

УДК 533.95

О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАЗРЫВОВ ПО НЕОДНОРОДНОМУ СТАТИЧЕСКОМУ ФОНУ

© 2017 г. А. Н. Голубятников^а, С. Д. Ковалевская

МГУ им. М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва

e-mail: ^аgolubiat@mail.ru

Поступила в редакцию 06.10.2016 г.

Рассматривается решение уравнений идеальной газовой динамики о распространении ударной волны (УВ), вызванной, например, движением поршня, по неоднородному статическому фону. Решение строится в виде рядов Тейлора по специальной временной переменной, равной нулю на УВ. Ограничением для такого подхода служит расходимость рядов в случаях слабых УВ. Тогда решение строится путем линеаризации уравнений относительно решения со слабым разрывом. Последнее при заданном фоне можно всегда найти точно, последовательно решая серию транспортных уравнений, все из которых сводятся к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям. Изложение начинается с одномерных решений с плоскими волнами и заканчивается обсуждением пространственных задач.

Ключевые слова: ударная волна, ряд Тейлора, слабый разрыв, транспортное уравнение

DOI: 10.7868/S0568528117020086

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы ускорения УВ-волн за счет падения начальной плотности могут иметь место в атмосферах как звезд, так и планет, подвергающихся локальному нагреву или ионизации. Этот эффект в рамках газовой динамики был обнаружен еще Л.И. Седовым в 1950-е годы [1] при решении задачи о сильном взрыве в среде с переменной плотностью $\rho \sim x^{-\alpha}$, $\alpha \in (1, 3)$ в отсутствие противодействия. С другой стороны, с учетом начального постоянного давления падение плотности автоматически приводит к повышению скорости звука и, следовательно, скорости УВ, но здесь возникают трудности, связанные с неавтомоделностью. Тем более все усложняется наличием внешних или собственных силовых полей.

Задача о движении УВ в общем случае может быть решена путем разложения закона движения газа и давления в ряды Тейлора по специальной временной переменной, равной нулю на УВ, с коэффициентами, зависящими в одномерных случаях, например от массы слоя газа. Если УВ достаточно сильная, то эти коэффициенты последовательно определяются как рациональные функции скорости движения УВ по массе, начального фона и их производных. Затем производится отыскание коэффициентов ряда для времени движения УВ по массе через заданные коэффициенты ряда Тейлора движения поршня по времени. Отметим, что все эти ряды содержат знаменатель вида $M^2 - 1$, где M – число Маха УВ относительно фона.

Если начальная скорость поршня мала, УВ будет по крайней мере какое-то время слабой, но ряды расходятся при $M^2 \rightarrow 1$, поэтому для описания движения такой волны сначала отдельно решается задача со слабым разрывом (скорость газа на УВ точно равна нулю, давление и плотность непрерывны). Для ускорения газа на УВ получается обыкновенное дифференциальное уравнение Риккати, которое явно решается с определением произвольной постоянной по начальному ускорению поршня. Все последующие дифференциальные уравнения первого порядка для определения высших производных по времени закона движения газа, а также давления и плотности линейны. Если начальное ускорение поршня положительно, то со временем возможно опрокидывание слабого разрыва.

Далее данное решение для слабого разрыва используется для исследования поведения слабой УВ, созданной поршнем с произвольным начальным ускорением, но малой начальной скоростью. Установлены условия затухания или роста ее амплитуды. В частности, для однородного

фона отсюда следуют все классические результаты, известные в газовой динамике и магнитной гидродинамике по затуханию УВ [1–4], причем с явным указанием коэффициентов, связанных с движением поршня.

2. УРАВНЕНИЯ И УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВЕ

Сначала рассмотрим одномерные решения с плоскими волнами для модели среды с уравнением состояния $p = p(u, m)$, где p – давление, u – удельный объем и m – масса слоя в расчете на единицу площади поперечного сечения. Такое уравнение состояния включает, в частности, присутствие замороженного поперечного магнитного поля. Введем ударную переменную $\tau = t - t_s(m)$, где $t_s(m)$ – время движения УВ по массе. Пусть $x(\tau, m)$ – закон движения среды, тогда $v = x_\tau$ – ее скорость и

$$u = x_m - t'_s v = 1/\rho \quad (2.1)$$

где ρ – плотность. Нижние индексы обозначают частные производные, штрихом – обыкновенная производная по m .

