Институт
Компьютерных
Исследований

R&C
Dynamics

Herbert Oertel jr. (Hrsg.)

Prandtl-Führer durch die Strömungslehre

Unter Mitarbeit von
D. Etling, U. Müller, U. Riedel, J. Warnatz

Mit 481 Abbildungen
10., vollständig überarbeitete Auflage

vieweg

Герберт Эртель мл. (ред.)

ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПРАНДТЛЯ ПО ГИДРОАЭРОДИНАМИКЕ

Перевод с немецкого
Н. В. Вершининой

Под научной редакцией
В. Н. Емельянова

Москва ♦ Ижевск

2007

УДК 536

Интернет-магазин
MATHESIS
http://shop.rcd.ru

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Г. Эртель мл. (ред.)
Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. — 776 стр.

«Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике», впервые появившийся в 1942 году, выдержал за рубежом 10 изданий. До настоящего времени он не утратил своей актуальности, широко цитируется в научной литературе, однако был практически недоступен отечественному читателю. Предлагаемое издание — это перевод последнего, 10-го издания фундаментального труда Людвига Прандтля (2001), которое было значительно переработано и дополнено его учениками с учетом новейших разработок в этой области. Оно ставит своей целью провести читателя основательно проложенным путем по всем областям гидроаэродинамики. Благодаря точности и ясности описания физических явлений и толкования ключевых понятий гидроаэродинамики, а также отказу от объемных математических расчетов, данной путеводитель станет незаменимой настольной книгой для широкого круга студентов и специалистов естественнонаучных и инженерных специальностей.

ISBN 978-5-93972-303-9

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH,
Braunschweig/Wiesbaden, 2001
© Перевод на русский язык:
Институт компьютерных исследований, 2007

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие 12

1. **Введение** 14

2. **Свойства жидкостей и газа** 29
   2.1. Свойства жидкостей 29
   2.2. Теория напряженного состояния 30
   2.3. Давление в жидкости 34
   2.4. Распределение давления в невесомой жидкости 35
   2.5. Свойства газов 37
   2.6. Равновесие жидкости в поле силы тяжести 40
   2.7. Равновесие газа в поле силы тяжести 44
   2.8. Взаимодействие атмосферного давления и давления в жидкости 49
   2.9. Равновесие жидкости в других силовых полях 53
   2.10. Поверхностное натяжение (капиллярность) 57

3. **Кинематика жидкостей и газов** 63
   3.1. Способ описания движения 63
   3.2. Неразрывность 67
   3.3. Топология течения жидкости 70
      3.3.1. Критические точки в поле обтекания 70
      3.3.2. Примеры течения 76

4. **Динамика жидкостей и газов** 79
   4.1. Динамика идеальной жидкости 79
      4.1.1. Силы в движущейся жидкости, уравнение Бернулли . 79
      4.1.2. Следствия из уравнения Бернулли 84
      4.1.3. Слияние двух потоков. Поверхности раздела и образование вихрей 94
      4.1.4. Измерение давления 98
      4.1.5. Потенциальное течение 101

4.1.6. Подъемная сила крыла. Эффект Магнуса 118
4.1.7. Динамика вихрей 122
4.1.8. Закон количестве движения для стационарных течений 127
4.1.9. Теорема о количестве движения для потоков с пульсацией 137
4.1.10. Волны на свободной поверхности жидкости 140
4.2. Движение вязких жидкостей 152
4.2.1. Вязкость. Уравнения Навье – Стокса 152
4.2.2. Динамическое подобие. Число Рейнольдса 156
4.2.3. Ламинарные пограничные слои 158
4.2.4. Возникновение турбулентности 161
4.2.5. Турбулентные течения 173
4.2.6. Отрыв потока и образование вихрей 185
4.2.7. Вторичные потоки 191
4.2.8. Течение с преобладающей вязкостью 195
4.2.9. Смазка подшипников 198
4.2.10. Движение жидкостей в трубах и каналах 206
4.2.11. Сопротивление движению тел в жидкости 212
4.2.12. Теория сопротивления жидкости 215
4.2.13. Топология и течение неньютоновских сред 225
4.3. Динамика газа 230
4.3.1. Распространение возмущений давления. Скорость звука231
4.3.2. Установившиеся потоки с изменениями объема 235
4.3.3. Уравнение энергии для сжимаемых потоков 241
4.3.4. Теория прямого скачка уплотнения 243
4.3.5. Обтекание угла, свободная струя. Сверхзвуковой поток около угла 247
4.3.6. Приближенный метод расчета двухмерных сверхзвуковых потоков 252
4.3.7. Дозвуковые потоки 256
4.3.8. Обтекания профилей 262

5. **Основные уравнения аэродинамики** 270
5.1. Уравнение неразрывности 270
5.2. Уравнения Навье–Стокса 272
5.2.1. Ламинарные течения 272
5.2.2. Уравнение Рейнольдса для турбулентных потоков . . . 280
5.3. Уравнение энергии 284

5.3.1. Ламинарные течения 284
5.3.2. Турбулентные течения 289
5.4. Основные уравнения в форме законов сохранения 291
5.4.1. Иерархия основных уравнений 291
5.4.2. Уравнения Навье–Стокса 292
5.4.3. Производные модельные уравнения 297
5.4.4. Уравнения Рейнольдса для турбулентных течений . . . 305
5.4.5. Многофазные течения 307
5.4.6. Течения с химическими реакциями 311
5.5. Дифференциальные уравнения возмущенного движения . . . 313

6. **Аэродинамика несущей поверхности** 319
6.1. Основы аэродинамики 319
6.1.1. Полет птиц и техническая имитация (подражание) . . 320
6.1.2. Профиль и крыло 323
6.1.3. Теория крыла 333
6.1.4. Аэродинамические испытания 348
6.2. Трансзвуковая аэродинамика 351
6.2.1. Крыло стреловидной формы 353
6.2.2. Взаимодействие скачка с пограничным слоя 357
6.2.3. Отрыв потока 360
6.3. Сверхзвуковая аэродинамика 362
6.3.1. Дельта-крыло 364

7. **Гидроаэродинамическая неустойчивость** 373
7.1. Основы гидроаэродинамической неустойчивости 373
7.1.1. Примеры гидроаэродинамической неустойчивости . . 373
7.1.2. Определение устойчивости 380
7.1.3. Локальные возмущения 384
7.2. Неустойчивость слоев 385
7.2.1. Конвекция Релея–Бенара 386
7.2.2. Конвекция Марангони 401
7.2.3. Диффузионная конвекция 405
7.2.4. Неустойчивость Тейлора 414
7.2.5. Неустойчивость Гертлера 420
7.3. Неустойчивость сдвигового потока 422
7.3.1. Течение в пограничном слое 423

7.3.2. Неустойчивость Толмина–Шлихтинга и поперечная неустойчивость . . . 431
7.3.3. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца . . . 453
7.3.4. Течение в следе . . . 454

8. **Конвективная теплопередача и массоперенос** . . . 460
8.1. Основы тепломассообмена . . . 461
8.1.1. Свободная и вынужденная конвекция . . . 461
8.1.2. Теплопроводность и конвекция . . . 462
8.1.3. Диффузия и конвекция . . . 465
8.2. Свободная конвекция . . . 466
8.2.1. Конвекция у вертикальной пластины . . . 466
8.2.2. Конвекция у горизонтального цилиндра . . . 472
8.3. Вынужденная конвекция . . . 473
8.3.1. Поток в трубе . . . 473
8.3.2. Пограничный слой при вынужденной конвекции . . . 479
8.3.3. Обтекаемые тела . . . 487
8.4. Тепломассообмен . . . 488
8.4.1. Массообмен у пластины . . . 488

9. **Многофазные течения** . . . 492
9.1. Основы многофазных течений . . . 492
9.1.1. Определения . . . 493
9.1.2. Режимы течения . . . 497
9.1.3. Карты потоков . . . 497
9.2. Модели потоков . . . 501
9.2.1. Одномерная двухжидкостная модель . . . 501
9.2.2. Смешанные модели . . . 505
9.2.3. Модель дрейфа . . . 508
9.2.4. Пузыри и капли . . . 511
9.3. Потери давления и объемная доля в компонентах гидравлики 514
9.3.1. Потеря давления за счет трения в горизонтальных прямых трубах. Гомогенная модель . . . 515
9.3.2. Потери давления на ускорение . . . 521
9.4. Скорость распространения волн плотности и критические потоки массы . . . 525
9.4.1. Волны плотности . . . 525
9.4.2. Критические потоки массы . . . 529

9.4.3. Кавитация 537
9.4.4. Аэрозольные течения 543
9.5. Неустойчивость в двухфазных течениях 547

10. **Течения с химическими реакциями** 554
10.1. Основы реагирующих течений 554
10.1.1. Закон действующих масс и порядок реакции 554
10.1.2. Взаимосвязь прямых и обратных реакций 556
10.1.3. Элементарные реакции и молекулярность реакции . . 557
10.1.4. Зависимость констант скорости реакций от температуры 560
10.1.5. Зависимость констант скорости реакции от давления . 562
10.1.6. Свойства механизма реакций 565
10.2. Ламинарные реагирующие течения 571
10.2.1. Структура пламени 571
10.2.2. Скорость распространения пламени смеси 574
10.2.3. Анализ чувствительности 576
10.2.4. Диффузионное пламя с противотоком 577
10.2.5. Горение ламинарных струй предварительно не перемешанной смеси 581
10.2.6. Пламя предварительно не перемешанной смеси с быстропротекающими химическими реакциями 582
10.2.7. Очищение выхлопных газов с помощью источников плазмы 584
10.2.8. Течения в протравливающих реакторах 586
10.2.9. Гетерогенный катализ 589
10.3. Турбулентные реагирующие течения 591
10.3.1. Обзор и терминология 591
10.3.2. Прямое численное моделирование 592
10.3.3. Модели турбулентности 593
10.3.4. Осредненные скорости реакции 596
10.3.5. Модели «разрушения вихрей» 602
10.3.6. Моделирование «больших вихрей» 603
10.3.7. Турбулентное пламя предварительно не перемешанной смеси 603
10.3.8. Турбулентное пламя предварительно перемешанной смеси 617
10.4. Сверхзвуковые и гиперзвуковые течения 625

10.4.1. Физико-химические явления при входе в плотные слои атмосферы . . . 625
10.4.2. Химическая неравновесность . . . 626
10.4.3. Температурная неравновесность . . . 629
10.4.4. Реакции на внешней поверхности летательных аппаратов при входе в атмосферу . . . 632

11. **Течения в атмосфере и океане** . . . 638
11.1. Основы течений в атмосфере и океане . . . 638
11.1.1. Введение . . . 638
11.1.2. Основные уравнения во вращающейся системе . . . 638
11.1.3. Геострофическое течение . . . 642
11.1.4. Завихренность . . . 644
11.1.5. Сила Экмана . . . 648
11.1.6. Слой Прандтля . . . 651
11.2. Течение в атмосфере . . . 654
11.2.1. Термические системы ветров . . . 654
11.2.2. Термическая конвекция . . . 656
11.2.3. Тяжелые волны . . . 661
11.2.4. Вихри . . . 664
11.2.5. Глобальные атмосферные циркуляции . . . 672
11.3. Течения в океане . . . 674
11.3.1. Течения, приводящиеся в движение ветром . . . 675
11.3.2. Морские волны . . . 677
11.4. Использование законов течений в атмосфере и океане . . . 680
11.4.1. Прогнозирование погоды . . . 681
11.4.2. Парниковый эффект и прогнозирование климата . . . 683
11.4.3. Озоновая дыра . . . 688

12. **Биоаэрогидродинамика** . . . 692
12.1. Основы биоаэрогидродинамики . . . 692
12.1.1. Кругооборот дыхания . . . 696
12.1.2. Кровообращение . . . 698
12.1.3. Реология крови . . . 704
12.2. Течение в сердце . . . 707
12.2.1. Физиология и анатомия сердца . . . 707
12.2.2. Структура сердца . . . 711
12.2.3. Физиология возбуждения сердца . . . 716

12.2.4. Течение в сердце 719
12.2.5. Сердечные клапаны 722
12.3. Течение в кровеносных сосудах 727
12.3.1. Нестационарное течение в сосудах 731
12.3.2. Непостоянное артериальное течение или непостоянный артериальный поток 732
12.3.3. Артериальное разветвление 736

Литература 738

Предметный указатель 761

Предисловие

Фундаментальные труды Людвига Прандтля в области гидродинамики, аэродинамики и газовой динамики решающим образом повлияли на развитие гидроаэромеханики, а в своих работах в первой половине XX века он практически создает современную гидроаэромеханику. Его книга «Путеводитель по гидроаэродинамике», появившаяся в 1942 году, явилась по сути продолжением его предшествующих изданий, таких как «Теория движения жидкостей и газов» (1913 г.) и «Краткий очерк по гидроаэродинамике» (1931 г.). Название книги «Путеводитель по гидроаэродинамике» выражает намерение Прандтля повести читателя основательно проложенным путем по отдельным областям гидроаэродинамики. При этом автор продвигается вперед к сущности физической проблемы интуитивно, не приводя объемных математических расчетов. Рассмотрению методов предшествуют описание основных физических явлений и толкование понятий гидроаэромеханики, необходимых для составления упрощенных моделей.

При первом издании книга Прандтля «Путеводитель по гидроаэродинамике» была единственной книгой по гидроаэромеханике, и по сей день она относится к важнейшим трудам в данной области. После смерти Прандтля его ученики Клаус Осватич и Карл Вигхардт поставили перед собой задачу продолжить дело своего учителя и ввести новые сведения гидроаэромеханики, используя наглядный метод представления.

После того, как девятое издание было распродано, и встал вопрос о новом издании, мы с удовольствием взялись за это. В десятом издании под новым названием «Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике» в первых четырех главах сохранена последовательность изложения материала первого издания 1942 года, обозначенная Прандтлем. Первоначальный текст был переработан в языковом плане и ведет от свойств жидкостей и газов через кинематику к динамике.

Эти главы и по сей день читаются студентам естественнонаучных и инженерных специальностей в основном курсе лекций по гидроаэродинамике. В новое издание добавлены разделы «Топология и течение неньютоновских

сред». Глава 5 дополнена основными уравнениями гидроаэромеханики, которые оказывают помощь в понимании разделов следующих глав.

При рассмотрении разделов гидроаэромеханики новое издание отличается от предыдущего. Постоянно развивающаяся область гидроаэромеханики приняла такой объем, что возникла необходимость выбора. Я очень обязан и благодарен своим коллегам, которые в самостоятельных отдельных главах переработали свои разделы гидроаэромеханики в духе Прандтля. Так, например, в главах 6–12 представлены новейшие разработки за прошедшие 60 лет.

Вновь переработаны и дополнены главы: «Аэродинамика несущей поверхности», «Конвективная теплопередача и массоперенос». Кроме того, добавлены главы: «Гидроаэродинамическая неустойчивость» и «Биогидромеханика». Глава «Многофазные течения» разработана У. Мюллером. «Течения с химическими реакциями» — Е. Варнатцем и У. Риделем. Новая глава «Течения в атмосфере и в океане» принадлежит Д. Этлингу. Приводимые в отдельных главах цитаты сознательно сведены к минимуму, необходимому для понимания и дополнения. Если речь идет о больших исторических цитатах, то мы делаем ссылку на предыдущие издания.

«Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике» рекомендуется студентам естественнонаучных и инженерных специальностей, которым после основного курса лекций по гидроаэродинамике дается обзор отдельных разделов гидроаэромеханики. Книга представляет собой ценность для специалистов, занимающихся проблемами в области гидроаэромеханики.

Надеемся, что, разработав разделы гидроаэромеханики в духе Прандтля, мы продолжили его дело.

Я очень признателен У. Дорманну за переработку и подготовку рукописи. Отдельная благодарность Ц. Цуру и Л. Хуберу за подготовку текстов и рисунков. Особо следует отметить чрезвычайно плодотворное сотрудничество с издательством Vieweg (Вивег).

Карлсруэ, июнь 2001 года. Герберт Эртель.

1

Введение

Развитие современной гидроаэромеханики тесно связано с именем ее основателя Людвига Прандтля. В 1904 году в своей знаменитой статье о движении жидкости при очень малом трении он разработал *теорию пограничного слоя*, а в течении следующего десятилетия — *теорию несущей поверхности*, которые являются основой при расчетах сопротивления трения, теплопередачи и отрыва потока. *Путь смешения по Прандтлю* для турбулентного обмена импульсом привел его к идее моделирования турбулентных потоков. Его работы в области газовой динамики, такие как «Коррекция Прандтля–Глауэрта для сжимаемых потоков», «Теория ударных волн и волн расширения», а также первые снимки сверхзвуковых потоков в соплах, были основополагающими в данной области. Прандтль применил методы гидроаэродинамики в метеорологии. Большое значение имели также его работы по проблемам упругости, пластичности и реологии.

Особенно успешно Прандтлю удавалось соединить теорию и эксперимент. Эксперименты проводились для перепроверки его теоретических представлений. Это придавало экспериментам Прандтля убедительность и точность. В качестве примера можно привести его знаменитый эксперимент с проволокой, благодаря которому он открыл турбулентный пограничный слой и влияние турбулентности на отрыв. Проволочная сеть была использована не интуитивно, она явилась результатом размышлений о различии в измерениях сопротивлений на шарах Эйфеля. Достаточно было двух экспериментов с различным расположением проволоки, чтобы доказать возникновение турбулентности и ее влияние на отрыв. Для своих экспериментов Прандтль разработал аэродинамические трубы и измерительные приборы, такие как аэродинамическая труба Геттингера и приемник воздушного давления. Его научные результаты возникают зачастую интуитивно, математические выводы служат пониманию физической сущности, хотя затем они являются решающими в создании упрощенной физической модели. Как за-

метил Вернер Гейзенберг, Прандтль обладал способностью видеть решение дифференциальных уравнений, не производя расчетов.

Избранные примеры должны настроить читателя на подготовленный Прандтлем путь к пониманию гидроаэродинамики, на содержание и структуру отдельных глав. В качестве примеров *динамики потоков* приводится *обтекание автомобиля*, как пример несжимаемого потока (см. гл. 4) и *обтекание крыла*, как пример сжимаемого потока (см. гл. 6).

При *обтекании автомобиля* различают свободное обтекание поверхности и поток между автомобилем, движущимся со скоростью u_∞ и неподвижной дорогой. В критической точке имеется максимальное значение давления. От этой точки поток разделяется и ускоряется на крышке радиатора и через бампер на нижней части автомобиля. Это приводит в соответствии с рис. 1.1 к падению давления на донной поверхности автомобиля и к появлению прижимающей к дороге силы. Поток, распространяющийся от критической точки по верхней части автомобиля, имеет зону торможения на ветровом стекле, затем зону движения с разрежением, впоследствии поток замедляется на крыше и на багажнике, направляясь вниз. Это приводит к созданию в этой области распределения давления с положительной подъемной силой, в то время как отрицательное прижимное усилие на дорогу вдоль нижней части автомобиля сохраняется.

Поток с трением (глава 4.2) на верхней и нижней частях автомобиля ограничивается *пограничным слоем*, который переходит на задней кромке в вязкое отрывное течение. Как показывает визуализация потока дымом при эксперименте в аэродинамической трубе, к низу от задней части автомобиля образуется область возвратного течения, представленная на снимке черным цветом. Вне области пограничного слоя поток почти свободен от трения (глава 4.1).

Чтобы научиться понимать процессы, происходящие в *различных областях обтекания* и, исходя из этого, создавать основы аэродинамического проектирования автомобиля, Прандтль тщательно подготовил путь (гл. 2–4), начиная от свойств жидкостей и газов, через кинематику до динамики свободных от трения и вязких потоков. Если читатель последует по этому пути, то он постепенно поймет физическую сущность этого первого примера обтекания.

Второй пример рассматривает *обтекание крыла* сжимаемым потоком со *скачком уплотнения* (глава 4.3 и 6.2). Набегающий поток со скоростью u_∞ на крыло пассажирского самолета представляет собой поток с высокой дозвуковой скоростью. На рис. 1.2 изображены области обтека-

ния в поперечном сечении крыла, отрицательное распределение давления, а также визуализация потока частицами. Начиная от точки торможения, кривая изменения скоростного напора разветвляется и имеет разный вид на подсасывающей (верхней, подветренной) части и напорной (нижней, наветренной) частях крыла. На верхней части поток ускоряется до сверхзвуковой скорости, что связано с сильным падением давления. Далее, вниз по течению, в результате появления скачка уплотнения поток снова замедляется до дозвуковой скорости. Этот скачок уплотнения взаимодействует с пограничным слоем и вызывает повышение давления, которое приводит к возрастанию сопротивления.

На нижней части поток также ускоряется от точки торможения. Однако ускорение в носовой области не так велико, как на верхней подсасывающей стороне, таким образом на всей напорной стороне может и не возникать сверхзвуковых скоростей. Приблизительно с середины крыла поток снова замедляется.

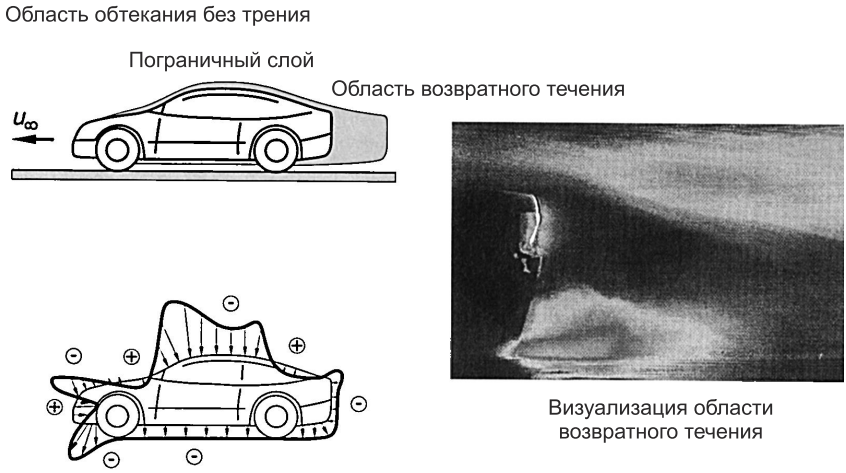


Рис. 1.1. Обтекание автомобиля

Давление у задней кромки крыла выравнивается на верхней и нижней поверхностях, и поток плавно сходит с крыла.

На подсасывающей и напорной сторонах крыла образуются тонкие *пограничные слои*. Эти пограничные слои встречаются на задней кромке и

образуют уходящий вниз по течению след. Поток в пограничных слоях, как и в следе, подобно обтеканию автомобиля, связан с *трением*. За пределами названных областей он почти *свободен от трения*.

В результате представленного на рис. 1.2 распределения давления появляется подъемная сила крыла пассажирского самолета, которую можно согласовать с количеством перевозимых пассажиров. При расчете несущей поверхности инженер-разработчик ставит перед собой цель — сделать по возможности минимальным сопротивление крыла для экономии топлива. Благодаря приданию поперечному сечению соответствующей формы, цель может быть достигнута.

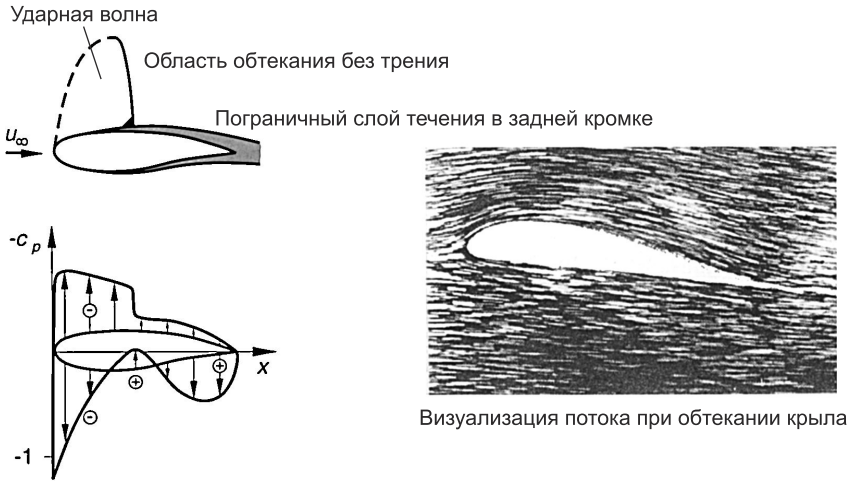


Рис. 1.2. Обтекание крыла

Различие свойств течения в разных областях обтекания приводит к различию систем уравнений, описывающих течение в этих областях. Для тонкого пограничного слоя справедливы уравнения пограничного слоя. Более трудоемки расчеты вязкого потока и потока в области задней кромки. Для этих расчетов нужно решать уравнения Навье–Стокса. Поток, свободный от трения, в области перед скачком можно рассчитать с помощью уравнения для потенциала течения, что является менее трудоемким. Поток, свободный от трения, за скачком вне пограничного слоя нужно рассчитывать с помощью уравнений Эйлера, так как поток за ударной волной будет вихревым. В

области взаимодействия скачка и пограничного слоя вновь следует решать уравнения Навье–Стокса.

В отличие от времени Прандтля сегодня в распоряжении имеются пакеты программ численного решения различных дифференциальных уравнений с частными производными. Поэтому в гл. 5 представлены *основные уравнения* ламинарных и турбулентных потоков как основа для рассмотрения разделов гидроаэромеханики в последующих главах. Соответственно образу действия Прандтля, относительно математических алгоритмов и методов решений мы ссылаемся на цитируемые учебники и специальную литературу.

Как будет показано в гл. 6–12, несмотря на возможность получения численных расчетов спектров обтекания, сохраняется необходимость сопоставления их с результатами физического моделирования. До сих пор не существует законченной теории турбулентности, многофазных течений и химически реагирующих неравновесных потоков. Таким образом, путь Прандтля интуитивной связи теории и эксперимента не потерял своей актуальности для физического моделирования.

Возникновение турбулентности при решении многих проблем гидроаэромеханики вызывается *неустойчивостью течений* (гл. 7). Примером тому является термическая *конвекция* в нагретом снизу горизонтальном жидком слое под влиянием силы тяжести. Нижний слой жидкости имеет более высокую температуру, чем жидкость у свободной поверхность. При превышении критической разницы температур жидкость приходит в движение и образует в соответствии с рис. 1.3 гексагональные ячеистые структуры, в центре которых жидкость поднимается, а на границах сторон жидкость движется вниз. Этот феномен называется термической конвекцией.

Бенар получил ячеистую конвекцию экспериментально, в то время как Релей объяснил ее теоретически с точки зрения устойчивости. Поэтому явление неустойчивости называется также конвекцией Релея–Бенара. Если жидкость ограничена сверху крышкой, то вместо гексогональных ячеек образуются периодически выстраивающиеся рядом друг с другом структуры в виде валов. Причина неустойчивости в обоих случаях одна и та же. Холодный, т. е. более плотный слой жидкости наслаивается на более теплый и склонен к тому, чтобы проникнуть в более глубокие слои. Малейшее нарушение такого наслоения приводит к возникновению движения выравнивания в том случае, когда превышена критическая разность температур.

При возрастанием разности температур конвективное течение через несколько промежуточных состояний переходит к турбулентному конвек-

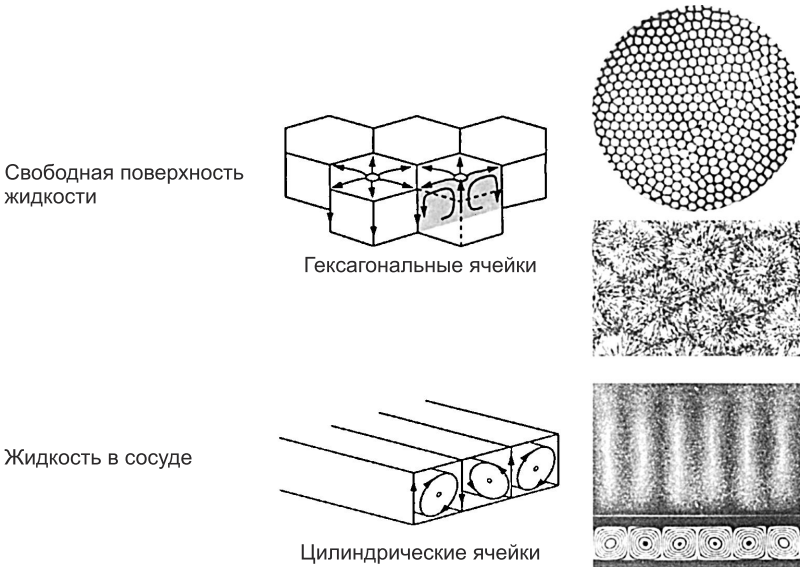


Рис. 1.3. Термическая ячеистая конвекция

тивному течению. При этом изменяется величина гексагональных ячеек и продольных конвективных валов. Первоначальную ячеистую структуру неустойчивости можно увидеть снова в турбулентном конвективном потоке.

Конвективные течения с тепло- и массообменом рассматриваются в гл. 8. Их можно встретить в различном виде в природе и технике. Так, например, теплообмен в атмосфере определяет погоду. Пример тропического урагана (вихря) приведен на рис. 1.8. Занимающая огромнейшее пространство область теплообмена между экватором и северным полюсом приводит к возникновению в океанах течений, таких как Гольфстрим (рис. 1.9). Конвективные течения в недрах Земли вызывают дрейф континентов, они ответственны за магнитное поле Земли.

Процесс течения в энергетической технике и экологии связаны большей частью с тепло- и массообменом, а зачастую также с фазовыми переходами, как, например, в парогенераторах и конденсаторах.

Конвективные потоки используются в градирнях, чтобы отвести отходящее тепло в электростанциях. Распространение отходящего воздуха и

отработавших газов в атмосфере, распространение охлаждающей и отработанных вод в водоемах, обогревательная техника и кондиционеры в зданиях, циркуляция в солнечных коллекторах и теплосборниках — все это относится к примерам термической конвекции.

На рис. 1.4 представлены эксперименты, демонстрирующие термические конвективные потоки. При этом в отличие от вынужденного конвективного течения здесь говорят о свободной конвекции, если поток вызван только подъемными силами, которые в свою очередь могут быть обусловлены температурными или концентрационными градиентами в гравитационном поле. Нагретый горизонтальный круглый цилиндр создает сначала поднимающийся ламинарный конвективный поток в окружающей покоящейся среде до тех пор, пока, наконец, в результате термической неустойчивости не возникнет переход к турбулентному конвективному течению. Соответствующие термические конвективные потоки возникают на вертикальных и горизонтальных нагретых пластинах.

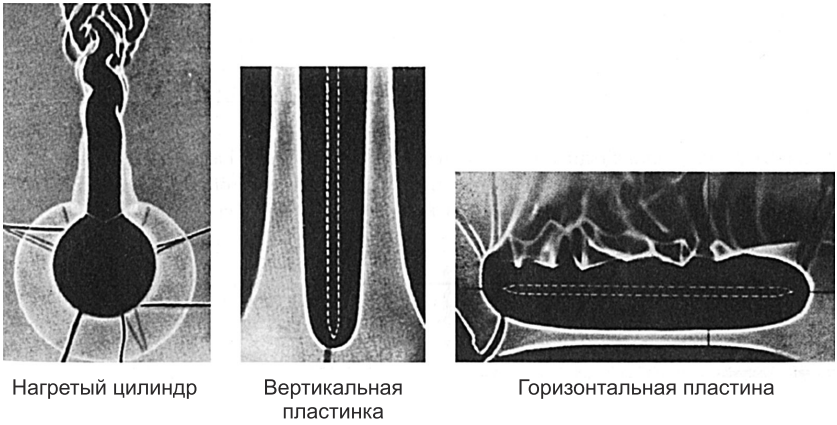


Рис. 1.4. Термические конвективные потоки

Многофазный поток (гл. 9) — это наиболее часто встречающаяся форма течения в природе и технике. Причем понятие «фаза» с точки зрения термодинамики надо понимать как одно из агрегатных состояний (твердое, жидкое, газообразное), которые могут возникнуть в одно- или многокомпонентных материальных системах одновременно. Грозовые облака, дрейфующие с дождевыми каплями, градинами, пенящийся горный ручей,

сходящая лавина снежной пыли или облако вулканического пепла — это наглядные примеры многофазных течений в природе.

В энергетической и химической технологии многофазные течения являются основным средством тепло- и массопередачи вещества. Двухфазные потоки определяют процессы, происходящие в парогенераторах, конденсаторах и градирнях тепловых электростанций.

Дождь из охладительной воды в мокром башенном охладителе можно увидеть на рис. 1.5. Капли воды в результате испарения отдают свое тепло нагревающемуся и поднимающемуся вверх воздуху. Многофазные и многокомпонентные потоки используются при добыче, транспортировке и переработке нефти и природного газа. При процессах дистилляции и ректификации в химической промышленности эти виды течений также имеют решающее значение. На рис. 1.6 в качестве примера представлен кавитирующий подводный профиль. Явления подобного рода крайне нежелательны в машинах, использующих энергию потоков, так как они могут привести к слишком большому материальному ущербу.

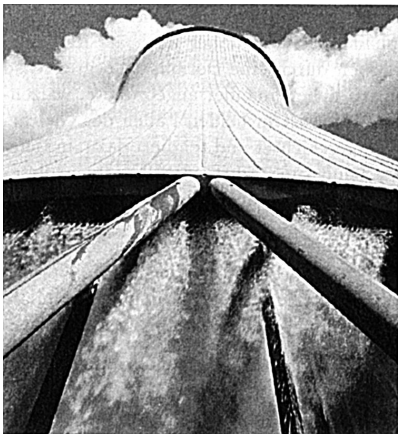


Рис. 1.5. Мокрые башенные охладители

Турбулентные потоки с химическими реакциями имеют большое значение в энергетической, химической технике и при горении. Оптимизация этих процессов выдвигает высокие требования к точности численного моделирования турбулентных потоков. В результате существенного для таких потоков взаимного влияния процессов турбулентного переноса, диффузии

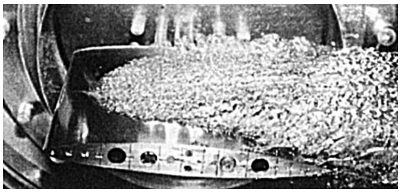


Рис. 1.6. Кавитация на подводном профиле

и химической кинетики возникает потребность в построении улучшенных моделей, описывающих эти явления.

Турбулентное пламя характеризуется широким диапазоном временных и пространственных масштабов. Линейные масштабы турбулентности ограничены сверху размерами, отвечающими размерам камеры сгорания, а снизу размерами мельчайших вязких вихрей, в которых происходит диссипация турбулентной кинетической энергии. Химические реакции, лежащие в основе процесса горения, задают широкий спектр временных шкал. Вследствие наложения процессов, определяемых временными масштабами турбулентности и процессов, определяемых временными масштабами химического взаимодействия, могут возникать области с сильной или слабой взаимосвязью между химией и турбулентностью Поэтому общее описание турбулентных пламен всегда требует понимания турбулентного смешения и горения.

Полное описание турбулентных пламен должно охватывать все масштабы от минимального до самого большого, что пока невозможно для математического моделирования на современных ЭВМ. Поэтому для описания таких процессов следует применять приближенные модели турбулентного горения. Если с помощью таких турбулентных моделей нужно реалистично описать техническое применение относительно смешения, горения и образования вредных веществ, то необходимо из детальных исследований лучше определить параметры таких моделей.

Многообещающим начинанием в решении данной проблемы является прямое численное моделирование, генерирование искусственных ламинарных и турбулентных пламен с помощью ЭВМ. Для небольшой области пространства решаются уравнения сохранения для реагирующих потоков с учетом турбулентных пульсаций, что представляет собой элементарный, но реалистичный объект большого пламени, который может использоваться для описания реального пламени.

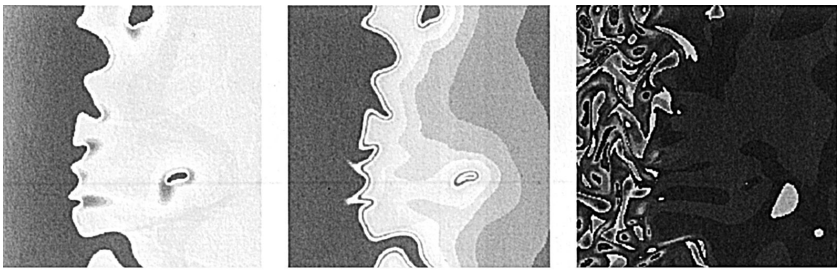


Рис. 1.7. Турбулентное предварительно смешанное метановое пламя

Образование замкнутых областей со свежим газом, проникающих в отработавший газ, представляет собой интересное явление в турбулентных пламенах предварительно перемешанной горючей смеси, этот переходный процесс можно исследовать во временном отношении с помощью прямого математического моделирования, и он имеет большое значение для определения области применения существующих, а также разработки новых моделей для описания турбулентного горения. На рис. 1.7 показано распределение концентрации радикалов OH и CO, а также интенсивность вихря в турбулентном предварительно смешанном метановом пламени.

Течения в природе (гл. 11) можно наблюдать в различном виде на Земле и в космосе. Аэродинамические процессы в атмосфере начинаются от небольшого ветра со склона и кончаются тропосферными потоками. К наиболее впечатляющим атмосферным явлениям относятся тропические ураганы, которые образуются в летние летние месяцы над теплыми водами перед африканским побережьем вблизи экватора и перемещаются на юго-восток в направлении Карибских островов, чтобы затем в области восточного побережья США изменить направление на северо-восток. В этих тропических ураганах скорость ветра может достигать до 300 км в час, что может причинить огромный ущерб на суше. В качестве примера на рис.1.8. представлена траектория и снимок со спутника урагана Джордж, который пронесся в июле 1998 года над Карибскими островами и юго-восточным побережьем Америки и продолжил свой путь, как область низкого давления над Атлантикой вплоть до Европы.

Гидродинамические процессы в океане наблидаются от небольших в пространственном отношении явлений, таких как морские волны, закан-

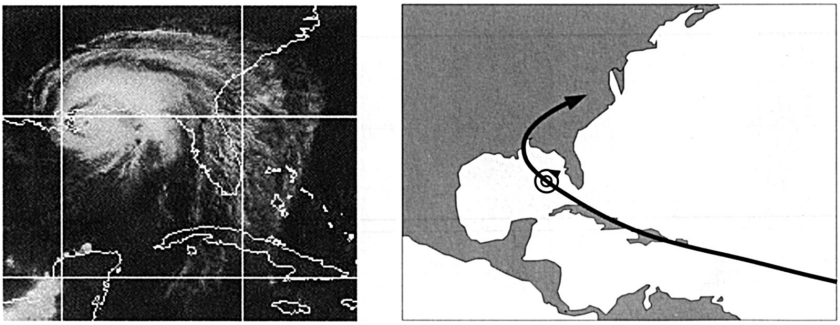


Рис. 1.8. Траектория урагана Джордж, 1998 год

чиваясь огромными морскими течениями. В качестве примера последних следует упомянуть течение Гольфстрим, которое можно проследить как теплое, близкое к поверхности, морское течение практически от африканского побережья, через область Карибских отровов и до западной и северной части Европы. Благодаря своей довольно высокой температуре воды, оно обеспечивает мягкий климат в области британского и норвежского побережья. Для выравнивания теплого поверхностного течения, направленного к полюсу, образуется холодное глубокое течение, которое с Северной Атлантики движется вдоль восточного побережья Северной и Южной Америки на юг. Обе эти огромные в пространственном отношении водных системы представлены на рис. 1.9.

В отличие от приведенных выше примеров течений, механика биотечений в гл. 12 рассматривает потоки, которые ограничиваются гибкими биологическими поверхностями. Различают внешнее обтекание живых существ в воздухе или в воде, например, полет птиц или плавание рыб и внутренние потоки, такие как замкнутая система кровообращения в живых организмах.

