

А.Г.Куликовский, Е.И.Свешникова

Задача о движении упругой среды, образовавшейся на фронте затвердевания

Рассмотрена следующая автомодельная задача. В начальный момент времени от некоторой плоскости (которая далее именуется стенкой или поршнем в зависимости от того считается она неподвижной или движущейся) уходит с постоянной скоростью фронт фазового превращения, в котором из среды без касательных напряжений в результате затвердевания образуется упругая среда. На стенке задаются граничные условия в виде компонент скорости, напряжений или деформаций. За фронтом затвердевания по образовавшейся среде могут распространяться плоские нелинейные упругие волны, если их скорости меньше скорости фронта. Предполагается, что образовавшаяся среда несжимаемая, слабонелинейная и обладает малой анизотропией. При этих предположениях дано качественное описание решения автомодельной задачи при произвольных параметрах, входящих в ее постановку. В работе используется ранее проведенное авторами исследование фронтов затвердевания в предположении, что их структура описывается моделью вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта.

Введение

Предлагаемая работа представляет собой продолжение исследований фронтов затвердевания и их свойств, опубликованных в [1–3]. Эти фронты интересны (помимо возможностей их прямого использования [4]) тем, что при выставлении граничных условий на разрывах такого типа может оказаться недостаточно соотношений, следующих из универсальных физических законов сохранения и требуется привлечение "дополнительных" соотношений на разрыве.

Источником получения дополнительных соотношений, как правило, служит исследование непрерывных процессов, происходящих в узком слое, называемом структурой разрыва, который заменяется при крупномасштабном описании поверхностью разрыва – фронтом. Эти процессы могут быть различными и им обычно соответствуют модели сплошной среды, включающие производные по пространству более высокого порядка, чем в исходной внешней крупномасштабной задаче. Дополнительные соотношения представляют собой условия, при которых существует решение задачи о структуре разрыва. Их вид явным образом зависит от модели, принятой для описания структуры разрыва. Однако оказывается, что число дополнительных соотношений не зависит от описания процессов внутри структуры [5] (см. также [6, 8]), а определяется условием эволюционности разрыва (условие эволюционности это условие разрешимости задачи о взаимодействии разрыва с малыми возмущениями в линейном приближении [9]).

Наиболее известный разрыв с одним дополнительным соотношением – фронт медленного горения в газе [10]. Дополнительное соотношение определяет скорость распространения фронта, которая зависит от теплопроводности, диффузии и кинетики химических реакций, проявляющихся внутри структуры фронта горения. Существует ряд других фронтов с одним дополнительным соотношением, структура которых описывается как решение двух обыкновенных уравнений, соединяющих две особые точки типа седла (см., например, [11, 12]). Разрывы решений уравнений упругопластичности требуют для своего описания двух дополнительных соотношений [13, 14]. Рассматриваемые ниже фронты затвердевания с образованием анизотропной упругой среды отличаются тем, что число дополнительных соотношений на них может быть различным в зависимости от скорости распространения фронта и может принимать значения от 0 до 2. Такая ситуация напоминает ранее изучавшиеся фронты ионизации и рекомбинации [15], которые также требуют в различных условиях различного числа дополнительных соотношений.

В работе [1] рассмотрены фронты затвердевания в случае, когда образующаяся за фронтом среда нелинейная и изотропная. При этом в зависимости от скорости фронта число дополнительных соотношений принимает одно из двух значений 0 или 2. В [2,3] была учтена анизотропия образовавшейся среды, что привело к выводу, что при различных параметрах задачи могут образовываться фронты с числом дополнительных соотношений 0,1,2.

Как известно [6], малая нелинейность при малой анизотропии может быть представлена в упругом потенциале одним членом, коэффициент при котором может иметь разный знак в зависимости от типа рассматриваемой реальной среды. В зависимости от знака этого коэффициента качественно меняются свойства упругой среды и упругих волн в ней. Это обстоятельство приводит также к качественным различиям свойств фронтов затвердевания для сред с разными типами нелинейности, рассмотренных соответственно в [2] и [3].

Постановка задачи

Ниже рассматривается задача о набегании среды без касательных напряжений на неподвижную стенку в предположении, что превращение происходит на фронте затвердевания и в результате образуется несжимаемая, слабоанизотропная, слабонелинейная упругая среда. Эта задача при другой точке зрения может рассматриваться также как задача поршне, вдвигаемом в неподвижную среду. На стенке считаются заданными касательные напряжения или определяющие их сдвиговые деформации.

Направление, нормальное к стенке, примем за ось $x_3 = x$ декартовой лагранжевой системы координат начального состояния. Две другие декартовы оси x_1 и x_2 лежат в ортогональной плоскости. Задача одномерная, все величины зависят от x, t . Процесс превращения потока в упругую среду происходит в узком слое, называемом структурой разрыва, который при крупномасштабном рассмотрении принимается за плоский фронт. Считается, что фронт уходит от стенки $x = 0$ в момент времени $t = 0$. Задача автомодельная, все величины зависят от x/t .

Среда перед фронтом затвердевания предполагается неспособной выдержать касательные напряжения. Это может быть среда из невзаимодействующих частиц или идеальная жидкость, испытывающая на фронте затвердевания фазовое превращение, например, замерзание или полимеризацию. Фронт затвердевания движется в положительном направлении оси x . Его скорость $W = dx/dt$ в автомодельной задаче постоянна. Если рассматривается образование упругой среды из потока невзаимодействующих частиц (напыление), то значение W определяется законом сохранения массы при заданных параметрах потока частиц и плотности образовавшейся среды. В случае фазового превращения этот процесс определяет W . Далее W считается произвольно заданным параметром.