Уравнения движения имеют вид

$$v_\tau + p_m - t'_s p_\tau = p'_0(m) \quad (2.2)$$

где нулем отмечено давление в среде перед ударной волной, производная от которого играет роль удельной массовой силы. Например, при наличии постоянного поля тяжести $p_0 = g(m_0 - m)$, где g – ускорение свободного падения, m_0 – полная масса среды (ось x направлена вверх). Могут быть и более сложные функции $p_0(m)$. В частности, в рамках бездиссипативной электрогидродинамики с замороженным удельным электрическим зарядом [5] $p_0 = E_0^2/(8\pi)$, где $E_0(m)$ – продольное электрическое поле [6].

При $\tau = 0$ на разрывах переменных v , p выполняются условия

$$x = x_0(m), \quad v = t'_s(p - p_0) \quad (2.3)$$

где x_0 определяет по существу начальное распределение массы по координате. Отметим, что в переменных m , τ все производные по m от непрерывных величин также непрерывны. Например, $x_m = x'_0$.

Кроме этого, сохранение потока энергии дает

$$v^2/2 + U - pvt'_s = U_0, \quad p = -U_u \quad (2.4)$$

где $U(u, m)$ – удельная внутренняя энергия среды. Это условие с учетом непрерывности для слабых УВ функции U от m при разложении по степеням $p - p_0$ до второго порядка включительно (теорема Цемплена в магнитной гидродинамике [7]) оказывается для наших целей даже излишним. Оно важно при построении точных решений (п. 5).

Закон движения поршня (без отрыва от среды) при $t_s(0) = 0$ имеет вид

$$x_p = x(t, 0) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2/2 + \dots$$

где начальная скорость поршня $\alpha_1 \geq 0$, остальные коэффициенты произвольны.

3. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

Решение ищется в следующем виде:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(m)}{n!} \tau^n, \quad w = x_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n(m)}{n!} \tau^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(m)}{n!} \tau^n \quad (3.1)$$

В случае совершенного газа с уравнением состояния $pu^\gamma = f(m)$ уравнения (2.2) принимают вид

$$v_{n+1} + q'_n - t'_s q_{n+1} = p'_0 \delta_n^0, \quad w_{n+1} = v'_n \quad (3.2)$$

где δ_n^0 – символы Кронекера.

Для определения первых членов рядов (3.1) требуется решить систему линейных уравнений. На первом шаге из (3.2) получим

$$\begin{aligned} v_1 + q_0' - t_s' q_1 &= p_0' \\ w_1 - v_0' &= 0 \\ q_1(x_0' - t_s' v_0) + \gamma q_0(w_1 - t_s' v_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Величины v_0, w_0, p_0 известны из условий на разрыве (2.3), (2.4) как функции t_s' и параметров фона.

Для разрешимости линейных уравнений (3.3) относительно v_1, w_1, q_1 должна быть ненулевой величина

$$\Delta = 1 - M^{-2}, \quad M^{-2} = \gamma(t_s')^2 p_0/x_0'$$

где M^2 – квадрат числа Маха УВ по отношению к фону.

Продолжая процесс, можно найти все ряды, которые будут содержать все производные от $t_s(m)$. Затем согласно равенству $dx_p(t)/dt = v(t, 0)$ – ряд для $t_s(m)$. Но при малых $\Delta \rightarrow 0$ ряды определенно расходятся.

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБОГО РАЗРЫВА

При $\Delta \rightarrow 0$ решение строится по-другому. Сначала решается задача о слабом разрыве. Рассматривается случай произвольного уравнения состояния.

Пусть коэффициент движения поршня $\alpha_1 = 0$. Тогда вдоль направления x пойдет слабый разрыв, на котором скорость и давление непрерывны: $v = 0, p = p_0$. Удельный объем $u = x_0'$. Производная $t_s' = 1/b_0 > 0$, где $b_0^2 = -(p_u)_0$ – квадрат скорости звука по массе на фоне. Далее мы предполагаем среду нормальным газом [8], для которого выполняются неравенства $p > 0, p_u < 0$ и $p_{uu} > 0$.