В качестве примера следует привести периодически пульсирующий поток в сердце человека.

Сердце состоит из двух раздельных камер, левого и правого желудочка. Правый желудочек наполняется обедненной кислородом кровью из большого круга кровообращения, чтобы при своем сжатии выбросить кровь в малый круг кровообращения. Кровь, обогащенная кислородом в легком, передается левым желудочком в большой круг кровообращения. Упрощен-

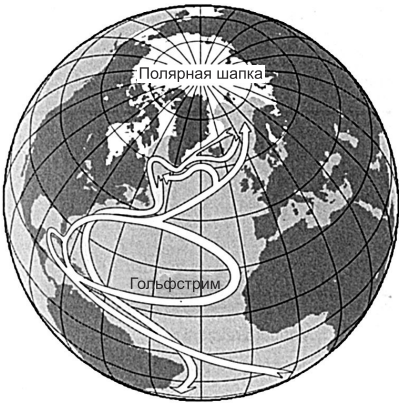


Рис. 1.9. Гигантские морские течения в Атлантике

ное изображение кровообращения во время сердечного цикла показано на рис. 1.10. Предсердия и желудочки сердца разделены антриовентрикулярными клапанами, которые регулируют поступление крови в желудочки. Они препятствуют обратному забросу крови во время сжатия желудочка. При расслаблении желудочка пульмональный клапан препятствует обратному течению крови из легочных артерий, а клапан аорты — обратному течению из аорты в левый желудочек.

Желудочки производят во время сердечного цикла периодически сжатие и расслабление, что обеспечивает пульсирующий поток крови в большом круге кровообращения. Этот сердечный цикл сопровождается изменением венозного и артериального давления. Разница этих давлений и приводит к открытию и закрытию сердечных клапанов. У здорового сердца пульсирующий поток всегда ламинарный и свободный от отрыва. Нарушения сердечного цикла и сердечная недостаточность приводят к турбулентным областям потока крови и обратным потокам в желудочки, что повышает нарушение кровообращения в сердце.

Для медицинской диагностики необходимо знание нестационарных трехмерных картин обтекания. Измерение поля скоростей осуществляется в клинической практике с помощью ультразвуковой эхокардиографии.

Рис. 1.11 показывает на четырех отдельных изображениях трехмерную реконструкцию левого желудочка в области клапана аорты и митрального клапана во время сердечного цикла.

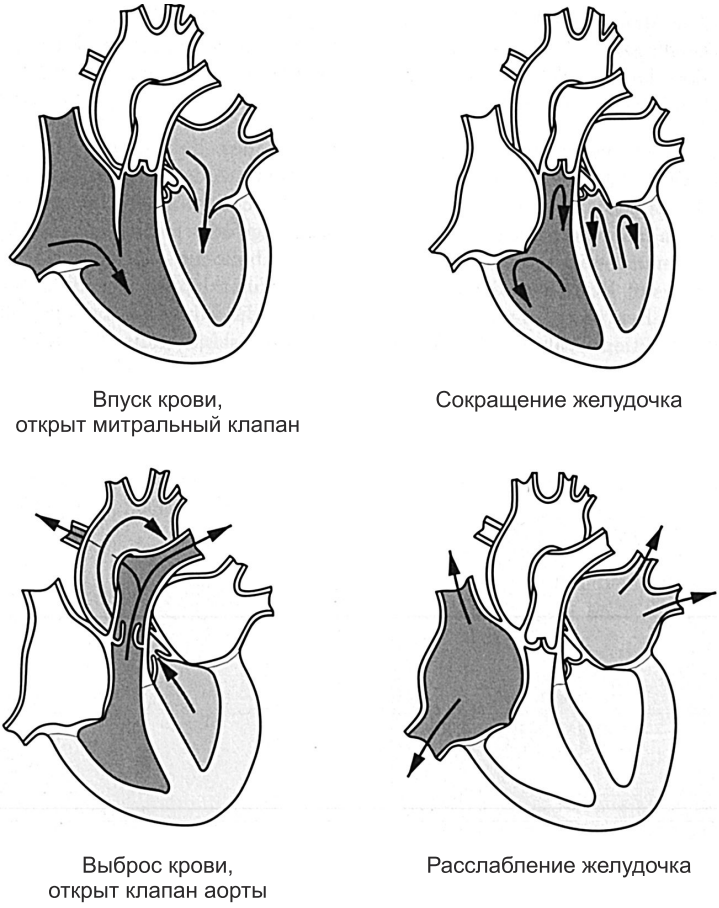


Рис. 1.10. Течение крови в сердце во время сердечного цикла

Черной линией обведен участок трехмерного контура левого желудочка (справа), левого предсердия и аорты (слева), а также верхний участок правого желудочка (слева). Измеренное поле скоростей обведено белой линией. Темно серый цвет означает отрицательную скорость поступления, а светло серый — положительные скорости истечения. Величина скорости изображена тонкой изотахой (линией постоянной скорости).

Первое изображение демонстрирует процесс поступления в левый желудочек. Митральный клапан открыт, а клапан аорты закрыт.

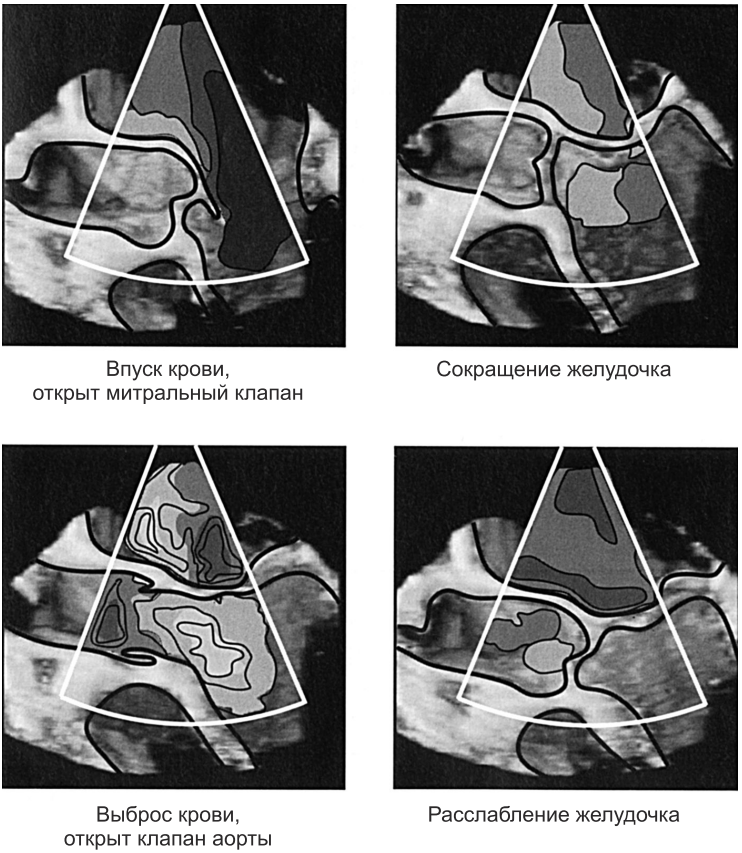


Рис. 1.11. Измерение скорости кровотока в сердце посредством эхокардиографии (Фрайбург, Университетская клиника, 2001)

Высокая, направленная вниз скорость поступления крови минимально может составлять около 0,5 м/сек. При сжатии желудочка клапан аорты и митральный клапан закрыты. Левый желудочек полностью наполнен кровью и измеренные скорости потока крови очень малы, они не долж-

ны вызываться принудительно потоком крови. Отмеченные скорости могут возникнуть также в результате относительного движения сердца к звуковой головке эхокардиографа. При истечении крови митральный клапан закрыт, а клапан аорты открыт. Так как поток крови направлен поперек ультразвуковому двойному лучу, то при поступлении крови в аорту рассматриваются скорости, направленные вниз. При расслаблении желудочка оба сердечных клапана закрыты. Можно отметить поступление крови в левое предсердие.

Измеренные поля скоростей движения крови дают врачу важные сведения для медицинской диагностики. Но для количественного анализа сердечных заболеваний касающихся серьезных нарушений кровообращения в сердце они однако в настоящее время недостаточны. В дополнение к ультразвуковой эхокардиографии моделирование потока крови дает количественное определение нестационарной трехмерной картины обтекания. Результаты моделирования представлены в главе 12.2.4.

2

Свойства жидкостей и газа

2.1. Свойства жидкостей

Жидкости отличаются от твердых тел легкой подвижностью своих частиц. Для изменения формы твердого тела к нему необходимо приложить силы конечной, иногда весьма значительной величины, в то время как для медленной деформации жидкости силы становятся бесконечер малыми. Однако при быстрой деформации жидкость, подобно твердому телу, тоже оказывает сопротивление, которое при прекращении движения очень быстро исчезает. Свойство жидкостей оказывать сопротивление деформации называется вязкостью. Это свойство будет рассмотрено в главе 3. Кроме обычных, легко подвижных жидкостей, существуют очень вязкие жидкости, сопротивление деформации которых весьма значительно, но в состоянии покоя по-прежнему равно нулю. Исходя из вязкого состояния, возможны все фазовые переходы к (аморфному) твердому телу. Нагретое стекло, например, проходит все возможные переходы. У асфальта и других подобных веществ они наблюдаются уже при комнатной температуре. Если, например, опрокинуть бочку с асфальтом, то в зависимости от температуры воздуха асфальт вытекает из бочки в течение нескольких дней или недель и принимает форму плоской лепешки. Хотя такая асфальтовая лепешка с течением времени все более и более растекается, однако по ней можно ходить, не оставляя на её поверхности заметных следов. Следы появятся, если на ней постоять некоторое время. При ударе молотом масса подобно стеклу разбивается на куски.

В теории равновесия жидкостей (*гидростатике*) рассматриваются только состояние покоя или очень медленные движения, следовательно, здесь мы должны принять сопротивление деформации равным нулю. На основании этого мы можем дать следующее *определение жидкости*: *жидкостью называется такое тело, в котором в состоянии равновесия всякое сопротивление деформации равно нулю*.

Согласно кинетической теории материи мельчайшие частицы всех тел (атомы и молекулы) находятся в непрестанном движении. Кинетическая энергия этого движения проявляется в теплоте. С точки зрения этой теории жидкости отличаются от твердых тел тем, что в них отдельные частицы более или менее часто меняются местами с соседними частицами, в то время как в твердых телах каждая частица занимает в пространстве вполне определенное положение, правда, совершая около него небольшие колебания. Возникновение в жидкости напряженного состояния благоприятствует смене частиц местами. Такие перемены вызывают ослабление в направлении разности напряжений. Это ослабление приводит в состоянии покоя к более или менее быстрому исчезновению разницы напряжений. При изменении формы возникают напряжения, которые тем больше, чем быстрее происходит это изменение.

Постепенное размягчение аморфных тел при повышении температуры можно объяснить следующим образом: если тело нагревается, то есть если увеличивается энергия молекулярного движения, то сначала частицы меняются местами там, где случайно возникли особенно большие колебания, при дальнейшем нагревании такая перемена мест совершается всё чаще, причём она распространяется на все тело. В кристаллических твердых телах переход из твердого состояния в жидкое состояние происходит внезапно, в результате расплавления, то есть вследствие разрушения правильной атомной структуры вещества.

Другим свойством жидкостей является их большое сопротивление изменению объема. Никаким способом невозможно сжать один литр воды так, чтобы он поместился в сосуд ёмкостью в пол-литра. Если это количество воды налить в сосуд ёмкостью два литра, то вода заполнит только половину сосуда. При этом вода почти не сжимается. Но при больших давлениях вода сжимается (при давлении около 1000 атмосфер это сжатие достигает 4 % первоначального объема). Аналогичным образом ведут себя и другие жидкости.

2.2. Теория напряженного состояния

Рассмотрим подробнее напряженное состояние жидкости, находящейся в равновесии. Заметим сначала, что общие теоремы о равновесии сил применимы также и к жидким телам. Это следует из так называемого принципа отвердевания, сущность которого заключается в следующем: если в

какой либо подвижной системе, находящейся в равновесии, сделать отдельные её части неподвижными, то от этого равновесие всей системы не нарушится. Следовательно, в случае жидкости, находящейся в равновесии, можно всегда вообразить, некоторая её часть отвердела; от этого равновесие всей жидкости не нарушится. В данном случае речь идет не о физическом отвердевании, связанном с изменением объема и выкристаллизацией, а об идеальном отвердевании без всякого смещения и изменения формы.

Такой обходной путь через отвердевание тел необязателен. Теоремы общей механики о равновесии, хотя и выводятся на примере абсолютно твердых тел, применимы также к покоящимся системам материальных точек, если только внутренние движения, вообще возможные в таких системах, вследствие равновесия не используются. До тех пор, пока речь идет о состоянии покоя, оба принципа рассмотрения могут использоваться в равной мере. Однако в случае движения возникают трудности с принципом отвердевания, так как оно отсутствует. Имея в виду дальнейшие приложения к динамике, здесь будет вкратце изложено основное содержание этой теории, которое также принято в сопротивлении материалов.

Прежде всего напомним, что любые силы представляют собой взаимодействие между массами. Если, например, масса m_1 притягивает к себе другую массу m_2 с силой $\boldsymbol{F}$, то с такой же силой масса m_2 притягивает к себе массу m_1. Следовательно, обе силы направлены прямо противоположно друг другу (закон Ньютона о равенстве действия и противодействия). В системе масс, каким-нибудь образом выделенной среди других масс, следует различать два вида сил: внутренние силы, действующие между массами, принадлежащими системе, и возникающими всегда попарно и противоположно направленно и внешние силы, действующие между каждой массой системы и массой, находящейся вне системы, и которые вследствие этого могут возникнуть в системе лишь один раз. При суммировании всех сил, приложенных на массы системы, внутренние силы всегда попарно уничтожаются из суммы, и остаются только внешние силы.

Для равновесия системы необходимо, чтобы сумма сил, приложенных к каждой отдельной массе системы, была равна нулю. При сложении таких сумм для всех масс системы остается, согласно сказанному выше, только сумма всех *внешних* сил. Так как каждая отдельная сумма при равновесии равна нулю, то равна нулю и сумма всех внешних сил системы. Эта теорема, при выводе которой о системе масс не делается никаких иных предположений, кроме того, что она находится в равновесии, находит широкое применение в самых различных случаях. Она записывается в виде

трех уравнений:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0,$$

где F_x, F_y, F_z есть проекции внешних сил на оси x, y, z.

Что касается данной теоремы, то существует абсолютно аналогичная теорема для моментов внешних сил, сумма которых в равновесии равна нулю.

Как для упругих твердых, так и для жидких тел важно знать напряженное состояние внутри тела, которое возникает в результате действия внутренних сил, действующих между мельчайшими частицами тела. Однако в общем случае приходится ограничиваться указанием только среднего напряженного состояния в области, которая уже содержит очень большое число частиц. Но как же вообще можно получить представление о внутренних силах, если наши теоремы об условиях равновесия говорят только о внешних силах? Для этого, как мы сейчас увидим, необходимо сделать внутренние силы внешними. Вообразим некоторое тело, к которому приложены внешние силы и мысленно разрежем его на две части. Одну из частей (например, I на рисунке 2.1) примем за нашу систему масс. Тогда все силы, с которыми частицы части II действовали на частицы части I и которые раньше были внутренними силами, теперь будут внешними силами. Если все тело подвергается внешнему нагружению (на рисунке 2.1 это обозначено двумя стрелками), то также возникают внутренние напряжения. Разрежем мысленно тело, тогда через площадь сечения частицы, находящиеся справа от сечения, будут действовать с силой на частицы слева от сечения. Суммируя все эти силы в одну результирующую, получаем равновесие сил, действующих в части I. Таким образом, мы получаем вполне определенное и однозначное представление о результирующей внутренних сил в проведенном сечении тела. Мы получили бы совершенно аналогичный результат, если бы вместо части I тела рассмотрели бы часть II, только теперь результирующая внутренних сил была бы приложена к части II и направлена в прямо противоположную сторону (сила, действующая с части I на часть II).

Напряжением называется результирующая внутренних сил, отнесенная к единице площади сечения. В только что рассмотренном примере, разделив найденную результирующую внутренних сил на площадь сечения, мы получим, очевидно, среднее напряжение в сечении. Вообще же на различных площадках сечения напряжение может быть разным. Напряжение на площадке, подобно силе, является вектором.

Такой *метод сечений*, то есть в результате мысленного сечения превращать внутренние силы во внешние, допускает широкое применение, когда требуется исследовать напряженное состояние внутри тела. Для этой цели внутри тела вырезается при помощи некоторого числа сечений небольшое тело, например параллелепипед, призма, тетраэдр, и исследуется его равновесие. В простейшем случае все силы, которые могут быть приведены на теле в состояние равновесия, являются силами напряжения. Из равновесия таких сил можно вывести важные теоремы о напряженных состояниях, одна из которых с доказательством приводится здесь в качестве примера.

Рис. 2.1. Метод сечений

Если известны напряжения в трех сечениях, образующих друг с другом трехгранный угол, то напряжения во всех других сечениях могут быть определены.

Для доказательства поступим следующим образом. Пересечем трехгранный угол четвертой плоскостью, именно той, в которой требуется определить напряжение. Эта плоскость образует вместе с тремя первыми тетраэдр (рис. 2.2). Силы 1, 2, 3 получаем, умножив заданные напряжения на площади соответствующих граней. Имеется только одна сила, которая уравновешивает сумму сил 1, 2 и 3. Эта сила, разделенная на площадь соответствующей грани и дает искомое напряжение. Для проведения вычислений целесообразно совместить заданные сечения с координатными плоскостями (сравнить рис. 2.2).

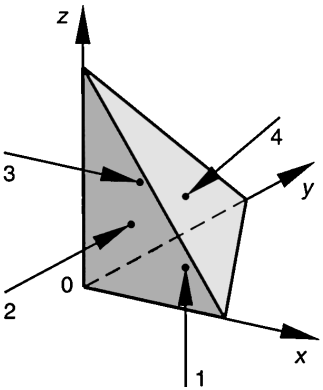


Рис. 2.2. Равновесие тетраэдра

Теперь мы можем дать определение напряженному состоянию: напряженным состоянием в какой-либо точке называется совокупность напряжений во всех сечениях проходящих через заданную точку. Напряженное состояние в точ-

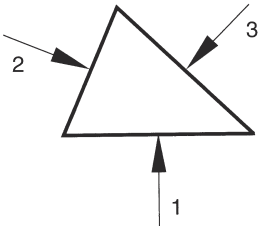
ке может быть связано с некоторым эллипсоидом. Следовательно, напряженное состояние представляет собой тензор. Согласно приведенной выше теореме, напряженное состояние в точке (а также соответствующий ему эллипсоид) известно, если заданы напряжения в трех сечениях, образующих трехгранный угол. В каждом эллипсоиде имеются три взаимно перпендикулярные оси. Этим осям эллипсоида, называемым главными осями, соответствуют в напряженном теле такие три взаимно перпендикулярных сечения, в которых напряжения перпендикулярны сечениям. Эти напряжения называются главными напряжениями, а соответствующие направления — главными направлениями напряженного состояния.

2.3. Давление в жидкости

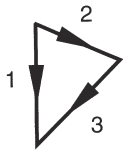
Напряженное состояние в жидкости, находящейся в равновесии, особенно простое. Сопротивление жидкости деформации, то есть перемещение ее частей относительно друг друга можно сравнить с трением твердых тел. Если при соприкосновении двух твердых тел трение отсутствует, то сила (давление) должна быть обязательно перпендикулярно к плоскости их соприкосновения. Следовательно, при скольжении вдоль плоскости соприкосновения не должно совершаться никакой работы. Совершенно аналогично проявляет себя и отсутствие в жидкости сопротивления деформации: в этом случае напряжение внутри жидкости, или, как принято говорить, давление жидкости, должно быть везде перпендикулярно к поверхности того сечения, на которое оно действует. Это свойство давления жидкости может рассматриваться как определение жидкого состояния, совершенно эквивалентное тому определению, которое было дано в главе 2.1.

При помощи простых соображений из указанного свойства давления жидкости можно вывести другое важное свойство. Мысленно выделим в жидкости небольшую трехгранную призму с основаниями, перпендикулярными к ребрам призмы. Конечно, мы могли бы также вообразить, что выделенная внутри жидкости призма отвердела; в таком случае нам надо было бы исследовать равновесие сил, действующих на призму со стороны остальной жидкости. Силы давления на основания призмы равны друг другу по абсолютному значению, но прямо противоположны по направлению; следовательно, они уравновешивают друг друга и поэтому в дальнейшем мы можем их не рассматривать. Силы давления на боковые грани перпендикулярны к граням и поэтому лежат в плоскости, перпендикулярной к ребрам призмы. На рисунке 2.3. показано поперечное сечение призмы вместе с си-

лами давления, действующими на ее грани, а также треугольник, который должны образовать силы давления для того, чтобы имело место равновесие. Так как стороны треугольника сил давления перпендикулярны сторонам призмы, то оба треугольника имеют соответственно равные углы и поэтому подобны. Отсюда следует, что силы давления 1, 2, 3 относятся друг к другу как соответствующие грани призмы. Для определения давлений на единицу площади нужно разделить каждую силу давления на соответствующую площадь призмы. Площади призмы имеют одинаковую высоту и поэтому относятся друг к другу также как их грани и соответствующие им силы давления. Отсюда следует, что давление на единицу площади на всех площадях призмы одинаково. Так как призма была выбрана произвольно, то можно сделать вывод, что давление в одной и той же точке жидкости одинаково во всех направлениях. Эллипсоид напряжений в жидкости в этом случае принимает форму шара. Для определения такого напряженного состояния, которое принято называть гидростатическим напряжением, достаточно указания одного — единственного числа — давления p. Это число означает силу, действующую на единицу площади сечения.



Силы, действующие
на боковые грани призмы



Треугольник сил, действующих
на боковые грани призмы

Рис. 2.3

2.4. Распределение давления в невесомой жидкости

Каждая жидкость обладает весом. Однако во многих случаях, особенно когда в жидкости имеет место высокое давление, нет нужды учитывать действие силы тяжести. Благодаря этому, расчеты значительно упрощаются. Установим снова равновесие сил на призме, которая на этот раз имеет длинную узкую форму. Рассмотрим ее равновесие при действии сил вдоль

оси призмы. Предположим, что давление в жидкости при переходе от одной точки к другой изменяется. Поперечное сечение призмы равно основанию призмы перпендикулярному оси призмы. Обозначим его буквой A (см. рис. 2.4). Это поперечное сечение призмы возьмем настолько малым, что изменением давления внутри A можно пренебречь. Если на одном конце призмы имеет место давление p_1, а на другом давление p_2, то здесь действуют силы Ap_1 и Ap_2, параллельные оси призмы, но противоположно направленные. Все силы давления, действующие на боковые поверхности призмы, направлены, согласно нашему основному допущению, перпендикулярно к ним, следовательно, перпендикулярно и к оси призмы. Поэтому, каково бы ни было распределение давления на боковых поверхностях, силы давления, действующие на них, не дают составляющих в направлении оси призмы. Таким образом для равновесия призмы необходимо, чтобы силы Ap_1 и Ap_2 в рассматриваемом направлении находились в состоянии равновесия, то есть необходимо, чтобы

$$Ap_1 = Ap_2 \quad \text{или} \quad p_1 = p_2$$

Так как положение призмы внутри жидкости было выбрано нами произвольно, то из полученного результата следует, что при отсутствии силы тяжести (и других внешних сил) давление во всех точках жидкости одинаково.

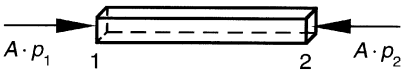


Рис. 2.4. Равновесие призмы с горизонтальной осью

Если жидкость заполняет узкое и извилистое пространство и поэтому невозможно выделить призму между двумя произвольными точками жидкости, то нужно действовать следующим образом. Сначала возьмем две точки 1 и 2, затем от точки 2 перейдем в другом направлении к точке 3 и так далее, пока не дойдем до требуемой конечной точки n. Тогда из равенства $p_1 = p_2 = p_3$ и так далее следует также, $p_1 = p_n$.

Существует другое, более изящное доказательство. Поместим наш реальный сосуд мысленно в другой сосуд большего объема и наполним его водой. После того, как установится равновесие, вообразим, что в большом сосуде отвердела вся жидкость, кроме той, которая занимает первоначально заданное пространство. Согласно нашему принципу отвердевания (гла-

ва 2.2), равновесие не изменится. Следовательно, в невесомой жидкости в любом узком пространстве при равновесии давление везде одинаково.

Если жидкость заполняет очень узкое пространство, то после изменения давления жидкости, например, вследствие внешней нагрузки, может пройти весьма значительное время, прежде чем установится равновесие. В пластичной горшечной глине, состоящей из очень мелких твердых частиц, промежутки между которыми заполнены водой, указанное время измеряется целыми днями, а в пластах глины в почве — даже целыми годами.

В течении этого времени вода перетекает из мест с более высоким давлением в места с более низким давлением (см. главу 4.2.8) при одновременной упругой деформации твердого грунта. Обобщая сказанное, можно сделать вывод: в жидкости, находящейся в равновесии, давление во всех точках направлено перпендикулярно к поверхности, на которую оно действует, и — при отсутствии силы тяжести и других массовых сил — везде и во всех направлениях одинаково.

Все сказанное относительно давления внутри жидкости относится также и к давлению на стенки сосуда, заключающего жидкость. Для того чтобы в этом убедиться, проведем внутри жидкости, вплотную около стенки или на небольшом расстоянии от нее, плоское сечение и построим на этом сечении небольшой цилиндр с образующей, перпендикулярной к сечению (рис. 2.5). Равновесие замкнутого таким образом тела дает составляющую F, направленную перпендикулярно к площади сечения, то есть Ap. При таком рассуждении легко можно увидеть, что даже большие неровности стенки не влияют на полученный результат. На рис. 2.5 указана сила F, действующая от стенки на цилиндр. Сила давления жидкости на стенку направлена в противоположном направлении.

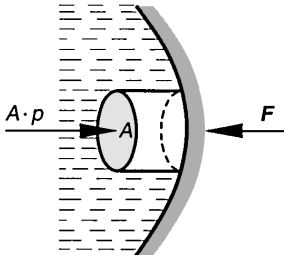


Рис. 2.5. Сила давления на стенки сосуда

2.5. Свойства газов

Газы отличаются от жидкостей тем, что при помощи достаточно большого давления они могут быть сжаты до очень малого объема; с другой стороны, если представить любому газу большее пространство, чем то, которое он занимает, то происходит расширение газа: он равномерно за-

полняет все предоставленное ему пространство, но давление его при этом уменьшится. В остальном поведение газов очень сходно с поведением жидкостей: в состоянии покоя они, подобно жидкостям, не оказывают никакого сопротивления деформации, а при внутренних перемещениях в них, как и в жидкостях, проявляется вязкость. Следовательно, до тех пор, пока не происходит изменения объема, поведение газа в качественном отношении ничем не отличается от поведения жидкости, занимающей сплошь — без образования свободной поверхности — такое же пространство, как и газ.

Важнейшим газом является атмосферный воздух. Другие газы ведут себя так же как и воздух. Атмосферный воздух находится на поверхности Земли приблизительно под постоянным давлением, равным 1 бар или 10^5 Н/м^2. С увеличением высоты давление воздуха понижается (ср. 2.7).

Для измерения давления воздуха (газа) служат различные приборы, которые называются манометрами, если они показывают разности давлений, и барометрами, если они показывают абсолютное давление окружающей среды. Те и другие приборы могут быть жидкостными (ср. гл. 2.8) или пружинными. Для измерения абсолютного давления воздуха может использоваться барометр-анероид (в настоящее время с цифровыми показаниями), который представляет собой металлическую коробку с упругой мембраной, соединенной с пружиной, причем из коробки выкачан воздух. При изменении давления внешнего воздуха упругая мембрана более или менее сильно прогибается и действует на пружину; стрелка, соединенная с пружиной, показывает на шкале давление воздуха.

Закон, связывающий между собой давление и объем газа, впервые был открыт сначала в 1612 году Р. Бойлем (R. Boyle), а затем, независимо от Бойля, еще раз в 1679 году Мариоттом (Mariotte). Поэтому его называют законом Бойля–Мариотта. Согласно этому закону давления одного и того же количества газа при неизменной температуре обратно пропорциональны объемам, занимаемым этим количеством газа. Например, если некоторое количество газа сжимается до половины своего первоначального объема, то давление в газе увеличивается в два раза. И наоборот, если некоторому количеству газа предоставляется двойной объем, то давление уменьшается в два раза. Математически этот закон выражается уравнением:

$$pV = p_1 V_1; \tag{2.1}$$

где p_1 есть начальное давление, V_1 — начальный объем, а p и V соответственные значения давления и объема при любом другом состоянии газа.

Объем газа сильно зависит от температуры. Гей-Люссак (Gay-Lussak) в 1816 году нашел, что увеличение объема газа при изменении температуры на 1° C при постоянном давлении всегда равен $1/273{,}2$ объема газа при 0° C. Это относится почти ко всем газам и температурам. Математически закон выражается уравнением:

$$V = V_0(1 + \alpha\vartheta); \tag{2.2}$$

где V_0 — объем газа при 0° C, ϑ — температура в градусах Цельсия, и $\alpha = 1/273$ — коэффициент расширения. Это значение для α действительно при давлениях не только для воздуха, но также и почти для всех прочих газов, таких как водород, гелий и т. д.

Поскольку оказалось, что в уравнение (2.2) давление не входит, то его можно связать с уравнением (2.1). Это позволяет получить уравнение, справедливое для всех давлений и температур:

$$pV = p_0V_0(1 + \alpha\vartheta); \tag{2.3}$$

где p_0 означает произвольное, но для сравниваемых состояний фиксированное начальное давление, а V_0 — объем при начальном давлении p_0 и температуре 0° C. Уравнение (2.3) обычно называют законом Мариотта–Гей-Люссака. Его называют также уравнением состояния, так как оно связывает друг с другом 3 величины, определяющие состояние газа: давление, объем и температуру. Его называют уравнением состояния идеальных газов, так как реальные газы ведут себя несколько иначе. При обычной плотности эти отклонения незначительны. Они делаются заметными только при сильном сжатии газа и в особенности тогда, когда температура газа настолько понижена, что начинается сжижение газа.

Указанные отклонения подробно рассматриваются в термодинамике. Здесь мы коротко упомянем лишь об одном из таких отклонений. Из уравнения (2.1) следует, что при очень больших давлениях объем газа становится очень малым. При помощи уравнения (2.3) можно, например, подсчитать, при каком давлении достигается плотность воды или при каком давлении плотность золота. Однако это невозможно. Существует некоторый предельный объем, до которого может быть сжат газ, т. е. при котором молекулы достигают самого тесного расположения. Это обстоятельство можно учесть, если переписать уравнение (2.3) в несколько измененном виде:

$$p(V - V') = p_0(V_0 - V')(1 + \alpha\vartheta);$$

где V' означает предельный объем. Для каждого конечного давления p соответствующий ему объем V будет больше, чем V'. Однако, в тех случаях,

когда объем V велик по сравнению V', результаты подсчета по уравнениям (2.1) и (2.3) практически не отличаются друг от друга.

При сжатии газа выделяется теплота. Поэтому закон Бойля–Мариотта, выведенный в предположении постоянной температуры, будет выполняться в действительности только в том случае, если при сжатии или, по крайней мере, после сжатия, газу будет предоставлено достаточное время для того, чтобы отдать выделившееся тепло и снова принять температуру окружающей среды. То же самое относится к охлаждению, появляющемуся при расширении. Если же газ не будет иметь нужного времени для выравнивания разности температур, то при сжатии увеличение давления будет происходить, очевидно в большем отношении, чем уменьшение объема. В термодинамике доказывается, что в том случае, когда не происходит никакого теплообмена с окружающей средой, т. е. при очень быстром сжатии или расширении, вместо уравнения (2.1) используется уравнение

$$pV^k = p_1 {V_1}^k, \tag{2.4}$$

где $k = c_p/c_v$ равно отношению удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Для сухого атмосферного воздуха ($k = 1{,}4$). Сжатие или расширение, происходящие согласно уравнению (2.4) называют адиабатическим сжатием или расширением в отличие от изотермического изменения состояния согласно уравнения (2.1). Таким образом адиабатическое сжатие связано с нагреванием газа, которое можно подсчитать из уравнений (2.3) и (2.4) . Адиабатическое расширение связано с охлаждением газа.

Свойства газов, изложенные в этой главе, можно хорошо объяснить, если предположить, что мельчайшие частицы газа находятся в очень быстром непрестанном движении, причем всё время происходят столкновения частиц между собой и со стенкой сосуда, заключающего газ. Тогда давление есть не что иное, как суммарное действие ударов частиц, а температура эквивалентна кинетической энергии частиц. При каждом сжатии температура повышается, так как скорость частиц газа, ударяющихся о движущуюся им на встречу стенку, после отражения частиц увеличивается.

2.6. Равновесие жидкости в поле силы тяжести

Действие поля силы тяжести на какую-нибудь массу m состоит в том, что эта масса испытывает силу притяжения к центру Земли, равную

mg, где g есть ускорение свободного падения в наших широтах, равное $9{,}81$ м/сек^2. Это значение не совсем точное, так как не принимается во внимание вращение Земли. В действительности сила тяжести получается из взаимодействия силы земного притяжения и центробежной силы. Направление отвеса для жителей северного полушария пересекает Земную ось несколько южнее центра Земли.

Сила mg называется весом массы m. Так как измерение количества жидкости часто производится по объему, то для массы единицы объема вводится плотность ρ. Следовательно, если некоторое количество жидкости занимает объем V и имеет плотность ρ, то масса этого количества жидкости равна ρV, а вес равен $g\rho V$. Произведение $g\rho$ есть не что иное, как вес единицы объема и называется удельным весом, который обозначается буквой γ. Так как ускорение свободного падения g не во всех точках Земли одинаково, то величина удельного веса также изменяется при переходе от одного места к другому. Плотность же не зависит от силы притяжения Земли.

Основной задачей гидростатики, т. е. учения о равновесии весомых жидкостей, является вычисление распределения давления в однородной весомой жидкости.

Снова рассмотрим равновесие призмы, выделенной в жидкости, при действии сил в направлении оси и используем сначала призму, изображенную на рис. 2.4. Ось данной призмы проходит горизонтально к направлению ускорения Земли. Вес призмы не дает составляющей в направлении оси призмы. Поэтому мы можем в рассматриваемом случае повторить все рассуждения главы 2.4. По-прежнему найдем, что

$$p_1 = p_2,$$

т. е. давление на обоих концах призмы одинаковое.

Применяя этот результат к произвольной последовательности примыкающих друг к другу призм с горизонтальной осью, мы найдем, что давление весомой жидкости во всех точках одной и той же горизонтальной плоскости одинаковое.

Связь между различными горизонтальными плоскостями получают при рассмотрении равновесия призмы или цилиндра с вертикальной осью при приложении сил, действующих в вертикальном направлении. При этом следует учитывать вес призмы при равновесии сил. В соответствии с рис. 2.6 сила давления $p_1 A$ направлена на верхнее основание цилиндра, а вес $G = \gamma V = \gamma A h$ направлен вниз. Сила давления $p_2 A$, действующая на нижнее

основание направлена вверх. Следовательно для равновесия необходимо, чтобы

$$\gamma Ah + p_1 A = p_2 A.$$

Отсюда следует:

$$p_2 - p_1 = \gamma h. \tag{2.5}$$

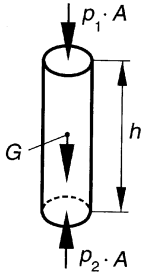


Рис. 2.6. Равновесие цилиндра с вертикальной осью

Таким образом, разность давлений 1 и 2 равна весу заключенного между ними вертикального столба жидкости с поперечным сечением, равным 1. Применяя этот результат к ряду примыкающих друг к другу вертикальных призм, мы найдем, что давление возрастает в направлении земного ускорения, причем каждая единица длины увеличивает давление на величину γ. Давление в каждой горизонтальной плоскости остается постоянным.

Введем прямоугольную систему координат x,y,z и направим ось z вертикально вверх в противоположном направлении к земному ускорению. Тогда, если давление в горизонтальной плоскости $z = 0$ обозначить через p_0, то давление p в каком-нибудь другом месте будет равно

$$p = p_0 - \gamma z. \tag{2.6}$$

Как показывает неоднократное применение принципа отвердевания (ср. гл. 2.4), это соотношение справедливо также для больших, заполненных жидкостью пространств, для сообщающихся сосудов, для любой системы труб, для пор между зернами гравия и песка и т.д. Необходимым условием является только однородность и связность покоящейся жидкости.

Принцип отвердевания можно также применить для определения силы, которая действует на погруженное в жидкость тело в результате давления жидкости. Мысленно заменим тело на жидкость. Новая часть жидкости имеет такую же форму, как и тело, и такой же удельный вес как и остальная жидкость. Силами давления на ее поверхности она приводится в равновесие. Результирующая сил давления направлена вертикально вверх и проходит через центр тяжести новой части жидкости. Величина результирующей силы, которую также называют подъемной силой, равна произведению вытесненного объема V и удельного веса γ жидкости. Если затем мысленно представим себе, что новая часть жидкости отвердела, то в уравнении ничего не изменится. Изменений в нем также не произойдет, если другое тело такой же формы, но с другим весом поместить на то же место. Эта теорема, открытая Архимедом гласит: Вес тела, погруженного в жидкость,

уменьшается на вес вытесненной им жидкости. Взвешивание тела в погруженном состоянии и в воздухе, в котором он также испытывает небольшую подъемную силу, обнаруживает уменьшение веса на $G_{\mathrm{FL}} - G_{\mathrm{Luft}} = V(\gamma_{\mathrm{FL}} - \gamma_{\mathrm{Luft}})$. Отсюда можно определить при известном удельном весе γFL или при известном объеме V. γ_{Luft} можно рассчитать, исходя из изложенного в главе 2.7.

Если речь идет о неоднородной жидкости, например, вследствие неодинаковой температуры или разного содержания соли в разных местах жидкости, то все рассуждения относительно призмы с горизонтальной осью могут быть повторены безо всяких изменений. Следовательно, и здесь во всех точках горизонтальной плоскости давление одинаково. Для выяснения проведем в жидкости две такие горизонтальные плоскости на небольшом расстоянии друг от друга h (см. рис. 2.7). Пусть на верхней плоскости давление равно p_1, а на нижней p_2. Рассмотрим две вертикальные призмы высотой h и средним удельным весом γ_1 на левую призму и γ_2 на правую призму.

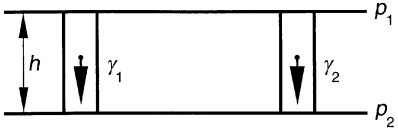


Рис. 2.7. Равновесие двух призм с вертикальной осью в неоднородной жидкости

Для равновесия необходимо, чтобы слева соблюдалось равенство $p_2 - p_1 = \gamma_1 h$, а справа $p_2 - p_1 = \gamma_2 h$. Но это возможно лишь в том случае, если $\gamma_1 = \gamma_2$. В противном случае равновесие не могло бы установиться, и жидкость пришла бы в движение. Мы можем уточнить наши рассуждения, если возьмем расстояние h между плоскостями очень малым и повторим рассуждения для любого большого числа пар соседних горизонтальных плоскостей.

Таким образом мы придем к выводу: в неоднородной весомой жидкости равновесие возможно только в том случае, если в каждом горизонтальном слое плотность везде постоянная. В этом выводе содержится ответ на вопрос о равновесии двух наслоенных друг на друга не смешивающихся жидкостей различной плотности. Итак, для равновесия необходимо, чтобы поверхность раздела представляла собой горизонтальную плоскость. Это следствие можно вывести и непосредственно из наших рассуждений, от-

носящихся к рисунку 2.7. Предположив сначала, что поверхность раздела обеих однородных жидкостей, наслоенных друг на друга, проходит произвольным образом между горизонтальными плоскостями, мы увидим, что равновесие возможно только в том случае, если поверхность раздела расположена горизонтально.