Упругие напряжения и деформации непосредственно за фронтом затвердевания формируются внутри структуры этого фронта. За фронтом затвердевания по образовавшейся упругой среде могут распространяться плоские нелинейные упругие волны. В автомодельной задаче это ударные волны и волны Римана, следующие в порядке убывания скоростей, разделенные однородными состояниями между ними. При малой анизотропии и нелинейности они были изучены авторами ранее [6].

Возможна другая, эквивалентная постановка задачи, когда среда перед фронтом покоится, а стенка движется с постоянной скоростью. Такая постановка задачи в газовой динамике и магнитной гидродинамике называется "задачей о поршне". Для полупространства, полностью заполненного упругой средой, решение задачи о поршне построено в [6, 17, 18].

В рассматриваемой здесь задаче упругие волны распространяются по состоянию, которое порождено прохождением фронта затвердевания. Множество состояний за фронтом затвердевания в образовавшейся за ним упругой среде с разными типами нелинейности было найдено в [2, 3] и будет использовано при построении решения. Это множество было определено как условие существования структуры фронта затвердевания, описываемой уравнениями модели вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта.

Движение среды за фронтом затвердевания

Процесс затвердевания сопровождается появлением в структуре фронта упругих напряжений и деформаций. Поскольку образовавшаяся упругая среда несжимаема, нормальная к фронту составляющая скорости среды относительно стенки равна нулю. Нормальное напряжение неизменно во всей упругой области, так что изучению подлежат касательные напряжения, деформации и скорости в упругой среде за фронтом затвердевания.

Пусть $\mathbf{w}(x, t)$ – вектор перемещения в упругой среде. Тогда в лагранжевых переменных компоненты скорости среды определены производными $\partial w_\alpha / \partial t = v_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2$ и $\partial w_3 / \partial t = v_x = 0$. Деформации сдвига задаются величинами $\partial w_\alpha / \partial x = u_\alpha(x, t)$. Упругая среда при малых нелинейности и анизотропии может быть задана своим упругим потенциалом в виде первых членов разложения по компонентам деформаций сдвига [6, 19]

$$\Phi(u_1, u_2) = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\varkappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 \quad (1)$$

Компоненты напряжений сдвига σ_α определяются производными

$$\sigma_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}$$

Коэффициенты f, g, \varkappa в выражении (1) – упругие постоянные среды. Первое слагаемое представляет напряжения в линейной изотропной несжимаемой среде и коэффициент f – модуль сдвига при малых деформациях. Последний член выражает в главном приближении малую нелинейность, которая при малой анизотропии принимается изотропной. При этом коэффициент \varkappa может иметь любой знак, что соответствует разным типам нелинейности и приводит к существенному различию в поведении упругих волн. Коэффициент $\varkappa > 0$, например, для таких сред как металлы, а $\varkappa < 0$ для материалов типа резин. Коэффициент g , представляющий анизотропию среды, предполагается малым, так что эффекты нелинейности и анизотропии имеют один порядок величины, то есть $g \sim u^2$, где u – характерное значение сдвиговой деформации. Выбором нумерации осей координат x_1, x_2 коэффициент g можно всегда сделать положительным, что далее принято. Так как среда несжимаема и однородна, ее плотность постоянна. Для упрощения записи формул положим $\rho = 1$.

Так как при малых u_α первый член в (1) существенно больше двух других, то связь σ_1, σ_2 с u_1, u_2 взаимно однозначна.

Система уравнений для одномерных движений упругой среды в лагранжевых переменных имеет вид

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right), \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

Эта гиперболическая система обладает четырьмя семействами характеристик, скорости которых $\pm c_1 \pm c_2$. Величины характеристических скоростей c_1 и c_2 согласно с их величинами, будем называть соответственно медленными и быстрыми. Их выражения для среды с упругим потенциалом (1) имеют вид [6, 16]

$$c_{1,2}(u_1, u_2) = \left[f - 2\varkappa(u_1^2 + u_2^2) \mp |\varkappa| \sqrt{(u_2^2 - u_1^2 - g/\varkappa)^2 + 4u_1^2 u_2^2} \right]^{1/2} \quad (3)$$

В состоянии, когда деформации сдвига отсутствуют,

$$c_{1,2}(0, 0) = \sqrt{f \mp g} = c_{1,2}^o$$

Состояние за фронтом затвердевания представляет граничные условия для уравнений (2). Фронт затвердевания в автомодельной задаче рассматривается как поверхность разрыва, на которой должны выполняться законы сохранения массы и импульса.

Закон сохранения импульса для касательных компонент

$$\sigma_{\alpha}^{+} - \sigma_{\alpha}^{-} = -W(v_{\alpha}^{+} - v_{\alpha}^{-}), \quad \alpha = 1, 2$$

служит для связи напряжений σ_{α}^{+} за фронтом с параметрами перед фронтом, где в потоке частиц $\sigma_{\alpha}^{-} = 0$ и скорость $v_{\alpha}^{-} = V_{\alpha}$ заданы. Так что

$$\sigma_{\alpha}^{+} = W(V_{\alpha} - v_{\alpha}^{+}) \quad (4)$$

Равенства (4) это основные соотношения на фронте затвердевания, которые должны выполняться во всех случаях. Однако, для обеспечения эволюционности разрыва и однозначности решения задачи на фронте кроме законов сохранения может оказаться нужным выставлять дополнительные граничные условия. В соответствии с общими представлениями [5], количество необходимых дополнительных соотношений на разрыве, а следовательно, и размерность множества состояний за фронтом различны при разных соотношениях между скоростью фронта W и скоростями малых возмущений c_1, c_2 . Поэтому решение рассматриваемой в данной работе задачи о набегании потока на неподвижную стенку будет рассматриваться отдельно в каждом из диапазонов значений скорости фронта W .

