

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ  
ФИЗИКА**

УДК 532.5+517.9

**ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА РАСТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ  
ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ СУПЕРГИДРОФОБНОЙ ПОВЕРХНОСТИ.**

**I. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ**

© 2016 г. А. В. Аксенов, А. Д. Сударикова, И. С. Чичерин

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

*e-mail: aksenov.av@gmail.com, 0650646@gmail.com, chicherin-ivan@rambler.ru*

Поступила в редакцию 30.06.2016 г.

В приближении стоксовой пленки исследуется нестационарное растекание тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности. Рассматривается режим принудительного, вызванного массоподводом, растекания. Исследуется плоскопараллельное течение вдоль главного направления тензора скольжения супергидрофобной поверхности, когда соответствующая компонента является степенной функцией пространственной координаты. Получено уравнение толщины пленки с учетом поверхностного натяжения, зависящего от пространственной координаты. Решена задача групповой классификации. Для специального вида коэффициента поверхностного натяжения построены автомодельное и инвариантное решения для соответственно степенного и экспоненциального по времени законов массоподвода. Проведено сравнение полученных решений с решениями для случая отсутствия поверхностного натяжения. Показано, что поверхностное натяжение оказывает существенное влияние на характер растекания.

*Ключевые слова:* супергидрофобная поверхность, приближение Стокса, поверхностное натяжение, симметрии, инвариантное решение

**DOI:** 10.1134/S2304487X1606002X

**ВВЕДЕНИЕ**

Для анализа математических моделей, описывающих различные физические процессы, важной является задача нахождения точных решений таких уравнений [1, 2]. Автомодельные решения задачи о растекании стоксовой пленки от локализованного источника в поле силы тяжести с условием прилипания были исследованы во многих работах. Были рассмотрены стационарные течения на горизонтальных [3] и наклонных [4] плоскостях, а также на конических поверхностях [5]. Нестационарное растекание стоксовой пленки было рассмотрено в работах [6, 7]. В работе [8] было исследовано течение сильновязкой жидкости между слоями более легкой и более тяжелой жидкостей. В работе [9] в приближении стоксовой пленки было исследовано нестационарное растекание тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности при заданном локализованном массоподводе и с условием проскальзывания Навье [10, 11]. В работе [9] было также получено эволюционное уравнение для толщины пленки, рассмотрен режим принудительного растекания и исследовано автомодельное решение. Поверхностным натяжением в указанных выше работах пренебрегают.

В данной работе рассмотрена задача растекания тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности с учетом поверхностного натяжения. Получено уравнение для толщины пленки тяжелой вязкой жидкости, движущейся плоскопараллельно вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности. Найден симметрии полученного уравнения и для коэффициента поверхностного натяжения указан вид зависимости его от координаты, при котором происходит максимальное расширение алгебры Ли операторов симметрии. Получены и исследованы инвариантные решения. Проведено сравнение полученных решений с решениями для случая отсутствия поверхностного натяжения.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Следуя работе [9], можно получить уравнение толщины пленки тяжелой вязкой жидкости, движущейся вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности, в предположении переменного коэффициента поверхностного натяжения. Оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{h^3}{3} + bh^2 \right) \left( \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right) \right] = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано в безразмерных переменных. Здесь  $h = h(x, t)$  – толщина пленки,  $b = b(x)$  – эффективная длина скольжения в направлении растекания,  $D = D(x)$  – коэффициент поверхностного натяжения. Отметим, что условие прилипания соответствует случаю  $b = 0$ , а граничное условие при отсутствии трения – случаю  $b \rightarrow \infty$  [12]. Как и в работе [9] будем рассматривать супергидрофобные поверхности, для которых  $b(x) = Bx^\delta$ ,  $B > 0$ ,  $\delta > 0$ , где  $x$  – безразмерное расстояние до источника массоподвода.

Для нахождения формы поверхности  $h(x, t)$  используется интегральное условие, следующее из закона массоподвода, и условие равенства нулю толщины пленки на переднем фронте

$$\int_0^{x_f} h(x, t) dx = Q(t), \quad h(x_f, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $Q(t)$  – заданный закон массоподвода,  $x_f = x_f(t)$  – координата переднего фронта.

### ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ

Операторы симметрии уравнения (1) ищем в виде

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial h},$$

где  $\xi^1 = \xi^1(x, t, h)$ ,  $\xi^2 = \xi^2(x, t, h)$ ,  $\eta = \eta(x, t, h)$ . Используя критерий инвариантности [2], получаем следующую систему определяющих уравнений

$$\begin{aligned} \xi_x^2 &= 0, \quad \xi_h^2 = 0, \quad \xi_t^1 = 0, \\ \xi^1(DH)_x + \eta(DH)_h - 4\xi_x^1(DH) + \xi_t^2(DH) &= 0, \\ \xi^1(D'H)_{xh} + \eta(D'H)_{hh} + \eta_h(D'H)_h - 3\xi_x^1(D'H)_h + \\ + 3\eta_{xh}(DH)_h - 3\xi_{xx}^1(DH)_h + \xi_t^2(D'H)_h &= 0, \\ \xi_{xx}^1(D'H)_h - 3\eta_{xxh}(DH)_h - \\ - 2\eta_{xh}(D'H)_h + \xi_{xxx}^1(DH)_h &= 0, \\ \xi^1(DH)_{xh} + \eta(DH)_{hh} + \eta_h(DH)_h - 4\xi_x^1(DH)_h + \\ + 4\eta_{hh}(DH) + \xi_t^2(DH)_h &= 0, \\ \eta_{xx}(D'H)_x - \eta_x D' - \eta_{xx} D + \eta_{xxx}(D'H) + \\ + \eta_{xxx}(DH)_x + \eta_{xxxx}(DH) + \eta_t &= 0, \\ \xi^1(DH)_{xx} + \xi^1(D'H)_x + \eta(DH)_{xh} + \eta(D'H)_h + \\ + \eta_x(DH)_h - 3\xi_x^1(DH)_x - \\ - 3\xi_x^1(D'H)_x + 4\eta_{xh}(DH) - 6\xi_{xx}^1(DH) + \\ + \xi_t^2(DH)_x + \xi_t^2(D'H) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^1(D''H)_x + \xi^1(D'H_x)_x - \xi^1 D' + \eta(D'H)_{xh} + \\ + \eta_x(D'H)_h - 2\xi_x^1(D'H)_x + \\ + 2\xi_x^1 D' + \eta_{xh}(DH)_x + \eta_{xh}(D'H) - \\ - 3\xi_{xx}^1(DH)_x - 3\xi_{xx}^1(D'H) + \\ + 6\eta_{xxh}(DH) - 4\xi_{xxx}^1(DH) - \xi_t^2 D + \xi_t^2(D'H)_x = 0, \\ \xi^1 D_{xx} - \xi_x^1 D' - \eta_{xx}(D'H)_h - 2\eta_{xh}(D'H)_x + \\ + \eta_{xh} D + \xi_{xx}^1(D'H)_x - \xi_{xx}^1 D - \eta_{xxx}(DH)_h - \\ - 3\eta_{xxh}(D'H) - 3\eta_{xxh}(DH)_x + \\ + \xi_{xxx}^1(D'H) + \xi_{xxx}^1(DH)_x - 4\eta_{xxxh}(DH) + \\ + \xi_{xxx}^1(DH) + \xi_t^1 + \xi_t^2 D' = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $H = h^3/3 + Bx^\delta h^2$ , а нижние индексы обозначают операцию дифференцирования по соответствующей переменной.

Анализ решения системы определяющих уравнений показывает, что ядро операторов симметрии состоит из оператора симметрии

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

При специальном виде функции  $D(x) = Kx^2$ ,  $K = \text{const}$  ядро операторов симметрии расширяется оператором симметрии

$$X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + (2 - 3\delta)t \frac{\partial}{\partial t} + \delta h \frac{\partial}{\partial h}.$$

### ВИДЫ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим оператор симметрии вида  $X = aX_1 + X_2$ ,  $a = \text{const}$ . В зависимости от параметров  $a$  и  $\delta$  инварианты группы преобразований, соответствующей оператору симметрии  $X$ , имеют следующий вид

$$\begin{aligned} I_1 = x(t + t_0)^{-\frac{1}{2-3\delta}}, \quad I_2 = h(t + t_0)^{-\frac{\delta}{2-3\delta}}, \\ t_0 = \frac{a}{2 - 3\delta}, \quad \text{если } \delta \neq 2/3; \\ I_1 = xe^{-\frac{t}{a}}, \quad I_2 = he^{-\frac{2t}{3a}}, \quad \text{если } \delta = 2/3, \\ a \neq 0; \\ I_1 = t, \quad I_2 = hx^{-\frac{2}{3}}, \quad \text{если } \delta = 2/3, \\ a = 0. \end{aligned}$$

Соответствующие инвариантные решения имеют вид

$$\begin{aligned} h = (t + t_0)^\alpha F(\eta), \quad \eta = \frac{x}{C(t + t_0)^\beta}, \\ \alpha = \frac{\delta}{2 - 3\delta}, \quad \beta = \frac{1}{2 - 3\delta}, \quad \text{если } \delta \neq 2/3; \end{aligned} \quad (3)$$

$$h = e^{\alpha t} F(\eta), \quad \eta = \frac{x}{C e^{\beta t}}, \quad \alpha = \frac{2}{3a}, \quad (4)$$

$$\beta = \frac{1}{a}, \quad \text{если } \delta = 2/3, \quad a \neq 0;$$

$$h = x^{\frac{2}{3}} F(t), \quad \text{если } \delta = 2/3, \quad a = 0. \quad (5)$$

Инвариантное решение вида (5) в дальнейшем не рассматривается, так как для него не выполняется условие на переднем фронте в условиях (2).

### АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим инвариантное решение (3), соответствующее случаю  $\delta \neq 2/3$ , и положим  $t_0 = 0$ . Оно имеет следующий вид

$$h(x, t) = t^\alpha F(\eta), \quad \eta = \frac{x}{C t^\beta}, \quad C = \text{const}. \quad (6)$$

Инвариантное решение (6) является автомодельным, так как соответствующий ему оператор симметрии задает однопараметрическую группу неоднородных растяжений [2].

Согласно (2) объем жидкости (приходящийся на единицу длины по размаху), ограниченный формой поверхности пленки, вычисляется следующим образом

$$Q(t) = C t^{\alpha+\beta} \int_0^{\eta_f} F(\eta) d\eta.$$

Так как  $F(\eta_f) = 0$ , то  $\eta_f$  является постоянной величиной. Тогда закон массоподвода в пленку будет степенным по времени и его можно записать в виде

$$Q(t) = A t^\gamma, \quad A = C \int_0^{\eta_f} F(\eta) d\eta \text{ const} > 0, \quad (7)$$

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Значение константы  $C$  выбирается так, чтобы автомодельная координата переднего фронта  $\eta_f$  равнялась единице. Тогда константа  $C$  определяется выражением

$$C = A \left( \int_0^1 F(\eta) d\eta \right)^{-1}. \quad (8)$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (1), получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & (K\eta^2 F^3 + 3BK\eta^{\delta+2} C^\delta F^2) F'''' + \\ & + (6\eta^{\delta+2} C^\delta B K F F' + 3K\eta^2 F^2 F' + \\ & + 4K\eta F^3 + 3BK\delta\eta^{\delta+1} C^\delta F^2 + \\ & + 12BK\eta^{\delta+1} C^\delta F^2) F'''' + \\ & + (6K\eta F^2 + 12BK\eta^{\delta+1} C^\delta F) F' F'' + \\ & + (2KF^3 - F^3 + 6\eta^\delta C^\delta B K F^2 + 6BK\delta\eta^\delta C^\delta F^2 - \\ & - 3B\eta^\delta C^\delta F^2) F'' - (3F^2 + 6B\eta^\delta C^\delta F) F'^2 - \\ & - (3C^2\beta\eta - 3B\delta\eta^{\delta-1} C^\delta F^2) F' + 3C^2\delta\beta F = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя выражения для  $\alpha$  и  $\beta$  из (3) в последнее соотношение в (7), находим

$$\alpha = \frac{2\gamma-1}{5}, \quad \beta = \frac{3\gamma+1}{5}, \quad \delta = \frac{2\gamma-1}{3\gamma+1}. \quad (10)$$

Отметим, что в силу того, что  $\delta > 0$ , из соотношений (10) следует выполнение следующих неравенств

$$\gamma > \frac{1}{2}, \quad 0 < \delta < \frac{2}{3}, \quad \alpha > 0.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (9) имеет четвертый порядок. Точка  $\eta = 1$ , в которой  $F(1) = 0$  (условие на переднем фронте), является особой точкой этого уравнения. Найдем вид решения в окрестности особой точки. Для этого в уравнении (9) выделим слагаемые, имеющие главный порядок. Тогда соответствующее укороченное уравнение имеет следующий вид

$$BKC^{\delta-2} F(F F'''' + 2F' F''') - \beta F' = 0. \quad (11)$$

Решение укороченного уравнения ищем в виде

$$F = F_1(1-\eta)^p \ln^q(1-\eta) + o((1-\eta)^p \ln^q(1-\eta)), \quad (12)$$

где  $F_1, p, q$  – постоянные величины. Подставляя выражение (12) в укороченное уравнение (11) и выделяя слагаемые главного порядка, получаем

$$\begin{aligned} & 3p(p^3 - 4p^2 + 5p - 2)F_1^3 BKC^{\delta-2} \times \\ & \times (1-\eta)^{3p-4} \ln^{3q}(1-\eta) + \\ & + \beta p F_1(1-\eta)^{p-1} \ln^q(1-\eta) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда из (13) находим

$$p = \frac{3}{2}, \quad q = 0, \quad F_1 = \sqrt{\frac{8\beta C^{2-\delta}}{3BK}}.$$