Заметим, что для устойчивости такого наслоения жидкостей необходимо, чтобы менее плотная жидкость была расположена обязательно над более плотной. При обратном расположении равновесие будет неустойчивым. Малейшее возмущение приводит слои в движение.

Для доказательства можно снова воспользоваться рис. 2.7. Возьмем какое-нибудь возмущенное, например, несколько наклоненное, положение поверхности раздела между обеими горизонтальными плоскостями и вычислим разности давлений, возникающие при таком возмущении. Мы увидим, что при устойчивом расположении слоев эти разности давлений стремятся уменьшить наклон поверхности раздела, а при неустойчивом положении они стремятся, наоборот, увеличить этот наклон.

Если плотность жидкости изменяется непрерывно, то устойчивость попрежнему будет иметь место в том случае, если плотность везде уменьшается снизу вверх. В отличие от устойчивой наслоенной неоднородной жидкости, однородная жидкость представляет собой безразличное равновесие. Как бы не перемещались любые части однородной жидкости, находящейся в равновесии, возмущающие силы, нарушающие равновесие, не возникают.

Что касается распределения давления в неоднородной жидкости, то для каждого слоя, в котором плотность можно считать приближенно одинаковой, имеет место уравнение (2.5) в дифференциальной форме.

$$dp = -\gamma dz. \tag{2.7}$$

Если удельный вес γ задан как функция высоты z, то интегрирование приводит к соотношению:

$$p = p_0 - \int_0^z \gamma \, dz. \tag{2.8}$$

2.7. Равновесие газа в поле силы тяжести

Условия равновесия весомого газа в основном совпадают с условиями равновесия весомой жидкости. Поэтому уравнения, выведенные в предыдущей главе, можно использовать и для газа. Во многих случаях, например,

если пространство, занимаемое газом, имеет умеренную высоту, можно считать удельный вес газа постоянным во всем пространстве. Тогда можно пользоваться уравнениями (2.5) и (2.6) предыдущей главы, т. е. принимать газ за однородную жидкость. Но если пространство, занимаемое газом, имеет большую высоту, исчисляемую километрами, то тогда принимать газ за однородную жидкость уже недопустимо. Разность давлений здесь настолько велика, что вследствие сжимаемости газа вверху и внизу получаются плотности, сильно отличающиеся друг от друга. Большую роль играют также и разности температур. Поэтому все расчеты надо вести теперь, исходя из уравнения для неоднородной жидкости. Уравнение (2.7) нужно разделить на γ и интегрировать. Тогда получим:

$$\int_{p}^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = z. \tag{2.9}$$

Этот интеграл, исходя из зависимости температуры и высоты, дает различные результаты. В качестве основного примера рассматривается случай с постоянной температурой. Удельный вес, на основании закона Бойля-Мариотта ($pv = \text{const}$) прямо пропорционален давлению:

$$\gamma = \gamma_0 \frac{p}{p_0}. \tag{2.10}$$

Затем получаем:

$$\int_{p}^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \int_{p}^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) \tag{2.11}$$

Как легко видеть из уравнения (2.5), величина p_0/γ_0 есть не что иное, как высота столба жидкости постоянного удельного веса γ_0, причем на нижнем конце этого столба давление равно p_0, а на верхнем конце — нулю. Эту высоту называют высотой однородной атмосферы. Никакого реального значения для действительной атмосферы эта величина не имеет, она вводится только для удобства расчетов.

Для примера найдем ее численное значение. Для этого необходимо сначала определить численное значение γ_0, что можно выполнить следующим образом: Из сосуда, в котором имеется кран, выкачаем воздух и взвесим сосуд. Затем откроем кран и дождемся выравнивания разности температур, т. к. воздух, входящий в сосуд, нагревается за счет работы, совершаемой

внешней атмосферой. Затем еще раз взвесим сосуд. Так как вначале он был без воздуха, а сейчас наполнился воздухом, он стал тяжелее на вес воздуха G. Наконец, определим объем V сосуда. Для этого еще раз откачаем из сосуда воздух и, наполнив его водой через кран, открытый под водой, опять взвесим его. Зная вес и объем воздуха, заключенного в сосуде, найдем его удельный вес:

$$\gamma_0 = \frac{G}{V},$$

который соответствует давлению у поверхности Земли, равному p_0. Для любого другого значения этого давления p_0 удельный вес γ_0 будет иметь иное значение, которое можно подсчитать из простой пропорции. Приняв, что $p_0 = 1$ бар (1 кг/см^2), получим для воздуха средней влажности при температуре $0°$, согласно закону Гей-Люссака,

$$\gamma = \frac{12,45}{1+\alpha\vartheta}\ \text{Н/м}^3. \tag{2.12}$$

В динамике в качестве меры инерции массы используется плотность $\rho = \gamma/g$. При комнатной температуре для γ выберем среднее значение, равное 11,8 Н/м^3. Тогда при $g = 9,81$ м/с^2 для ρ будем иметь среднее значение, равное 1,20 Нс^2/м^4.

Чтобы рассчитать в уравнении (2.11) p_0/γ_0, нужно выразить p_0 в той же системе измерений, что и γ_0. Так как 1 бар = 10^5 Н/м^2, получим

$$\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{100000}{12,45}(1+\alpha\vartheta) = 8030(1+\alpha\vartheta).$$

Единица измерения p_0/γ_0 есть единица длины (м). Высота однородной атмосферы для воздуха средней влажности (независимо от давления, но в зависимости от температуры) составляет $8030(1+\alpha\vartheta)$ м, обозначим ее через H_0. Применяя это уравнение к двум различным высотам, получим:

$$z_1 = H_0 \ln(\frac{p_0}{p_1}), \quad z_2 = H_0 \ln(\frac{p_0}{p_2}).$$

Откуда найдем:

$$z_1 - z_2 = H_0 \ln(\frac{p_2}{p_1}). \tag{2.13}$$

Эта формула называется барометрической формулой для измерения высот. Преобразуя формулу (2.13), получаем следующую зависимость давления от высоты:

$$p = p_1 e^{-\frac{z-z_1}{H_0}}. \tag{2.14}$$

При помощи рассуждений относительно равновесия сил, аналогичных тем, которые приводились к рис. 2.6, найдем, что вес вертикального столба воздуха с основанием A, который простирается от высоты z вверх вплоть до границы атмосферы, равен Ap. Следовательно p равно весу столба воздуха, простирающегося от высоты z и имеющего поперечное сечение с площадью, равной 1. На рис. 2.8 формула (2.14) изображена графически. Мы видим, что с увеличением высоты давление непрерывно уменьшается, но постепенно все медленнее. На бесконечно большой высоте давление делается равным нулю. Уменьшение давления по мере увеличения высоты легко проследить в свободной атмосфере при подъеме с барометром на башню или гору. Его можно обнаружить даже в многоэтажном доме. Если одновременно с отсчетом разности давлений измерить также температуру воздуха, то можно определить разности высот обоих пунктов. Этот метод применяется для определения высоты при полете самолетов. Если известна разность высот, то этот способ дает возможность определить средний удельный вес промежуточного слоя воздуха.

Если температура в воздушной атмосфере не постоянна, то формулой определения высот все же можно пользоваться, разбивая для этого всю высоту на ряд таких отрезков, внутри которых разности температур не очень велики. При этом для каждого отрезка высоты необходимо подсчитать соответствующие ему значения H_0, исходя из среднего значения температуры в рассматриваемом слое.

Остается исследовать вопрос о том, когда равновесие расслоенной массы газа устойчивое, а когда неустойчивое. Условия, чтобы верхние слои были легче нижних, теперь недостаточно, так как при подъеме или опускании массы газа изменяется давление, а это влечет за собой изменение плотности. Правильный ответ на вопрос следующий: устойчивость равновесия будет присутствовать в том случае, если масса газа при подъеме при новом давлении будет иметь большую плотность, чем плотность его новой окружающей среды или, если масса газа при опускании при новом давлении будет иметь плотность меньше, чем плотность его новой окружающей среды. В самом деле, в каждом из этих случаев масса газа, попав в новое положение, будет стремиться вернуться в свое прежнее положение. Существует расслоение массы газа (распределение температур), которое в отношении устойчивости соответствует однородной жидкости, т. е. является безразличным равновесием. Очевидно, это будет иметь место в том случае, когда любая масса газа при перемещении в новое положение, следовательно, при новом давлении приобретает такую же плотность, как и плотность

окружающей среды, как будто она всегда была ее частью. Масса газа при изменении давления изменяется по адиабатическому закону при отсутствии теплообмена. Поэтому, если давление и плотность изменяются в соответствии с адиабатическим уравнением состояния (2.4) (т. е. если давление p изменяется пропорционально γ), то любая масса газа после подъема или опускания попадает в среду с такой же температурой, какую сама масса газа приобрела вследствие адиабатического изменения своего состояния. Следовательно, в новом положении рассматриваемой массы газа исключена возможность какого бы то ни было теплообмена. Можно показать, что такое адиабатическое расслоение газа возникает из какого-либо другого расслоения в результате сильного перемешивания, совершенно подобно тому, как однородная жидкость получается из неоднородного раствора, например, солевого, после разбалтывания.

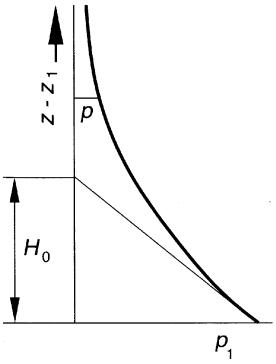


Рис. 2.8. Распределение давлений в атмосфере при постоянной температуре.

В атмосферном воздухе при адиабатическом расслоении температура понижается на 1^0C при увеличении высоты примерно на 100 м. Понижение температуры при увеличении высоты означает еще большую устойчивость. Понижение температуры больше чем на 1° C на 100 м высоты в свободной атмосфере вообще не бывает, так как такому распределению температуры соответствует неустойчивое состояние равновесия. Такое состояние наблюдается вблизи поверхности Земли, когда почва теплее, чем воздух. Но в таком случае воздух не находится в равновесии, напротив, отдельные его части совершают вертикальные восходящие и нисходящие движения.

Изменение давления в адиабатически расслоенной атмосфере можно рассчитать по формуле (2.9) подставив $\gamma = \gamma_0(p/p_0)^{1/k}$. Интегрируя, получаем

$$z = \frac{\kappa H_0}{\kappa - 1}\left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right), \quad p = p_0\left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{z}{H_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Используя уравнение состояния $p/\rho = RT$, где плотность $\rho = \gamma/g$, абсолютная температура $T = (273,2 + \vartheta/1^\circ\,\mathrm{C})\,\mathrm{K}$ и газовая постоянная R,

при $p_0/\gamma_0 = H_0$ получаем

$$\frac{RT}{g} = \frac{p}{\gamma} = H_0 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} z, \quad \frac{dz}{dT} = -H_0 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{R}{g}.$$

Для воздуха средней влажности $R/g = 29,4$ м/К и $dz/dt = 102$ м/К.

Если в вышеуказанных уравнениях заменить k на другое число n, то получим интерполяционную формулу, с помощью которой можно описать действительно происходящие в атмосфере расслоения. Такие расслоения называются политропными. При стабильных расслоениях всегда имеем $n < k$.

2.8. Взаимодействие атмосферного давления и давления в жидкости

Если разность давлений воздуха в сосуде и во внешней атмосфере не очень велика, то ее легко измерить при помощи U-образного жидкостного манометра (ср. рис. 2.9). Пренебрегая собственным весом воздуха, мы получим следующие соотношения. В сечении A давление жидкости равно давлению воздуха p_1 в сосуде. В другом колене U-образной трубки на той же высоте в сечении B давление также равно p_1 (сообщающиеся сосуды). Пусть свободный уровень жидкости в этом колене будет в сечении C. Там давление жидкости равно атмосферному давлению p_0. Используя отношения главы 2.6 имеем:

$$p_1 = p_0 + \gamma h,$$

если высоту BC принять за h. U-образная трубка, наполненная жидкостью, может использоваться для измерения таких разностей давления. Для того, чтобы не надо было отсчитывать уровень жидкости в двух сечениях трубки (A и C на рис. 2.9), одно из ее колен часто выполняют в виде широкого сосуда, изменения уровня в котором очень малы (см. рис. 2.10). Для отметки на трубке нулевой точки необходимо соединить с атмосферой оба отверстия манометра. Для измерения очень небольших разностей давления применяется более утонченный способ отсчета уровня жидкости, например при помощи передвижного микроскопа или проектирования на экран шкалы, плавающей в трубке манометра, в увеличенном масштабе (способ А. Бетца).

Использование жидкостных манометров привело к установлению особого вида единиц давления, у которых давление указывается высотой столба жидкости. Так, например, 1 мм водного столба = 9,81 Па.

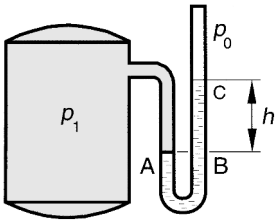


Рис. 2.9. Гидростатическое измерение давления (U-образная трубка)

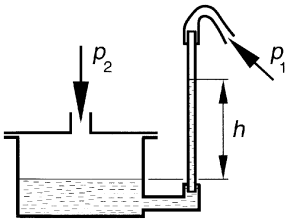


Рис. 2.10. Жидкостный манометр

Вода, как жидкость для измерения давления, мало пригодна, т. к. она легко и неравномерно прилипает к стенкам стеклянной трубки. Значительно удобнее в данном случае жидкости, растворяющие жир (спирт, толуол, ксилол и т. д.). Для измерения значительных разностей давлений удобнее всего применять ртуть, которая в чистом виде дает в не слишком узких трубках очень удобный для отсчета мениск. Удельный вес ртути равен 133370 Н/м^3 при 0° С, поэтому 1 мм ртутного столба = 13,6 кг/м^2 = 133,4 Па. Единицу давления 1 мм ртутного столба называют еще 1 торр (в честь Торичелли). В последнее время используют мембранные измерители давления с цифровым представлением измерительных данных, а также пьезометрические датчики давления, которые используют пьезоэлектрический эффект для измерения давления.

Если из сосуда, изображенного на рис. 2.9 откачать немного воздуха, то давление в нем станет меньше атмосферного, вследствие чего уровень жидкости в колене A U-образной трубки поднимется выше уровня жидкости в колене B. На рис. 2.11 изображен такой же опыт в несколько измененном виде. В опыте, изображенном на рис. 2.9, говорят о манометрах высокого давления, в случае, представленном на рис. 2.11 о манометрах низкого давления. Измерение давления происходит через высоту h.

Обратимся немного к истории. Возникает вопрос, до какой высоты возможно всасывание жидкости. В старину всасывание объясняли понятием «horror vacui», что означает «жидкость боится пустоты». Является ли «боязнь пустоты» безграничной или имеет какие то пределы — об этом не знали, никаких исследований не проводилось. Неудача флорентийских мастеров, поставивших в одном из водяных насосов всасывающий клапан на высоте свыше 10 м над уровнем водоема, и, несмотря на все старания, не

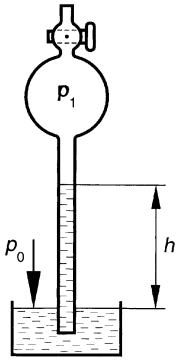


Рис. 2.11. Барометр

сумевших добиться того, чтобы насос мог поднять воду на такую высоту, побудила Галилея (Galilei) заняться этим вопросом.

Причину этого явления впервые объяснил только ученик Галилея Торичелли на основе опытов с ртутью, произведенных в 1643 году его другом Вивиани. С нашей точки зрения ответ на данный вопрос не представляет никаких затруднений. Всасывание возникает всегда в том случае, когда на столб жидкости действует давление, меньше атмосферного. Давление в сосуде на рис. 2.11 самое минимальное, если из сосуда полностью выкачан воздух. Практически оно равно нулю. Следовательно, жидкость в трубке может подняться самое большее на такую высоту h, которая соответствует полному давлению воздуха p_0, т. е. на высоту, равную $(h = p_0/\gamma)$.

Упомянутый выше опыт Вивиани заключался в следующем. Стеклянная трубка длиной в два локтя (120 см) со стеклянным шаром на одном конце целиком наполнялась через открытый конец до верху ртутью и закрывалась пальцем. Затем трубка перевертывалась шаром вверх и опускалась другим концом, оставаясь закрытой пальцем, в чашку с ртутью. Как только палец отнимался, ртуть тотчас опускалась до высоты $1^1/_4$ локтя (75 см) над уровнем ртути в чашке. Из всего этого Торичелли сделал правильный вывод, что получающийся столб ртути уравновешивается давлением наружного воздуха. Торичелли заметил также, что столб ртути не всегда имел одинаковую высоту, и вывел отсюда, что давление воздуха подвержено определенным колебаниям. Этот факт имеет большое значение сегодня для метеорологии. Наконец, Торичелли указал, что давление воздуха на вер-

шине горы должно быть меньше, чем у подножия, и поэтому на вершине горы столб ртути должен быть ниже, чем у подножия. Это было доказано спустя несколько лет Перрье, который по предложению Паскаля измерил высоту столба ртути у подножия и на вершине горы Пюи-де-Дом, имеющей высоту 975 м. Оказалось, что высота столба ртути на вершине горы была меньше, чем у подножия на 3 дюйма. По предложению Паскаля прибор, впервые примененный Вивиани был назван барометром. Это название (от греческого barus — тяжелый) означает, что прибор измеряет вес столба воздуха, расположенного над местом наблюдения.

На применении барометра основана единица давления, называемая физической атмосферой. Средняя высота столба ртути в барометре на уровне моря составляет целым числом 760 мм. Давление воздуха, соответствующее этому показанию барометра при температуре ртути 0° С, условились считать нормальным и дали ему название «атмосфера». Прилагательное «физическая» добавляется для того, чтобы устранить смешивание с технической атмосферой, равной 1 кг/см^2, которая обычно применяется в технике. Так как удельный вес ртути при 0° С равен 13,595 г/см^3 и, следовательно, 1 см^3 ртути весит 13,595 г, то этому столбу ртути высотой 76 см соответствует давление воздуха, равное

$$76\,\text{см} \cdot 13{,}595\,\text{г/см}^3 = 1033{,}2\,\text{г/см}^2 = 1{,}0132 \cdot 10^5\,\text{Па}.$$

Этому давлению соответствует высота столба воды равная 10,332 м (водяной барометр). Следовательно, предельная высота, на которую может поднимать воду всасывающий насос, должна быть всегда меньше этого значения.

Из определения физической атмосферы следует, что ее величина в известной мере зависит от притяжения Земли. Так как последнее неодинаково во всех местах земного шара, то необходимо при определении единицы давления условиться, какое значение ускорения свободного падения (g) будет считаться нормальным. Таким значением принято считать 980,665 см/сек^2, которое имеет место на широте 45^0 на уровне моря. При всяком другом значении земного ускорения g физическая атмосфера будет равна $(1,0332 \cdot 980,665)/g$ причем имеются в виду килограммы на квадратный сантиметр в рассматриваемом пункте наблюдения. Для того, чтобы освободиться от этих несколько произвольных требований, была введена новая единица давления, связанная с системой единиц СГС и равная 1 дин/см^2. Эта единица давления называется бар. Одному бару при нормальной тяжести соответствует ртутный столб высотой 750,06 мм.

2.9. Равновесие жидкости в других силовых полях

В наших рассуждениях, сделанных в гл. 2.6–2.8 предполагалось, что жидкость или газ находятся в однородном поле тяжести, т. е. в таком поле, в котором ускорение свободного падения везде одинаково по величине и направлению. Это предположение достаточно хорошо оправдывает себя для большинства приложений. Но если рассматриваются большие области, линейные размеры которых нельзя считать малыми по сравнению с радиусом Земли, то необходимо учитывать, что ускорение свободного падения не остается постоянным по величине и направлению во всей области. Другим примером, когда поле сил нельзя считать однородным, является равномерное вращение жидкости вместе с заключающим ее сосудом. В этом случае жидкость покоится относительно сосуда, но для того, чтобы рассматривать задачу как статическую, необходимо в каждой точке занимаемого жидкостью пространства, прибавить к ускорению свободного падения ускорение, соответствующее центробежной силе. Поэтому рассмотрим в общей форме вопрос о равновесии однородной и неоднородной жидкости в произвольном силовом поле, в котором сила на единицу массы (т. е. ускорения) изменяется от места к месту как по величине, так и по направлению.

Рассуждения относительно общего силового поля можно связать непосредственно с выводами главы 2.6. Из этих рассуждений следует, что в любом направлении, перпендикулярном к направлению рассматриваемой силовой линии, давление не может изменяться. (Равновесие маленькой призмы на рис. 2.4 с осью перпендикулярной направлению силовой линии). Если взять всю совокупность направлений, перпендикулярных к силовой линии в какой-нибудь ее точке, то давление на элементарную площадку, перпендикулярную к направлению силовой линии, будет постоянным. В том случае, когда такие площадки, примыкающие друг к другу, образуют поверхность конечных размеров, т. е. когда силовое поле обладает так называемыми нормальными (ортогональными) поверхностями, из предыдущего следует, что давление имеет постоянное значение во всех точках каждой нормальной (ортогональной) поверхности. Если же силовое поле не имеет ортогональных поверхностей, то равновесие жидкости в нем невозможно.

Далее, в отличие от предыдущих глав, где g означало силу земного притяжения, сейчас этой буквой g будет обозначаться сила общего силового поля. Из равновесия в маленькой призме в соответствии с рис.2.6 на высоте dh, параллельной направлению силы и с возрастанием давления dp получается, что давление в направлении силы должно возрастать на вели-

чину

$$dp = g\rho dh. \tag{2.15}$$

В дальнейших рассуждениях предполагается, что силовое поле имеет ортогональные поверхности. Рассмотрим две такие ортогональные поверхности, давление на которых пусть будет равно p и $p + dp$.

В двух точках 1 и 2 на рис. 2.12 в соответствии с (2.15) будем иметь с одной стороны $dp = g_1\rho_1 dh_1$, с другой также $dp = g_2\rho_2 dh_2$. Если ρ есть либо постоянная, либо функция от p (однородная жидкость или однородный газ, ср. гл. 2.6 и 2.7), то получим $p_1 = p_2$ и $\rho_1 = \rho_2$. Таким образом $g_1 dh_1 = g_2 dh_2 gdh$ есть не что иное, как работа, совершаемая силой поля при переходе от одной ортогональной поверхности к другой. Согласно полученному нами результату, эта работа имеет одинаковое значение в любом месте между обеими ортогональными поверхностями. Таким образом сила поля обладает потенциалом. Следовательно, ортогональные поверхности являются поверхностями постоянного потенциала. Обозначив потенциал U в какой-нибудь точке через уравнение

$$dU = -gdh \tag{2.16}$$

(знак минус взят потому, что в уравнении (2.15) мы приняли dh положительным в направлении g), получим:

$$dp = -\rho dU \quad \text{или} \quad dU = -\frac{dp}{\rho}. \tag{2.17}$$

Таким образом, для разности потенциалов между двумя точками A и B будем иметь:

$$U_A - U_B = \int_A^B \frac{dp}{\rho}. \tag{2.18}$$

В рассматриваемом здесь случае с однородной жидкостью или однородным газом правую часть уравнения можно вычислить, и мы получим давление непосредственно как функцию потенциала. Подводя итог полученным результатам, мы можем сказать:

Однородная жидкость или однородный газ может находиться в равновесии только в таком силовом поле, которое обладает потенциалом. Поверхности равного (постоянного) потенциала, перпендикулярны к силовым линиям поля, одновременно являются поверхностями равного (постоянного) давления. Давление возрастает в том направлении, в котором действует сила поля, причем увеличение давления равно $dp = -\rho dU$.

В неоднородной жидкости возможен такой случай, когда $g_1 dh_1 \neq g_2 dh_2$, но зато плотность распределена так, что везде имеет место равенство:

$$\rho_1 g_1 dh_1 = \rho_2 g_2 dh_2.$$

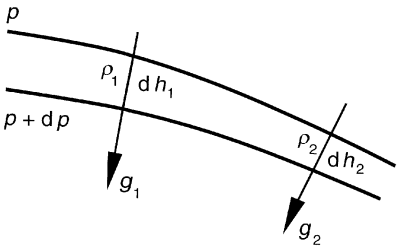


Рис. 2.12. Ортогональные поверхности в неоднородном силовом поле

Легко увидеть, что такое равновесие является неустойчивым, так как достаточно небольшого перемещения жидкости вдоль ортогональной поверхности (такое перемещение не требует затраты работы), чтобы сейчас же изменить распределение плотности; а, следовательно, нарушить равновесие. Если таким образом хотим ограничиться устойчивым состоянием, то необходимо рассматривать только силовые поля, обладающие потенциалом. Но так как $g_1 dh_1 = g_2 dh_2$, то для получения равновесия необходимо, чтобы $\rho_1 = \rho_2$. Таким образом можно сказать:

Неоднородная жидкость может находиться в устойчивом равновесии только в силовом поле, имеющим потенциал. Поверхности равного потенциала являются одновременно поверхностями равного давления и равной плотности.

Таким образом, здесь применили также уравнения (2.17) и (2.18). Условия устойчивости расслоения остаются такими же, какими они были введены в главах 2.6 и 2.7 для однородного поля тяготения.

Почти все силовые поля, встречающиеся в физике, за исключением магнитных силовых полей, имеют потенциал. Но важным здесь является условие — постоянство плотности ρ на каждой поверхности равного потенциала. Но оно может не соблюдаться, например, в том случае, когда жидкость или газ в каком-нибудь месте нагревается, что ведет к уменьшению плотности. Равновесие в данном случае невозможно, т. к. нагретая

жидкость и соседние части жидкости приходят в движение. Состояние покоя устанавливается только тогда, когда наиболее нагретые части жидкости расположатся над более холодными, т. е. когда снова выполнится условие равной плотности на поверхности равного потенциала.

Свободная поверхность жидкости или поверхность раздела двух не смешивающихся между собой жидкостей разной плотности всегда совпадает с поверхностью равного потенциала. Поэтому поверхности равного потенциала (*эквипотенциальные поверхности*) называют также *поверхностями уровня* (свободные поверхности). В геодезии поверхность моря является основной поверхностью уровня; относительно этой поверхности производится отсчет всех высот.

Поясним вышеприведенные рассуждения на простом примере. Рассмотрим равновесие весомой однородной жидкости, покоящейся относительно сосуда, равномерно вращающегося относительно вертикальной оси. Прежде всего найдем потенциал силового поля, который складывается из двух потенциалов: потенциала поля тяжести и потенциала поля центробежной силы.

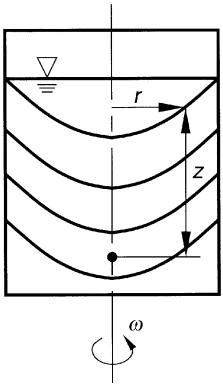


Рис. 2.13. Жидкость во вращающемся сосуде

Возьмем цилиндрические координаты r и z (см. рис. 2.13), тогда потенциал поля тяжести будет равен $U_1 = U_0 + gz$, где g есть ускорение свободного падения, *а* U_0 *— произвольное начальное значение потенциала.* Потенциал поля центробежной силы определяется ускорением $\omega^2 r$, где ω есть угловая скорость вращения, общая для сосуда и жидкости. Интегрируя в направлении ускорения, т. е. в направлении r, мы найдем потенциал поля центробежной силы:

$$U_2 = -\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Таким образом получим потенциал в любой точке жидкости:

$$U = U_1 + U_2 = U_0 + gz - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Поверхности равного потенциала мы получим, полагая, что $U = \text{const}$:

$$z = \text{const} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Таким образом, свободная поверхность и все поверхности равного давления представляют собой параболоиды вращения с общим параметром g/ω^2. Интегрируя уравнение (2.17), мы найдем давление в любой точке жидкости: $p = p_0 - \rho U$. При $\rho g = \gamma$ получим:

$$p = \text{const} + \gamma\Big(-z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\Big).$$

2.10. Поверхностное натяжение (капиллярность)

Как показывают наблюдения, свободная поверхность жидкости стремится к уменьшению своей площади и образованию так называемой минимальной поверхности. Это свойство объясняется тем, что свободная поверхность находится в напряженном состоянии, подобном тому, в котором находится равномерно натянутая тонкая пленка. Причину такого стремления к уменьшению можно представить следующим образом: каждая частица жидкости, находящаяся вблизи свободной поверхности, в результате притяжения соседних молекул (частиц) (межмолекулярные силы) втягивается внутрь жидкости, вследствие чего на поверхности жидкости остается ровно столько молекул, сколько безусловно необходимо для образования свободной поверхности. Такое же явление наблюдается на поверхности соприкосновения двух не смешивающихся между собой жидкостей. Натяжение, которое удерживает поверхность в равновесии, называется поверхностным натяжением.

На плоских поверхностях соприкосновения поверхностное натяжение не вызывает разности давлений, так как результирующая сила поверхностного натяжения равна нулю. На искривленных поверхностях возникает разность давлений, необходимая для получения равновесия. Рассмотрим маленький криволинейный прямоугольник с длиной сторон ds_1 и ds_2 (см. рис. 2.14). Разность давлений $p_1 - p_2$ на площади $ds_1 \cdot ds_2$ приводит к возникновению силы $(p_1 - p_2)ds_1 ds_2$. Поверхностное натяжение — это сила, действующая на единицу длины, которая удерживает поверхность в равновесии. Она имеет величину C (C — капиллярная постоянная).

Таким образом на гранях прямоугольника будут действовать две силы Cds_1, на сторонах ds_1 и две силы Cds_2, на сторонах ds_2. Обе силы на сторонах ds_2 находятся относительно друг друга под углом $d\alpha = ds_1/R_1$. Результирующая сил равна: $Cds_2 d\alpha = Cds_2 ds_1/R_1$. Две другие силы, которые образуют угол $d\beta = ds_2/R_2$ дают результирующую $Cds_1 ds_2/R_2$. Из

равновесия трех сил получим:

$$p_1 - p_2 = C(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}). \tag{2.19}$$

R_1 и R_2, как следует из рис.2.14, суть не что иное, как радиусы кривизны поверхности с двумя ортогональными плоскостями, перпендикулярными к касательной плоскости. Из уравнения (2.19) вытекает следующая геометрическая связь: сумма $1/R_1 + 1/R_2$ не зависит от направления, так как разность давлений $p_1 - p_2$ не зависит от направления.

В весомых жидкостях, находящихся в состоянии равновесия, давление, зависящее от удельного веса, изменяется с изменением высоты по закону $p = p_0 - \gamma z$. Тогда на поверхности соприкосновения двух жидкостей с удельным весом γ_1 и γ_2 получим давления $p_1 = p_0 - \gamma_1 z$ и $p_2 = p_0 - \gamma_2 z$.

Таким образом, учитывая уравнение (2.19) для поверхностей соприкосновения получим связь между кривизной и высотой:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{C} z. \tag{2.20}$$

Рис. 2.15 демонстрирует два примера таких поверхностей. При помощи измерения радиусов кривизны наблюдаемой поверхности соприкосновения можно определить величину капиллярной постоянной C.

Из формулы (2.20) следует, что если разность удельных весов обеих жидкостей очень мала, то получаем n-кратное геометрически подобное увеличение различных форм поверхности (R_1, R_2 и z увеличены в n раз), если член $(\gamma_2 - \gamma_1)/C$ уменьшается на величину $1/n^2$. При $\gamma_2 = \gamma_1$ влияние силы тяжести исчезает. Образующиеся при этом поверхности являются так называемыми минимальными площадями. Если одновременно с приближением разности $\gamma_2 - \gamma_1 \to 0$ к нулю отодвигать плоскость $z = 0$ в бесконечность, то из уравнения (2.20) будем иметь $1/R_1 + 1/R_2 = \text{const}$. Этот результат дает минимальную поверхность с заданным объемом, простейшим примером которой является шаровая поверхность.

Такие минимальные поверхности легко воспроизводятся при помощи мыльных пленок. В сферическом мыльном пузыре давление внутри больше наружного давления на величину

$$p_1 - p_2 = \frac{4C}{R}.$$

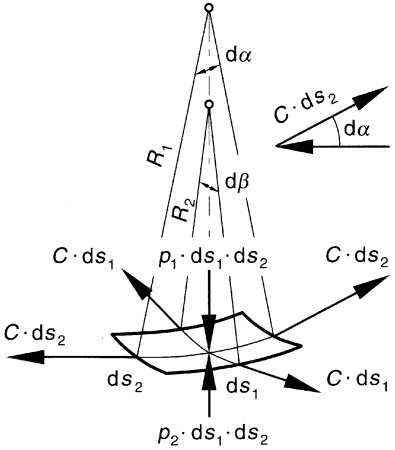


Рис. 2.14. Поверхностное натяжение и давление на искривленной поверхности жидкости

(В мыльном пузыре имеются две поверхности соприкосновения мыльной пленки с воздухом, поэтому в формуле (2.19) следует подставить $2C$ вместо C).

Если три жидкости соприкасаются между собой вдоль общей линии, то из равновесия сил трех поверхностных натяжений C_{12}, C_{13} и C_{23} образуются определенные углы, где пересекаются между собой три поверхности соприкосновения (см. рис. 2.16). Может случиться, что C_{13} больше, чем сумма C_{14} и C_{23}. В таком случае равновесие невозможно. Это может произойти, например, когда встречаются воздух, минеральное масло и вода. В этом случае минеральное масло растекается в виде очень тонкой пленки по всей поверхности воды, что можно наблюдать, например, на мокрых асфальтовых мостовых, когда из мотора автомобиля на мостовую падает несколько капель смазочного масла. Если минеральное масло заменить на расплавленный жир, то между водой и воздухом оно примет форму плоской линзы (глазки жира в супе). Этот случай представлен на рис. 2.16. Если одним из соприкасающихся веществ является твердое тело, то перемещения возможны только в направлении, параллельном поверхности твердого тела и поэтому достаточно рассмотреть равновесие соответствующих составляющих сил поверхностного натяжения. Следовательно, условием равновесия

будет $C_{12}\cos(\alpha) + C_{23} = C_{13}$, где α есть так называемый краевой угол (см. рис. 2.17). Отсюда мы имеем:

$$\cos(\alpha) = \frac{C_{13} - C_{23}}{C_{12}}. \tag{2.21}$$

Если капиллярная постоянная C_{12} (поверхностное натяжение при соприкосновении двух жидкостей 1 и 2) уже известна, а угол α измерен, то можно определить разность $C_{13} - C_{23}$. Но каждая из величин C_{13} и C_{23} остается неопределенной. Разность $C_{13} - C_{23}$ может быть положительной и отрицательной. В последнем случае получается угол $\alpha > \pi/2$, что имеет место при соприкосновении, например, воздуха, ртути и стекла. Нижнее изображение на рис. 2.15 представляет собой такую каплю ртути. Наконец, разность $C_{13} - C_{23}$ может оказаться больше C_{12}. $C_{13} - C_{23} > C_{12}$ В таком случае жидкость 2 покрывает тонкой пленкой всю поверхность твердого тела. Так ведет себя, например, керосин.

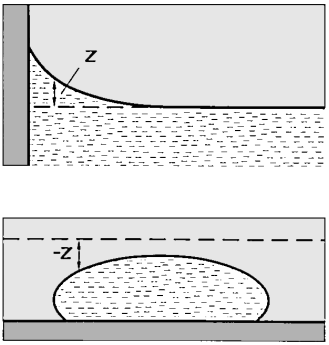


Рис. 2.15. Капиллярные поверхности весомых жидкостей

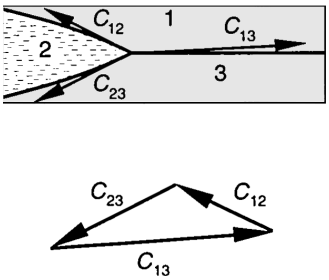


Рис. 2.16. Равновесие трех поверхностных натяжений

В узкой трубочке наблюдается значительное повышение уровня жидкости. Если r — это внутренний радиус трубочки, то, приняв для упрощения, что поверхность жидкости в трубочке имеет форму шарового сегмента (r маленький по отношению к h), то согласно рис. 2.18 для радиуса шара будем иметь $R = r/\cos(\alpha)$, с углом α. Тогда по уравнению (2.20) следует

$$h = \frac{2C_{12}}{\gamma_2 - \gamma_1} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r}. \tag{2.22}$$

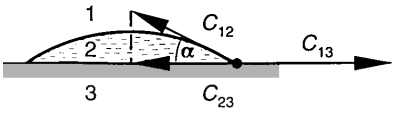


Рис. 2.17. Краевой угол на твердой поверхности

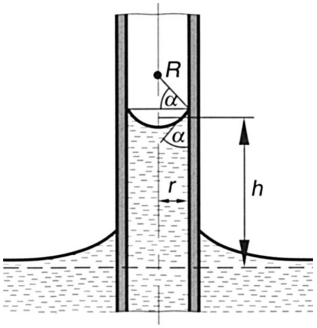


Рис. 2.18. Капиллярный подъем жидкости в трубочке

Высота подъема h может быть очень большой, если радиус r очень маленький (всасывающее действие промокательной бумаги, мелкопористой глины и т. д.). Подставив в уравнение (2.22) значение $\cos(\alpha)$ из уравнения (2.21) и умножив обе части равенства на πr^2 получим формулу:

$$(\gamma_2 - \gamma_1)\pi r^2 h = (C_{13} - C_{23})2\pi r.$$

Вес столба жидкости в трубочке за вычетом потери вследствие поддерживающей силы воздуха равен результирующей сил поверхностного натяжения на стенках трубочки. Если сила подъема отрицательная, т. е. $\alpha > \pi/2$, как это имеет место у ртути, то h всегда отрицательная (рис. 2.18 отраженный на горизонтали). Если поверхность трубочки предварительно смочена жидкостью, то разность $C_{13} - C_{23}$ можно заменить на C_{12}, что приводит к равенству $\cos(\alpha) = 1$. Следовательно, в этом случае $\alpha = 0$ и высота подъема принимает максимальное значение. Путем измерений h и r получают:

$$C_{12} = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)hr.$$

Другой способ определения основан на измерении капиллярных волн, которые будут рассматриваться в гл. 4.1.10.

Для примера приведем некоторые примеры капиллярной постоянной C_{12} при 20° С:

вода относительно воздуха	0,073 Н/м
масло относительно воздуха	0,025 до 0,030 Н/м
ртуть относительно воздуха	0,472 Н/м

3

Кинематика жидкостей и газов

Движение жидкостей и газов имеют так много общих свойств, что целесообразно рассматривать их совместно. Правда газы в отличии от жидкостей обладают большей сжимаемостью. При движение газов вопрос будет заключаться в том, насколько газ в действительности сжимается при рассматриваемом движении. При небольших и умеренных скоростях, а также при умеренном протяжении движущейся массы газа в высоту давление по сравнению со своим среднем значением изменяется очень незначительно. И поэтому соответствующие изменения объема настолько малы, что ими в большинстве случаев можно пренебрегать. Тогда течения газа ничем не будут отличатся от течений несжимаемой жидкости. Если пренебречь изменениями объема не превышающим 1%, то при движение атмосферного воздуха при обычной температуре можно использовать уравнения для несжимаемых жидкостей. Это относится к скорости движения газа до 50 м/сек и к протяжению воздушного потока в высоту до 100 м (ср. гл. 2.7 и 4.1.2). Только при скорости 150 м/сек они (изменения объема) достигают около 10%. Но при скоростях, близких к скорости звука (около 350 м/сек) изменения объема достигают большой величины и поэтому заметно влияют на характер течения. Наконец, при скоростях, больше скорости звука, характер течения становятся совершенно иным по сравнению с обычным поведением несжимаемых жидкостей. В настоящей главе рассматриваются главным образом несжимаемые течения. Для того, чтобы при этом не говорить каждый раз, что все сказанное относится в равной мере как к жидкостям, так и к газам, мы будем дальше использовать слово флюид-жидкость (Fluid), как собирательное понятие и для жидкостей и для газов. В этом смысле газы следует считать сжимаемыми жидкостями (гл. 4.3).