Решение строится ниже в фазовом пространстве деформаций сдвига u_1, u_2 и скорости фронта W . При этом считается, что на стенке заданы постоянные значения $u_{\alpha} = u_{\alpha}^{*}$, однозначно связанные, согласно (1) с напряжениями на стенке. За фронтом затвердевания могут идти упругие волны – ударные или волны Римана, в которых происходят изменения деформаций от значений u_{α}^{+} непосредственно за фронтом затвердевания до значений u_{α}^{*} в среде, примыкающей к стенке. Для каждого фиксированного значения W деформации u_1, u_2 будем представлять на ортогональной оси W плоскости, соответствующей этому значению W .

Подчеркнем, что изменения u_1 и u_2 могут происходить не только на фронте затвердевания, но и в упругих волнах, имеющих меньшую скорость, чем фронт затвердевания W . Но при описании решения эти изменения будут изображаться на плоскости $W = \text{const}$, соответствующей скорости фронта затвердевания в соответствующем решении.

Исследование будем вести отдельно для сред с разными типами нелинейности, то есть при разных знаках упругого коэффициента \varkappa в формуле (1).

О нелинейных волнах в упругих средах

Ниже для упругих сред, заданных своим упругим потенциалом (1), приводятся некоторые сведения о поведении тех нелинейных волн, которые потребуются при построении решения автомодельной задачи: для сред с $\varkappa > 0$ это волны Римана [6, 16], для сред с $\varkappa < 0$ – ударные волны [6, 7].

В рассматриваемой автомодельной задаче непрерывные решения уравнений (2) для величин u_i зависят от x/t и являются волнами Римана. В этих решениях $x/t = c_{\alpha}(u_1, u_2)$ и в зависимости от выбора значений c_1 или c_2 в выражениях (3) они называются медленными или быстрыми. В физическом пространстве волны Римана расширяются со временем, поэтому значения c_{α} в них убывают со временем в каждой точке

среды. Изменения u_1 и u_2 описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений [6, 16]. Два взаимно ортогональных семейства интегральных кривых этих уравнений на фазовой плоскости u_1, u_2 изображены на рис.1

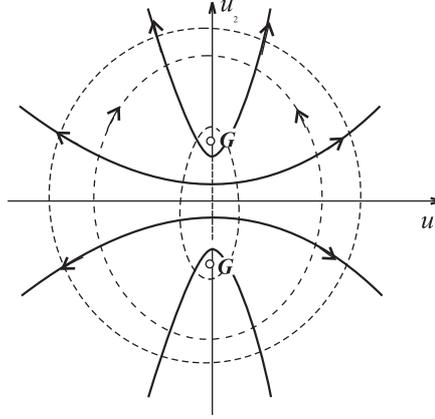


Рис. 1:

В средах с $\varkappa > 0$ интегральные кривые медленных волн изображены сплошными линиями, быстрых – штриховыми. Стрелками указано направление убывания c_1, c_2 на интегральных кривых каждого из семейств (движение по стрелкам соответствует перемещению от переднего фронта волны Римана к заднему). На оси u_2 имеются две точки G с координатами $u_2 = \pm\sqrt{g/\varkappa}$. Это особые точки уравнений волн Римана, в которых $c_1 = c_2$. Их наличие связано с учетом анизотропии среды. Картина интегральных кривых симметрична относительно осей u_1 и u_2 , что позволяет далее рассматривать только полуплоскость $u_2 > 0$.

В решении автомодельной задачи будут использованы медленные волны Римана с начальными точками на оси u_2 . Что касается быстрых волн Римана, то далее в решение войдет только одна интегральная линия, идущая вдоль оси u_2 из начала координат O в точку G .

Для сред с $\varkappa < 0$ потребуются некоторые сведения об ударных волнах, в частности в том случае, когда состояние перед ударной волной лежит на оси u_2 [6, 7].

Эволюционные ударные волны в упругих средах, так же как и волны Римана, делятся на медленные и быстрые в зависимости от того, какой из систем неравенств подчиняется ударная волна

$$\begin{array}{ll} \text{медленные} & c_1^- < W < c_2^-, \quad W < c_1^+ \\ \text{быстрые} & W > c_2^-, \quad c_1^+ < W < c_2^+ \end{array}$$

Здесь знаки $-$ и $+$ указывают на состояния непосредственно перед и за ударной волной.

На рис. 2 на плоскости u_1, u_2 изображены эволюционные участки ударных адиабат быстрых и медленных ударных волн, когда начальным состоянием служит точка на оси u_2 [6].

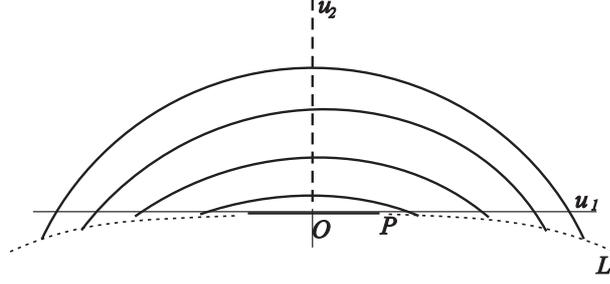


Рис. 2:

Если состояние перед ударной волной представлено на плоскости u_1, u_2 началом координат $u_1^- = 0, u_2^- = 0$, то ударная адиабата имеет уравнение

$$u_1 u_2 = 0 \quad (5)$$

и расположена на осях координат. Состояния за быстрыми эволюционными разрывами занимают всю положительную ось u_2 . На рисунке это изображено штриховой линией. Эволюционный участок медленной волны из начала координат лежит на оси u_1 в виде отрезка, симметричного относительно точки O . Его часть на положительной части оси u_1 изображена на рис. 2 отрезком OP и имеет длину

$$OP = \sqrt{(c_2^2 - f + g)/(-\varkappa)} = \sqrt{\frac{2g}{|\varkappa|}}$$

Скорости ударных волн из начала координат определяются выражением

$$V^2 = f - \varkappa(u_1^2 + u_2^2) - g \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 + u_2^2} \quad (6)$$