Таким образом, мы получили, что в окрестности особой точки

$$F = \sqrt{\frac{8\beta C^{2-\delta}}{3BK}} (1-\eta)^{\frac{3}{2}} + o((1-\eta)^{\frac{3}{2}}). \quad (14)$$

Исследуем поведение решения уравнения (9) при  $\eta \ll 1$ , считая что порядок величины  $F(\eta)$

Таблица 1

$K$	10	10	10	5	5	5	1	1	1
$\gamma$	1.5	1	0.6	1.5	1	0.6	1.5	1	0.6
$C$	1.209	1.284	1.351	0.961	1.030	1.098	0.433	0.479	0.535

больше порядка величины  $\eta^\delta$ . Для этого в уравнении (9) выделим слагаемые, имеющие главный порядок. Тогда соответствующее укороченное уравнение имеет следующий вид

$$K\eta^2 F^3 F'''' + K\eta F^2 (3\eta F' + 4F) F'''' + 6K\eta F^2 F' F'' + (2K - 1)F^3 F'' - 3F^2 F'^2 = 0. \quad (15)$$

Решение укороченного уравнения ищем в виде

$$F = F_0 \eta^p + o(\eta^p), \quad p < \delta, \quad (16)$$

где  $F_0$ ,  $p$  – постоянные величины. Подставляя выражение (16) в укороченное уравнение (15) и выделяя слагаемые главного порядка, получаем

$$p(4p - 1)[p(p - 1)K - 1]F_0^4 \eta^{4p-2} + o(\eta^{4p-2}) = 0. \quad (17)$$

Из (17) находим показатель степени

$$p = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{K+4}{K}} \right). \quad (18)$$

Откуда следует, что при  $K > 1/2$  показатель степени удовлетворяет неравенству  $-1 < p < 0$  и интеграл в (8) определен, а при  $0 < K \leq 1/2$  показатель степени удовлетворяет неравенству  $p \leq -1$  и интеграл в (8) не определен. Таким образом, при  $0 < K \leq 1/2$  автомодельное решение задачи не существует.

Уравнение (9) решалось численно с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Разложение (14) было использовано в численных расчетах для того, чтобы снести граничное условие из особой точки на сколь угодно малое расстояние в точку  $1 - \eta_0$ . Разложение (16), (18) использовалось при вычислении интеграла в (8). Значение константы  $C$  в законе движения переднего фронта находилось методом "стрельбы" с использованием итераций, продолжающихся до тех пор, пока с заданной точностью не выполнялся интегральный закон сохранения массы в пленке.

Вычисленные значения множителя  $C$  в законе движения переднего фронта пленки для супергидрофобной поверхности с величиной проскальзывания в направлении растекания пленки, заданной формулой  $b(x) = 0.5x^\delta$  представлены в таблице 1.

На рис. 1 представлены результаты численного решения уравнения (9) при значении параметра

массоподвода  $A = 1$  и нескольких значениях параметров массоподвода  $\gamma$ , проскальзывания  $B$  и поверхностного натяжения  $K$ .

Из рис. 1 видно, что при фиксированном значении параметра  $\gamma$  графики формы поверхности пленки, при увеличении значения параметра  $K$  располагаются ближе к горизонтальной оси  $\eta$ . Поскольку из таблицы 1 следует рост постоянной  $C$  при увеличении параметра  $K$ , то за одно и то же время передний фронт пленки проходит при больших значениях параметра  $K$  большее расстояние, чем при малых значениях.

## ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим инвариантное решение (4), соответствующее случаю  $\delta = 2/3$ ,  $a \neq 0$ . Оно имеет следующий вид

$$h(x, t) = e^{\alpha t} F(\eta), \quad \eta = \frac{x}{Ce^{\beta t}}, \quad C = \text{const}. \quad (19)$$

Значение константы  $C$  выбирается так, чтобы координата переднего фронта  $\eta = \eta_f$  равнялась единице. Аналогично случаю автомодельного решения получаем, что закон массоподвода в пленку можно записать в виде

$$Q(t) = Ae^{\gamma t}, \quad A = C \int_0^1 F(\eta) d\eta, \quad \gamma = \alpha + \beta. \quad (20)$$