3.1. Способ описания движения

Для получения исчерпывающей картины течения, необходимо для каждой частицы знать её положение в пространстве в каждый момент времени.

В самом деле, определяя положение частицы в пространстве при изменении времени, мы нашли бы её скорость и ускорение. Поэтому для того, чтобы как — то обозначить отдельные частицы жидкости (чтобы различать их друг от друга) вводится подвижная в пространстве, прочно связанная с частицами жидкости система координат. Сначала рассматривается множество точек поверхности $a = \text{const}$, причем a указывается в каком-либо (произвольном) начальном положении как функция пространственных координат x, y, z. Если выбрать ещё два других множества пространственных точек $b = \text{const}$ и $c = \text{const}$ таким образом, чтобы поверхности $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ и $c = \text{const}$ всегда пересекались лишь в одной единственной точке, то частицы жидкости в этой точке пересечения будут характеризоваться значениями a, b, c в определенный, но произвольно выбранный момент времени. Эти координаты жидкости a, b, c рассматриваются для частицы жидкости как начальное положение или положение покоя во время её движения. Это означает, что каждая площадь поверхностей $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ и $c = \text{const}$ состоит длительное время из тех же самих частиц жидкости. Первоначальный выбор координат жидкости при этом является произвольным и определяется причинами целесообразности. Можно, например, выбрать декартовы координаты в качестве координат жидкости в произвольном начальном положении или положении покоя.

Чтобы обозначить движение, т. е. изменение положения в пространстве всех частиц жидкости, нужно ввести значение актуальных координат положения x, y, z, частиц, как функции времени и координат жидкости a, b, c как начального положения частиц. Таким образом, для составления картины течения жидкости необходимо знать функции:

$$x = F_1(a, b, c, t), \quad y = F_2(a, b, c, t), \quad z = F_3(a, b, c, t). \tag{3.1}$$

Для полной характеристики состояния движущейся жидкости необходимо знать еще давление p, а для сжимаемой жидкости необходимо знать плотность ρ. Обычно пользуются простым методом, позволяющим указать, что происходит в каждой точке пространства в каждый момент времени, оставляя без внимания судьбу отдельных частиц. Если рассматриваемое течение — установившееся, т. е. не изменяющееся во времени, то для получения картины движения достаточно указать величину и направление скорости в каждой точке пространства, занятого потоком, кроме того, для полного описания состояния движения необходимо также определить давление, при переменной плотности — и последнюю. Если течение неустановившееся, т. е. изменяющееся во времени, то скорость и давление (в необходимом случае

и плотность) должны быть указаны для каждого момента времени. Математически эти указания даются обычно в виде зависимостей, связывающих три проекции скорости u, v, w на прямоугольные оси системы координат (в необходимом случае также давление p и плотность ρ) с пространственными координатами x, y, z и временем t, т. е. в виде уравнений:

$$u = f_1(x, y, z, t), \quad v = f_2(x, y, z, t), \quad w = f_3(x, y, z, t). \tag{3.2}$$

Систему уравнений (3.1) называют уравнениями Лагранжа, а систему (3.2) — уравнениями Эйлера, хотя Эйлеру были известны обе системы. Системы уравнений (3.1) и (3.2) называют основными уравнениями кинематики. Если желательно просмотреть траекторию какой — нибудь частицы жидкости, то необходимо проинтегрировать три дифференциальных уравнения, $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$ используя систему уравнений (3.2). Так как три постоянные интегрирования можно рассматривать непосредственно как координаты частиц жидкости a, b, c, то мы снова придем к системе уравнений (3.1).

Наглядное представление о мгновенной картине течения жидкости дают так называемые линии тока, которые везде идут в направлении течения жидкости, т. е. их касательные указывают везде направление вектора скорости в точках касания.

Линии тока определяются системой дифференциальных уравнений:

$$dx : dy : dz = u : v : w.$$

При установившемся течении линии тока совпадают с траекториями частиц. При неустановившемся течении такое совпадение не имеет места. В самом деле, касательные к линии тока дают направление скорости разных частиц жидкости в последовательных точках пространства в определенный момент времени, в то время как касательные к траектории дают направление скорости определенной частицы в последовательные моменты времени.

Необходимо заметить, что форма линий тока одного и того же потока, а также форма траекторий зависят от системы отсчета. Так, например, при движении тела в жидкости для наблюдателя, покоящегося относительно невозмущенной жидкости, линии тока и траектории будут совсем иными, чем для наблюдателя, движущегося вместе с телом.

Линии тока можно сделать видимыми, если поверхность жидкости посыпать мелкими частицами такого нерастворимого вещества, которое может двигаться в месте с жидкостью. Можно также ввести такие частицы внутрь

жидкости. При съемке с короткой выдержкой каждая введенная в жидкость частица оставляет на фотографической пластине короткую черточку. При достаточном большом числе частиц черточки тесно примыкают друг к другу и дают картину линий тока. Для получения траекторий необходимо уменьшить количество вводимых в жидкость посторонних частиц и производить съемку с длительной выдержкой. На рис. 3.1 и 3.2 изображены фотографические снимки пластинки, движущейся в неподвижной жидкости. Оба снимка сделаны одновременно, но в разных системах отчета, а именно снимок на рис. 3.1 получен с помощью неподвижной камеры, а снимок на рис. 3.2 камерой, которая движется вместе с пластинкой. Снимки были сделаны Ф. Альборном в 1909 г. Поверхность жидкости была посыпана липодием. Для освещения использовалась фотовспышка.

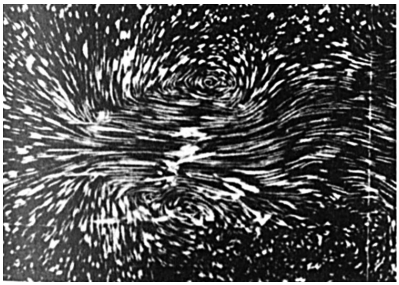


Рис. 3.1. Течение вокруг движущейся пластинки. Камера неподвижна. Путь пластинки обозначен следами боковых стенок (Альборн 1909 г.)

Рис. 3.2. Течение вокруг движущейся пластинки. Камера движется вместе с пластинкой (Альборн 1909 г.)

Если провести линии тока через все точки какого — нибудь небольшого замкнутого контура, то при условии, что поле скоростей везде непрерывно, то эти линии образуют трубку. Такая трубка обладает той особенностью, что жидкость внутри неё в рассматриваемый момент времени течет, как в трубке с твердыми стенками, т. е. согласно определению параллельно линиям тока. Если бы жидкость проходила через стенку трубки, то это означало бы, что существует составляющая скорости, перпендикулярная к линиям тока, что противоречит определению последних. Такие трубки называются трубками тока. Жидкость, текущая внутри трубки тока, называется струйкой тока (жидкой струйкой). При установившихся течениях трубки тока не

изменяются и жидкость течет в них как в трубках с твердыми стенками. При неустановившихся течениях в трубках тока в каждый следующий момент времени текут иные частицы, чем в предыдущий момент. Мысленно разбивая все пространство, занятое жидкостью на трубке тока, можно получить очень наглядное представление о течении жидкости. При решении многих простых задач, например, при изучении движения жидкостей в трубках и каналах, допустимо рассматривать все пространство, занятое потоком жидкости, как одну единственную жидкую струйку.

При таком способе исследования неодинаковость скоростей в поперечном сечении трубы или канала остается без внимания и весь расчет сводится к получению некоторых закономерностей для средней скорости течения. Этот способ широко используется инженерами для практических расчетов.

3.2. Неразрывность

В действительно существующих потоках жидкостей и газов материя нигде не исчезает и нигде вновь не создается. Поэтому мы можем рассматривать только такие скоростные поля, которые удовлетворяют требования сохранения массы. Проще всего сформулировать это требование для установившихся течений, для которых форма линий тока достаточно известна. В таком случае очевидно, что через каждое поперечное сечение трубки тока должна протекать в единицу времени одна и та же масса жидкости. В самом деле, если бы эта масса для двух поперечных сечений не была одинакова, то масса жидкой струйки между обоими поперечными сечениями должна была бы неограниченно возрастать или убывать, что противоречит условию установившегося состояния течения. Пусть A есть поперечное сечение жидкой струйки в каком-либо месте, w — средняя скорость в этом сечении и ρ — плотность в этом сечении; тогда объем жидкости протекающей за единицу времени через рассматриваемое сечение, будет равен $A \cdot w$, а масса жидкости, протекающая за единицу времени будет равна $\rho \cdot A \cdot w$. Таким образом требование сохранения массы сводится к тому, чтобы во всех поперечных сечениях жидкой струйки величина $\rho \cdot A \cdot w$ имела постоянное значение. Отсюда следует, что внутри установившегося потока жидкая струйка нигде не может закончиться. Она либо должна простираться от одной границы рассматриваемого пространства до другой, либо должна быть замкнутой.

Для потоков, в которых не происходит изменений объема, т. е. для потоков несжимаемой жидкости, все приведенные выше соображения о массе

распространяются также и на объем. Но так как теперь через рассматриваемое поперечное сечение жидкой струйки за данное время не может пройти больший объем, чем через какое-нибудь другое поперечное сечение, то все предыдущие соображения могут быть применены не только к установившимся, но и к неустановившимся потокам. Таким образом, для несжимаемых течений получаем A:

$$A \cdot w = \text{const}, \tag{3.3}$$

т. е. скорость жидкой струйки обратно пропорциональна её поперечному сечению. Разделим все пространство занимаемое потоком жидкости, на такие трубки тока, чтобы через каждую из них в единицу времени протекали равные количества жидкости. Тогда в тех местах потока, где скорость больше и, следовательно, поперечные сечения жидких струек меньше, жидкие струйки будут расположены гуще и, наоборот, в тех местах потока, где скорость меньше, жидкие струйки будут расположены реже. Число жидких струек, пронизывающих единицу площади в каком-нибудь месте потока, пропорционально скорости течения в этом месте. Следовательно картина трубок тока несжимаемого потока дает представление об этом потоке не только направлением линий тока в каждом месте, но и густотой расположения трубок. Уравнение приобретает особенно простой и наглядный смысл в том случае, когда весь поток можно рассматривать как одну единственную струйку жидкости. Заранее указанные поперечные сечения соответствуют поперечным сечениям жидкой струйки. Из уравнения:

$$A \cdot w = \dot{V}$$

можно определить среднюю скорость в каждой точке такого несжимаемого потока, где $\dot{V}$ есть объем, протекающий через поперечное сечение потока в единицу времени.

Для сжимаемых имеет место аналогичное уравнение.

$$\rho \cdot A \cdot w = \dot{M},$$

где $\dot{M}$ есть масса, протекающая через поперечное сечение потока в единицу времени. Но так как в сжимаемых потоках плотность ρ зависит от давления, то теперь для определения скорости одного потока приведенного уравнения недостаточно (ср. гл. 4.3).

Если поток установившейся и несжимаемый, то при указанном упрощенном представлении потока для его описания достаточно только одной

независимой переменной, а именно, расстояние, рассматриваемого поперечного сечения от какой-нибудь начальной точки, измеренного вдоль центральной линии трубки тока. В таком случае говорят об одномерном представлении потока в отличие от трехмерного представления, когда полностью учитывается пространственное изменение скорости и других величин. Совокупность задач одномерных течений воды (жидкости) называется гидравликой. Многомерные течения объединяются под общим понятием гидродинамика. Наконец, совокупность задач о движение воздушных потоков называют аэродинамикой.

При трехмерном рассмотрении составляющие u, v, w скорости рассчитываются как функции пространственных координат x, y, z. Рассмотрим элементарный элемент объема (параллелепипед) со сторонами dx, dy, dz. Требование неразрывности заключается в том, что в этот параллелепипед втекает столько же жидкости сколько из него вытекает. Для несжимаемых течений в направлении оси x в параллелепипед втекает со скоростью u в секунду количество (масса) жидкости $dy \cdot dz \cdot u$ (рис. 3.3). А на противоположной стороне, где скорость u уже изменилась и стала равной $u + (\partial u/\partial x) \cdot dx$, вытекает масса (количество) жидкости, равная $dy \cdot dz \cdot (u + (\partial u/\partial x) \cdot dx)$. Следовательно, в одну секунду из параллелепипеда вытекает в направление оси x жидкости больше, чем втекает, на величину $dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\partial u/\partial x)$.

Аналогичные выражения получаются и для направлений y и z. Условие сохранение массы дает для установившегося течения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3.4}$$

Это есть уравнение неразрывности гидродинамики.

Пусть жидкость где-либо граничит с твердым телом или с другой жидкостью. Из условии неразрывности потока следует, что нигде не должно возникать ни разрывов жидкости, ни взаимного проникновения обоих веществ. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы составляющие скорости, перпендикулярные к поверхности соприкосновения обоих веществ, были одинаковы с обоих сторон этой поверхности. Если рассматривается не подвижное тело или твердая стенка, обтекаемая жидкостью, то составляющая скорости жидкости, перпендикулярная к поверхности тела или к стенке, должна быть здесь равна нулю. На составляющую скорости, параллельную стенке, условие неразрывности не налагает никаких ограничений, следовательно, эта составляющая может иметь любые значения.

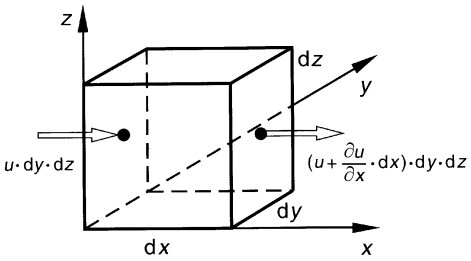


Рис. 3.3. Втекающие и вытекающие потоки в элемент объема dx, dy, dz (параллелепипед)

3.3. Топология течения жидкости

В дополнение к оригинальному тексту Прандтля, исходя из основных уравнений кинематики, будут сделаны выводы, представляющие важность для описания течений. Под топологией поля течения (обтекания) понимается классификация критических точек (особенностей), которые указываются векторным полем скоростей и их отношением друг к другу. Критическая точка поля обтекания характеризуется тем, что в ней вектор скоростей не имеет направления. Для картины течения на рис. 3.2, пользуясь этой терминологией, получим описание структуры поля течения (обтекания) (рис. 3.4) с двумя точками торможения S' (точками полуседла) и седловой точкой S, которая отделяет область обратного течения периодически отрывающегося вихря от последующего течения. Сами вихри будем далее называть фокусом. В дополнение к описанию сделанному к рис. 3.2 можно сделать дополнение: наблюдатель, движущийся вместе с потоком, может наблюдать мгновенную картину периодически движущихся вниз по потоку вихрей вокруг вертикально обтекаемой пластины.

3.3.1. Критические точки в поле обтекания

Теория критических точек $(x_0 y_0 z_0)$ исходит из трехмерного векторного поля скоростей $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (u, v, w)$. Предполагается, что оно постоянно и дважды дифференцируемое. Дифференциальные уравнения интегральных кривых (линии обтекания) векторного поля следующие:

$$dx : dy : dz = u : v : w \tag{3.5}$$

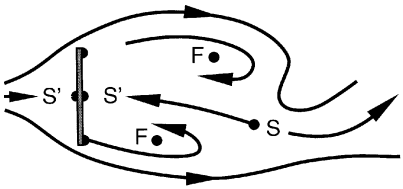


Рис. 3.4. Структура течения вокруг движущейся пластины, мгновенная картина в задействованной системе измерения

В критической точке векторное поле рассматриваемой векторной величины неопределенное (не имеет направления). Принимая во внимание вектор скоростей $\boldsymbol{v}$, мы можем сказать, что в критической точке значение скорости исчезает и, что линии обтекания согласно уравнению (3.5) в этих точках не имеют направления. Однако, если векторное поле благодаря разложению в ряд (3.7) рассматривается около определенной точки (x_0, y_0, z_0), то возможно более обстоятельное исследование непосредственного окружения критической точки. Далее, не ограничивая общность, принимают, что $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. В критических точках составляющие вектора скорости $\boldsymbol{v}$ являются аналитическими функциями координат места положения точки

$$\begin{aligned}
\dot{x} = u &= \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} U_{i,j,k} x^i y^j z^k + O_1(N+1), \\
\dot{y} = v &= \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} V_{i,j,k} x^i y^j z^k + O_2(N+1), \\
\dot{z} = w &= \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} W_{i,j,k} x^i y^j z^k + O_3(N+1),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

с

$$U_{i,j,k} = \frac{1}{(i+j+k)!} \frac{\partial^{i+j+k} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k},$$

$$V_{i,j,k} = \frac{1}{(i+j+k)!} \frac{\partial^{i+j+k} v}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k},$$

$$W_{i,j,k} = \frac{1}{(i+j+k)!} \frac{\partial^{i+j+k} w}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k},$$

O_i — ошибки, имеющие порядок малости $N+1$.

Сначала рассмотрим критическую точку в свободном потоке (течении). Здесь достаточно осуществить разложение уравнения (3.7) до порядка $N+1$. Это ведет к системе дифференциальных уравнений первого

порядка

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = (x, y, z), \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt},$$
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Коэффициенты a_{ij} — компоненты градиентов составляющих вектора скоростей. Траектории системы уравнений (3.7) в общем случае являются траекториями поля потока, которые в случае установившегося поля идентичны линиям течения.

Рассмотрим далее критические точки на твердых стенках, предположив, что имеем скорость $\boldsymbol{v}$ в координатах, где направление z перпендикулярно стенке. В отличие от точек в свободном потоке условие $\boldsymbol{v} = 0$ на твердой стенке не является достаточным критерием для существования критической точки, так как оно всегда выполняется на основе условия прилипания $\boldsymbol{v} = 0$. Однако для идентификации критической точки решающим фактором является неопределенность направления интегральных кривых векторного поля. Так как векторное поле скорости в граничном случае исчезающего расстояния z относительно стенки переходит в векторное поле вектора касательного напряжения стенки τ, то таким образом τ_w будет представлять собой определяющую величину. Таким образом, для критических точек необходимо исчезновение касательного напряжения на стенки τ_w.

Условие прилипания предполагает, чтобы величина $\boldsymbol{v}/z$ при $z \to 0$ стремилась к постоянному значению и, чтобы векторное поле этой величины имело те же интегральные кривые, что и поле касательного напряжения на стенке. По правилу Л. Лопиталя имеем:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\boldsymbol{v}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \sim \tau_w.$$

Поэтому рекомендуется обходить критическую точку при $z = 0$ и рассматривать разложение в ряд Тейлора величины $\boldsymbol{v}/z$.

Имея $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}/z$, уравнение (3.7) с $N = 2$ приводит к следующему разложению:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u}{z} = U_{1,0,1}x + U_{0,1,1}y + U_{0,0,2}z + O_1(3), \\ y' &= \frac{v}{z} = V_{1,0,1}x + V_{0,1,1}y + V_{0,0,2}z + O_2(3) \\ z' &= \frac{w}{z} = W_{0,0,2}z + O_3(3). \end{aligned} \tag{3.8}$$

На основании условия $U_{i,j,0} = V_{i,j,0} = W_{i,j,0} = 0$ здесь следует учитывать условие прилипания. В отличии от уравнения (3.7) теперь появляются производные второго порядка поля скоростей.

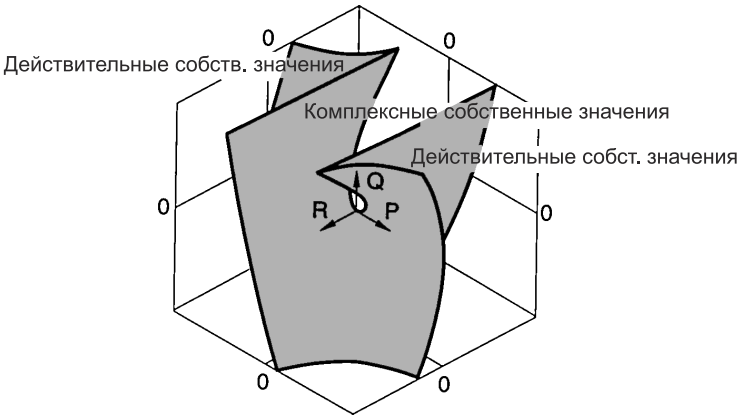


Рис. 3.5. Действительные и комплексные собственные значения характеристического полинома (3.10)

Если в уравнении (3.9) ограничиться линейными членами в направлении (координат) x, y, z, то абсолютно аналогично свободному течению, мы снова получим систему дифференциальных уравнений первого порядка с измененной матрицей коэффициента $\mathbf{A}$:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}(\boldsymbol{x}), \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (3.9)$$

Классификация критических точек в заданном поле течения сводится, таким образом, к исследованию особых точек обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, математическая теория которых полностью разработана. Отличие критических точек в свободном потоке отличается от критических точек на твердых стенках единственно в исследуемой матрице коэффициента $\mathbf{A}$ (уравнения (3.7) и (3.9)).

Расчет собственных значений этой матрицы согласно $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = 0$ приводит к характеристическому уравнению:

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \tag{3.10}$$

с тремя реальнозначимыми инвариантами матрицы

$$P = -\mathrm{Spur}(\mathbf{A}) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$
$$Q = \frac{1}{2}[P^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2)] = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1,$$
$$R = -\det(\mathbf{A}) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

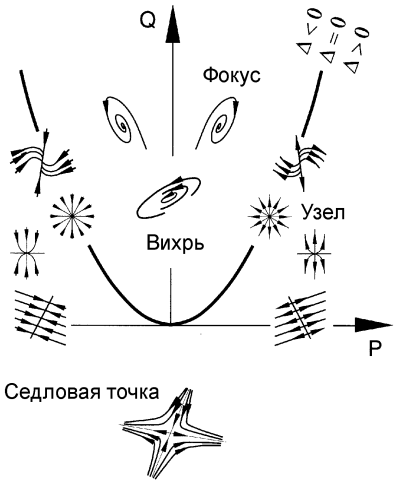


Рис. 3.6. Собственные векторы критических точек для $R = 0$, двухмерное течение

Решение кубического уравнения (3.10) можно сначала исследовать с помощью дискриминанта D, где:

$$D = 27R^2 + (4P^2 - 18Q)PR + (4Q - P^2)Q^2. \tag{3.11}$$

При $D > 0$ получим оно действительное и два комплексно сопряженных собственных значений, при $D < 0$ получим 3 действительных собственных значения, которые представлены на рис. 3.5. Площадь, определяемая

условием $D = 0$, делит пространство, ограниченное тремя инвариантами P, Q, R на 2 полупространства. Обзор характеристики течения в области критических точек получим, рассмотрев собственные векторы для двухмерного течения при $R = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + P * \lambda + Q = 0$ приводит к упрощенному дискриминанту $\Delta = 4Q - P^2$. Он отделяет в плоскости $P - Q$ область действительных собственных значений от области комплексных собственных значений в форме параболы. На рис. 3.6 показаны собственные векторы, соответствующие критическим точкам, в плоскости $P - Q$.

Собственные векторы, относящиеся к соответствующим собственным значениям определяют направление касательных на линиях течения, входящих и выходящих из критической точки. При отрицательном знаке действительных собственных значений или действительной части комплексных собственных значений траектории сходятся в критическую точку, при положительном знаке — отходят от неё.

При наличии двух действительных собственных значений с различными знаками до величины ($Q < 0$), два касательных собственных вектора должны входить в критическую точку и два — выходить из неё.

Таким образом, речь идет о точке типа седла. При положительном Q для $\Delta < 0$ имеем узел с двумя действительными собственными значениями с тем же знаком. Для $\Delta < 0$ получаем вихревую точку или фокус с двумя комплексно сопряженными собственными значениями.

На пограничных линиях различных областей, т. е. на осях $P = 0$ или $Q = 0$, а также параболе $P^2 = 4Q$, оказываются вырожденные случаи, такие как, например, вихрь, сток и источник — (вырожденные точки). Таким образом, для $P = 0$ с точки зрения кинематики возможны только седловые точки ($Q < 0$) или вихревые точки ($Q > 0$). При $P = 0$ и $Q = 0$ критическая точка в данной постановке не определена, следовательно для ее описания нужно привлечь следующие члены разложения уравнения (3.7).

Для трехмерного течения собственным значениям должны соответствовать состояния течений, как это представлено на рис. 3.5. Рис. 3.7 демонстрирует отдельные примеры структуры трехмерного течения. Так, например, при смерчах образуется структура узел–фокус, при образовании вихрей в атмосфере — структура седло–фокус и неустойчивый вихрь, при решении других многочисленных технических проблем обтекания — структура узел–седло.

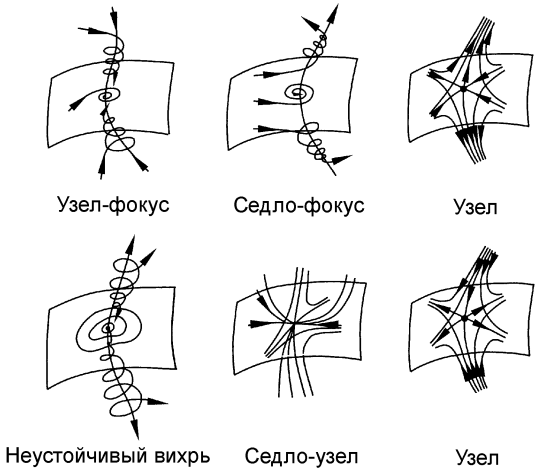


Рис. 3.7. Примеры структуры трехмерных течений

3.3.2. Примеры течения

В качестве первого примера рассмотрим обтекание автомобиля (рис. 3.8). В центральном разрезе в следе обнаруживается 3 полуседла S' (точки торможения и отрыва) на задней части автомобиля и одна седловая точка S в поле обтекания. Область обратного течения характеризуется двумя фокусами F. Если плоскость разреза A_2 расположить в следе автомобиля следующим образом, то обнаруживаются точки фокус, седло и узел. Наложение структур обтекания двух плоскостей разреза выглядит сначала весьма сложно. Однако с помощью воображения мы можем из представленных плоскостей разреза при обтекании автомобиля выделить подковообразный вихрь, образующийся на крышке багажника. Воздух между дорогой и дном автомобиля образует при эксперименте в аэродинамической трубе область обратного течения, которая ограничена точкой седла (плоскость разреза A').

На втором примере представлена структура течения установившегося обтекания дельта-крыла, которое можно увидеть у сверхзвуковых самолетов (см. гл. 6.3.1). Аэродинамическая подъемная сила образуется в сущности в результате разрежения в центре вихря, оторванного от передней кромки крыла. Рис. 3.9 изображает первичный отрыв (фокус), а также повторное образование линий на крыле, которые становятся видимыми в результа-

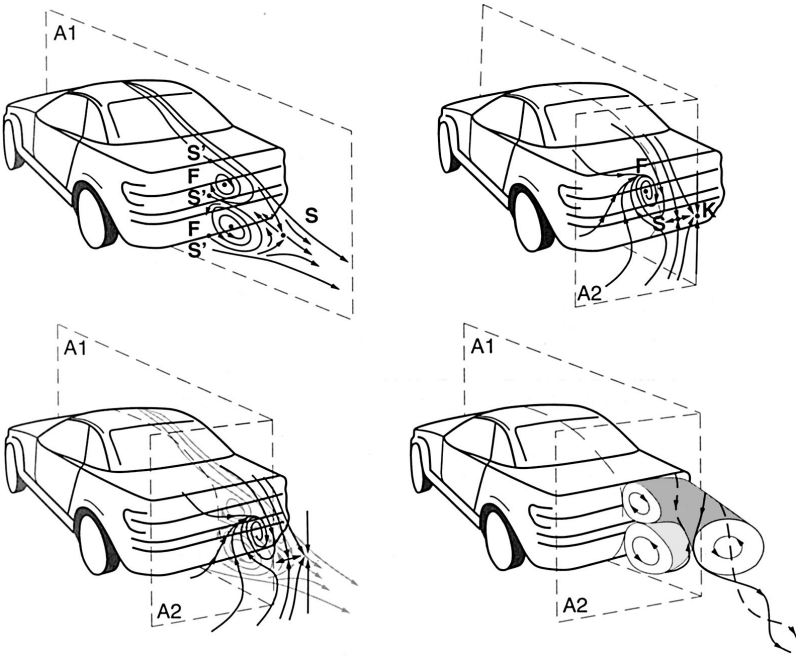


Рис. 3.8. Структура течения при обтекании автомобиля

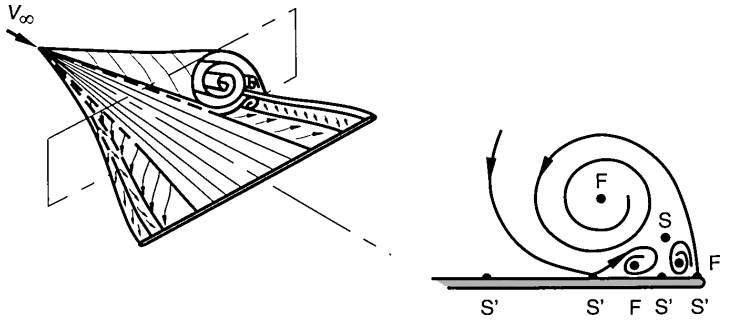


Рис. 3.9. Поверхностные линии тока и структура обтекания дельта-крыла

те схождения линий потока на стенку. По направлению вниз от передней кромки, вследствие трехмерного поперечного течения на крыле возникает вторичный отрыв, который на каждой половине крыла ведет к образованию двух следующих фокусов F и седла S. Таким образом структура течения обнаруживает на верхней части каждой половины крыла в общей сложности 3 фокуса, седло и полуседло линий отрыва и нового образования. Эти комплексные примеры отрыва течений показывают, насколько полезным при описании этих течений может быть анализ топологии с критическими точками, проводимый исключительно с помощью основных соотношений кинематики (3.2). Причем речь идет не только об описании поля обтекания (это будет рассмотрено в следующих главах), а об определенной классификации описания.

4

Динамика жидкостей и газов

4.1. Динамика идеальной жидкости

4.1.1. Силы в движущейся жидкости, уравнение Бернулли

В покоящейся жидкости действуют и дают уравновешенную систему два ряда сил: сила тяжести (и другие массовые силы) и сила давления. Эти же силы действуют и в движущейся жидкости, но здесь к ним присоединяется ещё трение жидкости, которое следует рассматривать как сопротивление деформации. Трение жидкости будет подробно рассмотрено в гл. 4.2. В этой же главе мы будем им пренебрегать. Жидкости, наиболее важные для техники (вода, воздух и др.) обладают очень малой вязкостью, и, поэтому во многих случаях сопротивление, возникающее в них вследствие трения, столь мало, что пренебрежение им вполне оправданно. Поэтому выводятся фундаментальные (основные) законы движения для жидкостей, лишенных трения и только после этого учитывают изменения, которые вносит наличие трения. Поэтому далее в основу будут положены только представления о жидкости, лишенной трения.

Сначала рассмотрим несжимаемую жидкость.

Для того, чтобы найти динамическое отношение между давлением и массовой силой с одной стороны и состоянием движения (кинематическими величинами) с другой стороны, обратимся к уравнению (закону) Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение, этот закон является основным законом динамики.

Требуется рассчитать одновременные состояния вдоль линии тока. Для этого воспользуемся составляющими ускорения в направлении движения, так называемого касательного ускорения. Длину дуги вдоль линии тока обозначим s, время t и скорость w. Тогда изменение скорости при одновременном изменении s на ds и t на dt — будет выглядеть следующим образом:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\partial w}{\partial t} dt,$$

где $\partial w/\partial t$ — это частная производная.

При ускорение речь идет о изменениях скорости, которые получает частица при своем движении. Поэтому мы должны взять $ds = w * dt$. Таким образом касательное ускорение получает вид:

$$\frac{dw}{dt} = w\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{4.1}$$

где, $w(\partial w/\partial s)$ — это часть ускорения, которая возникает вследствии перемещения частицы в точку потока с другой скоростью течения. Величина $\partial w/\partial t$ — это часть ускорения, которая зависит от изменения состояния потока в данной точке во времени. При установившемся течении вторая часть, очевидно, равна нулю. Первую часть можно записать также в виде $\partial(w^2/2)/\partial s$. Для того, чтобы продемонстрировать применение уравнения: сила = масса $*$ ускорение, выделим в движущейся жидкости частицу в виде цилиндра с поперечным сечением dA и длиной dS. Нечто подобное мы уже производили при рассмотрении уравнения в гл. 2.6. Ось цилиндра расположена вдоль линии тока (рис. 4.1). Тогда масса цилиндра будет равна $\rho\, dA\, dS$. Если в жидкости трение отсутствует, то на выделенный цилиндр действуют силы: сила давления вследствие разности давлений и массовая сила. Пусть давление на основании цилиндра, расположенного выше по течению равно p, тогда сила, действующая на это основание dA, равна $p\, dA$. На основании цилиндра, лежащем вниз по течению, давление имеет значение $p + (\partial p/\partial s)ds$, так, что результирующая этих двух сил давления равна $p\, dA - (p + (\partial p/\partial s)ds)dA = -(\partial p/\partial s)ds\, dA$. Далее на жидкость действует массовая сила, величина, которой, отнесенная к единице массы, пусть будет g (например, сила тяжести). Если направление массовой силы и направление течения образуют угол α, то масса $\rho dA\, ds$ в направлении движения (течения) приобретает составляющую силу:

$$\rho dAdsg\cos(\alpha).$$

В уравнении: сила = масса $*$ ускорение каждый элемент имеет значение $dAds$, которое вследствие этого выпадает, т. е. объем произвольно выбранного цилиндра для результата не требуется. Разделив на ρ, получаем:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\cos(\alpha) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{4.2}$$

Обычно, когда речь идет о массовой силе, то говорят о силе тяжести. Тогда величину g по величине и направлению можно считать постоянной и, вво-

дя систему координат с осью z, направленной вертикально (рис. 4.1), для $\cos(\alpha)$ можем записать — $\partial z/\partial s$.

Если рассматривать установившееся движение $(dw/dt = 0)$ и предположить, что плотность ρ постоянная, то все члены дифференциального уравнения представляют собой производные по s. Поэтому уравнение (4.2) можно затем интегрировать вдоль линии тока. Из уравнения:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0$$

получаем:

$$\frac{p}{\rho} + g * z + \frac{w^2}{2} = \text{const}. \tag{4.3}$$

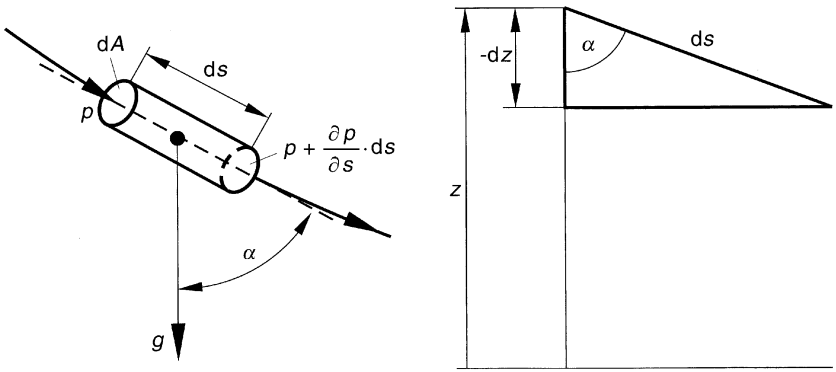


Рис. 4.1. Результирующая сил, действующих на цилиндр

Это уравнение, которое называется уравнением Бернулли, является основным уравнением при рассмотрении одномерного движения. Оно имеет также огромное значение для всей гидродинамики. Уравнение выражает постоянство энергии. Каждый его элемент означает энергию в единице массы, а именно: первый член есть не что иное, как работа сил давления, второй — потенциальная энергия силы тяжести, и третий — кинетическая энергия. Разделим все члены уравнения (4.3) на g, тогда все они будут иметь размерность длины и могут быть истолкованы как высоты. Если ввести в уравнение, как это было сделано в предыдущей главе, вес единицы объема

$\rho g = \gamma$, то уравнение Бернулли примет вид:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{w^2}{2g} = \text{const}.$$

В этом уравнении p/γ означает, согласно главе 2.6 высоту столба жидкости, создающего своим весом давление p и поэтому называется пьзометрической высотой. z — это высота рассматриваемого места над какой — нибудь горизонтальной плоскостью и называется геометрической высотой. $w^2/(2g)$ — высота, с которой тело должно упасть, чтобы при свободном падении приобрести скорость w и поэтому называется скоростной высотой. Таким образом, согласно уравнению Бернулли сумма пьезометрической, геометрической и скоростной высот на всем протяжении линии тока остается постоянной. При этом значение константы на различных линиях тока может быть различным. Это можно наблюдать особенно в том случае, если линии тока имеют различное происхождение. Если линии тока происходят из одного места (потока), в котором наблюдаются статические состояния (т. е. состояния покоя или равномерного прямолинейного движения), то значение постоянной для всех линий тока будет одинаковым. Уравнение Бернулли применимо во всем потоке. В соответствии с главой 2.6 мы имели для покоящейся жидкости $p/\gamma + z = \text{const}$. Это уравнение соответствует уравнению Бернулли, если взять $w = 0$ или $w = \text{const}$. Заметим, что рассмотренный нами частный случай течения идентичен с установившимся потенциальным течением, исследованием которого мы займемся ниже.

Для других массовых сил, если они обладают потенциалом U, также возможно провести интегрирование, т. к. $g\cos(\alpha)$ можно записать $-\partial U/\partial s$. Если речь идет о сжимаемой жидкости, то интегрирование также возможно, но при условии, что жидкость однородная, следовательно, плотность зависит только от давления. Тогда $\int(dp/\rho) = F(p)$ есть функция давления и поэтому можем записать $(1/\rho)(\partial p/\partial s) = \partial F/\partial s$. Интегрируя по s, мы получим общий вид уравнения Бернулли для установившегося течения.

$$F + U + \frac{w^2}{2} = \text{const}. \tag{4.4}$$

В гидродинамике исходят в общем из трех составляющих скорости u, v, w. Аналогично уравнению (4.1) для составляющих ускорения по оси x получаем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w. \tag{4.5}$$

Для dv/dt и dw/dt применимы соответствующие уравнения. Изменение давления дает для единицы объема три составляющих $-\partial p/\partial x, -\partial p/\partial y$, $-\partial p/\partial z$. Массовая сила (до сих пор g) имеет три составляющих F_x, F_y и F_z. Составляющие силы на единицу объема получаются зависимостью массы единицы объема ρ к $\rho F_x, \rho F_y$ и ρF_z. Таким образом для массы, содержащейся в единице объема получим из (векторного) уравнения: масса $*$ ускорение $=$ сумма сил — три уравнения

$$\begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho\frac{dv}{dt} &= \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho\frac{dw}{dt} &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Эти уравнения, в которых ускорение можно заменить уравнением (4.5), называются уравнениями Эйлера. Для того, чтобы показать, как они могут быть применены, выведем из них уравнение Бернулли для какой-нибудь линии тока.

Умножим уравнения (4.6) соответственно на dx, dy, dz. Одновременно установим, что должно получиться:

$$dx : dy : dz = u : v : w,$$

то есть, что dx, dy, dz являются составляющими одной линии тока. Таким образом, мы можем заменить $v\,dx$ на $u\,dy$; $w\,dx$ на $u\,dz$ и т. д.