Вычислим на разрыве со стороны возмущенного газа, используя (2.1) и определение b_0 , величину

$$p_\tau = p_u(v_m - v_\tau/b_0) = b_0 v_\tau$$

откуда следует, что уравнение (2.2) удовлетворяется на поверхности слабого разрыва при любом значении ускорения газа $a = v_\tau$. Условия (2.3) также удовлетворены.

Чтобы найти на разрыве величину a , составляется так называемое “транспортное уравнение” [9] путем дифференцирования по τ уравнения (2.2), что дает

$$v_{\tau\tau} + (p_\tau)_m - t_s' p_{\tau\tau} = 0 \quad (4.1)$$

Аналогичное вычисление на разрыве дает

$$p_{\tau\tau} = p_{uu}(v_m - v_\tau/b_0)^2 + p_u(v_{\tau m} - v_{\tau\tau}/b_0) \quad (4.2)$$

где также полагается $v_m = 0$. Все коэффициенты вычисляются по статическому фону.

После подстановки результата (4.2) в (4.1) и сокращения членов с $v_{\tau\tau}$, получается уравнение

$$2b_0 a' + ab_0' - (1/b_0^3) a^2 = 0 \quad (4.3)$$

или уравнение Риккати, которое делением на a^2 сводится к линейному.

Решение последнего уравнения имеет следующий вид:

$$\frac{1}{a} = b_0^{1/2} \left(C_2 - \int_0^m \frac{p_{uu}}{2b_0^{9/2}} dm \right) \quad (4.4)$$

Следует отметить, что имеется особое решение уравнения (4.3) $a = 0$.

При известном начальном ускорении поршня α_2 постоянная равна $C_2 = 1/(\alpha_2 b_0^{1/2}(0))$.

Второе решение отвечает случаю $\alpha_2 = 0$. Тогда, используя ту же процедуру, следует вывести уравнение для последующего члена, который в результате равен $v_{\tau\tau} = C_3/b_0^{1/2}$. К этому же результату приходим и для любого разрыва высшего порядка, когда все предыдущие производные по τ равны нулю.

Отметим, что при любом α_2 , как это следует из продолжений путем дифференцирования по τ формулы (4.2), все последующие члены вида $v_\tau^{(k)}$, $k = 2, 3, \dots$, удовлетворяют линейным уравнениям.

“Опрокидывание” слабого разрыва на фронте при $t > 0$, согласно (4.4), возможно только тогда, когда скобка обращается в нуль. Это заведомо невозможно при $\alpha_2 \leq 0$. При положительном начальном ускорении поршня обращение скобки в нуль зависит от свойств фона, т.е. от скорости роста соответствующего интеграла. При достаточно большом $\alpha_2 > 0$ возможно опрокидывание.

5. СЛАБАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА

Решение со слабой УВ строится как приближение к решению со слабым разрывом.

Линейная поправка к производной t'_s может быть найдена из условий (2.3) [7]. Тогда

$$v = (1/t'_s)(u_0 - u) = t'_s(p - p_0) = t'_s p_u(u - u_0) + (1/2)p_{uu}(u - u_0)^2$$

Исключение из этих равенств $u - u_0$ дает

$$t'_s = \frac{1}{b_0} - \frac{p_{uu}v}{4b_0^4} \quad (5.1)$$

Формула (5.1), в частности, позволяет приближенно вычислить скорость ударной волны

$$D = \frac{x'_0}{t'_s} = c_0 + \frac{p_{uu}v}{4\rho_0 b_0^2}$$

где $c_0 = b_0 x'_0$ — обычная скорость звука фона.

Линеаризация уравнения движения (2.2) на поверхности УВ относительно скорости v с удержанием конечным уже известного ускорения a (4.4) (малая поправка к ускорению, очевидно, сокращается) приводит к уравнению

$$a - p_u(u, m)(v_m - at'_s)t'_s + p_m = p'_0$$

Разложение членов при a в последнем уравнении в ряд по v с использованием (5.1) дает

$$1 + p_u(u, m)(t'_s)^2 = -\frac{p_{uu}v}{2b_0^3}$$

Это позволяет получить уравнение для скорости

$$2b_0 v' + b'_0 v - \frac{p_{uu}av}{2b_0^3} = 0 \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.2) имеет вид

$$v = \frac{C_1}{b_0^{1/2}} \exp \int_0^m \frac{p_{uu}a}{4b_0^4} dm \quad (5.3)$$

К этой формуле следует присоединить определение функции $a(m)$ (4.4). Произвольная постоянная определяется движением поршня $C_1 = \alpha_1 b_0^{1/2}(0)$.