Подставляя выражение (19) в уравнение (1), получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} K \eta^2 F^3 F'''' + BC^{2/3} K \eta^{8/3} F^2 F'''' + \\ & + (F + 2BC^{2/3} \eta^{2/3}) K \eta^2 F F' F'' + \\ & + \frac{4}{3} K \eta F^3 F'''' + \frac{14}{3} BC^{2/3} \eta^{5/3} K F^2 F'''' + 2K \eta F^2 F' F'' + \\ & + 4BC^{2/3} K \eta^{5/3} F F' F'' + \frac{2}{3} K F^3 F'' - \frac{1}{3} F^3 F'' + \\ & + \left( \frac{10}{3} K - 1 \right) BC^{2/3} \eta^{2/3} F^2 F'' - 2BC^{2/3} \eta^{2/3} F F'^2 - \\ & - F^2 F'^2 - \frac{3}{5} \gamma C^2 \eta F' - \frac{2}{3} BC^{2/3} \eta^{-1/3} F^2 F' + \frac{2}{5} \gamma C^2 F = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично случаю автомодельного решения, из соотношений (20) находим

$$\alpha = \frac{2\gamma}{5}, \quad \beta = \frac{3\gamma}{5}.$$

Как и в случае автомодельного решения, постоянная  $C$  находилась из соотношения (8).

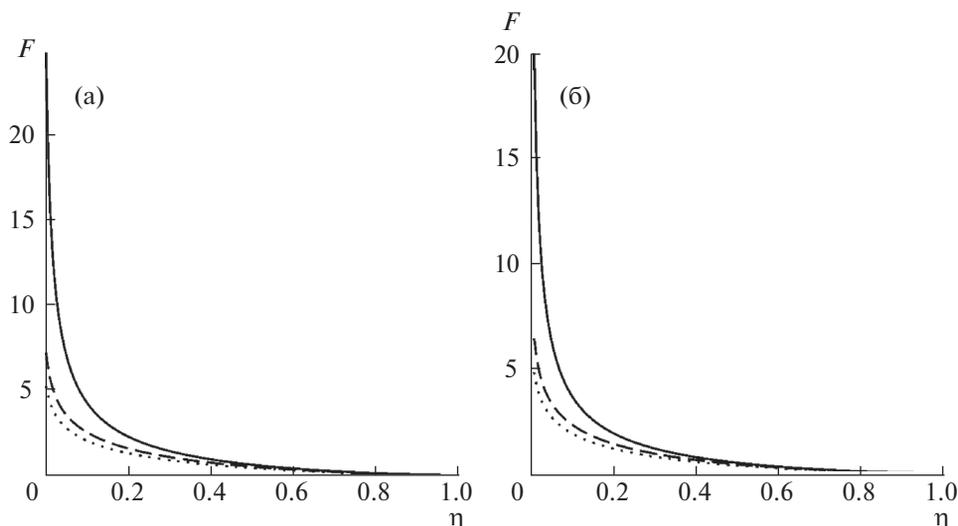


Рис. 1. Функция  $F(\eta)$ :  $B = 0.5$ , сплошная линия –  $K = 1$ , штриховая линия –  $K = 5$ , пунктирная линия –  $K = 10$ , а)  $\gamma = 1.5$ , б)  $\gamma = 0.6$ .

Обыкновенное дифференциальное уравнение (21) имеет четвертый порядок. Точка  $\eta = 1$ , в которой  $F(1) = 0$  (условие на переднем фронте), является особой точкой этого уравнения. Найдем вид решения в окрестности особой точки. Для этого в уравнении (21) выделим слагаемые, имеющие главный порядок. Тогда соответствующее укороченное уравнение имеет следующий вид

$$5BKC^{2/3}F^2F'''' + 10BKC^{2/3}FF'F''' - 3\gamma C^2F = 0. \quad (22)$$

Решение укороченного уравнения ищем в виде

$$F = F_1(1 - \eta)^p \ln^q(1 - \eta) + o((1 - \eta)^p \ln^q(1 - \eta)), \quad (23)$$

где  $F_1, p, q$  – постоянные величины. Подставляя выражение (23) в укороченное уравнение (22) и выделяя слагаемые главного порядка, получаем

$$15p(p^3 - 4p^2 + 5p - 2)F_1^3 BKC^{2/3} \times \\ \times (1 - \eta)^{3p-4} \ln^{3q}(1 - \eta) + \\ + 3p\gamma C^2 F_1(1 - \eta)^{p-1} \ln^q(1 - \eta) + \dots = 0. \quad (24)$$

Тогда из (24) находим

$$p = \frac{3}{2}, \quad q = 0, \quad F_1 = \sqrt{\frac{8\gamma C^{4/3}}{5BK}}.$$

Таким образом, мы получили, что в окрестности особой точки

$$F = \sqrt{\frac{8\gamma C^{4/3}}{5BK}}(1 - \eta)^{3/2} + o((1 - \eta)^{3/2}). \quad (25)$$