Для составляющих ускорения по оси x получаем:

$$\frac{du}{dt}dx = \frac{\partial u}{\partial t}dx + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right).$$

Выражение в скобках означает изменение u при перемещении вдоль линии тока и равно du. Тогда получим:

$$\frac{du}{dt}dx = \frac{\partial u}{\partial t}dx + udu.$$

Предположим для простоты, что рассматриваемое течение установившееся, тогда $\partial u/\partial t$ и т.д. будут равны 0. Сложив уравнения (4.6), умноженные на dx или dy и dz и разделив на ρ, в левой части имеем:

$$\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz = udu + vdv + wdw = d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$

Если массовые силы имеют потенциал U, следовательно, если

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

то получим соответственно сумму:

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU.$$

Аналогичным образом из составляющих силы давления получается:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \frac{1}{\rho}dp.$$

Следовательно, ограничиваясь точкой линии тока имеем:

$$d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + dU + \frac{dp}{\rho} = 0.$$

4.1.2. Следствия из уравнения Бернулли

При помощи уравнения Бернулли очень просто решаются многие задачи о движение жидкости. Приведем три особенно важных примера.

Истечение из сосуда под действием силы тяжести

В сосуде (на рис. 4.2) линии тока направлены перпендикулярно выходному сечению B. Как можно увидеть, эти линии идут к свободной поверхности жидкости, которая понижается по истечении жидкости. Частицы жидкости на свободной поверхности A, также как и частицы в свободной струе B находятся под атмосферным давлением p_0. Весом воздуха в данном случае пренебрегают. Если свободная поверхность жидкости большая, по сравнению с площадью выходного сечения B, то скорость в A будет настолько мала, что ее квадратом по сравнению с квадратом скорости в B можно пренебречь. Следовательно, обозначая через z_A и z_B геометрические высоты A и B, мы получим на основании уравнения Бернулли:

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_B + \frac{w_B^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + gz_A + 0.$$

Отсюда находим при $z_A - z_B = h$

$$\frac{w_B^2}{2g} = z_A - z_B = h$$

или

$$w_B = \sqrt{2gh}. \tag{4.7}$$

Таким образом, скорость жидкости в выходном отверстии B такова, как если бы вытекающие частицы жидкости свободно падали с высоты h. В действительности частицы жидкости в A продвинулись несколько глубже, частицы, находившиеся до них на этом месте, также продвинулись глубже и т. д.

Работа этих частиц через внутренний механизм жидкости передается на истекающую частицу. Они (работы) суммируются таким образом, как будто одна единственная частица падает (проходит) всю высоту.

Равенство, представленное в уравнении (4.7) называется формулой истечения Торичелли (теорема Торичелли).

Поперечное сечение струи, вытекающей из сосуда, как правило, не совпадает с поперечным сечением выходного отверстия. Так, например, при истечении через круглое отверстие в тонкой стенке площадь поперечного сечения струи составляет от $0,61$ до $0,64$ площади отверстия. Это явление, называемое сжатием струи, возникает вследствие того, что жидкость внутри сосуда движется к отверстию в радиальном направлении и, достигнув края отверстия, не может здесь внезапно изменить свое направление. На верхних изображениях рис. 4.3 представлены такие течения (потоки). В случае с закругленным отверстием может произойти поворот струйки линий тока внутри отверстия. Коэффициент сжатия приблизительно равен единице. Количество жидкости $\dot{V}$ (объемный расход), истекающее за секунду через отверстие поперечного сечения A равно:

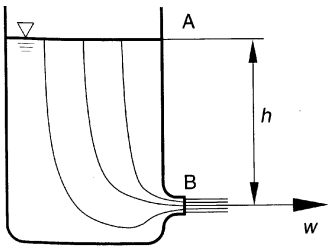


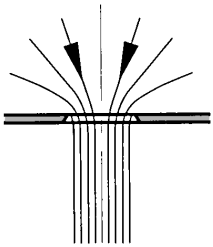
Рис. 4.2. Истечение жидкости из сосуда

$$\dot{V} = \alpha A\sqrt{2gh}$$ с коэффициентом сжатия α

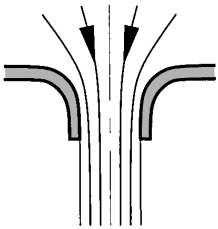
При истечении из некруглого отверстия в тонкой стенке коэффициент сжатия мало отличается от своего значения для круглого отверстия, но зато форма струи, образующейся при этом, как правило довольно сложная. Так, например, при истечении из квадратного отверстия получается струя с поперечным сечением в виде тонкого креста, а струя, вытекающая из прямоугольного отверстия, принимает вид ленты, перпендикулярной к длинной стороне прямоугольника.

Истечение из сосуда под влиянием внутреннего давления

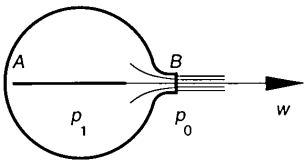
Пусть в сосуде, изображенном внизу на рис. 4.3 имеет место давление p_1, а во внешнем пространстве — атмосферное давление p_0. Для линии тока, идущей горизонтально, имеем $z_A = z_B$.



Истечение из отверстия
в плоской стенке



Истечение из отверстия
с закругленными стенками



Истечение из сосуда

Рис. 4.3. Истекающие потоки

Скоростью около стенка в точке A вследствие ее малости можно пренебречь, и на основании уравнения Бернулли получим:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + 0.$$

Следовательно,

$$w = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_0)}{\gamma}}. \tag{4.8}$$

Обозначим высоту $(p_1 - p_0)/\gamma$, т. е. высоту столба жидкости с удельным весом γ, между верхним и нижнем концом которой разность давлений составляет $p_1 - p_0$, через h, то из уравнения (4.8) снова получим $w = \sqrt{2gh}$. Уравнение (4.8) позволяет вычислить то наибольшее значение скорости, до которого газ можно рассматривать практически как несжимаемую жидкость. Эта предельная скорость w_1 зависит от величины изменения плотности, которая принимается за допустимую. Вследствие $pV^\kappa = \text{const}$ или $p = \text{const} \cdot \rho^\kappa$ имеем $\Delta p/\rho \approx \kappa \Delta\rho/\rho$. Отсюда следует $\Delta p \approx \kappa p_0 * \Delta\rho/\rho$. Примем за допустимое изменение плотности величину $\Delta\rho/\rho = 0.01$, тогда для воздуха при нормальном давлении $p_0 = 1$ бар $= 10^5$ Н/м^2 получим разность давлений $\Delta p = 1{,}405 \cdot 10^5 \cdot 0{,}01$ Н/м$^2 = 1{,}405$ Н/м^2. При среднем значении величины $\rho = 1{,}21$ Нс^2/м^4 для предельной скорости будем иметь:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2{,}322\,\text{м}^2/\text{с}^2} \approx 48\,\text{м/с}.$$

Примем за допустимое изменение плотности $10\,\%$, тогда получим скорость в $\sqrt{10}$ большую, т. е. около 150 м/с. Изменение плотности проявляется двумя способами. С точки зрения кинематики изменяется поперечное сечение линии тока (струйки), а с точки зрения динамики — оказывается влияние на величину изменения давления, относящееся к ускорению.

Обтекание препятствия

Когда равномерный поток жидкости со скорость w_0 встречает на своем пути препятствие он расходится во все стороны непосредственно перед этим препятствием и обтекает это препятствие рис. 4.4. В центре области, точке торможения (критической точке), поток полностью останавливается. Уравнение Бернулли дает таким образом для линии тока, проходящей через критическую точку, при давлении p_S в критической точке и давлением невозмущенного p_∞ потока на равной высоте:

$$\frac{p_S}{\rho} + 0 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{w_\infty^2}{2}, \quad \text{т. е.} \quad p_S = p_\infty + \rho\frac{w_\infty^2}{2}.$$

Повышение давления $p_S - p_\infty = \rho w_\infty^2/2$ приводит к понятию динамического скоростного давления. Измерение возрастания этого давления представляет собой метод определения скорости течения. Если тело движется со скоростью v в покоящемся воздухе (или жидкости), то в системе отсчета, движущейся вместе с ним, получим описанное выше течение. Причем скорость направлена противоположно v, но равна по величине. Поэтому и в этом случае будет наблюдаться повышение давления, равное $\rho v^2/2$. Если в критической точке тела, осуществляющего препятствие, просверлено отверстие, то давление p_S передается внутрь тела и может быть отсюда подведено к измерительному прибору. Для измерения давления $p_S = p + \rho w^2/2$ в потоке достаточно в качестве препятствия простой изогнутой трубки (рис. 4.5), которая названа по имени своего изобретателя трубкой Пито (Pitot).

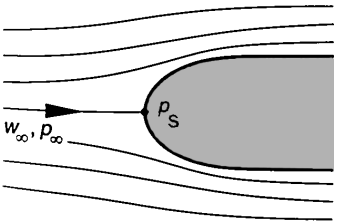


Рис. 4.4. Обтекание препятствия

Каждой точке движущейся жидкости, кроме приложенного там давления p (которое показал бы прибор изменения давления, движущейся вместе с жидкостью), можно соотнести также давление p_S, которое даст размещенная там трубка Пито. Давление p называют статическим давлением, давление p_S — полным давлением. Таким образом имеем: полное давление = статическое давление + динамическое давление. Из уравнения Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{w^2}{2} = \text{const}$$

при подставлении полного давления $p_S = p + pw^2/2$, получим

$$\frac{p_S}{\rho} + gz = \text{const} \quad \text{или} \quad p_S + \gamma z = \text{const},$$

т. е. p_S распределено согласно законам статики. Это означает, что p_S постоянна в каждой горизонтальной плоскости, если все линии тока такие же постоянные.

Для того, чтобы использовать полученные уравнения для определения скорости течения, необходимо, кроме измерения полного давления p_S измерить также и статическое давление p. Последняя задача значительно

труднее первой, т. к. введение зонда в поток несколько изменяет статическое давление p именно в той точке, где его желательно измерить. О том как измеряется статическое давление пойдет речь в главе 4.1.4.

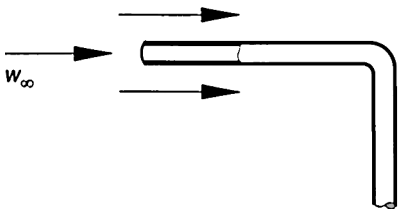


Рис. 4.5. Трубка Пито

Последующие рассуждения не ограничиваются только жидкостями, лишенными трения, они будут относиться также к жидкостям с трением. Первый случай предполагает несжимаемую жидкость с постоянной плотностью.

В несжимаемой жидкости давление можно разложить на два слагаемых, первое из которых представляет собой давление, которое существовало бы в жидкости, если бы она была в покое. Обозначим это равновесное давление через p'. Очевидно, что $p'_e = \mathrm{const} - \gamma z$. Если теперь поставим фактически имеющееся действующие в жидкости давление $p' = p' + p^*$, то p^* будет представлять собой разность давлений в случае с движущейся жидкостью и с жидкостью в состоянии покоя. Если в данном случае применимо уравнение Бернулли, т. е. $p + \gamma z + \rho w^2/2 = \mathrm{const}$, то, учитывая значение p', получим $p^* + \rho w^2/2 = \mathrm{const}$. Следовательно, давление p^* распределятся в жидкости так, как если она была невесомой и обладало только инертной массой. Геометрическая высота z не оказывает на p^* никакого влияния. Это объясняется тем, что каждая частица весомой жидкости как бы висит в потоке под действием поддерживающей силы окружающих частиц. Полученный результат применим также и к жидкостям, обладающих трением. Поэтому далее в наших исследованиях мы не будем учитывать при движении в воде или воздухе действие силы тяжести, следовательно, вместо давления p будем всегда рассматривать давление p^*. Для упрощения однако снова будем писать p.

Пусть давление в потоке воздуха или воды измеряется при помощи неподвижного прибора, находящегося вне потока и соединенного трубками

с подвижным зондом, вставленным в поток. В таком случае вес жидкости в трубках действует так, что давление, показываемое прибором, не зависит от геометрической высоты места измерения. Следовательно, прибор показывает давление такого же вида, как и p^*. Если в качестве зонда взята трубка Пито в направлении против течения, то неподвижный прибор покажет одинаковое давление вдоль все линии тока. В случае, когда для всех линий тока мы имеем одинаковую постоянную, то прибор даст одинаковое показание во всем потоке.

Уравнение Бернулли показывает, как изменяется давление вдоль линии тока. Для того, чтобы получить представление о том, как изменяется давление в направлении, перпендикулярном к линии тока, следует рассмотреть вместо касательного нормальное ускорение. Это ускорение, как известно, направленно по главной нормали к траектории и равно w^2/r, где r — есть радиус кривизны траектории. Выделим в жидкости небольшую призму, ось которой направлена вдоль главной нормали. Для этой призмы уравнение движения, составленное для направления r, дает

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s'}, \tag{4.9}$$

где, ds' — есть элемент дуги по направлению главной нормали, а величину p следует понимать в смысле давление p^*. Уравнение (4.9) показывает действие центробежной силы в криволинейном течении. Давление увеличивается в радиальном направлении и составляет $\rho w^2/r$ на единицу длины. Таким образом, уравнение устанавливает связь между соседними линиями тока. Важным является вывод, что при прямолинейном течении ($r = \infty$) давление не может изменяться в направлении, перпендикулярном к скорости течения.

Когда постоянная уравнения Бернулли имеет одинаковое значение вдоль линии тока, то при криволинейном течении получается особенно простой результат. В этом случае из $\int(dp/\rho) + w^2/2 = \text{const}$ (уравнение 4.4), дифференцируя по s', мы получим второе выражение для $(1/\rho)\partial p/\partial s'$, а именно $(1/\rho)\partial p/\partial s' = -\partial w/\partial s'$.

Подставив его в уравнение (4.9) найдем:

$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0. \tag{4.10}$$

Отсюда следует, как это будет представлено далее в гл. 4.1.5, что при криволинейном течении отдельные частицы жидкости движутся без вращения.

Циркуляция вдоль прямоугольника, образованного дугами двух соседних линий тока и отрезками ds' двух радиусов кривизны, равна нулю, если выполняется уравнение (4.10) гл. 4.1.5.

В качестве примера рассмотрим движение в спиральной камере (рис. 4.6). Все линии тока начинаются в параллельном потоке в области A, в которой скорость и давление везде одинаковы, следовательно, постоянная в уравнение Бернулли, составленного для потока в спиральной камере, одинакова на всех линиях тока. Радиусы кривизны отдельных линий тока можно считать приближенно равными радиусу r, проведенному из центра камеры O,поэтому можно принять что $ds' = dr$. Тогда уравнение примет вид $dw/dr + w/r = 0$ или $dw/w = -dr/r$. После интегрирования получаем $\ln(w) = \ln(C) - \ln(r)$, т. е. $w = C/r$, где C — это постоянная интегрирования. Следовательно, скорость по мере приближения к центру камеры сильно возрастает. Радиальная составляющая скорости при постоянной высоте камеры вследствие неразрывности потока также пропорциональна $1/r$. Поэтому угол, образуемый линиями тока с радиусами везде одинаковый и, следовательно, линиями тока являются логарифмические спирали. Значение давления получаем из уравнения Бернулли $p = \text{const} - \rho C^2/(2r^2)$. Если поток внутри камеры достигнув внутреннего радиуса r_1, выходит через отверстие в свободную атмосферу с давлением p_∞, то давление на другом конце спиральной камеры рассчитывается по формуле.

$$p = p_0 + \rho \frac{C^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Следовательно, если выходное отверстие внутри камеры мало, то в области A может возникнуть высокое давление.

В неустановившихся течениях при изменении состояния потока к имеющимся давлениям добавляется еще дополнительное давление. Исследования в данном случае ограничиваются касательным ускорением, в котором, по уравнению (4.1) добавляется член $\partial w/\partial t$ (временное изменение скорости в определенном месте). Приняв во внимание рассуждение относительно уравнения Бернулли, исходя из полного уравнения (гл. 4), в уравнении (4.3) в левой части появляется член $\int_0^s (\partial w/\partial t) ds$. Если речь идет о трубе с постоянным поперечным сечением, где в каждый определенный момент времени скорость одинаковая во всех сечениях (поскольку мы предполагаем, что жидкость лишена трения), то производная $\partial w/\partial t$ не зависит от места. Тогда интеграл будет равен $(dw/dt)s$.

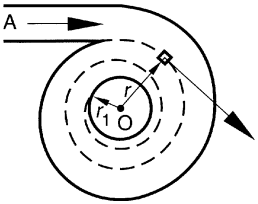


Рис. 4.6. Спиральная камера

Следующий пример показывает начальную стадию истечения из сосуда через насадок длиной l (рис. 4.7).

Вдоль предполагаемой горизонтальной оси трубы имеет место уравнение:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2}\frac{dw}{dt}s = \text{const} = \frac{p_0}{\rho} + gh.$$

До тех пор, пока dw/dt не равно нулю давление уменьшается вдоль насадка пропорционально расстоянию s. Давление в конце насадки ($s = l$) равно давлению p_∞. Уравнение дает:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{w^2}{2}\frac{dw}{dt}l = \frac{p_\infty}{\rho} + gh.$$

т. е.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{l}\left(gh - \frac{w^2}{2}\right). \tag{4.11}$$

В первый момент истечения получается простое отношение $dw/dt = gh/l$, т. к. $w = 0$. Однако по мере увеличения w все более и более уменьшается производная dw/dt и при больших значениях t становиться равной нулю, т. е. течение становится установившимся и $w = \sqrt{2gh}$. Точное временное возрастание w (зависимость от времени) получается после интегрирования уравнения (4.11). Но это увеличение мы не будем здесь рассматривать. Для оценки времени t, которое требуется для того, чтобы течение сделалось приблизительно установившимся, следует поступить следующим образом. Примем, что ускорение dw/dt остается постоянным до достижения скорости $w_1 = \sqrt{2gh}$.

Тогда подставляя в равенство (4.11) w_1/T вместо dw/dt во время $t = 0$ получаем:

$$T = \frac{w_1 l}{gh} = \frac{2l}{w_1}$$

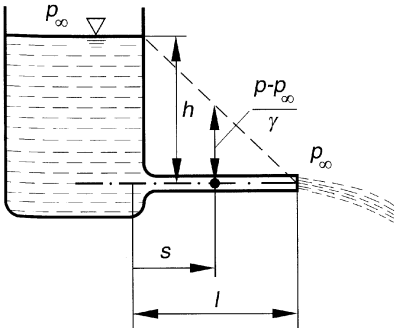


Рис. 4.7

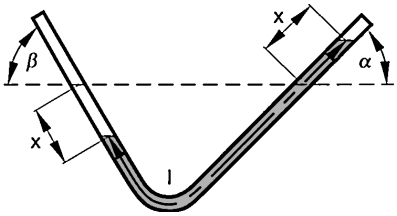


Рис. 4.8

Другим простым примером неустановившегося движения жидкости является колебание столба жидкости в трубе с открытым с обеих сторон отверстиями под действием силы тяжести (рис. 4.8). Пусть труба имеет постоянное поперечное сечение и пусть длина столба жидкости, измеренная вдоль оси трубы, в какой-либо момент времени через x (вследствие неразрывности это отклонение одинаково на обоих концах столба, а также во всех промежуточных точках).

Скорость везде одинакова и равна $w = dx/dt$, т. е. $w\partial w/\partial s = 0$. Поэтому ускорение равно d^2x/dt^2. При отклонении столба жидкости правый (один) конец поднимается на высоту $h_1 = x - \sin(\alpha)$ от положения равновесия, а другой опускается на высоту $h_2 = x\sin(\beta)$. Разница геометрических высот жидкости на концах равна $h_1 + h_2 = x(\sin(\alpha) + \sin(\beta))$. Давление на обоих концах одинаково; обозначим его через p_∞. Развернутое уравнение Бернулли, примененное к обоим концам столбца жидкости, дает:

$$gx(\sin(\alpha) + \sin(\beta)) + l\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения, совпадает с дифференциальным уравнением упругих колебаний, имеет вид:

$$x = A\cos(wt + \vartheta), \quad \text{где} \quad w = \sqrt{g(\sin(\alpha) + \sin(\beta))/l}.$$

Отсюда для периода колебаний T получаем величину:

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(\sin(\alpha) + \sin(\beta))}}.$$

Для вертикальной U-образной трубки $(\sin(\alpha) = \sin(\beta) = 1)$, поэтому $T = 2\pi\sqrt{l/(2g)}$, т. е. период колебаний совпадает с периодом колебаний маятника, длина которого составляет половину длины столба жидкости.

4.1.3. Слияние двух потоков. Поверхности раздела и образование вихрей

Если два потока жидкости различного происхождения сливаются в один поток позади острого ребра обтекаемого тела рис. 4.9, то в общем случае постоянная в уравнениях Бернулли для обоих потоков имеет разные значения.

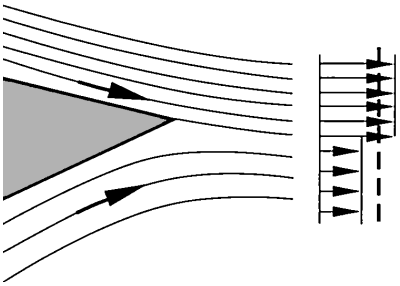


Рис. 4.9. Слияние двух потоков

Это означает, что по обе стороны от поверхности, которая разделяет оба потока (поверхность раздела), на которой давление, очевидно, должно, быть одинаковым, скорости имеют разные значения. Но даже в этом случае, когда постоянная в уравнениях Бернулли для обоих потоков имеет одинаковые значения, направление потока на обеих сторонах различное. Таким образом, на поверхности раздела в рассматриваемых случаях происходит скачкообразное (разрывное) изменение скорости. В первом случае происходит продольный скачек во втором поперечный скачок. Подобные разделительные поверхности наблюдается многократно. Однако вследствие неустойчивости они недолго сохраняют свою первоначальную форму. Даже небольшие потоки могут быстро нарастать и уменьшать её в других местах. Это приводит к быстрому распадению поверхности раздела на большое число вихрей. Ввиду большой важности этого явления для понимания действительных движений жидкости рассмотрим его подробнее. Пусть вследствие

каких-нибудь колебаний в потоке жидкости поверхность раздела (рис. 4.9) приняла слегка волнообразную форму рис. 4.10. Возникшие волны распространяются со скоростью, равной среднему значению первоначальных скоростей (на рис. эта скорость отмечена пунктирными линиями). На рис. 4.10 взята такая система отчета, которая движется с этой средней скоростью. Следовательно, в этой системе отчета гребни и впадины волн остаются неподвижными, верхний поток движется вправо, а нижний влево. Предполагая, что это течение — установившееся, применим к нему результаты предыдущих глав. Из уравнения Бернулли, а также из уравнения (4.9) для поперечного возрастания давления следует, что на гребнях волн каждого отдельного потока давление повышено, а во впадинах, наоборот, оно понижено (на рис. 4.10 это отмечено знаками + и −). Такое распределение показывает, что рассматриваемое течение не может быть установившимся. В самом деле, из тех мест, где давление повышено, жидкость будет перетекать в те места, где давление понижено. Но это приведет к тому, что возникшие ранее волны начнут увеличиваться. В данном случае говорят о неустойчивости, которая подробно будет рассмотрено в гл. 7. Дальнейшая судьба поверхности раздела представлена на рис. 4.10. В конце концов она распадается на отдельные вихри.

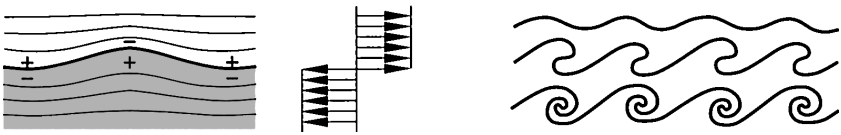


Рис. 4.10. Образование волн и вихрей на поверхности раздела

Развевание знамени — полоскание флага на ветру имеет ту же причину. Распределение давления на рис. 4.10 не изменится, даже если изменится направление нижнего потока, т. е. если нижний поток примет одинаковое направление с верхним потоком. Слабые выпуклости знамени могут усилиться (так как эти выпуклости легко движутся в месте с ветром). В действительности это довольно сложный процесс.

В связи с этим рассмотрим еще один вид поверхности раздела, при возникновении которого одновременно образуется вихрь. Пусть поток жидкости встречает на своем пути острое ребро. В первый момент возникает обтекание ребра (рис. 4.11), причем скорость на ребре очень высока. Те-

оретически для идеальной (лишенной трения) жидкости она даже равна бесконечности. Однако, как показывают наблюдения, при таком обтекании очень быстро возникает вихрь и скорость обтекания значительно уменьшается.

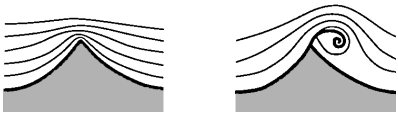


Рис. 4.11. Обтекание острого ребра

Для объяснения такого явления можно ввести принцип, согласно которому жидкость стремится избегать бесконечно больших скоростей и вместо этого образует поверхности раздела. В дальнейшем в гл. 4.2.6 мы увидим, что за этим принципом скрывается трение жидкости, которое проявляет себя всегда вблизи твердых стенок. Наличие вихря позади ребра вызывает круговое движение, вследствие которого жидкость притекает к ребру также со стороны, противоположной направлению потока. Таким образом тогда выполняется условие слияние потоков на грани и образуется поверхность раздела (рис. 4.11 справа). Поверхность раздела под действием вихря закручивается и тем самым усиливает вихрь, который начинает расти. В действительности вихрь и поверхность раздела составляют одно целое и растут вместе из ничтожного начального возмущения (рис. 4.12). В дальнейшем вихрь, называемый также начальным вихрем уплывает вместе с потоком, а поверхность раздела, как было представлено выше, распадается на отдельные вихри, причем около ребра все время образуется новые куски поверхности раздела.

Совершенно аналогичная картина наблюдается и при истечении жидкости через круглое отверстие с острыми кромками в плоской стенке. Закручивающаяся поверхность раздела образует вихревое кольцо, увлекаемое струей жидкости (рис. 4.13). Вихревые потоки можно получить следующим простым способом. Ящик с упругой задней стенкой и с круглыми отверстием на передней стенке наполняется дымом. Если теперь ударить по упругой стенке ящика, то из круглого отверстия образуется кратковременный поток. Но это не будет струя, это будет вихревое кольцо, которое движется дальше. При своем возникновении вихревое кольцо захватывает табачный дым и поэтому резко выделяется среди окружающего воздуха. Такие вихревые

кольца очень устойчивые структуры и распадаются только после того, как их энергия почти целиком поглощается трением.

Поперечный скачок скоростей получается, например, при обтекании пластинки, наклоненной под небольшим углом к направлению потока. При таком обтекании на нижней стороне пластинки давление повышается, вследствие чего линии тока расходятся здесь вправо и влево.

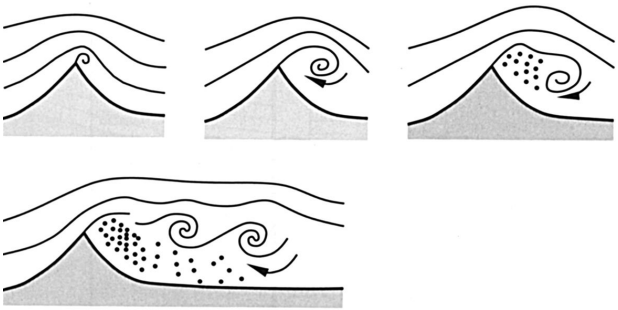


Рис. 4.12. Образование и распад поверхности раздела

На верхней стороне линии тока вследствие понижения давления загибаются.

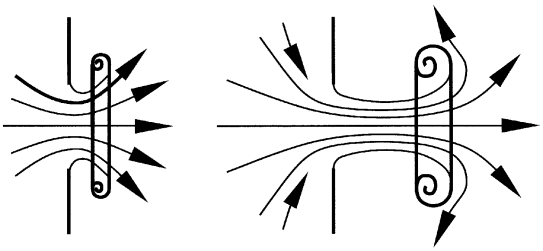


Рис. 4.13. Возникновение струи

Поэтому около задней кромки пластинки поток под пластинкой, если смотреть из центра, движется к боковым ребрам, а под пластинкой, наоборот — к середине пластинки. При установившемся течении абсолютная величина скорости одинакова на обеих сторонах поверхности раздела, т. к.

давление изменяется непрерывно и все линии тока берут свое начало из невозмущенной области далеко перед пластинкой, поэтому скачок скорости на поверхности раздела имеет чисто поперечный характер. Как показывают наблюдения, такие поверхности раздела свертываются около боковых ребер пластинки и дают два вихря, которые можно проследить на всем протяжении пути, пройденного пластинкой. На рис. 4.14 показаны форма поверхности раздела в различных сечениях позади пластинки. Исследования подобного рода явлений имеют очень важное значение для понимания обтекания крыльев самолета. Об этом речь пойдет в гл. 6. Вихри можно сделать видимыми, если осторожно выпустить в воздух табачный дым и через его скопление быстро провести концом длинной линейки, установленной к направлению движения под небольшим углом.

4.1.4. Измерение давления

Особого интереса заслуживает случай обтекания углубления в стенке, изображенный на рис. 4.15. В первый момент движения жидкости в углублении возникает течение (рис. 4.15 слева). На острых краях углубления сначала образуются вихри и поверхности раздела. Но после того, как вихри уносятся вместе с потоком, линии тока образуют вид, представленный на рис. 4.15 справа, правда при условии, что ширина углубления небольшая.

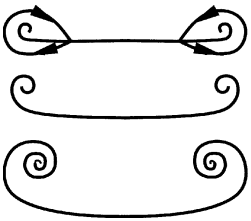


Рис. 4.14. Поверхность раздела позади наклонной пластинки

В углублении жидкость практически находится в покое, поэтому давление здесь такое же как в потоке, протекающем над углублением. Если соединить такое углубление при помощи трубки с каким-нибудь прибором для измерения давления, то таким образом можно измерить давление в текущей жидкости. Вместо углубления можно сделать в стенке просто отверстие, например с круглым поперечным сечением. Края отверстия или углубления

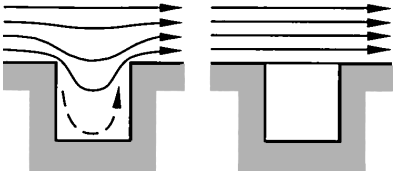


Рис. 4.15. Обтекание углубления в стенке (каверна)

должны быть совершенно ровными, без всяких заусениц, т. к. наличие хотя бы одной заусеницы приводит к изгибанию поверхности раздела, и следовательно к резкому изменению давления. Допустимо умеренное скругление краев отверстия. Правильное устройство отверстия для измерения давления в стенке трубы показано на рис. 4.16. Рассмотренная идея может быть применена для измерения давления внутри движущейся жидкости. Для этой цели в жидкость вводится очень тонкий диск, имеющий маленькое отверстие посередине и припаянный к концу тонкой трубки (шайба Сера) рис. 4.16. Однако такой прибор очень чувствителен к отклонению плоскости диска от направления потока. Менее чувствителен к отклонению потока зонд, выполненный в виде трубочки с заостренным наконечником. Этот прибор дает более или менее точные показания даже при отклонении оси трубки от направления потока на 5°. При больших углах отклонение показания получается заниженным.

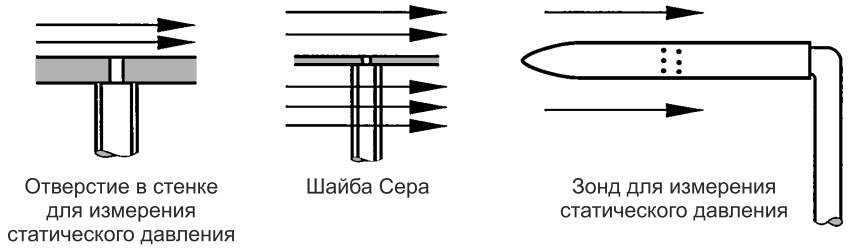


Рис. 4.16. Измерение давления

Соединив измерение статического давления с измерением полного давления, как это показано на рис. 4.5, можно измерить динамическое давле-

ние $p_d = \rho w^2/2$, равное разности полного и статического давлений. Зная динамическое давление и плотность ρ, можно вычислить скорость течения w. При нормальном давлении атмосферного воздуха плотность $\rho = 1,21$ Нс^2/м^4, для динамического давления при скорости $w = 10$ м/с имеем $p_d = 60,5$ Н/м^2. Для воды при такой же скорости и плотности $\rho = 1,050$ Нс^2/м^4 динамическое давление значительно больше, $p_d = 50000$ Н/м^2.

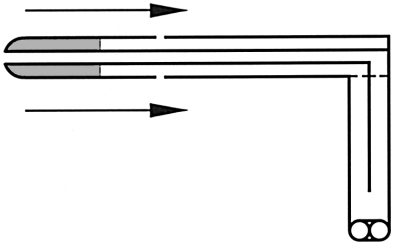


Рис. 4.17. Гидрометрическая трубка Прандтля для измерения скорости

Зонд для измерения статического давления (рис. 4.16) можно скомбинировать с трубкой Пито (рис. 4.5) в одном приборе. Тогда получим гидрометрическую трубку Прандтля для измерения скорости (рис. 4.17). Прибор мало чувствителен к отклонению своей оси от направления потока.

Измерение статического давления через отверстие в стенке применяется не только для измерения скорости, но и для многих других целей. Так, например, часто требуется знать распределение давления вдоль поверхности обтекаемого тела (например, крыла самолета). Для этой цели в модели тела делается ряд отверстий, рис. 4.16, которые последовательно соединяются с приборами, измеряющими давление.

На рис. 4.18 изображен хорошо известный опыт для демонстрации распределения давления в трубе, сначала суживающейся, а затем снова расширяющейся. Этот эксперимент служит наглядным пояснением уравнения Бернулли. Дроссельный кран на конце трубки позволяет регулировать давление в трубе. Если кран полностью открыт, то в узком сечении возникает понижение давления. Заметим, что возрастание давления в трубе за критическим (самым узким) сечением вследствие трения несколько меньше, чем это следует из теории движения жидкости лишенной трения.

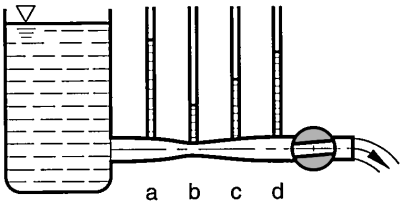


Рис. 4.18. Распределение давления в трубке с переменным сечением

4.1.5. Потенциальное течение

До сих пор мы удовлетворялись в большинстве случаев определением только средних значений скорости течения жидкости. Между тем целью математической гидродинамики является определение скорости течения в каждой точке пространства. Для однородной жидкости, лишенной трения, в этом направлении достигнуты большие успехи, с помощью сложных математических методов, значение которых мы не можем предполагать у читателя настоящей книги. Поэтому далее мы ограничимся общими рассуждениями о свойствах движения однородной жидкости без трения и некоторыми простыми примерами.

Прежде всего мы остановимся на теореме В. Томсона, доказательство которой пока отложим. Предварительно введем и объясним некоторые понятия.

Под жидкими линиями и жидкими поверхностями понимают такие линии и поверхности, которые все время состоят из одних и тех же частиц жидкости.

Линейным интегралом вдоль заданной линии между точками A и B называется интегралом от произведения составляющих скорости в направлении ds на линейный элемент $\boldsymbol{ds}$, т. е.

$$\Lambda = \int\limits_A^B w\, ds \cos(\alpha) = \int\limits_A^B \boldsymbol{w}\, \boldsymbol{ds}$$

(где α есть угол между $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{ds}$; $\boldsymbol{w}\, \boldsymbol{ds}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{ds}$). При неустановившемся течении эти линейные интегралы дают мгновенное состояние распределения скоростей.

Величина линейного интеграла, взятого вдоль замкнутой линии называется циркуляцией и обозначается буквой Г. Применяя для интеграла вдоль замкнутой линии знак $\oint$, мы можем написать:

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{w}\, \boldsymbol{ds}. \tag{4.12}$$

После этих предварительных объяснений мы можем сформулировать теорему В. Томсона: «В однородной жидкости, лишенной трения, циркуляция вдоль замкнутой жидкой линии остается в все время постоянной».

Из этой теоремы можно вывести много важных следствий. Первое из них заключается в следующем:

Если движение жидкости начинается из состояния покоя, то перед началом движения циркуляция вдоль каждой замкнутой жидкой линии заведомо равна нулю. В любой момент времени циркуляция для этой линии равна нулю. Но если в какой-нибудь области линейный интеграл вдоль любой замкнутой кривой равен нулю, тогда линейный интеграл, взятый от одной точки A до какой-нибудь другой точки B не зависит от пути, т. е. безразлично какой путь выбирается внутри области. Можно вернутся по тому же пути интегрирования из B в A (из-за обратного пути ds уничтожается) и другим путем снова вернуться в B. Получаем $\int_A^B$ плюс интеграл вдоль замкнутой линии, который равен нулю. Таким образом снова получается интеграл $\int_A^B$, что и надо было доказать. Если точка A неподвижная, то линейный интеграл $\int_A^B w * ds$ дает каждой точке B числовое значение, т. е. (каждой точке B припишем определенное число). Обозначим его через ϕ и назовем потенциалом в точке B. Перейдем теперь о точки B к точке C, находящейся от B на расстоянии ds и вычислим интеграл $\int_A^C$. Так как при составлении этого интеграла мы, очевидно, можем следовать через точку B, то мы будем иметь:

$$\int_A^C = \int_A^B + \boldsymbol{w} \cdot ds \quad \text{или} \quad \Phi_C = \Phi_B + w \cdot ds \cdot \cos(\alpha) = \Phi_B + w \cdot dh, \tag{4.13}$$

где dh есть проекция $\boldsymbol{ds}$ на направление $\boldsymbol{w}$. Для $\alpha = 90^\circ$ мы имеем $\cos(\alpha) = 0$ и поэтому $\Phi_C = \Phi_B$. И обратно, если $\phi_C = \phi_B$, то отрезок $ds = \overline{BC}$ всегда перпендикулярен к направлению скорости $\boldsymbol{w}$. Совокупность всех точек для которых $\Phi = \Phi_B$, образует поверхность, проходящую через точку B и отделяющую область в которой $\Phi > \Phi_B$ от области, где $\Phi < \Phi_B$. Плоскость, касательная к этой поверхности в точке B перпендикулярна к

вектору скорости $\boldsymbol{w}$ в точке B. Отсюда следует, что линии тока, направление которых в каждой точке совпадает с направлением вектора скорости, ортогональны к поверхностям равного потенциала $\Phi = \mathrm{const}$.

Обозначив $\Phi_C - \Phi_B$ через $d\Phi$ мы получим из уравнения (4.13) для произвольных значений угла a соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = w \cdot \cos(\alpha) \tag{4.14}$$

или

$$\frac{d\Phi}{dh} = w, \tag{4.15}$$

причем отрезок dh перпендикулярен к поверхности $\Phi = \mathrm{const}$. В векторном виде запишем:

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{grad} \Phi \tag{4.16}$$

и объединим его с положением (4.15), что $\boldsymbol{w}$ перпендикулярна плоскостям $\Phi = \mathrm{const}$. Тогда скорость по величине и направлению будет равна максимальному повышению, т. е. будет равна градиенту потенциала Φ.

Введенные нами геометрическим путем понятия потенциала и градиента совпадает с понятием потенциала сил в физике. Отсюда и было взято это название — потенциал. Правда в физике градиент потенциала сил это напряженность поля, а градиент рассматриваемого здесь потенциала — это скорость. Поэтому введенный нами потенциал называют потенциалом скоростей. Заметим, что между потенциалами имеется еще одна, чисто условная разница; обычно принимают, что напряженность силового поля равна $\boldsymbol{g} = -\operatorname{grad} U$, а скорость течения равна $\boldsymbol{w} = +\operatorname{grad} \Phi$. Из всего сказанного следует, что каждое движение однородной жидкости без трения, возникающее из состояния покоя, обладает потенциалом. Движения жидкости, обладающие потенциалом, называется потенциальными течениями. Они характеризуются тем, что частицы жидкости не совершают вращения. Мерой вращения частицы служит циркуляция вдоль небольшой замкнутой кривой, которая по теореме Томсона равна нулю.