Для начальных состояний на оси u_2 выше начала координат ($u_1^- = 0, u_2^- = U > 0$) ударные адиабаты медленных волн представлены дугами окружностей с центрами на отрицательной части оси u_2

$$u_1^2 + \left(u_2 - \frac{g}{\varkappa U}\right)^2 = \left(U - \frac{g}{\varkappa U}\right)^2 \quad (\varkappa < 0) \quad (7)$$

Картина эволюционных участков ударных адиабат медленных ударных волн из точек оси u_2 приведена на рис. 2 для сред с $\varkappa < 0$ сплошными линиями. Эволюционные отрезки ударной адиабаты, соответствующие медленным ударным волнам с начальными точками на положительной части оси u_2 , заканчиваются в точках, где для этих предельных ударных волн выполняется условие $W = c_2^-$. Для начальных состояний $0 < U < 2g/|\varkappa|$ (которые будут интересовать нас в связи с решением автомодельной задачи) координата u_2 конца эволюционного участка ударной адиабаты медленной волны, с начальной точкой $(0, U)$ имеет величину $u_2 = \varkappa U^3/g$ [6]. Эти состояния расположены в области $u_2 < 0$ и концы эволюционных отрезков составляют некоторую линию PL на рис. 2.

В дальнейшем, пользуясь симметрией полученной картины расположения ударных адиабат относительно оси u_2 , будем использовать только полуплоскость $u_1 > 0$.

Модель структуры фронтов затвердевания

Для описания структуры фронта затвердевания была принята [2, 3] модель вязко упругой среды Кельвина-Фойхта, в которой упругие напряжения определены упругим потенциалом (1), а изотропная вязкость задана своим коэффициентом μ . При этом течение внутри структуры одномерно и стационарно в системе координат $\xi = Wt - x$, связанной с фронтом. Уравнения структуры приводятся к виду

$$\mu W \frac{du_\alpha}{d\xi} = -\frac{\partial F(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (8)$$

где

$$F(u_1, u_2) = \frac{f - W^2}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\varkappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 + Q_1 u_1 + Q_2 u_2$$

Здесь Q_1 и Q_2 – произвольные постоянные.

Структура упругих ударных волн описывается интегральной кривой, соединяющей особые точки системы (8). Медленным ударным волнам соответствуют интегральные кривые, идущие из седла в узел, а быстрым – интегральные кривые, идущие из узла в седло. Структура фронтов затвердевания представляется интегральной кривой из начала координат в одну из особых точек системы (8).

Строение ударных адиабат для фронтов затвердевания, полученные с использованием уравнений (8) будет представлено в следующих разделах вместе с решением задачи о движении упругой среды, образовавшейся во фронте затвердевания.

Решение задачи о поршне для сред с $\varkappa > 0$.

Напомним, что в автотомодельной задаче на стенке (поршне) считаются заданными компоненты деформаций $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$, а на другой границе упругой среды состояние u_1^+ , u_2^+ – то, которое получилось в результате прохождения фронта фазового превращения. Это множество состояний было найдено в результате исследования структуры фронта и различно для сред с разным типом нелинейности, то есть разными знаками коэффициента \varkappa в упругом потенциале (1).

Множество состояний за фронтом затвердевания в фазовом пространстве W, u_1, u_2 для сред с $\varkappa > 0$, найденное ранее [2], представлено на рис.3. Оно состоит из частей разной размерности. Для фронтов со скоростями $0 < W < c_1(u_1, u_2)$ (они названы медленными) это множество трехмерное, расположенное вдоль оси W внутри поверхности, состоящей из точек, в которых $W = c_1^+$. По аналогии с газовой динамикой такие точки названы точками Жуге, а поверхности и линии, состоящие из таких точек, будем называть поверхностями и линиями Жуге. На рис.3 область медленных фронтов выделена затенением. Для фронтов со скоростями $c_1(u_1, u_2) < W < c_2(u_1, u_2)$, названных быстрыми, состояния за фронтом лежат в двумерной области на плоскости $u_1 = 0$, границами которой служат линии Жуге $W = c_1^+$ и $W = c_2^+$. На рис.3 эта область отмечена вертикальной штриховкой. В сверхбыстрых фронтах со скоростями $W > c_2^0$ упругие деформации не возникают, и следовательно, состояния за ними $u_1^+ = u_2^+ = 0$

расположены вдоль оси W , начиная от точки $W = c_2^0$ и далее до бесконечности и изображены жирной линией.

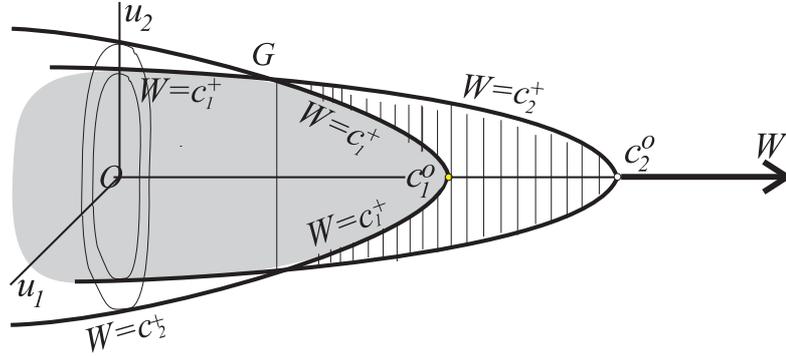


Рис. 3:

Очевидно, задача обладает симметрией относительно плоскости $u_2 = 0$, поэтому далее будем обсуждать все решение только в верхней полуплоскости, то есть для $u_2 > 0$.

Пусть $0 < W < c_1^0 = \sqrt{f - g}$.