Исследуем поведение решения уравнения (21) при  $\eta \ll 1$ , считая что порядок величины  $F(\eta)$

больше порядка величины  $\eta^\delta$ . Для этого в уравнении (21) выделим слагаемые, имеющие главный порядок. Тогда соответствующее укороченное уравнение имеет следующий вид

$$K\eta^2 F^3 F'''' + K\eta F^2(3\eta F' + 4F)F''' + 6K\eta F^2 F' F'' + \\ + (2K - 1)F^3 F'' - 3F^2 F'^2 = 0. \quad (26)$$

Решение укороченного уравнения ищем в виде

$$F = F_0\eta^p + o(\eta^p), \quad p < \delta, \quad (27)$$

где  $F_0, p$  – постоянные величины. Подставляя выражение (27) в укороченное уравнение (26) и выделяя слагаемые главного порядка, получаем

$$p(4p - 1)[p(p - 1)K - 1]F_0^4 \eta^{4p-2} + o(\eta^{4p-2}) = 0. \quad (28)$$

Из (28) находим показатель степени

$$p = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{K+4}{K}} \right). \quad (29)$$

Откуда следует, что при  $K > 1/2$  показатель степени удовлетворяет неравенству  $-1 < p < 0$  и интеграл в (20) определен, а при  $0 < K \leq 1/2$  показатель степени удовлетворяет неравенству  $p \leq -1$  и интеграл в (20) не определен. Таким образом, при

Таблица 2

$K$	10	10	10	5	5	5	1	1	1
$\gamma$	1.5	1	0.6	1.5	1	0.6	1.5	1	0.6
$C$	1.424	1.620	1.904	0.102	1.256	1.479	0.453	0.519	0.615

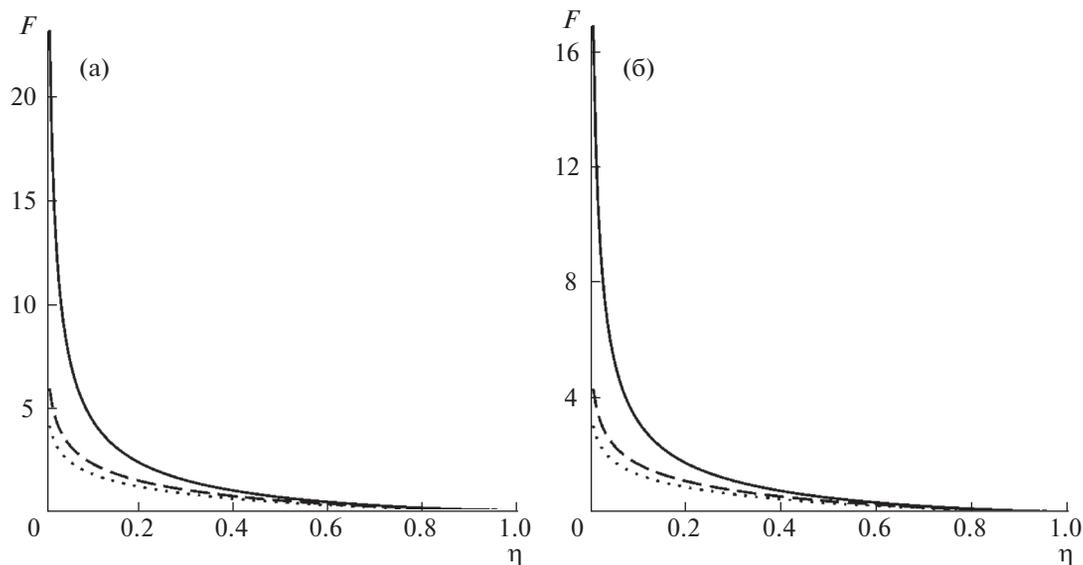


Рис. 2. Функция  $F(\eta)$ :  $B = 0.5$ , сплошная линия –  $K = 1$ , штриховая линия –  $K = 5$ , пунктирная линия –  $K = 10$ , а)  $\gamma = 1.5$ , б)  $\gamma = 0.6$ .

$0 < K \leq 1/2$  инвариантное решение задачи не существует.

Разложения (25) и (27), (29) были применены при численном решении уравнения (21). Используемая численная процедура аналогична процедуре, описанной для случая автомодельного решения.

Вычисленные значения множителя  $C$  в законе движения переднего фронта пленки для супергидрофобной поверхности с величиной проскальзывания в направлении растекания пленки,

заданной формулой  $b(x) = 0.5x^\delta$  представлены в таблице 2.