Формула (5.3) сразу позволяет установить необходимое условие затухания слабой УВ: $a < 0$. При $C_2 \leq 0$ для нормального газа оно выполняется автоматически. Если $C_2 > 0$, то до момента опрокидывания скорость газа за УВ будет расти, возможно, оставаясь в случае достаточно медленного роста интеграла малой.

Следует отметить, что в случае однородного фона, который исследовался многими авторами [1–4], формулы (4.4), (5.3) при $C_2 \leq 0$ независимо от уравнения состояния всегда приводят при $m \rightarrow \infty$ к степени затухания $v \sim 1/\sqrt{m}$.

6. МАГНИТО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

В рамках идеальной магнитной гидродинамики в задаче об одномерном распространении плоской УВ в поперечном магнитном поле давление представляет собой сумму давления газа p_g и магнитного давления p_m . В случае совершенного газа

$$p = p_g + p_m = \frac{f(m)}{u^\gamma} + \frac{H_0^2(m)u_0^2}{8\pi u^2}$$

где f – энтропийная функция и H_0 – величина замороженного магнитного поля, непрерывная на УВ в силу отсутствия в природе магнитных токов [7].

В рассматриваемом случае имеют место следующие равенства:

$$b^2 = \rho(\gamma p_g + 2p_m), \quad p_{uu} = \rho^2(\gamma(\gamma + 1)p_g + 6p_m)$$

В силу этих соотношений очевидно, что в формулах (4.4), (5.3) нет никакого разделения эффектов, отдельно связанных как с давлением газа, так и давлением магнитного поля. Они неразделимы даже в случае вычисления ускорения газа на слабом разрыве.

7. ОДНО ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Можно указать класс точных решений, имеющих выявленные выше особенности уравнений магнитной гидродинамики совершенного газа, описывающих эффект ускорения УВ при уменьшающейся начальной плотности газа с учетом силы тяжести, который был построен в [10]. Данный класс решений содержит одну произвольную функцию от m , которой можно считать, например, начальное магнитное поле H_0 . Начальное распределение $x_0(m)$ определяется. С этим множеством решений полезно сравнить полученные выше формулы.

Закон движения среды имеет вид

$$x = Vt + at^2/2 + y(m)$$

где V , a – положительные постоянные, что отвечает твердотельному движению газа с постоянным ускорением. При этом переменные u , p_g , p_m зависят только от массы. Начальное и текущее распределения полного давления равны:

$$p_0 = g(m_0 - m), \quad p = (a + g)(m_0 - m)$$

Из условия (2.3) легко определить время движения УВ по массе

$$t_s = \frac{Vm + at_0 m_0}{a(m_0 - m)}$$

где m_0 – полная масса системы. Здесь для избежания возникновения особенности процесс начинается в момент $t = t_0 > 0$. Для полного решения задачи, конечно, нужно использовать еще непрерывность потока энергии (2.4) и закона движения $x = x_0$.

В частности, при отсутствии магнитного поля скорость УВ и начальное распределение массы выражаются формулами

$$D = \left(\frac{\gamma+1}{2}a + \gamma g\right)\left(t + \frac{V}{a}\right)$$

$$x_0 = \left(\frac{\gamma+1}{2}a + \gamma g\right)\frac{(t_0 + V/a)^2}{2}\left(\frac{m_0^2}{(m_0 - m)^2} - 1\right) \quad (7.1)$$

Вычисление скорости звука фона c_0 дает

$$\frac{D^2}{c_0^2} = 1 + \frac{(1 + \gamma)a}{2\gamma g}, \quad \frac{v^2}{c_0^2} = \left(\frac{a}{\gamma g}\right)^2 \left(1 + \frac{(1 + \gamma)a}{2\gamma g}\right)^{-1}$$

Следовательно, при $a/g \rightarrow 0$ УВ – слабая. Опрокидывания, несмотря на неравенство $a > 0$, нет.

