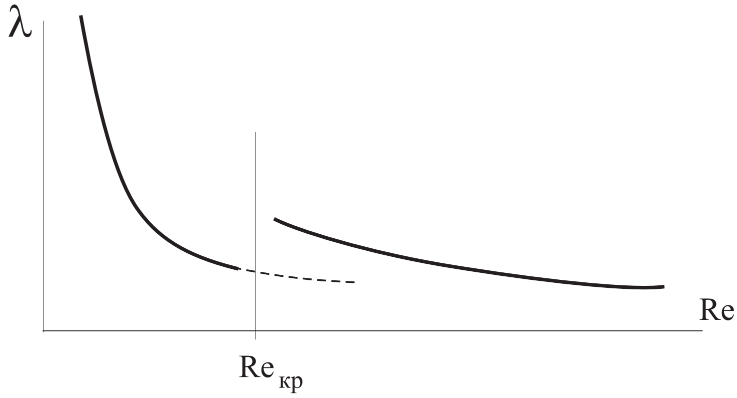
и вместо безразмерного сопротивления $\Pi$ можно ввести функцию $\lambda$, характеризующую сопротивление единицы длины трубопровода

$$\lambda = \frac{(p_1 - p_2)}{\dfrac{1}{2}\rho v_{cp}^2}\ \frac{d}{l} = \varphi(\text{Re})$$

(числовой множитель $\dfrac{1}{2}$ в комбинации для $\lambda$ – дань традиции, когда изменение давления принято относить к скоростному напору $\dfrac{1}{2}\rho v_{cp}^2$). Так определенная функция $\lambda$ называется *коэффициентом сопротивления трубопровода.*

Итак, цель работы – экспериментальное определение $\lambda(\text{Re})$ и построение соответствующего графика.

Все предыдущие опыты показывают, что изменение $\lambda$ при изменении Re происходит по разным законам в области ламинарных и турбулентных режимов течения. График $\lambda(\text{Re})$ состоит из двух ветвей, разделенных некоторой зоной неустойчивого режима, соответствующей критическому числу Рейнольдса $\text{Re}_{кр}$, при котором ламинарный режим переходит в турбулентный. В результате большого числа экспериментальных исследований установлено, что $\text{Re}_{кр}$ для обычных водопроводных труб лежит примерно в диапазоне 2300 - 2800. Его величина сильно зависит от степени гладкости внутренней поверхности трубы, а еще в большей мере – от качества входа из напорного бака в трубопровод. Если бы ламинарный режим удалось распространить на несколько большие числа Рейнольдса (например, улучшением гладкости входа в трубопровод), то сопротивление $\lambda$ было бы меньше, чем в турбулентном течении при тех же Re. Для каждого конкретного трубопровода надо определять экспериментально свое $\text{Re}_{кр}$, что и является одной из целей предлагаемой работы. Знать $\text{Re}_{кр}$ необходимо и для того, чтобы указать область применимости теории Пуазейля ламинарного течения. При организации эксперимента надо проследить, чтобы было получено достаточное количество точек измерения для обеих ветвей графика $\lambda(\mathrm{Re})$ и переходной области около $\mathrm{Re}_{кр}$.




Для ламинарных течений ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$) можно воспользоваться найденной теоретически связью (4) между изменением давления и средней скоростью

$$p_1 - p_2 = 8\mu\frac{l}{a^2}\ v_{ср}, \qquad a = d/2$$

и найти вид функции $\lambda(\mathrm{Re})$ в явном виде

$$\lambda_{лам} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Обычно ламинарный режим осуществляется при медленном течении вязкой жидкости в трубках очень малого диаметра, классическим примером чего является движении крови по капиллярам. В то же время большинство течений жидкостей и газов в технических трубопроводах турбулентно. Практические нужды привели к большому количеству работ по экспериментальному определению коэффициента сопротивления трубопроводов и получения на их основе эмпирических, принятых для технического употребления формул, некоторые из которых приводятся ниже

$$\lambda_1^T = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} \qquad \text{– формула Блазиуса,} \quad \mathrm{Re} < 100000$$

$$\lambda_2^T = 0.0072 + \frac{0.611}{\mathrm{Re}^{0.35}} \qquad \text{– формула Якоба и Эрка,} \quad \mathrm{Re} < 400000$$

$$\lambda_3^T = 0.0054 + \frac{0.396}{\mathrm{Re}^{0.3}} \qquad \text{– формула Германа,} \quad \mathrm{Re} < 2000000$$

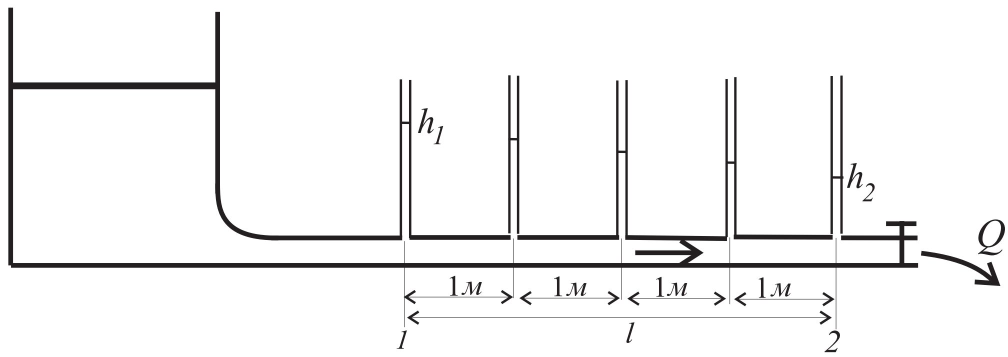
$$\lambda_4^T = 0.01 + \frac{1.77}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

$$\lambda_5^T = \frac{\frac{64}{\mathrm{Re}}}{1 - (1 - \frac{n}{n + \mathrm{Re}})^4}, \qquad n = 576$$