На рис. 2 представлены некоторые результаты численного решения уравнения (21) для  $A = 1$ . Как и в случае степенного закона массоподвода, передний фронт пленки вдоль супергидрофобной поверхности за одно и то же время при больших значениях параметра  $K$  проходит большее расстояние, чем при малых значениях.

### СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ С УЧЕТОМ И БЕЗ УЧЕТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

На рис. 3 при заданных параметрах задачи представлены графики автомодельных решений уравнения (1) с учетом поверхностного натяжения и без его учета (см. [9]).

На рис. 4 для соответствующих решений представлено их поведение в окрестности точки  $\eta = 1$ , которая является особой для обоих случаев. Структуры соответствующих течений существенно различаются, что вызвано влиянием поверхностного натяжения на растекание пленки.

Передний фронт пленки проходит за одно и то же время различные расстояния в случаях, когда учитывается и не учитывается поверхностное натяжение. Чтобы сравнить эти расстояния, нужно знать значения константы  $C$ . При значении параметра  $K = 10$  постоянная  $C = 1.146$  в случае учета поверхностного натяжения и  $C = 0.862$  в случае отсутствия поверхностного натяжения. Таким образом, для случая представленного на рис. 3, передний фронт пленки, растекающейся

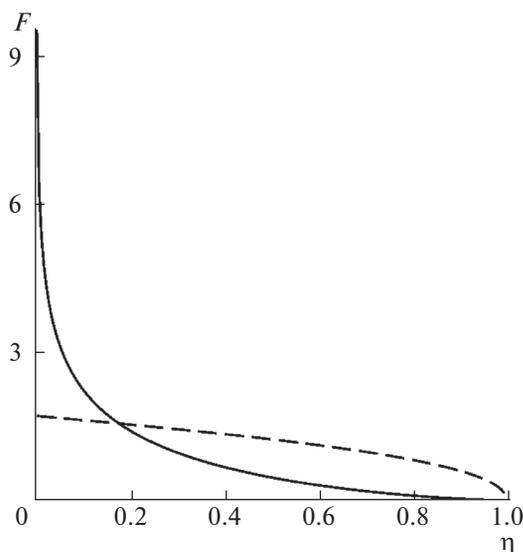


Рис. 3.  $B = 0.5$ ,  $\gamma = 2.0$ , сплошная линия –  $K = 10$ , штриховая линия –  $K = 0$ .

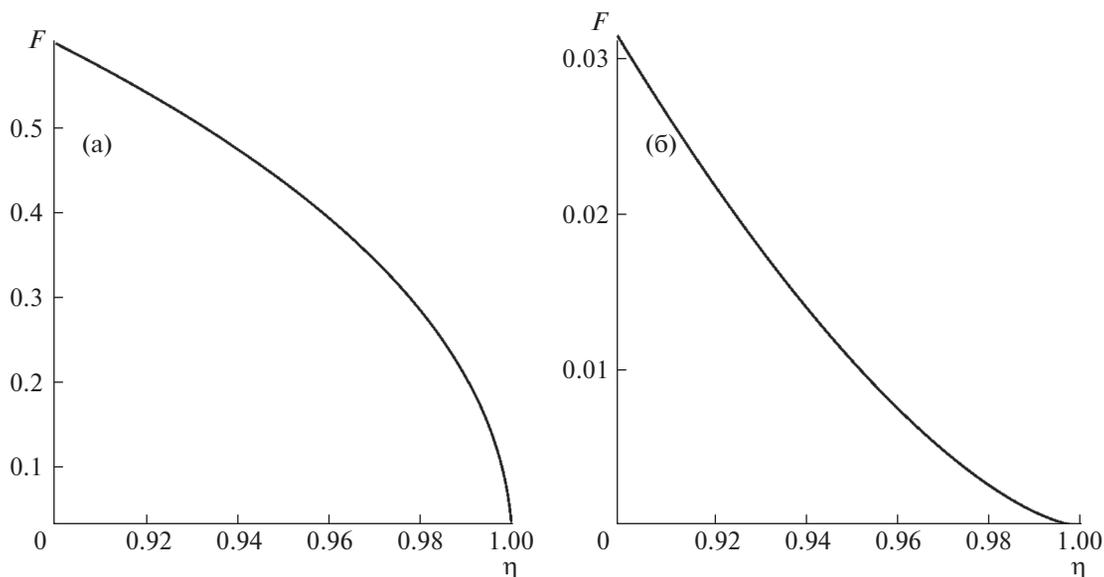


Рис. 4. Функция  $F(\eta)$  вблизи фронта: а)  $K = 0$ , б)  $K \neq 0$ .