Если точка с координатами $W, u_1^*, u_2^* > 0$ лежит внутри области медленных фронтов затвердевания описанной выше, то решение рассматриваемой задачи состоит из одного медленного фронта затвердевания и однородного состояния $u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*$ за ним.

Когда состояния W, u_1^*, u_2^* лежат за пределами этой области, следует учесть тот факт, что в области $u_2 > 0$ при любом W имеются точка, помеченная на рис.3 буквой G , в которой $c_1^+ = c_2^+$. Выражение (3) для характеристических скоростей показывает, что это особая точка уравнений волн Римана. Поведение интегральных кривых волн Римана в ее окрестности обсуждалось выше и изображено на рис.1. Координаты этой точки $u_1 = 0, u_2 = \sqrt{g/\kappa}$ не зависят от величины W . Когда $W = \sqrt{f - 2g}$, эта точка оказывается на поверхности Жуге и решение рассматриваемой автомодельной задачи имеет разное строение при $W < \sqrt{f - 2g}$ и $W > \sqrt{f - 2g}$.

Пусть $0 < W < \sqrt{f - 2g} < c_1^0$

Рассмотрим некоторую плоскость u_1, u_2 при $W = \text{const}$. Как можно видеть на рис. 3, на этой плоскости имеется область состояний за фронтами затвердевания, ограниченная линией Жуге $W = c_1^+$. Точка G лежит внутри этой области (рис. 4а).

Линия Жуге пересекает интегральные кривые медленных волн Римана, которые покрывают всю внешность кривой Жуге. В любую точку u_1^*, u_2^* , лежащую на плоскости $W = \text{const}$ за пределами линии Жуге, можно прийти из соответствующей точки линии Жуге $W = c_1^+$ по интегральной кривой медленной волны Римана.

Это означает, что в указанном выше диапазоне значений W , когда точка u_1^*, u_2^* лежит вне области, ограниченной линией Жуге, решение задачи имеет в физическом пространстве следующий вид. Впереди распространяется медленный фронт затвердевания Жуге со скоростью W , непосредственно за ним идет медленная упругая волна

рого фронта затвердевания, между которым и стенкой среда покоится в однородно деформированном состоянии.

Если $u_1^* = 0$ и значение u_2^* принадлежит отрезку J_2G оси u_2 , то непосредственно вслед за быстрым фронтом затвердевания Жуге, соответствующим точке J_2 , идет быстрая волна Римана, между которой и стенкой располагается однородная область, в которой $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$.

Если точка u_1^*, u_2^* не принадлежит перечисленным множествам, то решение задачи содержит медленную упругую волну Римана. Совокупность интегральных кривых медленных волн Римана, выходящих из точек линии Жуге $W = c_1^+$ и отрезка J_1G оси u_2 , заполняют на полуплоскости $u_1, u_2 > 0$ всю область вне линии Жуге и отрезка J_1G . При этом возможны следующие варианты.

Если интегральная кривая, проходящая через точку u_1^*, u_2^* , имеет своим началом точку на линии Жуге $W = c_1^+$, то решение состоит из медленного фронта Жуге и следующей непосредственно за ним медленной упругой волны Римана, между которой и стенкой всюду выполняются равенства $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$.

Если интегральная кривая, проходящая через точку u_1^*, u_2^* , выходит из отрезка J_1J_2 , то решение состоит из быстрого фронта затвердевания с конечной точкой на отрезке J_1J_2 и следующей за ним на некотором расстоянии медленной волной Римана, между которой и стенкой выполняется равенство $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$.

Если точка u_1^*, u_2^* лежит на интегральной кривой, начинающейся на отрезке J_2G , то решение состоит из быстрого фронта затвердевания, состояние за которым представляется точкой J_2 , за которым, примыкая к нему, распространяется быстрая упругая волна Римана и далее с меньшей скоростью распространяется медленная волна Римана, за которой $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$.

Рассмотрим теперь интервал скоростей фронта $c_1^0 < W < c_2^0$. При этом ситуация отличается от предыдущей отсутствием медленных фронтов затвердевания, а решения задачи содержат те же варианты, кроме вариантов с волнами Римана, начинающимися на медленной линии Жуге $W = c_1^+$, которой в этом случае нет.

Пусть теперь $W > c_2^0$. Тогда возможен только сверхбыстрый фронт затвердевания, на котором u_1, u_2 не меняются, оставаясь равными нулю. Далее решение задачи не отличается от решения в упругом полупространстве [6, 17]: после фронта затвердевания с меньшей скоростью распространяется быстрая, а затем и медленная волны Римана. Все волны разделены однородными состояниями, расширяющимися со временем.

Решение для сред с $\kappa < 0$

Как и в случае $\kappa > 0$, множество точек в пространстве u_1, u_2, W , характеризующих состояние за всевозможными фронтами затвердевания (ударная адиабата), представляется множеством, размерность частей которого равна 1, 2, 3. Это множество изображено на рис.5

Имеется трехмерная часть, расположенная вне поверхности S_1 , образованной вращением вокруг оси W линии $c_1^+(0, u_2) = W$, лежащей на плоскости W, u_2 . Сечение поверхности вращения S_1 плоскостью $u_1, u_2, W = \text{const}$ представляет окружность, ра-

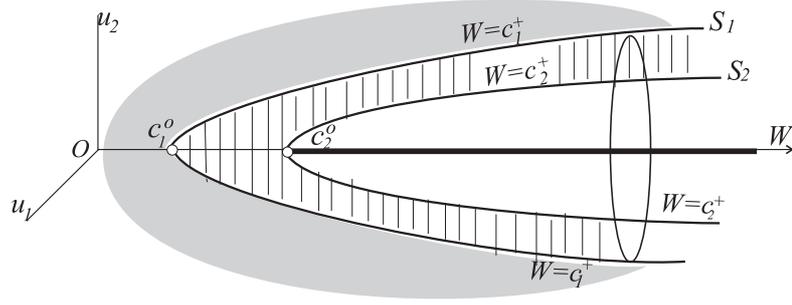


Рис. 5:

диус которой имеет величину

$$r = \sqrt{(W^2 - f + g)/(-\kappa)} \quad (9)$$

и растет с увеличением W [3].