В качестве противоположного примера рассмотрим жидкость, которая вращается как твердое тело с угловой скоростью ω. Для окружности радиуса r с центром окружности в качестве нулевой точки системы отчета скорость равна $\omega \cdot r$. Поступательное вращение не влияет на циркуляцию, поэтому при вычислении циркуляции оно не учитывается. Скорость направлена по касательной к окружности, а линейный интеграл для длины окружности равен $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \omega \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \omega$, то разделив это уравнение на площадь окружности $A = \pi \cdot r^2$, получим $\Gamma / A = 2 \cdot \omega$. Γ / A таким

образом и есть мера вращения жидкости. Если площадка A расположена в плоскости и образует с углом вращения угол α, то для движения получим $\Gamma/A = 2 \cdot \omega - \sin(\alpha)$. Если ось вращения перпендикулярна A, то Γ/A принимается максимальное значение.

Итак, при потенциальном течении циркуляция вдоль жидкой линии, проходящей внутри поля течения, равна нулю. Несмотря на это при движении однородной жидкости без трения, начинающемся из состояния покоя, наблюдается возникновения вихря. Если рассмотреть процессы при образовании поверхности раздела (гл. 4.1.3), то обнаружится, что все жидкие линии, проходящие внутри жидкости, находящейся в состоянии покоя изменяются и деформируются аналогичным образом, и что ни одна из них не пересекает поверхность раздела. Поэтому теорема Томсона не позволяет сделать ни каких заключений о взаимоотношении между частями жидкости, лежащими по разные стороны от поверхности раздела. Следовательно, возникновение в жидкости, практически лишенной трения, поверхностей раздела, а вместе с ними и вихрей, нисколько не противоречит теореме Томсона.

В реальных жидкостях, которые везде обладают вязкостью, вместо поверхности раздела образуется слой раздела, правда, обычно очень тонкий. Слой раздела всегда образуется из частиц, движущихся в непосредственной близости от поверхности твердого тела, где влиянием трения нельзя пренебрегать даже при очень малой вязкости. Поэтому точный анализ явлений, происходящих внутри слоя раздела, возможен только на основе учета трения. Для изучения явлений, происходящих вне слоя раздела, как правило, достаточно рассматривать вместо слоя раздела — поверхность раздела. Влияние трения будет подробно рассмотрено в гл. 4.2.

В гл. 4.1.2 исходя из падения давления в направлении перпендикулярном к линии тока для течений жидкости, в которых постоянная уравнения Бернулли для всех линий потока одинаковая, выводится уравнение (4.10). С учета радиуса кривизны r линии тока получается циркуляция вдоль небольшого четырехугольника, образованного дугами двух соседних линий тока и отрезками двух смежных нормалей (рис. 4.19)

$$w{\cdot}r{\cdot}d\varphi - \left(w + \frac{\partial w}{\partial s'} \cdot ds'\right){\cdot}(r{+}ds'){\cdot}d\varphi = -ds'{\cdot}d\varphi{\cdot}\left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial s'} + w + \frac{\partial w}{\partial s'} \cdot ds'\right).$$

Причем нормали дают очень маленький вклад в циркуляцию. Последний член в скобках можно отбросить как величину более высокого порядка малости. Остаток в скобках по уравнению (4.10) равен нулю. Это значит, что

верхние течения (потоки), для которых уравнение Бернулли на всех линиях тока области (течения) имеет одинаковое значение, представляют собой движения жидкости с циркуляцией равной нулю для каждой частицы, т. е. это движение потенциальное. И наоборот, уравнение Бернулли выполняется в каждом стационарном потенциальном движении перпендикулярном к линиям тока.

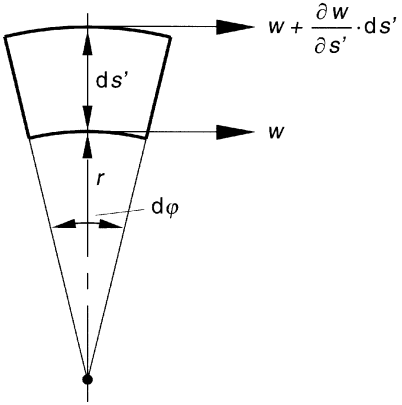


Рис. 4.19. Четырехугольник, вдоль которого вычисляется циркуляция

Математическое дополнение

Доказательство теоремы Томсона.

Пусть u, v, w есть составляющие вектора скорости, тогда линейный интеграл $\int \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{d}s$ можно представить в следующем виде $\int (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz)$. Длину дуги $\boldsymbol{d}s$ можно заменить на три dx, dy, dz. u, v, w — это составляющие скорости в направлении dx, dy, dz. Найдем производную от этого интеграла по времени, предположив, что кривая все время состоит из одних и тех частиц жидкости. Общее изменение по времени обозначается d/dt. Сначала вычислим $d(\int u \cdot dx)/dt$. Путем преобразований получаем $\int (du/dt) \cdot dx + \int (u \cdot d(dx))/dt$. В первом интеграле du/dt на основании уравнения Эйлера (4.5) может быть заменено на $F_x = (1/\rho) \cdot (\partial p/\partial x)$. Для одинаковых (фиксированных) частиц имеем $dx/dt = u$. Таким образом $d(x+dx)/dt = u+du$, т. е. $d(dx)/dt = du$. Причем под du следует понимать

разность одновременных значений составляющих скорости и для частиц жидкости линии, находящихся в точках с координатами $x + dx$ и x. Таким образом, для второго интеграла получим $\int u \cdot du$. Путем преобразований обоих членов $\int v \cdot dy$ и $\int w \cdot dz$ линейного интеграла имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\int (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz)\right) = \int (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) -$$

$$- \int \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz\right) + \int (u \cdot du + v \cdot dv + w \cdot dw).$$

Предположим теперь, что массовая сила F_x, F_y, F_z имеет потенциал U, следовательно:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Далее предположим, что плотность зависит только от давления (однородная жидкость). В таком случае взяв интегралы вдоль жидкой линии между двумя точками A, B, которые также совпадают с соответствующими частицами жидкости. Для изменения линейного интеграла по времени в каждый момент времени получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_A^B (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz)\right) =$$

$$= U_A - U_B + F_A - F_B + \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)_B - \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)_A.$$

Причем снова берется как и в гл. 4.1.1 $\int (dp/\rho) = F(p)$ и знаки квадрата скорости противоположны знакам в уравнении Бернулли.

Если речь идет о замкнутой линии, то точки A и B совпадают и правая часть равенства делается равной нулю. Таким образом, теорема Томсона доказана. При этом играют роль допущения о том, что силовое поле должно иметь потенциал. Мы не упомянули в приведенной выше формулировке теоремы, т.к. исходили из предположения, что массовые силы не проявляют своего действия. Второе более важное допущение — об однородности жидкости. Вывод этой теоремы доказывает, как например, при неодинаковом нагревании воздушной массы можно рассчитать изменение линейного интеграла по времени.

Замечания относительно потенциального движения.

Угловая скорость ω имеет 3 составляющие:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Пусть компонента ω_z вихря равна нулю, тогда получим $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$ и т. д. Если ввести потенциал скорости Ф, т.е. если взять $u = \partial\Phi/\partial x$, $v = \partial\Phi/\partial y$, $w = \partial\Phi/\partial z$, то эти отношения выполняются индентично. Тогда имеем $\partial(\partial\Phi/\partial y)/\partial x = (\partial\Phi/\partial x)/\partial y$ и т.д. Это отношение всегда выполняется для регулярных функций нескольких переменных. Имея $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$ и $\partial w/\partial x = \partial u/\partial z$ из уравнения (4.5) получаем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + w\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$

Соответствующие уравнения получаем для dv/dt и dw/dt. Поставив эти выражения в три уравнения Эйлера (4.6), умножив их последовательно на dx, dy, dz, а затем сложив, все члены без ограничения пути интегрирования можно проинтегрировать. При $\int(dp/\rho) = F(p)$ получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} + F + U = \text{const}. \tag{4.18}$$

Постоянная в правой части зависит еще от времени, т.к. интегрирование осуществляется при установленном времени (например давление в зависимости от времени может изменятся в результате внешнего воздействия). Поэтому лучше заменить const на $f(t)$. Выражение $\partial\Phi/\partial t$ получают из $\Phi = \int(u\cdot dx + v\cdot dy + w\cdot dz)$ и $\int(\partial u/\partial t)\cdot dx = \partial(\int u\cdot dx)/\partial t$ и т. д. Для установившихся течений уравнение (4.18) переходит в обычное уравнение Бернулли (4.4).

Из уравнения (4.14) вытекает связь составляющих скорости u, v, w с потенциалом Ф. Для этого ds последовательно присваивают значение dx, dy, dz. Получаем:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{4.19}$$

Из уравнения неразрывности (3.4) подставляя выражения уравнения (4.19) имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{4.20}$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа. Это уравнение встречается в электростатике — в учении об электрическом потенциале, где оно выполняется в тех местах поля, в которых отсутствуют заряды и диэлектрическая постоянная имеет постоянное значение. Поэтому здесь можно использовать решение уравнения (4.20), известного из электростатики, как, например, решение для точечного заряда, для диполя и т.д. Для практических приложений важное значение имеет то, что сумма или разность двух решений уравнения Лапласа также является решением, что непосредственно следует из линейности этого уравнения (4.20). Скорости получают из наложения двух потенциалов путем сложения векторов соответствующих скоростей.

Поток в критической точке

Одним из самых простых выражений потенциала будет следующее: $\Phi = (1/2) \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2)$. Подставив это выражение Ф в уравнение (4.20) получим $a + b + c = 0$. Для симметрии выражения и,соответственно, для оси z можно взять $b = a$. Тогда из уравнения (4.20) получается, что $c = -2 \cdot a$. Таким образом для потенциала будем иметь:

$$\Phi = \frac{a}{2} \cdot (x^2 + y^2 - 2 \cdot z^2),$$

где $u = a \cdot x, v = a \cdot y, w = -2 \cdot a \cdot z$. Линии тока в плоскости $y - z(x = 0)$ определяются дифференциальным уравнением:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{w}{v} = -\frac{2 \cdot z}{y},$$

интегрируя которое получим:

$$\ln(z) = \text{const} - 2 \cdot \ln(y) \quad \text{или} \quad y^2 \cdot z = \text{const}$$

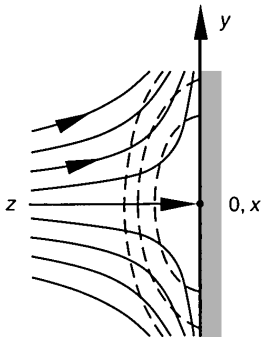


Рис. 4.20. Поток в критической точке

Если движение установившееся, т.е. если коэффициент a не зависит от времени, то давление в потоке равно:

$$p = \text{const} - \frac{\rho}{2} \cdot (u^2 + v^2 + w^2) = \text{const} - \frac{\rho \cdot a^2}{2} \cdot (x^2 + y^2 + 4 \cdot z^2).$$

Следовательно, максимум давления получается в точке $x = y = z = 0$. Поверхности равного давления представляют собой эллипсоиды с осями, длины которых относятся как $1 : 1 : (1/2)$ рис. 4.20.

Источники и стоки

Согласно замечаниям, которые мы привели к уравнению (4.20) известные решения электростатических потенциалов является также решениями для возможных потенциалов течений, пока выполняются граничные условия. Уже электростатическое поле точечного заряда приводит к возникновению важного течения, так называемого течения источников и стоков. Потенциал имеет вид $\Phi = \pm C/r$, где r — это расстояние от точки O, а C — постоянная. Таким образом потенциал на сфере с центральной точкой O постоянный. Скорость ориентирована всегда в радиальном направлении, т.к. она направлена перпендикулярно поверхности постоянного потенциала и имеет величину $|C|/r^2$. Количество жидкости, протекающей за единицу времени через сферу радиусом r (поверхность имеет площадь $4 \cdot \pi \cdot r^2$) будет равно $Q = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot C/r^2 = 4 \cdot \pi \cdot C$. Это количество возникает в источнике в точке O (в центре) вновь за секунду, а в стоке наоборот исчезает в

центре за единицу времени. С физической точки зрения осуществить такое течение невозможно. Однако если в какую-нибудь точку O объема, занятого жидкостью, подвести узкую трубочку и отсасывать через нее жидкость, то в окрестности точки O возникает поток, приближенно совпадающий с описанным видом (приближенно, т. к. конечный объем трубки оказывает влияние на течение).

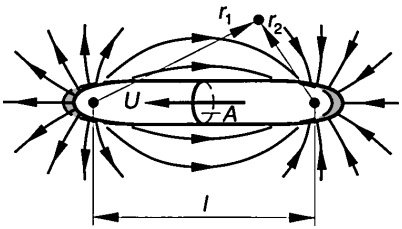


Рис. 4.21. Потенциальный поток около движущегося тела. Система не движется

Следующий пример полезного использования течения источника и стока заключается в следующем: Если, например, в жидкости движется удлиненное тело в направлении своей продольной оси со скоростью U, то его передний конец вытесняет перед собой жидкость, к заднему же краю, по мере продвижения тела вперед, жидкость притекает (рис. 4.21). Следовательно, около краев тела движение жидкости такое, как если бы около переднего конца был источник, а около заднего конца — сток. Фактически течение жидкости можно представить уравнением:

$$\Phi = C \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

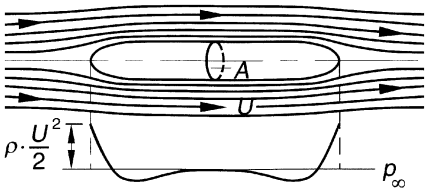


Рис. 4.22. Потенциальное течение и распределение давления вокруг движущегося тела, система измерения, движущаяся вместе с телом.

Для того, чтобы это уравнение дало точное решение, концы тела должны иметь определенную, хорошо скругленную форму. Однако указанный потенциал дает достаточно хорошее приближение и при другой форме кон-

цов тела. Мощность Q источника и стока равны $A{\cdot}U$, где A — это поперечное сечение тела, т.е. $C = A \cdot U/(4 \cdot \pi)$. Рассматриваемый поток жидкости, очевидно, неустановившийся, т.к. вместе с перемещением тела перемещается и поле скоростей в жидкости. Но если это течение рассматривать в системе отчета, движущейся вместе с телом, то в такой системе поток будет установившимся. Тело находится в состоянии покоя и жидкость обтекает тело. Математически такой установившийся поток определяется потенциалом скоростей $\Phi' = \Phi + U \cdot x$. Его линии тока изображены на рис. 4.22. Кривая внизу рисунка показывает распределение давления на поверхности, найденное на основании уравнения Бернулли.

Течение вдоль других узких тел вращения можно представить непрерывным распределением источников вдоль оси тела. Если будем сближать расстояние между источником и стоком и одновременно увеличивать их мощность в таком же соотношении, в каком уменьшается расстояние между ними, то получается граничный случай, называемый диполем. Течение жидкости, изображенное на рис. 4.22 переходит тогда в обтекание шара (рис. 4.23). При радиусе шара R соответствующий потенциал имеет вид $\Phi = U \cdot x \cdot (1 + R^3/(2 \cdot r^3))$. Картина действительного обтекания шара имеет вследствие влияния трения несколько иной вид (см. гл. 4.2.6).

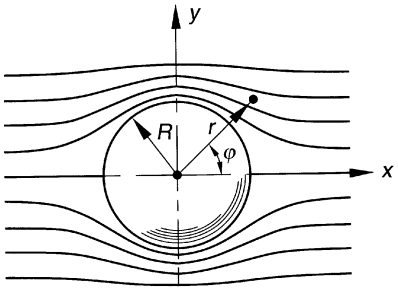


Рис. 4.23. Потенциальный поток около шара.

Плоское движение

Если при движении жидкости все линии тока представляют собой плоские кривые, расположенные в параллельных плоскостях, и скорость течения во всех точках каждой прямой, перпендикулярной к семейству параллельных плоскостей, одинаковая, то говорят о плоском движении. Пусть одна из этих плоскостей будет плоскостью $x - y$, составляющая скорости — $w = 0$, а составляющие скорости u, v будут только функциями от x и y. Можно показать, что реальная, а также мнимая часть любой аналитической функции комплексных переменных $x + i \cdot y$ представляет собой потенциал, удовлетворяющий уравнению (4.20). Пусть комплексная переменная будет $z = x + i \cdot y$,

функцию обозначим через $F(z)$ с действительной частью Φ и мнимой — Ψ. Тогда мы имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Но

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

поэтому

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Подставляя сюда $F = \Phi + i \cdot \Psi$, мы получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Для того чтобы это равенство соблюдалось, должны совпадать между собой его вещественные части и отдельно мнимые части. Следовательно, если учесть $1/i = -i$, то должны соблюдаться условия:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v. \tag{4.21}$$

Таким образом мы получим:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0,$$

т. е. уравнение Лапласа (4.20) здесь выполняется идентично. Для функции Ψ мы также имеем $\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 = 0$. Таким образом функция Ψ тоже является потенциалом скоростей. Из уравнения 4.21 следует, что течения относящиеся к потенциалам Φ и Ψ в каждой точке перпендикулярны друг к другу и имеют одинаковую величину скорости. Оба направления градиентов скорости указываются через $\operatorname{tg}(\alpha) = (\partial \Phi / \partial y)/(\partial \Phi / \partial x) = v/u$ и $\operatorname{tg}(\beta) = (\partial \Psi / \partial y)/(\partial \Psi / \partial x) = u/(-v)$, т. е. $\operatorname{tg}(\beta) = -1/\operatorname{tg}(\alpha)$. Величина градиента скорости в обоих случаях равна $\sqrt{u^2 + v^2}$. Вследствие ортогональности обоих потоков линии равного потенциала одного потока являются линиями тока другого. Скорость везде направлена перпендикулярно поверхности потенциала. Функция, значения которой остается постоянными на линиях

тока, называется функцией тока. Следовательно, если функция Φ выбрана в качестве потенциала скоростей, то Ψ будет функцией тока. Функция тока имеет еще другое наглядное значение. Разность её значений в двух точках, равна объему жидкости, протекающему в единицу времени между обеими точками в слое толщиной равной единице.

Из свойств линий равного потенциала и равного значения функции тока получается возможность начертить обе системы линий для каких — то заданных граничных условий. Начинаем с чернового проектирования линий тока, вычерчиваем для этого ортогональную систему и работаем над проектом до тех пор, пока все ячейки (петли) везде станут полностью квадратными. Отличительный признак при этом: одинаковая длина средних (центр.) линий в квадратах и ортогональность двух семейств диагональных кривых, проходящих через углы квадрата, удовлетворяющих уравнениям $\Phi + \Psi = \mathrm{const}$ и $\Psi - \Phi = \mathrm{const}$. На рис. 4.25; 4.26; 4.29; 4.33; 4.4.2 представлены такие графические изображения. Рис. 4.24 дает пример графически сконструированного решения.

Рассмотрим теперь несколько простых примеров плоских потоков. Плоский поток перед стенкой определяется функцией $F = (a/2) \cdot z^2$.

В самом деле мы имеем:

$$\Phi + i \cdot \Psi = \frac{a}{2} \cdot (x^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y - y^2).$$

Следовательно,

$$\Phi = \frac{a}{2} \cdot (x^2 - y^2), \quad \Psi = a \cdot x \cdot y.$$

Последнее уравнение показывает, что линиями тока $\Psi = \mathrm{const}$ является равносторонние гиперболы. Составляющие скорости u и v равны.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a \cdot x, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -a \cdot y.$$

Плоский источник определяется функцией $F = b \cdot \ln(z)$. Получаем $\ln(z) = \ln(r) + i \cdot \varphi$, где r — радиус, φ — центральный угол в полярных координатах (т. е. $\Phi = \mathrm{const}$ на окружностях $r = \mathrm{const}$, а $\Psi = \mathrm{const}$ на радиальных прямых $\varphi = \mathrm{const}$).

В качестве третьего примера рассмотрим поток вдоль двух пересекающихся между собой стенок, образующих при пересечении угол α. Если площадь сечения лежит в плоскости координат, а первая стенка лежит на

оси x, то функция имеет вид $F = (a/n) \cdot z^n$, где $n = \pi/\alpha$. Введем полярные координаты и получим:

$$z = x + i \cdot y = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)), \quad z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)).$$

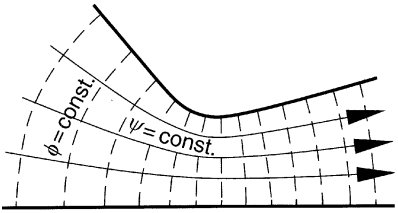


Рис. 4.24. Графическое изображение линий Φ и Ψ.

Таким образом получается функция тока $\Psi = (a/n) \cdot r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$. Для $\varphi = 0, \pi/n, 2 \cdot \pi/n, \ldots$, т. е. для $\varphi = 0, \alpha, 2 \cdot \alpha, \ldots$, $\Psi = 0$ форму линий тока при различных значениях α можно увидеть на рис. 4.25. При $\alpha < \pi$ в начале скорость равна 0, а при $\alpha > \pi$ она ∞. Предельный переход к $\alpha = 0$ приводит к функции:

$$F = a' \cdot e^{\mu \cdot z} = a' \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\mu \cdot y) + i \cdot \sin(\mu \cdot y)).$$

Расстояние между стенками при этом равно $h = \pi/\mu$. Поток, вращающийся около правого угла $F' = a' \cdot e^{-i \cdot \mu \cdot z} = a' \cdot e^{\mu \cdot y} \cdot (\cos(\mu \cdot x) - i \cdot \sin(\mu \cdot x))$ можно использовать для представления волновых процессов (рис. 4.42).

Течение около круглого цилиндра радиуса R определяется функцией $F = U \cdot (z + R^2/z)$. Вычислим функцию тока Ψ получаем $\Psi = U \cdot \sin(\varphi) \cdot (r - R^2/r)$. Она равна нулю $\Psi = 0$ на оси x, где $\sin(\varphi) = 0$, и на окружности радиуса R, где $r - R^2/r = 0$. Картина линий тока и линий потенциала получается похожей на картину представленную на рис. 4.24.

Можно было бы привести еще много других примеров плоских потоков. Для нахождения соответствующих решений можно использовать еще некоторое количество особых методов. Так, например, комплексное отношение $z = f(\zeta)$, в котором $\zeta = \xi + i \cdot \eta$ представляет собой другое комплексное число, связывает каждую пару значений ξ, η с парой значений x, y. Каждой точке плоскости ξ, η соответствует точка плоскости x, y. Такое соответствие называют отображением. Каждой линии соответствует линия, каждой

точке пересечения двух линий соответствует точка пересечения соответствующих линий. То есть соотношения аналогичны соотношениям уравнения (4.21). Прямоугольная сетка одной плоскости отображается также в прямоугольную (но в общем случае в криволинейную) сетку другой плоскости. Масштаб отображения в обоих направлениях получается одинаковым. Это означает, что в бесконечно малых частях отображение происходит с соблюдением подобия. Поэтому такого рода отображение называется конформными отображениями. Примеры плоских потоков, разобранные выше, одновременно являются и примерами конформных отображений, если только Φ и Ψ заменить на ξ и η. Последний пример (течение около круглого цилиндра) показывает в частности, как половина плоскости Φ, Ψ отображается на область, ограниченную двумя отрезками оси x и расположенной между ними половиной окружности радиуса R.

Если F аналитическая функция от z, а z — аналитическая функция от ζ, это значит, что в плоскости ζ функция $F = \Phi + i \cdot \Psi$ также определяет некоторый поток. Следовательно, из каждого потока в плоскости $x - y$ в результате каждого отображения плоскости $x - y$ на плоскость $\xi - \eta$, возникает новый поток в плоскости $\xi - \eta$. Такой способ получения новых потоков из заданного потока может быть повторен сколько угодно раз.

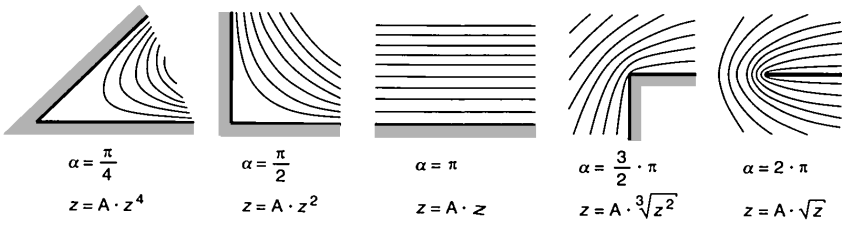


Рис. 4.25. Потоки, определяемые функцией $F = A \cdot z^n$

Эта связь имеет важное значение для гидродинамики. Существуют различные методы, позволяющие конформно отображать область, лежащую вне контура, близко по форме профилям современных крыльев самолета, на область лежащую вне окружности. Поэтому из течения около окружности можно вывести течение около профиля крыла самолета и т.д.

Производная dF/dz равна $u - i \cdot v$ (сопряженное значение для комплексной скорости $u + i \cdot v$). Обозначим эту величину через w, тогда $w = dF/dz$ также будет являться аналитической функцией от z или от F.

Следовательно, связь плоскости Φ, Ψ с плоскостью $u - v$, также является конформным отображением. Существуют случаи когда сделать предположения о скорости, достаточной для того, чтобы полностью определить область в плоскости w. Так, например, при истечении жидкости через щель между плоскими стенками (рис. 4.26 слева) задается направление линии тока на границах, пока (она линия) протекает вдоль плоской стенки. На границах свободной струи направление неизвестно. Но известна величина скорости, которая по уравнению Бернулли должна быть постоянной, если давление постоянно. Отсюда следует ограничение области (рис. 4.26 справа). Теперь нужно только правильно представить возникшие особенности, чтобы F представить как функцию от w. Можно определить обратную функцию $w = w(F)$. Из $dF/dz = w(F)$ получаем $z = \int (dF/w(F))$. Наконец, отделив вещественную и мнимую части комплексной переменной, мы найдем для каждого значения Φ и Ψ соответствующие им значения x, y, т. е. получим картину линий тока.

Приведенных примеров достаточно, чтобы дать представление о комплексных методах для определения потенциальных течений.

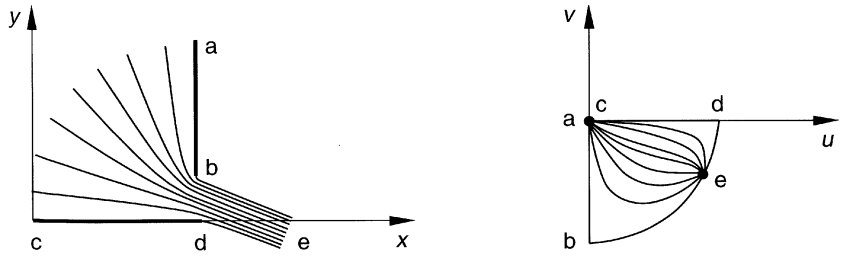


Рис. 4.26. Течение и поле скоростей при истечении из щели

Хотя для всех потенциальных течений в любой малой области течения циркуляция равна нулю, тем не менее существуют потоки, в которых циркуляция проявляется во всем потоке. Правда, необходимым условием для этого является многосвязность, которая характеризуется тем, что существуют такие замкнутые кривые, которые нельзя стянуть в точку, не разрывая их, т. е. не выходя за пределы области. Примерами двухсвязной области могут служить комната с колонной посередине или область вокруг кольца. Пусть циркуляция вдоль одной из таких кривых равна Γ, тогда циркуляция вдоль любой другой кривой, возникающей из первой путем непрерывной

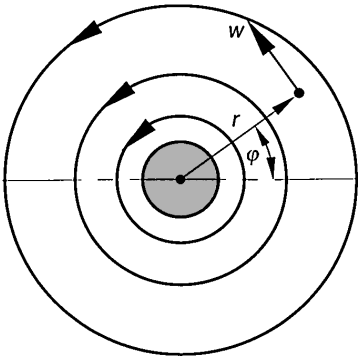


Рис. 4.27. Потенциальное течение с циркуляцией

деформации не выходя за пределы области, также будет равна Γ, если течение происходит без вращения (т.е. в каждой взаимосвязанной части области циркуляция исчезает). Потенциал, который определяется из линейного интеграла между фиксированной точкой и соответствующей (заданной) точкой, является при таких течениях многозначным, увеличиваясь при каждом обходе на величину Γ.

Простейший плоский поток такого рода определяется потенциалом скоростей $\Phi = C \cdot \varphi$, где φ есть центральный угол (рис. 4.27). Этот потенциал, удовлетворяющий уравнению (4.20) с комплексной записью $F = -i \cdot C \cdot \ln(z)$, возрастает при каждом полном обходе ($\varphi_2 = \varphi_1 + 2 \cdot \pi$) на величину $2 \cdot \pi \cdot C$, следовательно, и является циркуляцией Γ. Поверхностями равного потенциала являются плоскости, проходящие через начало координат, а линиями тока являются окружности. Скорость течения $w = d\Phi/ds$ при $ds = r \cdot d\varphi$ дает $w = C/r$. Течение поэтому соответствует течению, приведенному в качестве примера на рис. 4.6. Для $r = 0$ скорость получается равной бесконечности физически такой поток возможен только вне некоторого ядра конечного диаметра (на рис. 4.27 заштрих. серым). Ядро может быть образовано либо твердым телом, либо вращающейся жидкостью, в которой отсутствует потенциал.

Наконец, оно может состоять из другой (более легкой) жидкости, не принимающей участия в движении. Примером последнего случая является полый водяной вихрь, в котором вода совершает круговое движение вокруг ядра из воздуха. Под действием силы тяжести свободная поверхность такого

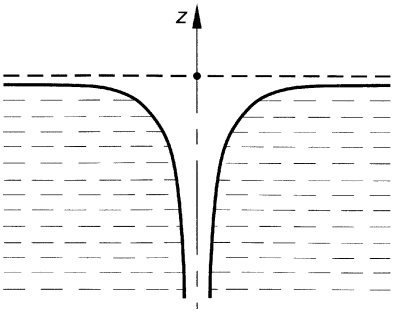


Рис. 4.28. Полый вихрь.

полого вихря принимает форму, изображенную на рис. 4.28. Форма этой поверхности получается путем применения уравнения Бернулли

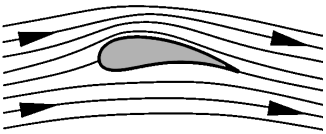
$$z = z_0 - \frac{w^2}{2 \cdot g} = z_0 - \frac{C^2}{2 \cdot g \cdot r^2}.$$

Подобного рода воронки часто наблюдается в реках, в ваннах (при спуске воды). Во всех таких случаях мы имеем дело с потоками, в которых циркуляция уже существует и вызвана каким-то посторонними причинами.

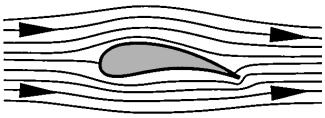
4.1.6. Подъемная сила крыла. Эффект Магнуса

Другим примером потенциального потока с циркуляцией является определение подъемной силы крыла. Обтекание крыла (изображенное на рис. 4.29 (верхний рис.)) можно получить при наложении циркуляционного потока на обычный потенциальный поток (без циркуляции) вокруг крыла. Таким образом поток вокруг крыла (обтекание крыла) уже само обладает циркуляцией. Даже без проведения расчетов видно, что поток связанный с циркуляцией усиливает потенциальное течение на верхней стороне профиля и противодействует ему на нижней.

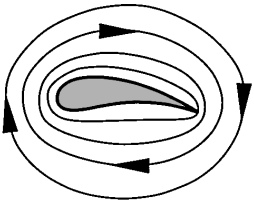
Согласно уравнению Бернулли это означает, что над крылом давление уменьшается, а под крылом увеличивается, т. е. возникает сила, действующая на крыло снизу вверх (подъемная сила). Кутт и Н. Е. Жуковский независимо друг от друга нашли, что эта сила пропорциональна циркуляции Γ. Ее величина относительно единицы длины крыла равна $\rho \cdot \Gamma \cdot U$, где U есть скорость обтекания крыла. Эта теорема доказывается в гл. 4.18.



Обтекание крыла



Потенциальный поток



Циркуляционный поток

Рис. 4.29. Обтекание крыла

Рис. 4.30. Вихрь, образующийся при разгоне крыла

Если движение начинается из состояния покоя, то, согласно теореме Томсона, в получившимся потоке циркуляция не может возникнуть даже в том случае, когда движение происходит в многосвязной области, т. к. в состоянии покоя циркуляция каждой линии тока равна нулю. Она должна остаться равной нулю и после начала движения. В действительности же циркуляция, как правило, возникает, и причиной этого является образование поверхности раздела. Так, например, в спиральной камере (рис. 4.6) в первый момент начала движения на остром ребре образуется вихрь в

соответствии с рис. 4.11. Вихрь уносится с потоком, но вызванная им циркуляция остается в потоке на все время.

Совершенно аналогичная картина наблюдается и при движении крыла. В начале движения на задней кромке крыла в соответствии с рис. 4.30 образуется поверхность раздела, превращающаяся в вихрь. В дальнейшем вихрь отрывается и уносится вместе с потоком, но оставляет циркуляцию, равную по величине своей циркуляции, но противоположно направленную. При этом вдоль жидких линий, заключающих внутри себя крыло и вихрь вместе, циркуляция остается равной нулю, как этого и требует теорема Томсона.

Для того, чтобы от присутствия крыла область пространства сделалась двухсвязной, необходимо, чтобы крыло с двух боков было ограничено двумя параллельными стенками, или чтобы крыло простиралось в обе стороны до бесконечности.

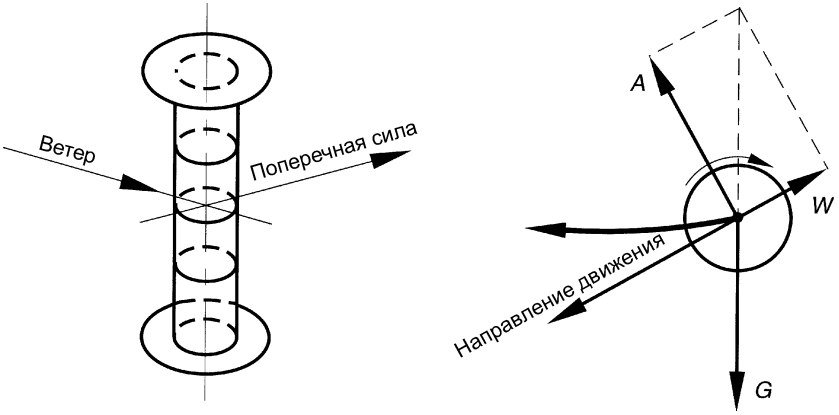


Рис. 4.31. Вращающийся цилиндр

Для действительных крыльев одно из этих условий не соблюдается. Тем не менее циркуляция, без которой не может получиться подъемная сила, возникает и в этом случае. Она возникает вследствие отрыва вихрей, образующихся из-за поверхности раздела с поперечным скачком скорости.

Если на вращающийся круглый цилиндр набегает поток воздуха в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра, то вокруг него возникает циркуляция такого же вида, как и вокруг крыла (а именно в результате трения). Циркуляция вокруг цилиндра создает силу, действующую на цилиндр

в направлении, перпендикулярном к направлению потока, которая равна $\rho \cdot \Gamma \cdot U$ и которая называется поперечной силой. Такая же сила возникает и при набегании потока на трехгранную или четырехгранную призму, вращающуюся вокруг продольной оси, на вращающийся шар и т.д. Направлена поперечная сила всегда к той стороне вращающегося тела, на которой направление вращения и направление потока совпадают. Этот эффект называется по имени ученого, впервые открывшего его, Магнуса — эффектом Магнуса.

Ядра после вылета из ствола зачастую получают непреднамеренное вращение вокруг поперечной оси, в результате чего значительно отклоняются от траектории, по которой они должны лететь. Такое поведение снаряда и стало поводом для рассмотрения эффекта Магнуса. Подобные боковые отклонения наблюдается также при полете срезанного мяча при игре в теннис или гольф. А. Флеттнер использовал эффект Магнуса для приведения в движение корабля энергией ветра, причем вместо парусов он устанавливал вертикальные вращающиеся цилиндры. На концах цилиндров помещались выступающие круглые диски (рис. 4.31 слева), т.к. иначе воздух, расположенный выше и ниже цилиндра, засасывался в область потока с пониженным давлением и, возмущая поток, уменьшал поперечную силу. Испытания показали техническую пригодность такого роторного корабля, но в экономическом отношении он оказался менее выгодным обычных моторных судов и поэтому привод Флеттнера не получил дальнейшего применения.

Действие ротора Флеттнера можно продемонстрировать при помощи следующего эксперимента. Поставим на рельсы легкую тележку с вертикальным цилиндром, который приводим во вращение маленьким электромоторчиком и начнем обдувать этот цилиндр потоком воздуха, направленным поперек рельсов (для получения такого потока можно воспользоваться настольным вентилятором). Тележка сейчас же начнет двигаться вдоль рельсов. Устанавливая вентилятор так, чтобы поток воздуха набегал на цилиндр не под прямым углом к направлению рельсов, можно исследовать движение цилиндра — паруса с разных углов обтекания. Можно даже заставить тележку катиться против ветра под острым углом. При перемене направления вращения цилиндра тележка катится в обратную сторону.

Можно провести также следующий опыт. Приведем в быстрое вращение легкий цилиндр, расположив при этом его ось горизонтально, и предоставим цилиндру возможность падать. Мы увидим, что вместо того, чтобы упасть вертикально вниз, цилиндр начнет планировать по довольно пологой траектории. При таком движении на цилиндр кроме подъемной силы A, пер-

пендикулярной к направлению движения, действует еще сопротивление W в направлении траектории движения, которое в самом благоприятном случае значительно меньше, чем подъемная сила. Равнодействующая этих обеих сил уравновешивает вес цилиндра G (рис. 4.31 правый рис.) и препятствует его вертикальному падению.

4.1.7. Динамика вихрей

При рассмотрении движения с вращением частиц однородной лишенной трения жидкости снова воспользуемся теоремой Томсона в качестве руководства. Из этой теоремы и из геометрических свойств вихревого вектора, можно вывести важные теоремы, касающиеся геометрических и механических соотношений. Это известные теоремы Гельмгольца о вихревых движениях, которые были выведены Гельмгольцем на основе электродинамических представлений. Однако следствия, вытекающие из этих теорем, получаются простыми только в том случае, когда частицы жидкости, находящиеся во вращении, занимают область в виде нити, а в не этой области движение происходит без вращения частиц. В таком случае говорят о вихревых нитях. Важнейшие теоремы о вихревых нитях можно вывести из свойств окружающего их потенциального течения, не углубляясь при этом в детали движения жидкости с вращением частиц.