Определение вида функции $\lambda(Re)$ можно провести на любом доступном трубопроводе, удовлетворяющем постановке задачи, с любой рабочей жидкостью. Полученная зависимость может быть использована в соответствии с законами моделирования для определения сопротивления трубопровода любого другого диаметра с другой жидкостью или газом и при любых скоростях течения.

**Проведение опыта**

В лабораторной работе используется прямолинейный участок горизонтального трубопровода кругового сечения с постоянным внутренним диаметром $d = 0.95$ см, по которому течет вода при комнатной температуре (ее кинематический коэффициент вязкости $\nu = 0.01$см$^2$/сек). Вода подается из напорного бака, в котором для обеспечения стационарности поддерживается постоянный уровень. На рабочем участке трубопровода имеется 5 точек (отверстий в трубе) на расстоянии 1 м одна от другой, в которых стоят приборы, измеряющие давление. Для этого использованы пьезометрические манометры в виде вертикальных стеклянных трубок, в которых давление измеряется весом столба жидкости $p = \rho g h$, где $g$ – сила тяжести, $h$ – высота уровня воды в трубке. Измерение $p$, т.е. $h$, в 5-и точках позволяет проследить и подтвердить свойство линейности распределения давления вдоль трубы.




Расход воды через трубу регулируется вентильным краном на конце трубопровода. Расход $Q$ измеряется с помощью мерного сосуда и секундомера как количество жидкости, вытекающее из трубы в единицу времени. Средняя скорость $v_{cp} = Q/(\pi d^2/4)$. Так как $d$ и $\nu$ постоянны, то $\mathrm{Re} \sim v_{cp}$.

При использовании для измерения давления манометров указанного типа формулу для $\lambda$ преобразуем к виду

$$\lambda = \frac{(p_1 - p_2)}{\frac{1}{2}\rho v_{cp}^2}\ \frac{d}{l} = \frac{(h_1 - h_2)}{l}\ \frac{2gd}{v_{cp}^2}$$

Очевидно, для определения $\lambda$ достаточно всего двух точек измерения давления, и $l$ – расстояние между ними.

Для того, чтобы получить достаточное количество точек на каждой из ветвей графика $\lambda(\mathrm{Re})$, надо примерно знать область перехода от ламинарного режима к турбулентному. На оси Re это диапазон $2300 < \mathrm{Re} < 2800$. Но удобнее следить за переходной областью по разнице показаний манометров $h_1 - h_2$. Для этого можно поступить следующим образом. Если считать, что $\mathrm{Re}_{кр}$ – конец ламинарного участка, то здесь еще можно пользоваться формулой $\lambda_{кр} = \dfrac{64}{\mathrm{Re}_{кр}}$, тогда можно найти перепад $(h_1 - h_2)_{кр}$, соответствующий переходной области

$$\frac{(h_1 - h_2)_{кр}}{l} = \frac{64(v_{cp}^2)_{кр}}{2gd\mathrm{Re}_{кр}} = \frac{32\nu^2}{gd^3}\ \mathrm{Re}_{кр} \simeq 3.2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Re}_{кр}$$

В этой переходной зоне изменений $h_1 - h_2$ точки измерения нужно брать с достаточно малым интервалом. Левее этой области, для ламинарной ветви графика надо иметь не менее 5-6 точек, в переходной области – столько же и на турбулентной ветви, соответствующей всей остальной оси изменения Re, еще 8-10 точек. Значение $\mathrm{Re}_{кр}$ для исследуемой трубы определяется по полученному в результате эксперимента графику $\lambda(\mathrm{Re})$.

## Порядок обработки результатов

Изобразить схему экспериментальной установки карандашом с использованием линейки;

привести таблицу измеренных величин и подсчитанных по формулам $v_{cp}, \mathrm{Re}, \lambda$ с указанием их размерности;

построить график зависимости $\lambda(\mathrm{Re})$ (карандашом на миллимитровой бумаге);

по графику найти $\mathrm{Re}_{кр}$;

на ламинарном участке ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$) построить для сравнения график теоретической зависимости $\lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$;

на турбулентном участке ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$) провести сравнение экспериментального графика с кривой, построенной по одной из эмпирических формул.

Во время зачета необходимо уметь отвечать на следующие вопросы:

1. Понятие о вязкости, закон Ньютона для вязких напряжений. Закон Навье и модель вязкой жидкости. Коэффициенты вязкости. Ламинарный и турбулентный режимы течений.

2. Постановка и решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в круглой трубе (течение Пуазейля), получение параболического закона распределения скоростей по сечению трубы.

3. Вывод формулы $\lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$ для коэффициента сопротивления при ламинарном режиме.

4. П - теорема. Ее формулировка, доказательство и применение к данной задаче. Истолкование результатов графика $\lambda = \lambda(\mathrm{Re})$ с точки зрения теории размерностей и механического подобия.