Трехмерная область снаружи от поверхности вращения S_1 изображает состояния за медленными фронтами затвердевания, то есть фронтами, удовлетворяющими условию

$$W \leq c_1^+(u_1, u_2)$$

На рисунке 5 эта область отмечена затенением.

Двумерная часть ударной адиабаты, содержащая состояния за быстрыми фронтами затвердевания, скорость которых удовлетворяет условию

$$c_1^+ \leq W \leq c_2^+ \quad (10)$$

расположена на плоскости W, u_2 , то есть существует при дополнительном условии за фронтом $u_1^+ = 0$. На плоскости W, u_2 она ограничена линиями

$$W = c_1^+(0, u_2), \quad W = c_2^+(0, u_2)$$

На рис.5 эта область изображена вертикальной штриховкой.

Одномерная часть ударной адиабаты представляется частью оси W , удовлетворяющей неравенству $W > c_2^0$. Она содержит состояния за сверхбыстрыми фронтами затвердевания и выделена на рисунке жирной линией.

Если точка с координатами u_1^*, u_2^* принадлежит описанному выше множеству (ударной адиабате), то решение автомодельной задачи представляется соответствующим фронтом затвердевания и однородным состоянием среды $u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*$ за ним. Когда состояние u_1^*, u_2^* не принадлежит ударной адиабате, то решение задачи представляется следующим образом.

Если значения W удовлетворяют неравенству

$$c_1^0 < W < c_2^0 \quad (11)$$

то состояния за быстрыми фронтами затвердевания принадлежит отрезку оси $u_2 > 0$ между точкой, где $W = c_1^+(u_2)$ и точкой $u_2 = 0$. Рассмотрим быстрый фронт, за которым состояние на плоскости $W = \text{const}$ представляется некоторой точкой u_2^+ оси u_2 . В этой точке $c_2^+ = c_2(0, u_2^+) > W > c_1(0, u_2^+)$. За фронтом затвердевания может следовать с меньшей или равной скоростью медленная упругая ударная волна. Состояние за ней принадлежит ударной адиабате медленной упругой волны с начальной точкой $(0, u_2^+)$ на оси u_2 . Эволюционные участки таких ударных волн были приведены на рис.2 и для рассматриваемого случая изображены на рис.6а. По мере движения по ударной адиабате скорость медленной ударной волны растет. Но она не должна превосходить скорости фронта W . Максимальная амплитуда медленной ударной волны в рассматриваемом решении может достигаться, если ее скорость оказывается равной W . Это произойдет в точке K пересечения ударной адиабаты с окружностью (9), при этом сама ударная адиабата с начальной точкой на оси u_2 продолжается дальше. Движущиеся с одинаковой скоростью W быстрый фронт затвердевания и медленная ударная волна предельной амплитуды могут рассматриваться как один комбинированный фронт затвердевания. Этот комбинированный фронт – медленный, поскольку за медленной ударной волной ее скорость и скорость комбинированного фронта, равные W , удовлетворяют неравенству $W < c_1^+$.

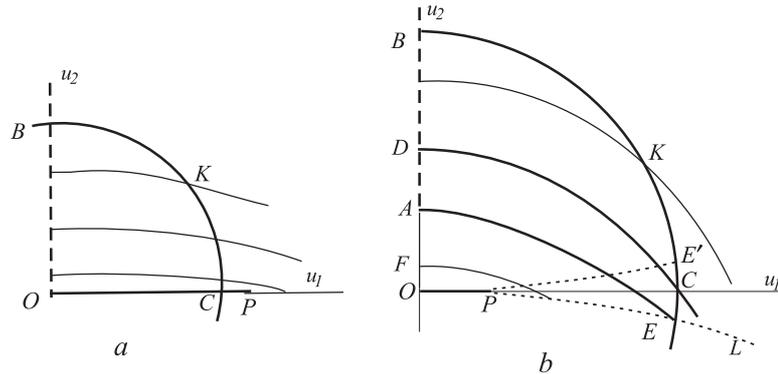


Рис. 6:

На рис.6а окружность (9) изображена жирной линией, она пересекается с осями координат в точках B и C . При выполнении неравенств (11) отрезок OB оси u_2 внутри окружности на рис.6а представляет состояния за быстрыми фронтами затвердевания и изображен жирной штриховой линией. При этом точка P лежит вне окружности (9), поэтому ударные адиабаты медленных волн, начинающиеся на отрезке OB , не доходят до пересечения с осью u_1 раньше, чем они пересекут окружность (9). Ударные адиабаты медленных волн непрерывным образом заполняют всю область на плоскости u_1, u_2 внутри окружности (9) выше линии OC .

Точки типа K , представляющие состояния за медленными комбинированными фронтами при увеличении u_2^+ перемещаются вверх по окружности (9). Когда состояние u_2^+ дойдет до точки пересечения окружности с осью u_2 , она сольется с двумя симметричными точками K , изображающими состояния за комбинированными фронта-

ми. В точке слияния медленная волна имеет бесконечно малую амплитуду, и поэтому в этой точке $W = c_1^+$.

Таким образом, если точка u_1^*, u_2^* при выполнении неравенств (11) попадает внутрь окружности (9), то решение состоит из двух разрывов – быстрого фронта затвердевания и медленной упругой ударной волны, следующих один за другим, и однородных состояний между ними. Если точка u_1^*, u_2^* лежит на окружности (9), то, поскольку скорости этих двух волн оказываются равными, происходит объединение этих разрывов с образованием медленного фронта затвердевания.