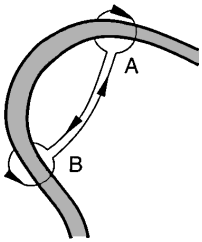


Рис. 4.32. Вихревые нити

В главе 4.1.6 мы уже упоминали, что при потенциальном движении с циркуляцией область течения является многосвязной и что циркуляция по всем линиям, которые можно перевести друг в друга, не пересекая границ области, одинаковая. Отсюда следует, во-первых, что вихревая нить должна иметь форму кольца, т. е. быть замкнутой, либо доходить своими концами до границ жидкости. Во-вторых, циркуляция вихревой нити в один и тот же момент времени во всех местах должна быть одинаковой. Эти свойства, связанные с геометрической структурой потенциального течения, можно вывести при рассмотрении замкнутой линии на рис. 4.32. Линия выбирается таким образом, чтобы ее можно было стянуть в точку путем непрерывной деформации, не пересекая область вихревой нити. Следовательно, циркуляция вдоль этой линии равна нулю. Но эта циркуляция складывается из двух частей, которые идут в противоположном направлении вдоль одной и той же линии от

A до B. Следовательно, циркуляция вдоль A и B взаимно уничтожается. Кроме того линия огибает вихревую нить около A и B. Линия огибает около A вихревую нить в противоположном направлении по отношении к B, т. е. циркуляция, взятая в одном и том же направлении должна быть одинаковой. Если бы вихревая нить ограничивалась где-либо внутри жидкости, то мы могли бы одну из петель снять с вихревой нити, в то время как вторая продолжала бы оставаться на вихревой нити. Снятая петля тогда бы потеряла свою циркуляцию, а вторая — сохранила. Следовательно, изменилась бы полная циркуляция вдоль всей линии, хотя она перемещалась бы только в пределах области потенциального течения, однако это невозможно. Таким образом, мы приходим к следующей теореме. Вихревая нить не может оканчиваться нигде внутри жидкости и имеет везде одинаковую циркуляцию. К этому геометрическому свойству вихревой нити присоединяется еще динамическое свойство, вытекающее из теоремы Томсона: циркуляция вокруг вихревой нити не изменяется с течением времени. Рассмотрим теперь, что происходит с очень маленькими замкнутыми жидкими линиями. Если эти линии лежат в области потенциального движения, то циркуляция вокруг них равна нулю.

Если же эти линии лежат внутри вихревой нити, то в общем случае циркуляция вокруг них не равна нулю, причём согласно теореме Томсона вихревая нить состоит первое время из одних и тех же частиц жидкости. Так как количество движения и энергия самой вихревой нити малы по сравнению с количеством движения и энергии окружающего потенциального потока, то движение вихревой нити в основном управляется движением потенциального потока. Правда, геометрически потенциальное движение можно свести к циркуляции вокруг оси вихревой нити, что для расчетов обычно удобно. При таком представлении движение каждого элемента вихревой нити обусловливается влиянием всех элементов вихревой нити, а все потенциальное движение вызывается вихревой нитью. Однако такое представление следует рассматривать только как геометрическое. С энергетической точки зрения преобладающее влияние на движение вихревой нити оказывает внешнее движение.

Формула для расчета поля скоростей из геометрического расположения вихревых нитей, полностью совпадают с электродинамическими формулами в законе Био-Савара. Вихревая нить соответствует электрическому проводнику, циркуляция — силе тока, поле скорости — магнитному полю, угловая скорость вращения — плотности тока. Сила тока, подобно циркуляции, одинакова вдоль всего проводника, а плотность тока обратно про-

порциональна площади его поперечного сечения. Для вихревой нити имеем формулу $\Gamma = 2 \cdot \omega \cdot A$, то есть уменьшение A приводит к возрастанию ω и наоборот. Такая же связь между A и ω существует и во времени. Если какой-либо участок вихревой нити вытягивается, то угловая скорость вращения возрастает обратно пропорционально поперечному сечению. При этом длина отрезка вихревой нити увеличивается также обратно пропорционально к A, так как объем нити остается неизменным. Таким образом, угловая скорость вращения нити изменяется пропорционально изменению длины нити отрезка. Указанные факты и составляют основное содержание теоремы Гельмгольца.

Прямолинейные параллельные вихревые нити в жидкости свободной от вращения

Вихревая нить с циркуляцией Γ создает вокруг себя поле скоростей, которое соответствует полю скоростей потенциального течения (гл. 4.1.6). Скорость жидкой частицы перпендикулярна к оси вихря и радиусу r, соединяющему ось вихря с рассматриваемой точкой поля и равна $\Gamma/(2 \cdot \pi \cdot r)$.

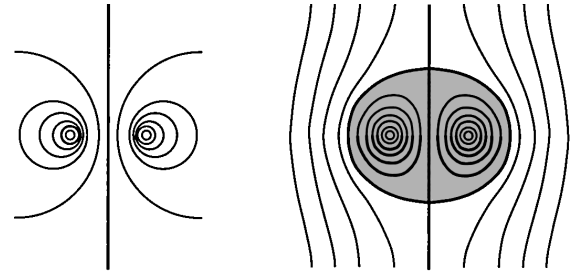


Рис. 4.33. Линии тока пары вихрей

Если имеется несколько вихревых нитей, то отдельные поля скоростей накладываются друг на друга и каждая вихревая нить принимает участие в том движении, которое возникает в занимаемом ею месте под действием других нитей. Для того, чтобы определить движение двух параллельных вихревых нитей, к вихревым осям прикладывают силы, пропорциональные их

напряженности и складывают их. Обе вихревые нити вращаются вокруг оси, в которой и возникает эта результирующая сила. При этом следует брать силы одной направленности, если вихри имеют циркуляцию одного знака, и противоположно направленными, если циркуляция вихрей противоположна. В первом случае ось вращения расположена между вихревыми нитями, а во втором вне их. Два противоположно вращающихся вихря одинаковой силы (пара вихрей по аналогии с парой сил) совершают прямолинейное поступательное движение в направлении перпендикулярном к кратчайшей прямой, соединяющей оба вихря, причем скорость равна $\Gamma/(2 \cdot \pi \cdot d)$, где d — это расстояние между осями вихрей. В системе отсчета, покоящейся относительно невозмущенной жидкости, картина линии тока вихревой пары имеет вид, изображенный на рис. 4.33. Рисунок справа показывает картину линий тока в системе отсчета, движущейся вместе с вихревыми нитями. Область, отмеченная серыми штрихами, остается все время около вихревых нитей. Если вихревая пара возникает в окрашенной области, то тело из окрашенной жидкости (по рис. 4.31 это заштрихованная область) перейдет в неокрашенную жидкость.

Для того, чтобы взаимодействие прямолинейных параллельных вихревых нитей происходило так, как указано выше, эти нити теоретически должны простираться в обе стороны до бесконечности, или же они должны быть ограничены двумя параллельными стенками. Однако в последнем случае на движение вихревых нитей влияет трение, возникающее на стенках. Вместо стенки можно взять дно и свободную поверхность жидкости перпендикулярно к вихревым осям.

Круговые вихревые кольца

У вихревых колец в результате искривления вихревой нити возникает дополнительная поступательная скорость, которая тем больше, чем тоньше вихревое ядро, связанное с вращением. Это явление может быть объяснено на основании теоремы Гельмгольца как результат взаимодействия соседних элементов вихревой нити. Однако его можно объяснить также динамически как следствие поперечных сил, возникающих под действием центробежных сил вращающейся жидкости в вихревом кольце. Они (силы) пытаются сократить вихревое кольцо (ср. рассуждение относительно теоремы Кутта–Жуковского в гл. 4.1.6). Так как вихревое кольцо движется с довольно большой скоростью, то увлекаемая им жидкость в отличие от рис. 4.33 часто тоже имеет форму кольца (кольца табачного дыма). Два вихревых кольца с общей осью, движущихся в одном направлении, взаимодействуют так, что

переднее кольцо расширяется, а заднее, наоборот, суживается. Вследствие этого поступательная скорость переднего кольца уменьшается, а заднего увеличивается. Это приводит к тому, что заднее кольцо догоняет переднее и проскальзывает сквозь него, после чего их роль меняется и процесс повторяется снова. Два одинаковых вихревых кольца с общей осью, движущихся навстречу друг другу, увеличивают при сближении свой диаметр с постоянно возрастающей скоростью. В то же время они замедляют скорость сближения настолько, что друг до друга так и не доходят. Таким образом, центральная плоскость между обоими кольцами ведет себя подобно непроницаемой твердой стенке. Поэтому рассуждения действительны также и для вихревого кольца параллельного стенке.

Поверхности раздела

Поверхности раздела, о которых шла речь в гл. 4.1.3, можно рассматривать как систему вихревых нитей, распределенных вдоль поверхности, причем оси вихревых нитей расположены перпендикулярно к направлению скачка скорости. Из схемы, изображенной на рис. 4.34 видно, что система параллельных вихревых нитей формирует поток, который на некотором расстоянии от вихревых нитей соответствует потоку с поверхностью раздела. Наоборот, поверхности раздела, будучи неустойчивыми, легко распадаются на отдельные вихри (рис. 4.10).

Вихри и связанное с ними циркуляционное потенциальное течение возникают регулярно в результате образования поверхности раздела. Все потенциальные течения являются результатом давления, передаваемого на жидкость, частью стенки или поверхности или тела внутри жидкости. Циркуляционное течение возникает главным образом в том случае, когда на часть поверхности внутри жидкости какое-то определенное время действует давление, а на соседнюю часть не действует.

Примером может служить образования вихревого кольца около круглого отверстия в стенке (рис. 4.13). Стенка испытывает давление слева и отвечает равным противодействием, в то время как само отверстие не подвергается давлению.

Другим важным примером является движение крыла самолета, когда площадь, находящаяся непосредственно под крылом, некоторое время нагружено весом самолета, а продолжение этой площади за пределами крыла не подвергается в это время никакому давлению. Как мы уже упоминали в пояснении к рис. 4.14, из поверхности раздела позади крыла образуются

два вихря, сбегающие с концов крыла. Кроме того, в начальный момент движения при разгоне крыла образуется вихрь, изображенный на рис. 4.30. Этот начальный вихрь вместе с боковыми вихрями образуют одну общую вихревую нить. Само крыло самолета с происходящей вокруг него циркуляцией, в точности равной циркуляции вокруг вихревой нити, замыкает всю систему, вследствие чего образуется своего рода вихревое кольцо, часть которого, правда, состоит из твердого тела. С кинематической точки зрения это надо понимать так, что часть вихревой нити проходит внутри твердого тела, вызывая снаружи его потенциальное течение с циркуляцией. С динамической точки зрения теорема Гельмгольца для этой части вихревой нити не имеет места, так как эта часть нити движется вместе с телом, и с концов ее и к боковым вихревым нитям притекает все время новая жидкость. Количественное изучение таких вихревых движений дало возможность получить важные выводы, касающиеся поведения крыла в потоке жидкости.

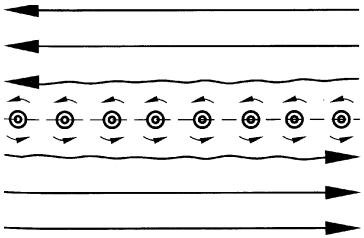


Рис. 4.34. Вихревой слой

4.1.8. Закон количестве движения для стационарных течений

Теоремы о количестве движения, а также хорошо известные из общей механики под названием теоремы о движении центра масс и правила площадей, могут быть применены к установившимся, а также и к неустановившимся движениям жидкости, которые во времени в среднем могут рассматриваться как установившиеся. Ценность этих теорем заключается в том, что для их применения требуются только данные о состоянии потока на граничных поверхностях рассматриваемой области, и поэтому из них могут быть получены ключи к процессам, детали которых до конца не понять.

Количеством движения массы называется произведение массы на скорость. Это векторная величина и как скорость (вектор) имеет три компонента. Изменение количества движения во времени равно результирующей всех

сил, приложенных к массе. В гл. 2.2 уже был показано, что при суммировании всех масс механической системы все внутренние силы уничтожаются по принципу действия и противодействия, и остаются только внешние силы, которые создаются массами, не относящимися к системе.

При установившемся движении какой-либо ограниченной массы жидкости изменение ее количества движения возникает исключительно вследствие перемещения ее границ. В самом деле, при установившемся движении каждая частица жидкости внутри выделенной массы заменяется на своем месте другой частицей, принимающей здесь скорость первой частицы. Что происходит на границах выделенной массы жидкости может быть показано на струйке жидкости. Теорема о количестве движения говорит о том, что каждая объемная часть массы, относящейся к системе остается в системе, и никаких новых частей массы там не появляется.

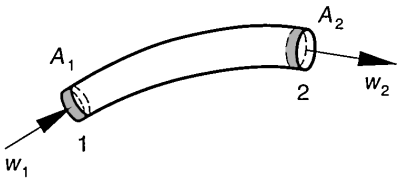


Рис. 4.35. Изменение количества движения в жидкой струйке

Граничные поверхности, выбранные для доказательства теоремы перемещаются вместе с жидкостью, то есть они являются жидкими поверхностями. В нашей жидкой струйке, изображенной на рис. 4.35, за время dt в точке №1 исчезает масса $dm_1 = \rho \cdot A_1 \cdot w_1 \cdot dt$. В точке №2 вновь поступает масса $dm_2 = \rho \cdot A_2 \cdot w_2 \cdot dt$. Вследствие неразрывности потока имеем $dm_1 = dm_2 = dm$. А общее изменение количества движения жидкая струйка в точке №2 за время dt дает $dm \cdot w_2$, то есть за единицу времени $dm/dt \cdot w_2 = \rho \cdot A_2 \cdot w_2^2$ (в направлении w_2). В точке №1 аналогично образуется отрицательная составляющая $dm/dt \cdot w_1 = -\rho \cdot A_1 \cdot w_1^2$ (в противоположном направлении к w_1). Векторная сумма этого изменения количества движения за единицу времени равна результирующей внешних сил, оказывающих влияние на жидкую струйку. Вместо изменений количества движений можно рассматривать соответствующие им реакции, то есть силы такой же абсолютной величины, но противоположного направления. Векторная сумма этих реакций очевидно уравновешивается внешними силами, приложенными к выделенной массе жидкости. Ход мысли соответствует рассуждениям при введении инерционных сил в механике твердого тела по принципу Даламбера (d'Alambert). Поток жидкости, изображенный на рис. 4.35 в точке №1 соответствует силе реакции $\rho \cdot A_1 \cdot w_1^2$ в направлении противоположном течению.

Согласно приведенной формулировке переход от жидкой ограничивающей поверхности, рассматриваемой массы жидкости к неподвижной поверхности, таким образом, произошел. Через неподвижную ограничивающую поверхность передаются изменения количества движения и силы давления. Для того, чтобы правильно использовать теоремы о количестве движения, целесообразно ограничивать рассматриваемую массу жидкости замкнутой, так называемой контрольной поверхностью. На нескольких последующих рисунках она обведена жирной линией. Векторная сумма всех внешних сил, действующих на жидкость, заключенную внутри контрольной поверхности, должна, согласно сказанному выше, уравновешиваться с векторной суммой реакций, вычисленных для всех жидких струек, проходящих через выделенную область по правилам статики. Следовательно, должны быть равны нулю суммы проекций всех сил и суммы моментов всех сил для всех координатных осей. На практике зачастую интерес представляют вместо действующих на жидкость сил сила, оказываемая жидкостью на стенки сосуда. Очень часто ограничиваются уравнением равновесия только для одного координатного направления в решении специальных задач.

В случае неустановившегося течения может добавиться дополнительная сумма в общий итог сил, которая возникает вследствие изменения количества движения внутри жидкости. Если неустановившееся движение имеет постоянное среднее значение количества движения, как это часто имеет место при турбулентных течениях, сумма изменений количества движения в среднем равна нулю. Тогда можно применять к неустановившимся потокам теоремы о количестве движения, как и к установившимся. При определении средних значений нужно только очень осторожно обращаться с контрольными поверхностями (ср. гл. 4.1.9).

Сила, с которой жидкость, текущая по изогнутому каналу, действует на его стенки

Пусть жидкость входит со скоростью w_1, при давлении p_1 в изогнутый канал (рис. 4.36). Передача количества движения через площадь A_1 равна $\rho \cdot A_1 \cdot w_1^2$. Это количество движения равнозначно силе, оказываемой втекающей жидкостью в направлении течения. К тому же следует учитывать силу давления $p_1 \cdot A_1$, действующую в том же направлении. Соответствующая сила реакции $A_2 \cdot (\rho \cdot w_2^2 + p_2)$ проявляет себя при истечении из канала. Но она направлена противоположно направлению скорости (то есть всегда внутрь контрольной поверхности). Результирующая обеих сил представля-

ет собой полную реакцию жидкости, текущей по изогнутому каналу, на его стенки.

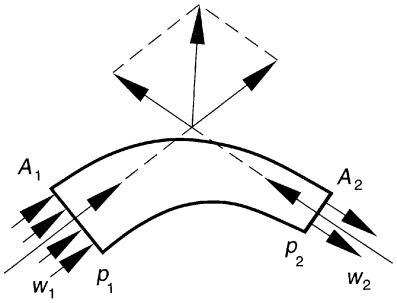


Рис. 4.36. Движение жидкости в изогнутом канале

Реакция вытекающей струи

Пусть струя вытекает через отверстие в стенке из одной области, давление в которой равно p_1, в область, давление в которой равно p_2. Количество движения, переносимое струей, имеет величину $J = \rho \cdot A \cdot w^2$, где A — это площадь поперечного сечения струи. Подставив вместо w его значение $w = \sqrt{2 \cdot (p_1 - p_2)/\rho}$ (гл. 4.1.2), получаем $J = 2A(p_1 - p_2)$. Следовательно, количество движения, переносимое струей, равно удвоенной силе давления $p_1 - p_2$ на колбу размером с поперечное сечение струи. Этому количеству движения должен соответствовать эквивалент в распределении давления. Отсюда следует, что в сравнении с замкнутым сосудом в результате исчезновения избыточного давления p_1, действующего на отверстие и снижения давления, в области отверстия, вследствие притекания жидкости происходит дополнительное уменьшение давления на стенку, которое соответствует давлению на двойное поперечное сечение струи. Исчезновение давления проявляется в силе вытекающей струи. Эту реакцию легко обнаружить, если поместить сосуд с боковым отверстием на легкую подвижную тележку. Тогда тележка вместе с сосудом будет двигаться в направлении, противоположном направлению истечения струи.

Подобный опыт можно провести с помощью так называемого сегнерова колеса (рис. 4.37). С помощью такого колеса можно поднимать на высоту груз или выполнять другую работу.

В одном частном случае, а именно при истечении через так называемый насадок Борда (рис. 4.38) из величины количества движения можно

определить коэффициент сжатия струи, то есть отношение поперечного сечения струи к поперечному сечению отверстия. При истечение через насадок Борда на любую часть стенок действует в направлении истечении струи полное избыточное давление p_1, поэтому отсутствие избыточного давления на входном поперечном сечении A должно уравновешиваться количеством движения струи. То есть должно соблюдаться равенство: $A \cdot (p_1 - p_2) = 2 \cdot A_S \cdot (p_1 - p_2)$ или $A_S = A/2$.

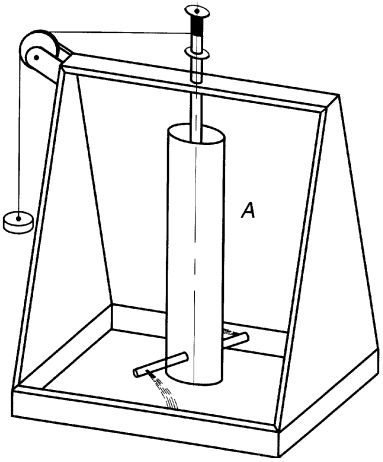


Рис. 4.37. Колесо Сегнера

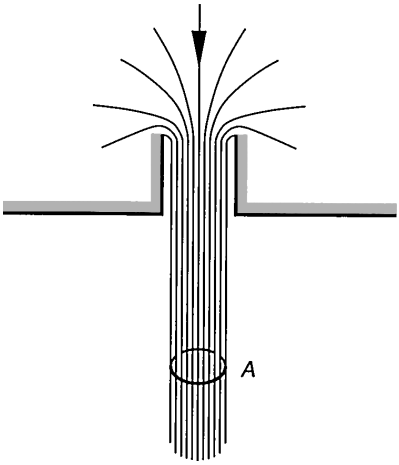


Рис. 4.38. Насадок Борда

Внезапное расширение трубы

Если поток жидкости, текущей по цилиндрической трубе внезапно переходит в более широкую, также цилиндрическую трубу, то струя быстро перемешивается с окружающей жидкостью. После перемешивания движение струи происходит почти равномерно со средней скоростью w_2. С помощью теоремы о количестве движения можно рассчитать повышение давления $p_1 - p_2$, связанное с перемешиванием, даже не зная отдельных деталей процесса. В покоящейся жидкости, находящейся в большой трубе, которая окружает образовавшуюся струю, давление p_1 такое же, как и в струе (сравн. гл. 4.2.5, свободная струя). Для контрольной поверхности, изобра-

женной на рис. 4.39, на обоих основаниях которой происходит изменения количества движения, имеем

$$\frac{dm}{dt} \cdot (w_1 - w_2) = A_2 \cdot (p_2 - p_1).$$

При $dm/dt = \rho \cdot A_2 \cdot w_2$ получаем:

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot w_2 \cdot (w_1 - w_2).$$

Если бы труба расширялась не внезапно, а постепенно, то изменение давления при переходе от узкого к широкому поперечному сечению определялось бы уравнением Бернулли и было бы равно: $p_2 - p_1 = \rho/2 \cdot (w_1^2 - w_2^2)$. Следовательно, внезапное расширение трубы приводит к потере давления $p_2' - p_2 = \rho/2 \cdot (w_1 - w_2)^2$. Это уравнение совпадает с уравнением потери кинетической энергии при неупругом ударе твердых тел. Поэтому часто говорят о потере давления на удар при внезапном расширении потока, хотя в действительности здесь нет никакого удара. Единственная общая черта этих двух явлений — это перемешивание скоростей.

Парение тяжелых тел в воздухе

Для того, чтобы тяжелое тело парило в неподвижном воздухе, необходимо, чтобы оно отбрасывало вниз все время новые массы воздуха. Пусть w — это конечная скорость движения воздуха вниз. Для простоты расчета примем, что скорость постоянная. Масса воздуха, приводимая в движение в единицу времени равна $dm/dt = \dot{m}$. Если в массе воздуха, движущейся вниз, не возникает никаких изменений давления, то результирующая сила будет равна количеству движения $J = \dot{m} \cdot w$. Этот расчет с большой степенью точности применим к свободно парящему вертолету, если он находится на довольно значительном расстоянии от поверхности земли. В таком случае образуется направленная вертикально вниз струя воздуха, переносящая количество движения $J = \dot{m} \cdot w$. Эта струя, смешиваясь на достаточно большом расстоянии от поверхности земли с окружающим ее неподвижным воздухом, замедляет свою скорость.

Однако, переносимое ею количество движения остается неизменным, так как увлекаемая масса воздуха соответственно увеличивается. В конце концов струя достигает поверхности земли и, теряя при этом свое количество движения, передает вес винта на поверхность земли в виде силы давления.

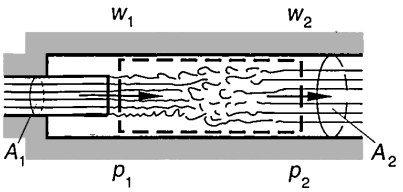


Рис. 4.39. Внезапное расширение трубы (диффузор)

При движении самолета, движущиеся вниз массы воздуха создаются вихревой системой, оставляемой позади себя крылом (сравн. гл. 4.1.7). Однако теперь нельзя пренебрегать разностью давления. Следовательно, подъемная сила крыла будет определяться не только изменением количества движения отбрасываемой массы воздуха, но также и разностью давления в струе, и, поэтому, от формы контрольной поверхности будет зависеть, какая доля подъемной силы будет возникать за счет изменения количества движения, а какая доля — за счет давления. Нисходящий вниз поток воздуха создает на поверхности земли увеличение давления и тем самым передает вес самолета на поверхность земли в виде силы давления.

Решетка из крыльев. Теорема Кутта и Жуковского

Для того, чтобы изучить взаимодействие лопаток турбин или лопастей воздушного винта с обтекающим их воздухом, целесообразно сначала рассмотреть более простой случай обтекания плоской решетки из крыльев. Плоская решетка из крыльев состоит из одинаковых, установленных параллельно друг к другу, бесконечно длинных лопаток. Применяя к этому случаю теорему о количестве движения и прибегая к помощи уравнения Бернулли и уравнения неразрывности, можно получить очень важные соотношения между силами, действующими на крылья, и скоростью течения. На рис. 4.40 изображено обтекание потоком решетки из крыльев, в том виде, как оно представляется наблюдателю, находящемуся в состоянии покоя относительно лопастей. Изображенная решетка соответствует решетке пропеллера. Лопатки турбины обращены своей выпуклостью в обратную сторону и составляющие реакции жидкости на лопатку имеют противоположное направление. Приводимый ниже расчет одинаково применим к винту и к турбине. Составляющие скорости в направлениях, параллельном и перпендикулярном к плоскости решетки, обозначим через u и v, а составляющие

силы реакции на единицу длины крыла — через F_x и F_y (положительные значения в направлениях, указанных на рис. 4.40). Индекс 1 будет означать скорость и давление перед решеткой, а индекс 2 — позади решетки.

Предположим, что движение жидкости происходит без потери энергии. Тогда мы будем иметь потенциальное течение с циркуляцией вокруг крыльев решетки. Теорема о количестве движения использует тот факт, что скорость движения на некотором расстоянии впереди и позади решетки практически одинакова (постоянна). Здесь не нужно углубляться в детали течения между лопастями. Гарантировано должно быть только одно — отсутствие отрыва. Это может иметь место при неудачной форме профиля крыльев. Из уравнения неразрывности, при расстоянии между соседними крыльями a, получаем:

$$Q = v_1 \cdot a = v_2 \cdot a,$$

где Q — это количество жидкости, протекающее между каждой парой крыльев в слое толщиной (глубиной) l, параллельном продольной оси крыльев, за единицу времени. Отсюда следует, что $v_1 = v_2$. Поэтому в дальнейших вычисления мы будем обе составляющие скорости обозначать $v = v_1 = v_2$. Из уравнения Бернулли следует при $w^2 = u^2 + v^2$ (результирующая скорость w):

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot (u_1^2 + v^2) = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot (u_2^2 + v^2)$$

или

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot (u_1^2 - u_2^2). \tag{4.22}$$

Для применения теоремы о количестве движения проведем контрольную поверхность, ограничения которой в решетке лопастей состоит из двух одинаковых линий тока, которые расходятся друг от друга в делении лопасти a. Следующее ограничение образуется из двух прямых длиной a, параллельных к плоскости решетки. Контрольная плоскость на рис. 4.40 отмечена жирной линией. Глубина всех плоскостей равна 1. Сквозь обе боковые части контрольной поверхности, образованной линиями тока, жидкость не протекает. Далее, так как эти поверхности совершенно одинаковы (относительно решетки крыльев), то все величины соответственно совпадают. Распределение давления на них также совершенно одинаковое, и поэтому они не влияют на результирующую силу давления. Для равновесия сил нужно вычислить только отрезки плоскостей, параллельных к плоскости решетки. Масса жидкости, протекающая за единицу времени, равна: $\rho \cdot Q = \rho \cdot a \cdot v$.

Таким образом, получаем:

$$F_x = 0 + \rho \cdot a \cdot v \cdot (u_1 - u_2) = \rho \cdot a \cdot v \cdot (u_1 - u_2); \tag{4.23}$$

$$F_y = a \cdot (p_2 - p_1) + 0 = a \cdot (p_2 - p_1). \tag{4.24}$$

Целесообразно ввести в эти формулы циркуляцию вокруг крыла. Для ее вычисления воспользуемся опять жирной линией. Обе линии тока идут в противоположном направлении и имеют равные значения.

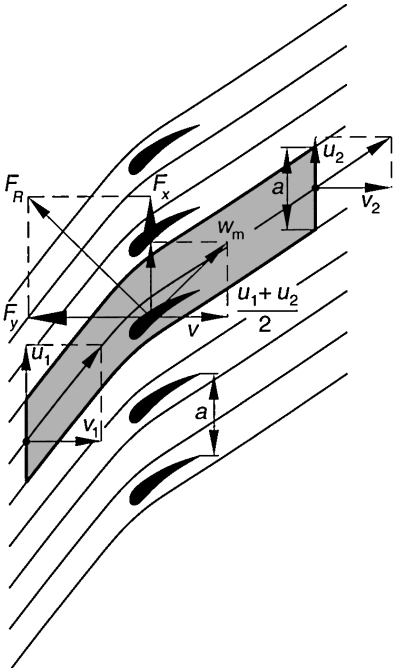


Рис. 4.40. Плоская решетка из крыльев

Оба прямых участка дают значения $a \cdot u_1$ и $-a \cdot u_2$, циркуляция вокруг крыла равна

$$\Gamma = a \cdot (u_1 - u_2). \tag{4.25}$$

Далее, используя уравнение (4.22) и зависимость

$$u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2),$$

из (4.23) и (4.24) получаем:

$$F_x = \rho \cdot \Gamma \cdot v; \tag{4.26}$$

$$F_y = \rho \cdot \Gamma \cdot \frac{u_1 + u_2}{2}. \tag{4.27}$$

Отношение $F_y/F_x = ((u_1 + u_2)/2)/v$ показывает, что результирующая сила из F_x и F_y направлена перпендикулярно к результирующей скорости, образующейся из $(u_1 + u_2)/2$ и v. На рис. 4.40 это можно легко увидеть при рассмотрении соответствующих подобных треугольников. Если обозначить результирующую силу F_R, а результирующую среднюю скорость w_m, то, кроме того, что получим

$$F_R = \rho \cdot \Gamma \cdot w_m. \tag{4.28}$$

Это уравнение и является теоремой Кутта и Жуковского о подъемной силе. Данная теорема доказана также и другим путем. Жуковский вывел ее, применив теорему о количестве движения к контрольной плоскости в виде круглого цилиндра очень большого радиуса. Ось несущей поверхности совпадает с осью цилиндра. При этом одна половина F_R получается вследствие переноса количества движения, а другая половина, как результирующая сила давления. Эта теорема важна прежде всего потому, что она дает возможность вычислить по заданной подъемной силе соответствующую циркуляцию, определяющую напряженность вихря позади крыла.

Момент количества движения. Уравнение Эйлера для турбины

Соответственно моментам сил в статике, можно образовать также моменты количества движения. Здесь действительна теорема, аналогичная теореме о движении центра масс: «Изменение во времени момента количества движения равно результирующему моменту сил». Эта теорема называется также теоремой момента количества движения. Для установившихся течений она переходит аналогично теореме количества движения снова в теорему равновесия моментов внешних сил и моментов реакций жидкости.

В качестве примера выведем уравнение Эйлера для турбины. Пусть в рабочее колесо турбины (рис 4.41) входит поток воды $\dot{m}$ за единицу времени, абсолютная скорость которого равна w_1, а направление образует с направлением движения колеса угол β_1. Входной радиус равен r_1. Поток воды движется в направлении, приближенно совпадающем с направлением лопаток, через вращающуюся турбину. Относительная скорость выхода потока радиусом r_2 дает в месте с окружной скоростью вращения турбины

абсолютную скорость w_2 в направлении β_2. Вращающий момент, передаваемый водой на турбину равен.

$$\dot{m} \cdot (w_1 \cdot r_1 \cdot \cos(\beta_1) - w_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\beta_2)).$$

Вместо рассмотрения момента количества движения единицы массы как произведения скорости w на $r \cdot \cos(\beta)$, его (момент количества движения) можно рассматривать также как произведение окружной скорости $w \cdot \cos(\beta)$ на радиус r.

Наиболее благоприятные условия работы турбины возникают в том случае, если вода покидает лопатку в радиальном направлении, т.е. если $\cos(\beta_2) = 0$. В этом случае потеря кинетической энергии водой, выходящей из колеса, будет наименьшей. Рабочую мощность в данном случае получаем из произведения вращательного момента с угловой скоростью ω турбины:

$$L = \dot{m} \cdot r_1 \cdot \omega \cdot w_1 \cdot \cos(\beta_1).$$

Если использовать эту теорему для вращательного движения жидкости, в которой нет колеса турбины, то вращательный момент будет равен нулю. Тогда имеем:

$$w_1 \cdot r_1 \cdot \cos(\beta_1) = w_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\beta_2).$$

Если углы β достаточно малы, можно взять $\cos(\beta) = 1$, и тогда будем иметь $w \cdot r = \text{const}$. Этот результат был уже получен в гл. 4.1.2, правда, другим способом.

4.1.9. Теорема о количестве движения для потоков с пульсацией

На практике в области течения часто возникают значительные, большей частью неравномерные колебания скорости, причем в любой точке можно указать среднее значение скорости для какого-то промежутка времени, независимое от выбранного интервала времени. Совокупность таких средних значений скорости во всех точках пространства определяет собой некоторое установившееся течение. Тогда говорят о турбулентном, в среднем установившемся течении. Обозначим для течения, средние значения составляющих скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$, а мгновенные отклонения от средних значений u', v' и w', тогда для скоростей получим:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w'.$$

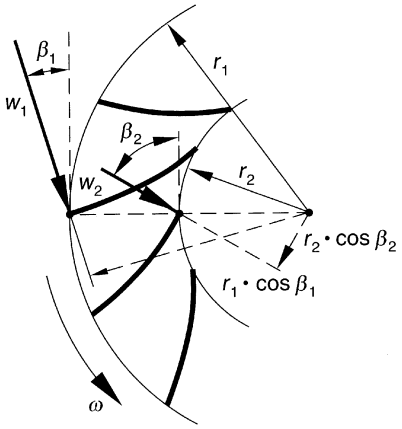


Рис. 4.41. Водяная турбина

Среднее значение u', v', w' согласно определению равны нулю. Для средних значений квадратов и произведений u', v', w' это не действительно.

При распространении теоремы о количестве движения на турбулентные течения, бывает недостаточным использование теоремы для средних параметров установившихся течений. Среднее течение нужно образовать из отдельных количеств движения (или реакций) проходящих через неподвижную контрольную поверхность.

Далее определим составляющую количества движения вдоль оси x для участка контрольной поверхности, перпендикулярной оси x. В промежуток времени dt через единицу площади контрольной поверхности проходит масса $\rho \cdot u \cdot dt$. Составляющая скорости в направлении оси x есть u, т.е. количество движения за единицу времени равно $\rho \cdot u^2 \cdot dt$. Т.е. среднее значение за более или менее длительный промежуток времени T за единицу времени равен $(1/T) \cdot \int_0^T \rho \cdot u^2 \cdot dt$. Обозначив для краткости среднее значение чертой над буквой, запишем $\rho \cdot \bar{u}^2$. Мы имеем теперь: $u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2 \cdot \bar{u} \cdot u' + u'^2$. Для того, чтобы вычислить среднее значение u^2, учтем, что $\bar{u}$ уже представляет собой среднее значение от u, а среднее значение от $u' = 0$. Следовательно:

$$\rho \cdot \bar{u}^2 = \rho \cdot \bar{u}^2 + \rho \cdot u'^2. \tag{4.29}$$

Таким образом, в данном случае к количеству движения установившегося среднего значения скорости $\rho \cdot \bar{u}^2$ надо прибавить еще количество

движения из среднего значения квадрата колебаний. Это реакция с направлением снаружи — внутрь, т.е. она действует как дополнительное давление.

Далее рассмотрим составляющую вдоль оси x количества движения для участка контрольной поверхности, перпендикулярного к оси y. В промежуток времени dt через единицу площади проходит масса $\rho \cdot v \cdot dt$. Составляющая вдоль оси x вектора скоростей снова u, поэтому количество движения вдоль оси x равно $\rho \cdot u \cdot v$. Получение среднего значения дает количество движения за единицу времени $\rho \cdot \overline{u \cdot v}$. Перемножив $u = \bar{u} + u'$ и $v = \bar{v} + v'$ найдем $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u}\bar{v}' + \bar{u}'\bar{v} + \overline{u' \cdot v'}$. Так как оба средних слагаемых равны 0, получаем:

$$\rho \cdot \overline{u \cdot v} = \rho \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + \rho \cdot \overline{u'v'}. \tag{4.30}$$

Следовательно, и в этом случае к количеству движения установившегося среднего движения $\rho \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}$ добавляется величина, представляющая собой величину колебаний (пульсаций). Среднее значение произведения u' и v' может быть не равна нулю. В самом деле, если положительным пульсациям u' соответствуют, главным образом, положительные пульсации v', а отрицательным пульсациям u' — отрицательные пульсации v', то преобладающее число произведений $u' \cdot v'$ будет положительным. Если же наоборот, положительным пульсациям u' соответствуют отрицательные пульсации v' и наоборот, то преобладающее число произведений будут отрицательными. Реакция, соответствующая количеству движения $\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$ действующая на единицу поверхности есть сила, направленная вдоль оси x по участку, перпендикулярному оси y, т. е. эта реакция представляет собой не что иное как касательное напряжение. Учитывая направление реакции, для так называемого кажущегося (мнимого) касательного напряжения можем записать:

$$\tau' = -\rho \cdot \overline{u'v'}. \tag{4.31}$$

Масса жидкости, заключенная внутри контрольной поверхности не дает какой-либо составляющей в количестве движения. Изменение скорости за определенное время в какой-либо точке потока должно содержать равное количество положительных и отрицательных отклонений, если в среднем значении не должно ничего измениться. Следовательно, при осреднении по времени масса жидкости, заключенная внутри контрольной поверхности, не может дать изменения количества движения. Таким образом, в потоках, в среднем установившихся, пульсации скорости обуславливают появление касательных напряжений, которые аналогичны касательным напряжениям

при движении в очень вязких жидкостях (сравн. гл. 4.2.1). В главе 4.2.4 полученные результаты будут использованы при изучении турбулентных течений.

4.1.10. Волны на свободной поверхности жидкости

Плоские пульсирующие волны

Волны, которые образуются на свободной поверхности воды, приводят в движение соприкасающийся с ними воздух. В большинстве случаев массой этого воздуха можно пренебречь по сравнению с массой жидкости. Тогда давление на свободной поверхности будет равно атмосферному давлению p_∞. Наблюдения показывают, что при простейшем волновом движении отдельные частицы свободной поверхности воды описывают траекторию, приближенно совпадающую с окружностью. В системе отчета, движущейся вместе с волнами со скоростью их распространения, волновое движение, на которое может быть применено уравнение Бернулли, является, очевидно, установившимся движением (рис. 4.42). Пусть радиус окружности, описываемой частицей воды, расположенной на свободной поверхности, равен r, а время обращения — T. Тогда скорость в окружности будет равна $2 \cdot \pi \cdot r/T$. Если скорость распространения волны равна c, то в указанной системе отчета скорость на гребне волны будет равна $w_1 = c - 2 \cdot \pi \cdot r/T$, а во впадинах волн $w_2 = c + 2 \cdot \pi \cdot r/T$. Разность высот между наивысшими и наинизшими положения точек свободной поверхности равна $h = 2 \cdot r$. Поскольку существует равенство давлений, то можем записать:

$$w_2^2 - w_1^2 = 2 \cdot g \cdot h = 4 \cdot g \cdot r.$$

В левой части получаем: $8 \cdot \pi \cdot c \cdot r/T$ и тогда

$$c = g \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi}. \tag{4.32}$$

Радиус в эту формулу не входит, т. е. скорость распространения волн не зависит от высоты волн. Если указывается не период T, а длина волны λ, то нужно еще привлечь отношение, связывающие распространение гребней и впадин (со скоростью c) с периодом колебаний. Тогда запишем:

$$\lambda = c \cdot T. \tag{4.33}$$

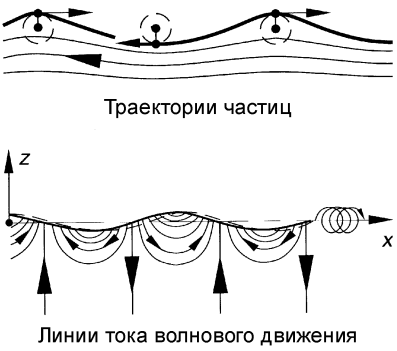


Рис. 4.42

Исключив из равенства T в (4.32) и (4.33) получим:

$$c = \sqrt{g \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \pi}}. \tag{4.34}$$

Таким образом, для волн на поверхности воды скорость их распространения, в отличии от звуковых волн, сильно зависит от длины волны. Длинные волны распространяются быстрее, чем короткие. Волны могут накладываться друг на друга без заметного взаимного возмущения. При этом короткие волны как бы приподнимаются длинными волнами, но затем длинные уходят вперед, а короткие остаются позади них. Линии тока движения волн в системе отчета, неподвижной относительно невозмущенной воды представлены на нижнем изображении рис. 4.42. Из расположения линий тока видно, что скорость движения воды очень быстро убывает с увеличением глубины, а именно пропорционально уменьшению величины $\exp(-2 \cdot \pi \cdot (z_1 - z)/\lambda)$. Следовательно, на глубине, равной длине волны, скорость составляет только 1/500 скорости на свободной поверхности.