Последняя формула (7.1) показывает, что начальная плотность при больших x_0 убывает, как

$$\rho_0 = (x')^{-1} \sim x^{-3/2}$$

Степень ее убывания (3/2) укладывается в интервал Л.И. Седова (1, 3) [1].

8. ПРИМЕРЫ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Приведем несколько примеров.

Движение УВ по степенному фону. Пусть массовых сил нет, $p_0 = \text{const}$. Начальная плотность равна $\rho_0 = (x'_0)^{-1} = Ax_0^{-\alpha}$, $\alpha > 1$.

Тогда получим

$$x_0 = B \left(1 + \frac{(1 - \alpha)m}{Ax_1^{1-\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

где постоянная B , как начальное положение поршня, вводится для избежания особенности.

Ускорение газа за УВ при $\alpha \neq 4/3$ имеет вид

$$a = \left[\left(\frac{\gamma p_0 A}{B^\alpha} \right)^{1/4} \left(\frac{x_0}{B} \right)^{-\alpha/4} \left(C_2 - \frac{(\gamma + 1)A^{3/4}}{2(\gamma p_0)^{5/4}} \frac{B^{1-3\alpha/4}}{1 - 3\alpha/4} \left(\left(\frac{x_0}{B} \right)^{1-3\alpha/4} - 1 \right) \right) \right]^{-1}$$

Если $C_2 > 0$, то при $\alpha \in (1, 4/3)$ всегда будет опрокидывание, а при $\alpha > 4/3$ опрокидывание возможно при определенном соотношении постоянных.

Скорость газа равна

$$v = C_1 \left(\frac{x'_0}{\gamma p_0} \right)^{1/4} \exp \int_0^m a \frac{\gamma + 1}{4\gamma p_0} dm$$

Периодический фон без массовых сил. Плотность $\rho_0 = (x'_0)^{-1} = A + B \sin kx_0$, $B < A$ – положительные постоянные.

Ускорение газа

$$a = \left[(\gamma p_0 (A + B \sin kx))^{1/4} \left(C_2 - \frac{\gamma + 1}{2(\gamma p_0)^{5/4}} \int_0^x (A + B \sin kx)^{3/4} dx \right) \right]^{-1}$$

При $C_2 > 0$ всегда будет опрокидывание слабого разрыва.

Скорость газа

$$v = C_1 (\gamma p_0 (A + B \sin kx))^{1/4} \exp \int_0^x a \frac{\gamma + 1}{4\gamma p_0} \rho_0 dx$$

Учет силы тяжести. Пусть

$$\rho_0 = g(m_0 - m), \quad x'_0 = B(m_0 - m)^{-\alpha}, \quad \alpha > 1$$

При этом плотность $\rho_0 \sim x_0^{-\alpha/(\alpha-1)}$ при $x_0 \rightarrow \infty$.

Ускорение

$$a = \left[\left(\frac{\gamma g (m_0 - m)^{1+\alpha}}{B} \right)^{1/4} \left(C_2 - \frac{2(1+\gamma)B^{1/4}}{(\gamma g)^{5/4}(1+\alpha)} (m_0^{-(1+\alpha)/4} (m_0 - m)^{-(1+\alpha)/4} - m_0^{-(1+\alpha)/4}) \right) \right]^{-1}$$

Опрокидывание слабого разрыва при $C_2 > 0$ всегда имеет место.

Скорость

$$v = \frac{C_1 B^{1/4}}{4(\gamma g (m_0 - m)^{1+\alpha})^{1/4}} \exp \int_0^m \left[\frac{C_2 (\gamma g)^{5/4}}{(1+\gamma)B^{1/4}} + \frac{2}{1+\alpha} \right] m_0 \left(1 - \frac{m}{m_0} \right)^{(5+\alpha)/4} - \frac{2(m_0 - m)}{1+\alpha} dm$$

Причем при $C_2 \leq 0$ и $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$v \sim x^{-(1+\alpha)/(4(\alpha-1))}$$

Скорость звука на таком фоне всегда растет как $c_0 \sim \sqrt{x}$, так что $v < c_0$ и УВ остается слабой. Показатель $\alpha = 3$ отвечает показателю плотности $3/2$ точного решения (п. 5).

9. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ФОН

Следует отметить, что при наличии произвольного фона функции фона будут также удовлетворять уравнению Риккати (4.3), но со свободным членом. Тогда, как известно, его решение будет иметь вид

$$a = a_0(m) + 1/z,$$

где z удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению.

Для произвольного уравнения состояния $p = p(u, m)$ получится

$$v = v_0 + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} \exp \int_0^m \frac{p_{uu}^0}{b_0^4} \left(\frac{1}{4z} + \frac{b_0}{2} \left(v_0' - \frac{a_0}{b_0} \right) \right) dm$$

где нулем отмечены функции фона, и функция

$$z = \sqrt{b_0} \exp \int_0^m \frac{p_{uu}^0}{b_0^3} (v_0' - a_0/b_0) dm \left[C_2 - \int_0^m \frac{p_{uu}^0}{2b_0^{9/2}} \exp \left(- \int_0^m \frac{p_{uu}^0}{b_0^3} (v_0' - a_0/b_0) dm \right) dm \right]$$

10. ОДНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Данный метод определения движения газа со слабой УВ при заданном статическом фоне, конечно, применим, как указывают уже решения линейных задач [11], и для достаточно произвольных пространственных конфигураций ведущей характеристики. Наибольшая сложность для статического фона состоит в решении уравнения $c_0^2(x^i) |\nabla t_s|^2 = 1$ ($i = 1, 2, 3$). Все остальные этапы сводятся к последовательному решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Аналогичные результаты можно получить и в рамках теории относительности. Не стоит останавливаться здесь на общей теории.

В частности, для сферической симметрии при постоянном p_0 имеют место следующие формулы:

$$v = \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} \exp \int_0^m \frac{(\gamma+1)ad m}{16\pi\gamma r_0^2 p_0}, \quad b_0^2 = \frac{\gamma p_0}{4\pi r_0^2 r_0'}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{b_0}} \left(C_2 - \int_0^m \frac{(\gamma+1)dm}{8\pi\gamma r_0^2 p_0 \sqrt{b_0}} \right)^{-1}$$

На однородном фоне $v \sim 1/(r\sqrt{\ln r})$ [1, 2]. Для цилиндрических волн нужна замена $4\pi r_0^2 \rightarrow 2\pi r_0$.

Следует отметить также работы, посвященные течениям с УВ, учитывающие изменения плотности газа [12] или поперечного сечения канала [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход к решению задачи о слабом разрыве, основанный на разложении решения уравнений газовой динамики в ряды Тейлора по ударной временной переменной. Он позволяет эффективно вывести следующие формулы: точные для ускорения газа на слабом разрыве и затем приближенно – для скорости и амплитуды слабой УВ, распространяющейся по произвольному статическому фону. Эти формулы указывают на затухание УВ только при неположительном начальном ускорении создающего ее поршня, а в случае положительного ускорения – на рост амплитуды и возможность опрокидывания слабого разрыва.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 14-01-00056, 15-01-00361).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. *Ландау Л.Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 4. С. 286–292.
3. *Crussard L.* Sur la deformation des ondes dans les gas et sur les iterferences finies // С. г. Acad. Sci. 1913. Т. 156. № 6. Р. 447–450.
4. *Коробейников В.П.* Затухание слабых магнитогидродинамических ударных волн // Магнитная гидродинамика. 1967. № 2. С. 35–47.
5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994. 528 с.
6. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* К ускорению ударных волн в электрическом поле // Сб. докл. XI Междунар. науч. конф. “Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики”. СПб.: Изд. дом “Петроградский”, 2015. С. 78–80.
7. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
8. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
9. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.
10. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* К ускорению ударных волн в магнитном поле // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 6. С. 164–168.
11. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* Об ускорении слабых ударных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 123–129.
12. *Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г.* Взаимодействие ударной волны с продольным слоем газа пониженной плотности // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 125–132.
13. *Журавская Т.А., Левин В.А.* Устойчивость течения газовой смеси со стабилизированной детонационной волной в плоском канале с сужением // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 4. С. 120–129.