Рассмотрим теперь строение решения при $W > c_2^0$. На плоскости u_1, u_2 , $W = \text{const}$ точка P лежит внутри окружности (9) (рис.6b). Состояния за быстрыми фронтами представлены на рисунке отрезком AB . Из каждой точки этого отрезка, как из начальной, проведены ударные адиабаты медленных волн. Отрезок AB – это линия пересечения плоскости $W = \text{const}$ с двумерной областью, соответствующей быстрым фронтам, которая расположена на плоскости W, u_2 и покрыта вертикальной штриховкой на рис.5

Кроме того, начало координат при $W > c_2^0$ соответствует состоянию за сверхбыстрыми фронтами затвердевания $u_1^+ = 0$, $u_2^+ = 0$. Концы отрезка AB , как видно из рис.5, это точки Жуге, где $W = c_1^+(B)$ и $W = c_2^+(A)$. Их координаты на оси u_2

$$u_2(B) = \sqrt{\frac{W^2 - f + g}{|\varkappa|}}, \quad u_2(A) = \sqrt{\frac{W^2 - f - g}{3|\varkappa|}} \quad (12)$$

Поскольку A – точка Жуге, то непосредственно за сверхбыстрым фронтом может распространяться быстрая волна Римана, состояние за которой может представляться любой точкой отрезка AO . Таким образом, состояние за быстрым фронтом или его комбинацией с быстрой волной Римана может быть представлено точкой отрезка BO .

Следом за этими волнами может распространяться (вообще говоря, с меньшей скоростью) медленная ударная волна. Ударные адиабаты медленных волн изображены на рис.6b. Движение по ударной адиабате (увеличение амплитуды волны) связано с ростом скорости ударной волны и ее использование при построении решения может быть ограничено либо тем, что скорость этой медленной ударной волны достигнет значения W , либо тем, что закончится эволюционный участок ударной адиабаты.

Ранее на рис.2 было указано, что концы эволюционных участков медленных ударных волн с начальными точками на оси u_2 лежат на линии PL в области $u_2 < 0$. В рассматриваемом случае окончание эволюционного участка происходит на линии PEL (которая пересекается с окружностью (9) в точке E (рис.6b)). Это обусловлено тем, что скорость медленной ударной волны становится равной c_2 в ее начальной точке, то есть значению c_2 за быстрым фронтом или на задней границе волны Римана. Поскольку фронт быстрый, то выполняется неравенство $c_2^+ \geq W$, причем равенство имеет место в точке A . Отсюда следует, что все ударные адиабаты, начавшиеся в точках внутри отрезка AB , сначала пересекают окружность (9), а только потом достигают конца эволюционного участка на линии PEL . Ударная адиабата, выходящая

из точки A , где $W = c_2^+$, одновременно достигает окружности (9) и линии PEL , то есть приходят в точку их пересечения E .

Ударные адиабаты медленных волн, начинающиеся на отрезке OA могут использоваться для построения решения целиком, вплоть до конца эволюционного участка, где скорость медленной ударной волны достигает значения скорости заднего фронта волны Римана $c_2(0, u_2)$.

Таким образом, для всех точек внутри области OBC на рис.6b, состоящей из четверти круга $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ и части области $u_2 < 0$, ограниченной криволинейным треугольником PES , построено решение задачи о поршне, состоящее из быстрого фронта затвердевания, возможно, быстрой волны Римана и медленной ударной волны.

То, что область существования построенного решения заходит в нижнюю плоскость $u_2 < 0$ при наличии симметрии задачи относительно оси u_1 (то есть перемены знака u_2) говорит о том, что в лежащем в области $u_2 > 0$ криволинейном треугольнике $PE'S$ имеется еще одно решение, отличающееся знаком u_2 от построенного выше решения в криволинейном треугольнике PES .

В том же диапазоне скоростей $W > c_2^0$ для точек u_1^* , u_2^* , лежащих внутри окружности (9), существует решение, связанное со сверхбыстрыми фронтами затвердевания, у которых ударная адиабата представлена в пространстве W, u_1, u_2 одномерным множеством – частью оси $W > c_2^0$. Рассмотрим эти решения.

Состояния за сверхбыстрыми фронтами $u_1^+ = 0$, $u_2^+ = 0$. Изменения u_1, u_2 до заданных значений u_1^*, u_2^* происходят в упругих волнах, причем при начальном состоянии в начале координат это ударные волны. Как было отмечено выше (5), ударная адиабата имеет в этом случае вид $u_1 u_2 = 0$, то есть расположена вдоль осей координат. За сверхбыстрым фронтом, скорость которого W , может идти быстрая ударная волна со скоростью V , не превышающей W . Состояния за ней на плоскости $u_1, u_2, W = \text{const}$ лежат на оси u_2 (рис.2), начиная от точки O и выше. Согласно общей теории ударных волн в рассматриваемой упругой среде (6) скорость такой волны равна

$$V(0, u_2) = \sqrt{f + g + |\varkappa| u_2^2}$$

С ростом ее амплитуды, то есть значения u_2 за ней, увеличивается ее скорость V и в некоторой точке D ее скорость V становится равной скорости фронта $V(D) = W$. Координата $u_2(D)$ точки D находится из равенства (6) при $V = W$ и оказывается равной

$$u_2(D) = \sqrt{\frac{W^2 - f - g}{|\varkappa|}}$$

что указывает на то, что она лежит на оси u_2 выше точки A (12) и ниже точки B (верхней точки окружности (9)). Это максимально возможная амплитуда быстрой волны. После возможного однородного состояния за быстрой волной может следовать медленная ударная волна.