по супергидрофобной поверхности с учетом поверхностного натяжения движется быстрее, чем передний фронт пленки, растекающейся по супергидрофобной поверхности без поверхностного натяжения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что учет поверхностного натяжения при специальном выборе коэффициента поверхностного натяжения приводит к изменению режима течения по сравнению со случаем отсутствия поверхностного натяжения. Коэффициент поверхностного натяжения выбирался из условия сохранения автомодельности задачи, что позволило провести сравнение с уже известным автомодельным решением для случая отсутствия поверхностного натяжения. Для более полного исследования влияния поверхностного натяжения на режим растекания вязкой жидкости необходимо решать неизотермическую задачу, что позволит определить коэффициент поверхностного натяжения, считая его зависящим от температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-00361, 15-01-04677.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.
3. Huppert H.E. The propagation of twodimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 43–58.
4. Smith P.C. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. Pt 2. P. 275–288.
5. Осипцов А.А. Трехмерные изотермические течения лавы на неосесимметричной конической поверхности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. 2. С. 31–45.
6. Lister J.R. Viscous flows down an inclined plane from point and line sources // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 631–653.
7. Huppert H.E. Flow and instability of a viscous current down a slope // Nature. 1982. V. 300. P. 427–429.
8. Lister J.R., Kerr R.C. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents at a fluid interface // J. Fluid Mech. 1989. V. 203. P. 215–249.
9. Агеев И.А., Осипцов А.Н. Автомодельные режимы растекания тонкого слоя жидкости вдоль супергидрофобной поверхности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. 3. С. 516–520.
10. Rothstein J.P. Slip on superhydrophobic surfaces // Annual Rev. Fluid Mech. 2010. V. 42. P. 89–102.
11. Bazant M.Z., Vinogradova O.I. Tensorial hydrodynamic slip // J. Fluid Mech. 2008. V. 613. P. 125–134.
12. Vinogradova O.I. Drainage of a thin liquid film confined between hydrophobic surfaces // Langmuir. 1995. V. 11. P. 2213–2220.

## Effect of the Surface Tension on the Spreading of a Viscous Liquid along a Superhydrophobic Surface. I. Plane–Parallel Motion

A. V. Aksenov, A. D. Sudarikova, and I. S. Chicherin

Moscow State University, Moscow, 119992 Russia

e-mail: [aksenov.av@gmail.com](mailto:aksenov.av@gmail.com), [0650646@gmail.com](mailto:0650646@gmail.com), [chicherin-ivan@rambler.ru](mailto:chicherin-ivan@rambler.ru)

**Abstract**—Unsteady plane–parallel spreading of a thin layer of a heavy viscous fluid along a horizontal superhydrophobic surface is studied in the Stokes film approximation. The spreading regimes induced by mass supply are considered. A plane–parallel flow along the principal direction of the slip tensor of the superhydrophobic surface is studied, when the corresponding slip tensor component is a power function of the spatial coordinate. An evolution equation for the film thickness is derived taking into account the surface tension dependence on the spatial coordinate. The group classification problem is solved. Self-similar and invariant solutions are constructed for power and exponent time dependences on mass supply respectively at a special form of the surface tension coefficient. The surface tension is shown to have a significant influence on the character of the spreading.

Keywords: superhydrophobic surface, Stokes approximation, surface tension, symmetries, invariant solutions

DOI: 10.1134/S2304487X1606002X

### REFERENCES

1. Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Tenth Edition. CRC Press. New York. 1993. 496 p.
2. Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press. New York. 1982. 416 p.
3. Huppert H.E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 121. P. 43–58.
4. Smith P.C. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 58. N. 2. P. 275–288.
5. Osipov A.A. Three-dimensional isothermal lava flows over a non-axisymmetric conical surface // *Fluid Dynamics*. 2006. N. 2. P. 31–45.
6. Lister J.R. Viscous flows down an inclined plane from point and line sources // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 242. P. 631–653.
7. Huppert H.E. Flow and instability of a viscous current down a slope // *Nature*. 1982. V. 300. P. 427–429.
8. Lister J.R. and Kerr R.C. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents at a fluid interface // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 203. P. 215–249.
9. Ageev A.I. and Osipov A.N. Self-similar regimes of liquid-layer spreading along a superhydrophobic surface // *Fluid Dynamics*. 2014. V. 49. N. 3. P. 330–342.
10. Rothstein J.P. Slip on superhydrophobic surfaces // *Annual Rev. Fluid Mech.* 2010. V. 42. P. 89–102.
11. Bazant M.Z. and Vinogradova O.I. Tensorial hydrodynamic slip // *J. Fluid Mech.* 2008. V. 613. P. 125–134.
12. Vinogradova O.I. Drainage of a thin liquid film confined between hydrophobic surfaces // *Langmuir*. 1995. V. 11. P. 2213–2220.