Вдоль ударной адиабаты медленной ударной волны с начальной точкой F , лежащей на отрезке OD оси u_2 , ее скорость, которая сначала была меньше, чем $V(F)$,

затем растет пока не станет равной $V(F)$. Тогда быстрая и медленная ударные волны будут иметь одинаковые скорости и состояние за такой сдвоенной волной должно принадлежать ударной адиабате с начальной точкой в начале координат (5), то есть должно лежать на оси u_1 .

Скорость медленной ударной волны, адиабата которой начинается в точке D , равна $c_1(0, u_2(D)) < W$ и растет вдоль ударной адиабаты пока не сравняется в некоторой точке, лежащей на оси u_1 со скоростью идущей впереди быстрой волны $V(D)$. При этом, поскольку $V(D) = W$, то это должна быть точка C , лежащая на пересечении оси u_1 с окружностью (9).

Ударные адиабаты медленных волн из всех точек отрезка OD непрерывным образом заполняют всю область на плоскости u_1, u_2 между ударной адиабатой медленной волны DC и осью u_1 .

Таким образом, в диапазоне скоростей $W > c_2^0$ имеется еще одно решение автомодельной задачи, состоящее из сверхбыстрого фронта затвердевания и следующих за ним быстрой и затем медленной ударных волн.

Итак, в рассматриваемом случае $\varkappa < 0$ при $W < c_1^0$ имеется одно решение, содержащее медленный фронт затвердевания. При $c_1^0 < W < c_2^0$ при всех u_1^*, u_2^* решение единственно, хотя его строение зависит от этих значений. При $W > c_2^0$ решение может быть однозначным, двужначным или трехзначным.

Заметим, что образование того или иного автомодельного решения в случае неединственности можно представлять как решение, сформировавшееся на начальной неавтомодельной стадии развития, и затем продолжающееся в таком виде при изменении времени в автомодельной фазе.

Замечания

1. При построении решения задачи считалось, что на стенке заданы значения сдвиговых деформаций u_1^*, u_2^* . С ними однозначно связаны напряжения на стенке σ_1^* и σ_2^* . Как следует из равенства (1), $\sigma_i = f u_i + O(\varepsilon^3)$, где ε – порядок величин u_i . Если задаются тангенциальные компоненты скорости стенки v_i^* по отношению к среде перед фронтом затвердевания, то точно также в главном порядке с той же погрешностью справедливо равенство $v_i^* = \sqrt{f} u_i^*$, поскольку скорости разрывов и характеристик в простых волнах с ошибкой порядка ε^2 совпадают с \sqrt{f} . Это означает, что, если на стенке вместо u_i^* задаются σ_i^* или v_i^* , то постановки этих задач эквивалентны случаю задания u_i^* .

2. Если $\varkappa = 0$, то задача о движении среды становится линейной. Ее решение при всех u_1^* и u_2^* повторяет построенное в работе решение, соответствующее малым u_1 и u_2 .

Заключение

Вопрос, на который положительно отвечает проведенное выше исследование – можно ли, используя соотношения на фронте затвердевания, включающие дополнительные соотношения, полученные при определенных предположениях о процессах, происходящих в структуре разрыва, решить физически поставленные задачи. В каче-

стве примера здесь представлена автомоделная задача, которая может быть сформулирована как задача о поршне и которая, несмотря на простоту, содержит в вариантах решений все типы фронтов затвердевания. Решения, полученные выше, находятся при любых параметрах, задаваемых постановкой задачи. При $\varkappa < 0$ решения поставленной задачи в некоторой области задания граничных условий на поршне определяется неоднозначно.

При изменении параметров задачи происходит смена одного типа фронта другим, причем это происходит путем объединения или разъединения фронта с ударной волной или волной Римана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (15-01-00361)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Куликовский А.Г.* О многопараметрических фронтах сильных разрывов в механике сплошных сред // ПММ. 2011. Т.75. Вып.4. С. 531–550.
- [2] *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Образование анизотропной упругой среды на фронте уплотнения потока частиц // ПММ. 2015. Т.79. Вып.6. С. 739–755..
- [3] *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Фронты образования нелинейной упругой среды из среды дез касательных напряжений // Вестн.Моск. ун-та. Серия 1, математика, механика. 2017. № 3. С. 48–54..
- [4] *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э.* Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1990. 318 с.
- [5] *Куликовский А.Г.* О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с разными свойствами. Волны рекомбинации. // ПММ. 1968. Т.32. Вып.6. С. 1125–1131.
- [6] *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
- [7] *Куликовский А.Г. и Свешникова Е.И.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах // ПММ. 1980. Т. 44, вып. 3, С. 523–534.
- [8] *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608с.
- [9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [10] *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
- [11] *Куликовский А.Г., Чугайнова А.П.* Классические и неклассические разрывы в решениях уравнений нелинейной теории упругости. Успехи ма. наук. 2008. Т.63. №2(380). с.85–152.
- [12] *Чугайнова А.П.* Особые разрывы в нелинейно упругих средах //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т.57. Вып.6. с. 1023–1032.
- [13] *Куликовский А.Г. А.П. Чугайнова* Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля-Рейсса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т.56. Вып.4. с. 650–663.

- [14] *А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова* Автомодельная задача о волнах в упругопластической среде Прандтля-Рейсса
Труды МИАН. 2016. Т. 295. с. 195–205.
- [15] *Бармин А.А., Куликовский А.Г.* Фронты ионизации и рекомбинации в электрои-агнитном поле. //Итого науки. Гидромеханика. ВИНТИ, 1971. № 5. 5–31.
- [16] *Свешникова Е.И.* Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642–646.
- [17] *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. вып. 2, С. 284–291.
- [18] *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства — В кн. Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллинн:, Валгус, 1985. С. 133–145.
- [19] *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып.1, С. 410-415.

A.G. Kulikovskii, E.I. Svesnikova

Elastic medium motion formed when passing through the solidification front