Волны на свободной поверхности,согласно рассуждениям, приведенным в гл. 4.1.5, является потенциальным движением. Для волн небольшой амплитуды потенциал $\Phi = a_1 \cdot e^{\mu \cdot z} \cdot \cos(\mu \cdot (x - c \cdot t)$, где $\mu = 2 \cdot \pi/\lambda$. Для конечных амплитуд вместо косинусов выступает ряд Фурье. Амплитуды отдельных элементов вытекают из условия, что на всех точках поверхности давление должно быть постоянным. Более точное теоретическое рассмотрение показывает, что уравнение (4.34) действительно только для плоских

волн, а скорость распространения не зависит от высоты волны. Для высоких волн скорость в действительности несколько больше. Кроме того, при высоких волнах траектории частиц воды на свободной поверхности получаются незамкнутыми, частицы на гребне волны уходят вперед на большее расстояние, чем на то, на которое они возвращаются назад во впадине (ср. рис. 4.42 внизу справа). Следовательно, при высоких волнах происходит перенос воды вперед. Максимально возможную установившуюся форму волны по расчетам Стокса (1847 г.) имеют гребни волн с углом $120°$. При дальнейшей подаче энергии гребни волн начинают пениться.

Для волн с небольшой длиной важным фактором является, кроме силы тяжести, также поверхностное натяжение. Оно стремится сгладить волновую поверхность и поэтому скорость распространения волн увеличивается. Теория показывает, что в этом случае скорость распространения волн равна:

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C}{\rho \cdot \lambda}}, \tag{4.35}$$

где C есть капиллярная постоянная (поверхностное натяжение). Для длинных волн преобладающую роль играет первое слагаемое, а для коротких, наоборот, второй член. Для длины волны $\lambda_1 = 2{\cdot}\pi{\cdot}\sqrt{C/(g \cdot \rho)}$ и C имеет минимальное значение, равное $c_1 = \sqrt[4]{4 \cdot g \cdot C/\rho}$. Для воды $\rho = 1000 N s^2/m^4$ и $C = 0{,}073 N/m$ получается $\lambda_1 = 1{,}71$ см, а $c_1 = 23{,}1$ см/с (одновременно групповая скорость). Волны, длиной волны больше λ_1, называют гравитационными, а волны, длина которых меньше λ_1 – капиллярными.

Группы волн

От скорости перемещения гребневой волны, называемой фазовой скоростью c, следует отличать скорость распространения группы волн, называемую групповой скоростью и обозначаемую через c^*. Проще всего разъяснить смысл этого понятия на примере движения, возникающее в результате наложения двух волн, имеющие равные амплитуды, но немного отличающихся своей длиной. Эти рассуждения действительны не только для водяных волн, но и вообще для волн, фазовая скорость которых зависит от длины волны, т.е. если они имеют дисперсию. Пусть мы имеем простую синусоидальную волну:

$$y = A \cdot \sin(\mu \cdot x - \nu \cdot t).$$

При увеличении x на $2 \cdot \pi/\mu$ или t на $2 \cdot \pi/\nu$ синус принимает прежнее значение. Следовательно, величина $\lambda = 2 \cdot \pi/\mu$ есть длина волны, а $T = 2 \cdot \pi/\nu$ – есть период колебаний. Если $\mu \cdot x - \nu \cdot t = \text{const}$, т.е. если $x = \text{const} + (\nu/\mu) \cdot t$, то аргумент синуса не зависит от времени, поэтому и не зависит от времени и ордината y. Это означает, что вся волна, не изменяя своей формы, перемещается со скоростью $c = \nu/\mu$.Наложим на эту волну вторую волну y', т.е. волну с такой же амплитудой, но с несколько иными значениями μ и ν, которые обозначим μ' и ν'. Таким образом, $y' = A \cdot \sin(\mu' \cdot x - \nu' \cdot t)$. И

$$y + y' = A \cdot [\sin(\mu \cdot x - \nu \cdot t) + \sin(\mu' \cdot x - \nu' \cdot t)$$

есть результирующее движение. В тех точках, где фазы обоих колебаний совпадают, амплитуда равна $2 \cdot A$, а в тех точках, где фазы обоих колебаний противоположны, амплитуда равна нулю. Такое явление называется биением. Применив формулу:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

получим:

$$y + y' = 2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\mu + \mu'}{2} \cdot x - \frac{\nu + \nu'}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu - \mu'}{2} \cdot x - \frac{\nu - \nu'}{2} \cdot t\right).$$

В этом равенстве член $\sin(\ldots)$ представляет собой волну со средними значениями μ и μ' и соответственно ν и ν'. Член $2 \cdot A\cos(\ldots)$, который при малых значениях разностей $\mu - \mu'$ и $\nu - \nu'$ изменяется очень медленно, можно рассматривать как переменную амплитуду (ср. рис. 4.43). Группа волн кончается в той точке, где косинус равен 0. Скорость перемещения этой точки, называемая групповой скоростью c^*, соответственно равна $(\nu - \nu')/(\mu - \mu')$. Для длинных групп (медленное биение), имеем:

$$c^* = d\nu/d\mu. \tag{4.36}$$

Так как через узлы биения не может произойти передача энергии, то скорость распространения энергии волн идентична групповой скорости. Это вполне доказуемо для групп волн.

Для волн, возникающих под действием силы тяжести из формулы (4.32) мы имеем:

$$\nu = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{g}{c}.$$

Рис. 4.43. Биение

Согласно равенству (4.34), получаем:

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}}.$$

Следовательно:

$$\nu = \sqrt{g \cdot \mu}.$$

Используя уравнение (4.36) для групповой скорости имеем:

$$c^* = \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{\mu}} = \frac{1}{2} \cdot c. \tag{4.37}$$

Таким образом, группы волн распространяются со скоростью $(1/2) \cdot c$ или, иными словами, гребни в группе волн перемещаются со скоростью, в два раза большей, чем скорость группы волн. На заднем конце группы все время возникают новые волны, а на переднем конце группы они исчезают. Это явление очень легко наблюдать на волнах, вызванных падением камня в неподвижную воду.

Волны от движения корабля

Другим видом волн являются волны, возникающие на поверхности воды при движении корабля. Картину волн, очень похожую на корабельные волны, легко получить, если на поверхности покоящейся глубокой воды заставить двигаться с постоянной скоростью точечный очаг возмущения давления. Согласно расчетам лорда Кельвина, В. Томсона, Экмана и других, получается система волн, изображенная на рис. 4.44, на котором наклонными линиями обозначены гребни волн. Эта система волн перемещается вместе с очагом возмущения. Длина поперечных волн на основании формулы (4.35) равна $\lambda = 2 \cdot \pi \cdot c^2/g$; где c есть скорость перемещения очага возмущения. Длина группы волн равна половине пути, проложенного очагом возмущения.

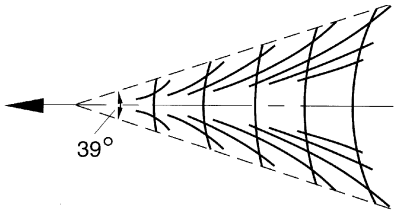


Рис. 4.44. Система волн, образующихся при равномерном движении на поверхности воды очага возмущения давления

При движении корабля образуются две системы таких волн – одна около носа, другая около кормы корабля, причем волны обеих систем интерферируют друг с другом.

Групповая скорость капиллярных волн полностью совпадает (аналогична) групповой скорости гравитационных волн. Она больше фазовой скорости, а именно, в предельном случае очень малых волн, в 1,5 раза. Следовательно, если очаг возмущения движется с постоянной скоростью, то группы волн опережают его. Около лески удочки, опущенной в реку, скорость течения которой больше 23,3 см/сек, образуются вверх по течению капиллярные волны, а внизу по течению гравитационные волны. Гравитационные волны приблизительно имеют такую форму как на рис. 4.44. Капиллярные волны заполняют переднее пространство в виде дуг окружностей. При скорости очага возмущения менее 23,3 см/сек. волны вообще не образуются.

Поверхность

Когда две жидкости различной плотности располагаются одна над другой (наслаиваются), то на поверхности соприкосновения также могут возникнуть волны. Если обе жидкости неподвижны и плотности их равны ρ_1 и ρ_2, то теоретический расчет дает для фазовой скорости величину:

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C}{\lambda \cdot (\rho_1 + \rho_2)}}.$$

Если верхняя жидкость течет со скоростью w_1 относительно нижней, то теория показывает, что устойчивы бывают только длинные волны. Короткие же волны неустойчивы, как это было показано в гл. 4.13 для движения двух

потоков жидкости вдоль поверхности раздела. Это приводит в данном случае к перемешиванию обеих жидкостей в промежуточной зоне, в результате этого течение снова становится устойчивым. При увеличении скорости w_1 граница между неустойчивостью и устойчивостью перемешивается в сторону волн с большей длиной. Волны такого рода могут возникать также в атмосфере на границе двух слоев воздуха разной плотности; иногда эти волны становится видимыми благодаря образованию волнистых облаков (волны Гельмгольца).

Вал воды

Уравнения приведенные в данной главе, относятся к волнам, образующимся в глубокой воде. Отношение изменится, если глубина воды по сравнению с длиной волны будет уменьшатся. Для глубины, составляющей половину длины волны, данные уравнения еще довольно точны. Однако, при уменьшении глубины частицы воды движутся по эллиптическим орбитам. Связь между длиной волны и скоростью распространения усложняются. При очень малой глубине или очень малой длине волны частицы воды перемещаются на поверхности воды в основном горизонтально и производят незначительные подъемы и спуски, т.е. опять возникают довольно простые связи. Поэтому можно считать, что волны имеют приблизительно синусоидальную форму. Так как траектории частиц представляют собой очень сплющенные эллипсы, то влиянием вертикального ускорения на распределение давления можно пренебречь.

Тогда на каждой вертикали давление будет изменятся по статическому закону, и разности высот жидкости будет обуславливать практически только горизонтальное ускорение. Мы ограничимся здесь расчетами лишь на случай движения вала воды (рис. 4.45). Эти расчеты очень просты и тесно связаны с исследованием распространения возмущения давления в сжимаемой среде (гл. 4.3.1). Пусть на поверхности воды над плоским дном распространяется со скоростью c справа налево вал, повышающий уровень воды от h_1 до h_2. Предположим, что до прихода вала вода находилась в покое. После повышения уровня она получает скорость w (вправо).

Эта скорость необходима для того, чтобы вызвать боковое перемещение объема воды в переходной зоне шириной b вправо и тем самым поднять уровень воды с высоты h_1 до h_2. Примем ради простоты, что уровень воды в переходной области имеет постоянный наклон $(h_2 - h_1)/b$. Тогда при условии, что скорость w достаточна мала по сравнению со скоростью

распространения вала c, вертикальная скорость подъема воды в области вала будет равна $v = c \cdot (h_2 - h_1)/b$.

Условие неразрывности, примененное к слою воды толщиной в единицу (в направлении, перпендикулярном к плоскости на рис. 4.45) приводит к уравнению: $h_2 \cdot w = b \cdot v$ или

$$h_2 \cdot w = c(h_2 - h_1). \tag{4.38}$$

Мы видим, что из этого уравнения выпала ширина вала b. Следовательно, эта величина не играет роли. Уравнение (4.38) остается верным и для вала с не прямолинейным профилем. Затем можно разбить такой вал на ряд узких валов с прямолинейным профилем. Складывая уравнения неразрывности отдельных валов, мы получим справа снова выражение $h_1 - h_2$, а слева из отдельных разностей скоростей — получим w, правда, при условии, что разностями различных h_2 можно пренебречь. Из уравнения (4.38) следует, кроме того, что при малой величине скорости w должна быть мала также и разность высот $h_1 - h_2$, следовательно, это уравнение применимо только к низким валам и поэтому предшествующие условие вполне оправданно.

К кинематическому соотношению (4.38) следует присоединить динамическое, которое легко вывести следующим образом. Объем воды шириной b находится в ускоренном движении, т. к. частицы, составляющие этот объем начинают свое движение на правом краю со скоростью нуль, а на левом их скорость равна w. Время, в течении которого над этой частицей проходит вал, равно $\tau = b/c$, поэтому ускорение частицы будет $w/\tau = w \cdot c/b$. Объем воды в области вала шириной b и толщиной 1 в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, равен $\rho \cdot b \cdot h_m$ (h_m – это средний уровень воды в области вала). Разность давлений по обе стороны вала на одной и той же высоте составляет $\gamma \cdot (h_2 - h_1)$. Следовательно, общая сила, действующая в горизонтальном направлении на рассматриваемый объем воды под валом равна (пренебрегая малыми величинами) $h_m \cdot \gamma \cdot (h_2 - h_1)$. Применяя основное уравнение динамики: сила $=$ масса $*$ ускорение, мы получим, имея в виду $\gamma = \rho \cdot g$:

$$w \cdot c = g \cdot (h_2 - h_1). \tag{4.39}$$

Таким образом, здесь снова выпала из уравнения ширина b. И вновь можно показать, что уравнение (4.39) применимо для вала с другим профилем, если $h_2 - h_1$ мала по сравнению с высотами h_1 и h_2.

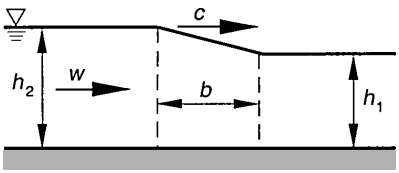


Рис. 4.45. Вал на поверхности воды

Для дальнейшего упрощения заменим в левой части уравнения (4.38) h_2 на h_m. При малой величине разности $h_2 - h_1$ это вполне допустимо. Разделив затем (4.39) на (4.38) получим:

$$c^2 = g \cdot h_m. \tag{4.40}$$

Чередование отрицательных и положительных валов приводит к образованию волн. Скорость распространения таких волн не зависит от формы волны. Она получается из уравнения (4.40). Также как и при звуковых волнах здесь не наблюдается дисперсии, поэтому $c^* = c$. Следовательно, длинные волны на мелкой воде распространяются со скоростью $c = \sqrt{g \cdot h}$ (скорость длинной волны).

Если на воде следуют друг за другом несколько низких валов, каждый из которых ведет к повышению уровня воды, то скорость $\sqrt{g \cdot h}$ последующей волны из-за возросшей глубины воды, будет выше, чем предыдущий. Решающим фактором является и то, что каждый последующий вал распространяется уже не в неподвижной воде, а в воде, которая движется со скоростью w. Это приводит к тому, что каждые последующие валы догоняют предыдущие, в результате чего возникает вал конечной высоты. Эти соображения можно применить также и к форме отдельных валов. Например, вал, форма которого изображена на рис. 4.45 можно рассматривать как следствие очень многих незначительных валов, которые заполняют интервал b. Из выше сказанного следует, что интервал b все время уменьшается, пока не превратится в крутую ступеньку. Это явление мы можем наблюдать и в природе. В волнах в мелкой воде гребни по этой же причине бегут быстрее, чем впадины и набегают друг на друга (прибой).

Исследование распространения вала конечной высоты можно выполнить при помощи теоремы о количестве движения аналогичным образом, как это бы сделано в главе 4.18 при рассмотрении внезапного расширения потока. Для того, чтобы движение воды при распространении вала можно

было рассматривать как установившееся, расчет следует вести в системе отсчета, движущейся вместе с валом. Скорость распространения вала конечной высоты больше, чем основная волна. Здесь также происходит потеря кинетической энергии, которая находит свой эквивалент в вспенивании набегающих друг на друга волн.

Открытое русло

Скорость вала и основных волн можно наблюдать при течении воды в реке также как проявляется скорость звука в течении газа (ср. гл. 4.3.1 и 4.3.3). Если скорость течения меньше, чем критическая скорость, тогда подпор в реке (например плотина) ведет к повышению уровня воды. Если скорость течения больше скорости основной волны (критической скорости), то перед плотиной и над плотиной образуется вал конечной высоты, так называемый прыжок воды. Вдоль по течению от этого вала на поток подпор воды не влияет. Неровности на краю русла создают маленькие косые волны, которые очень похожи на звуковые волны, о которых шла речь в главе 4.3.3. Оба вида течения в русле со скоростью течения меньше или больше критической скорости называют спокойным течением и стремительным (бурным) течением.

Вычислим для заданного объемного расхода воды $\dot{V}$ (относительно единицы ширины русла) значение глубины (рис. 4.46). Для снижения уровня в каком-нибудь сечении относительно уровня неподвижной воды в соответствии с уравнением Бернулли имеем $h = w^2/(2 \cdot g)$. Глубина воды, необходимая для прохождения объема воды $\dot{V}$ на единицу ширины следует из уравнения неразрывности $a = \dot{V}/w$. Следовательно, расстояние соответствующей точки дна до уровня неподвижной воды будет равно:

$$z = h + a = \frac{w^2}{2 \cdot g} + \frac{\dot{V}}{w}.$$

При определенном значении скорости w расстояние z должно иметь минимальное значение. Подобное наблюдается при изменении поперечного сечения газового потока (ср. гл. 4.3.1). Этот минимум получается при дифференцировании уравнения скорости.

$$\frac{w_1}{g} - \frac{\dot{V}}{w_1^2} = 0, \quad \text{т. е.} \quad w_1 = \sqrt[3]{\dot{V} \cdot g}.$$

Получаем:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{g}}; \quad a_1 = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{g}} = 2 \cdot h_1.$$

Таким образом, $w_1 = \sqrt{g \cdot a_1}$, т.е. равна критической скорости на глубине воды a_1. Если вода течет над плоским возвышением, то над самой высокой точкой плотины возвышения глубина a_1 будет равна $2/3$ глубины z_1

$$\dot{V} = a_1 \cdot w_1 = \frac{2}{3} \cdot z_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot g \cdot z_1}. \tag{4.41}$$

Ниже вершины возвышения течение воды стремительное, но затем оно снова становится спокойным, причем переход в спокойное течение происходит обычно резко — путем образования прыжка воды.

Для непологих возвышений нельзя принимать, что скорость течения одинакова во всем поперечном сечении. Однако в качественном отношении результаты сохраняются.

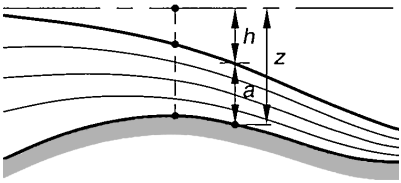


Рис. 4.46. Перетекание потока через пологое возвышение

Уравнения, выведенные для открытого русла, могут быть использованы и в более широких целях. Рассмотрим пологое, произвольной формы русло (рис. 4.47). Для ряда высот уровня неподвижной воды (штрихпунктирные линии) отложим глубины a при определенном значении объемного расхода $\dot{V}$ (по 2 для каждой точки и каждого уровня). Из них получаем указанные профили свободной поверхности воды. Линия, проходящая через двойную точку от профиля I к IV, соответствующая самому низкому уровню неподвижной воды, дает течение, изображенное на рис. 4.46. Профили I–II и III–IV, соответствующие более высоким уровням неподвижной воды, также встречаются в практических условиях. Кривые, изображенные штрихами на рис. 4.47, означающие самый низкий уровень неподвижной

воды, могут существовать только в своей верхней части после прыжка воды, связанного с потерей энергии.

Скорость течения, изображенного на первой картинке рис. 4.47, меньше критической скорости, и над вершиной возвышения дна получается понижение уровня воды. На среднем рисунке скорость больше критической. Уровень воды поднимается на высоту, больше высоты возвышения. Наконец, при при прыжке (рис. справа) скорость течения на участке от возвышения дна до прыжка больше, а после прыжка меньше, чем критическая. Так как изменение состояния течения может произойти только при критической скорости, то стремительное течение между возвышением дна и прыжком не может измениться из-за повышения уровня воды. Происходит скачкообразный переход.

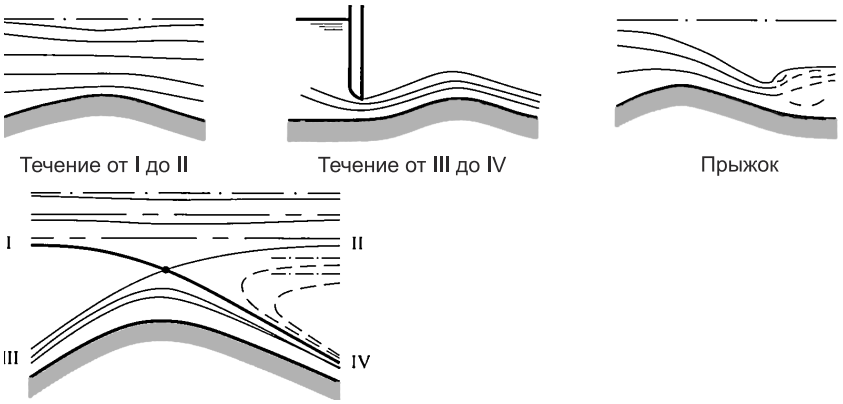


Рис. 4.47. Примеры перетекания возвышения

Еще раз подчеркнем, что в предыдущих рассуждениях мы пренебрегаем влиянием вертикального ускорения. Учет этого ускорения при стремительном течении приводит только к незначительным количественным поправкам; при спокойном же течении наблюдается изменение характера; так как вниз по течению от очага возмущения возникают волны. Длину волны можно определить из уравнения (4.34), если вместо скорости распространения волн c ввести скорость течения в определенном месте (точке).

4.2. Движение вязких жидкостей

4.2.1. Вязкость. Уравнения Навье – Стокса

Все реальные жидкости и газы обладают определенной вязкостью, которая проявляется в виде внутреннего трения при деформации. Некоторые жидкости, например, мед, глицерин, тяжелые масла и др. обладают особенно большой вязкостью. Для того, чтобы понять, в чем заключается сущность вязкости, рассмотрим поток (течение) между двумя параллельными пластинами, причем верхняя движется со скоростью V, в то время как другая, нижняя находится в состоянии покоя (рис. 4.48). Вследствие трения жидкость на пластинах имеет такую же скорость как и сами пластины (прилипание). Промежуточные слои скользят со скоростями $u(y)$ пропорциональными расстоянию y от неподвижной пластины:

$$u = V \cdot \frac{y}{a}.$$

Трение жидкости проявляется при этом в виде силы, оказывающей сопротивление движению верхней пластинки. Эта сила на каждую единицу поверхности пластины имеет величину $\tau = \mu \cdot V/a$. Таким образом для касательного напряжения мы имеем:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}, \tag{4.42}$$

где μ — это динамическая вязкость. Теорема (4.42) действительна для ньютоновых сред.

Основываясь на полученных данных, мы можем рассмотреть некоторые примеры ламинарных течений, куда относится течение вязкой жидкости в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечение. Разность давлений $p_1 - p_2$ создает на цилиндре радиуса r (рис. 4.49), силу $(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2$. Противодействующая сила создается в результате трения на боковой поверхности цилиндра $2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \tau$. Приравнивая обе силы получаем:

$$-\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r}{2}, \tag{4.43}$$

где τ имеет знак минус, так как сила трения направлена против течения. Уравнение (4.42) дает: $du/dr = \tau/\mu$. Интегрируя это уравнение и, исходя из условия прилипания, имеем:

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot (R^2 - r^2). \tag{4.44}$$

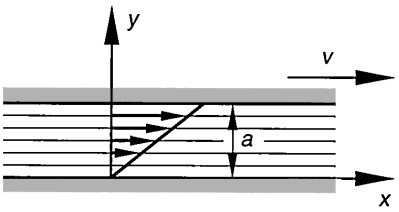


Рис. 4.48. Движение вязкой жидкости между параллельными пластинами

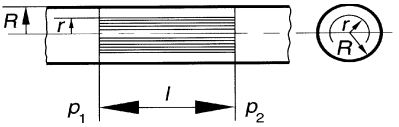


Рис. 4.49. Ламинарное течение в трубе

В качестве распределения скоростей получается параболоид (ср. рис. 4.54). Количество протекающей через трубу жидкости рассчитывают по формуле:

$$Q = \int_0^R u \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}. \qquad (4.45)$$

Это уравнение при известном расходе жидкости позволяет точно определить динамическую вязкость μ. Расход жидкости пропорционален падению давления на единицу длины трубы и четвертой степени радиуса трубы. Г. Гаген (1839) и Пуазейль вывели путем экспериментов уравнение (4.45) независимо друг от друга. Поэтому оно называется *законом Гагена – Пуазейля*. Но он действителен для ламинарного течения в трубе. Закон турбулентного течения в трубе приводится в главе 4.2.5.

Уравнения Навье – Стокса

Общая теория трения жидкости гласит, что в результате деформации отдельных элементов жидкости и возникают напряжения, похожие на напряжение в упругих телах. Разница заключается лишь в том, что эти напряжения пропорциональны не деформациям, а скоростям деформаций.

Поэтому уравнения для девяти компонентов напряжения (по три на плоскостях, перпендикулярных осям координат) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2\cdot\mu\cdot\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
\sigma_{yy} &= 2\cdot\mu\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
\sigma_{zz} &= 2\cdot\mu\cdot\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Если эти напряжения во всех точках области имеют одинаковые значения (при аффинной деформации области), то они находятся в равновесии. Но если они различаются от точки к точке, то возникают силы с компонентами F'_x, F'_y, F'_z. Для F'_x имеем:

$$F'_x=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}. \tag{4.47}$$

Соответствующее уравнения получаются для F'_y и F'_z. Подставив равенство (4.46) в равенство (4.47) для ньютоновой среды и постоянных значений μ и ρ, применив уравнение неразрывности (3.4) имеем:

$$F'_x=\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{4.48}$$

Аналогичные уравнения получаем для F'_y и F'_z.

Сила трения $\boldsymbol{F'}$ появляется в вязких жидкостях дополнительно к силам давления в жидкости, лишенной трения, о чем говорилось в предыдущей главе 4.1, а в данном случае также дополнительно к массовым силам $\boldsymbol{F}$. Эти силы определяют ускорение частиц жидкости. С учетом сил трения (4.48) в правой части уравнения Эйлера мы получим дифференциальные *уравнения Навье–Стокса* для вязкой жидкости. Для несжимаемых потоков эти уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
\rho\cdot\frac{du}{dt} &= \rho\cdot F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\cdot\Delta u,\\
\rho\cdot\frac{dv}{dt} &= \rho\cdot F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\cdot\Delta v,\\
\rho\cdot\frac{dw}{dt} &= \rho\cdot F_x-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\cdot\Delta w,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

где символ Δ введен для сокращения обозначения операции $\partial^2/\partial x^2 + + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, а отношение du/dt означает, например:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

В течении, где преобладает компонент u, и которое больше всего измениться в направлении y, доминирующим напряжением является $\tau_{xy} = \mu \cdot \partial u/\partial y$. Поэтому в соответствии с уравнением (4.48) наибольшую величину будет иметь сила $\mu \cdot (\partial^2 u/\partial y^2)$. Затем она вступает во взаимодействие с перепадом давления $\partial p/\partial x$, с силой инерции $\rho \cdot (\partial u/\partial t)$ и, в данном случае, с массовой силой $\rho \cdot \boldsymbol{F}$.

Неньютоновские жидкости

Выведенные выше уравнения Новье – Стокса действительны для ньютоновской жидкости. От них отличаются неньютоновские жидкости, такие как, например, смола, магма, расплавы из синтетических материалов, полимерные растворы и такие суспензии, как кровь. Напряжения трения, действующее на элемент жидкости могут зависеть как от мгновенного состояния, так и от движения жидкости в прошлом. Таким образом жидкость обладает памятью.

Для характеристики свойств текучести, например для течения, изображенного на рис. 4.48, касательное напряжение τ_{xy} является функцией градиента скорости du/dy. Некоторые примеры ньютоновской и неньютоновской жидкости представлены на рис. 4.50. В отличие от ньютоновской жидкости о неньютоновской жидкости говорят, что функциональная связь уравнения (4.42) является нелинейной. Кривые для жидкостей, которые не могут противостоять скорости сдвига, проходят через нулевую точку.

Вязкоупругие жидкости проявляют упругое восстановление формы после снятия сдвиговых напряжений. Такие жидкости обладают одновременно свойствами текучести и упругости. Кривая для псевдопластических частиц, таких как расплав или высокие полимеры снижается при возрастании касательного напряжения. В противоположность этому растянутые частицы жидкости, такие как суспензии, обнаруживают склонность к возрастанию. Поведение идеальной среды Бингама появляется, например, в зубной пасте или растворе. За конечным значением τ_{xy} при du/dy следует линейная характеристика ньютоновской жидкости. К этому следует добавить, что

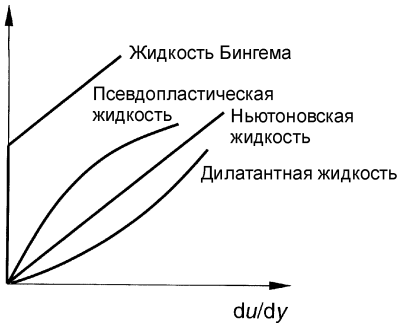


Рис. 4.50. Касательное напряжение τ для ньютоновских и неньютоновских жидкостей

некоторые ньютоновские частицы жидкости обнаруживают зависимость касательного напряжения от времени. Даже если тангенциальная величина остается постоянной, напряжение все равно изменяется. Теорема, наиболее часто используемая в неньютоновской среде, гласит:

$$\tau_{xy} = K \cdot \left[\frac{du}{dy}\right]^n , \tag{4.50}$$

где K и n постоянные вещества. При $n < 1$ получается псевдопластическая частица, $n = 1$ при $K = \mu$ — это ньютонова частица жидкости, а $n > 1$ это растянутая частица жидкости. Следует обратить внимание на то, что теорема (4.50) дает для нулевой точки (рис. 4.50) нереальные значения.

Другие многочисленные закономерности для неньютоновых частиц жидкости выводятся на основании экспериментальных результатов. Избранные примеры течений дополняются описанием в гл. 4.2.13. Далее рассуждения будут связаны только с ньютоновыми частицами жидкости.

4.2.2. Динамическое подобие. Число Рейнольдса

Возникает вопрос, когда при подобной геометрии (геометрически подобные каналы, геометрически подобные обтекаемые тела) течение тоже будет геометрически подобным? Для этого, очевидно, необходимо, чтобы в сравниваемых течениях соответствующие отношения перепада давлений, сила трения и сила инерции были одинаковыми. Благодаря равновесию

сил достаточно рассмотреть одно отношение. Различные геометрически подобные течения характеризуются характерными длинами l_1, l_2 (например диаметр или длина тела, диаметр трубы) и характерными скоростями (например, скорость тела или средняя скорость в определенном сечении трубы). Различные плотности и вязкости обозначаются ρ_1 и ρ_2 и μ_1 и μ_2. Составляющая сила инерции в направлении x равна

$$-\rho \cdot \frac{du}{dt} = -\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right).$$

В подобных течениях мы имеем такие же отношения, как $\rho_1 \cdot v_1^2/l_1$ относится к $\rho_2 \cdot v_2^2/l_2$. В соответствующих точках значения u проявляют себя как характерные скорости v_1 и v_2. Длина проявляют себя как характерные длины l_1 и l_2. Сила трения, наоборот, в соответствии с соотношением $\mu \cdot (\partial^2 u/\partial y^2)$ проявляет себя как $\mu \cdot v/l^2$. $\partial^2 u$ означает незначительную разность скоростей второго порядка. Она ведет себя как скорость v. ∂y^2 есть квадрат малой разности длин и выражается через l^2.

Механическое подобие требует, чтобы $\rho \cdot v^2/l$ и $\mu \cdot v \cdot l^2$ находились в соотношении:

$$\frac{\rho \cdot v_2}{l} : \frac{\mu \cdot v}{l^2} = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\mu}.$$

Механическое подобие в обеих системах можно ожидать следовательно если имеем:

$$\frac{\rho_1 \cdot v_1 \cdot l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 \cdot v_2 \cdot l_2}{\mu_2}. \tag{4.51}$$

Отношение сил инерции к силам вязкости называют *числом Рейнольдса*. Отношения μ/ρ называется *кинематической вязкостью* и обозначается ν.

Таким образом, состояние потока вязкой жидкости можно охарактеризовать числом Рейнольдса $Re = \rho \cdot v \cdot l/\mu = v \cdot l/\nu$. Если число Ренольдса мало, то это означает преобладание сил трения, а если число Рейнольдса велико, это преобладают силы инерции.

Крайний случай очень незначительного числа Рейнольдса называют *ползущим течением*, для которого существует аналитическое решение уравнения Навье – Стокса (4.49) при обтекании шара. Эти течения характеризуются тем, что составляющие ускорения выпадают и в равновесии друг с другом находятся только сила давления и трения, как это, например, имеет место у очень вязких моторных масел или при очень небольших геометрических параметрах.

Сила трения на элементе объема пропорциональна $\mu \cdot v/l^2$. Сила давления вследствие равновесия следует тому же соотношению, таким образом, геометрическое подобие всегда ведет за собой механическое подобие. Сравниваемые объемы проявляют себя как l^3, таким образом, общие силы сопротивления должны быть пропорциональны $\mu \cdot v \cdot l$. Сопротивление пространственного течения рассчитывается с помощью решения Стокса из уравнения Навье – Стокса

$$W = 6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot v \cdot R. \tag{4.52}$$

При падении маленьких капель сопротивление нужно брать равным разности веса и подъемной силы. Таким образом, для капельки радиусом R и плотностью ρ_t в пространственной жидкости плотностью ρ имеем:

$$6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot v \cdot R = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot (\rho_t - \rho) \cdot q \cdot R^3.$$

Скорость падения составляет:

$$V = \frac{2}{g} \cdot \frac{(p_1 - p)}{\mu} \cdot g \cdot R^2. \tag{4.53}$$

Это уравнение действительно для чисел Рейнольдса меньше 1. Для капли воды в воздухе имеем $V = 1,2 \cdot 10^8 \dot{R}^2$. В этом уравнении R следует записывать в метрах. Оно действительно для капель, радиус которых меньше чем 10^{-2} мм, т. е. для мелкого тумана.

4.2.3. Ламинарные пограничные слои

В случае с очень большим числом Рейнольдса преобладает сила инерции. На поверхности тела образуется тонкий пограничный слой, в котором скорость внешнего потока, лишенного трения, замедляется на стенке до значения равного нулю (условие прилипания). Причем пограничный слой тем тоньше, чем меньше вязкость. Силы трения в нем имеют тот же порядок что и силы инерции.

На рис. 4.51 представлено распределение скорости в пограничном слое. Если параметры тела в направлении течения имеют величину l, а толщина пограничного слоя — величину δ, то сила трения на элементе объема $\mu \cdot (\partial^2 u/\partial y^2)$ будет равна $\mu \cdot U/\delta^2$. Сила инерции равна $\rho \cdot U^2/l$. Оба выражения будут равны по величине, если

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot l}{\rho \cdot U}}. \tag{4.54}$$

Оценку с тем же результатом можно получить также при рассмотрении количества движения для течения в пограничном слое вдоль плоской пластины. Пусть l — длина пластины, b — ширина, U — скорость течения, δ — толщина пограничного слоя (рис. 4.52).

Тогда масса, входящая за одну секунду в пограничный слой, будет пропорциональна величине $\rho \cdot b \cdot \delta \cdot U$. Эта масса, вступающая в пограничный слой со скоростью U, теряет здесь некоторую долю своей скорости.

Это приводит к соответствующей потери количества движения и рассчитывается из массы, умноженной на потери скорости, пропорционально величине $\rho \cdot b \cdot \delta \cdot U^2$. Из пропорциональности обоих выражений следует:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot l}{\rho \cdot U}} = \sqrt{\frac{\nu \cdot l}{U}}.$$

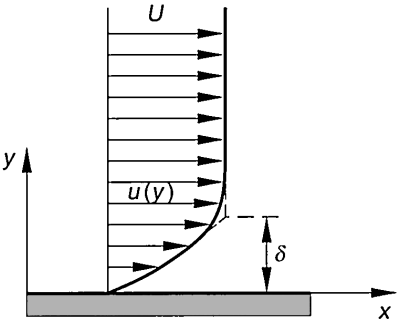


Рис. 4.51. Распределение скоростей вблизи стенки

Следовательно, отношение δ/l пропорционально $\sqrt{v/(U \cdot l)}$. При $U \cdot l/v = Re_l$ и $U \cdot \delta/\nu = Re_\delta$, будет $\delta/l \sim 1/\sqrt{Re_1}$, а $Re_\delta \sim \sqrt{Re_l}$.

В формулу можно ввести время, которое требуется отдельным частицам жидкости для того, чтобы пройти вдоль тела. Для частиц, двигающихся не слишком быстро от поверхности тела этот промежуток порядка $t \sim l/U$, таким образом формула имеет вид:

$$\delta \sim \sqrt{\nu \cdot t}. \tag{4.55}$$

Это уравнение можно применить также к неустановившимся течениям в пограничном слое, которые вдруг (внезапно) возникают в нем. Из него следует, что толщина пограничного слоя в начале движения возрастает пропорционально квадратному корню из времени.

Течению, изображенному на рис. 4.51 соответствуют местные касательные напряжения на стенке, которые создают сопротивление трения. Для пластинки (рис. 4.52) касательное напряжение $\tau_\omega = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ пропорционально

$$\tau_\omega \sim \mu \cdot \frac{U}{\delta} \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot \rho \cdot U^3}{l}}.$$

Если ширина пластинки равна b, то полная площадь соприкосновения с потоком будет $O = 2 \cdot b \cdot l$. Таким образом, можем получить искомое сопротивление

$$W \sim 2 \cdot b \cdot l \cdot \tau_\omega = K \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \rho \cdot l \cdot U^3}, \tag{4.56}$$

с постоянной K.

Теория пограничного слоя связана с именем Прандтля (1904 год). В своей знаменитой работе о движении жидкости при достаточно большом трении были заложены основы описания течения около стенки при большом числе Рейнольдса.

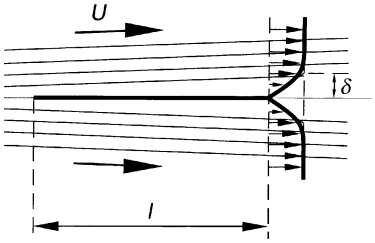


Рис. 4.52. Течение вдоль пластины

Ученик Прандтля Шлихтинг (Schlichting) в 1950 году в своей книге по теории пограничного слоя изложил о его применении почти во всех областях механики жидкости и газа.

В теории пограничного слоя вполне допустимо пренебрегать разностью давлений в различных точках по нормали к стенке. То же самое относится и к разности скоростей, направленных перпендикулярно к стенке. От членов в правой части уравнения (4.48) остается только выражение $\mu \cdot (\partial^2 u / \partial y^2)$, которое пропорционально $\rho \cdot u \cdot \partial u / \partial x$.

Для двухмерного потока можно также пренебречь кривизной пограничного слоя. И считать, что координата x совпадает с длиной дуги линии тока. В таком случае получают *уравнение пограничного слоя* Прандтля для компонент скорости в направлении x.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{4.58}$$

Так как вертикальным градиентом давления можно пренебречь то, возникает ярко выраженное давление p внешнего течения. Это следует из уравнения (4.49) для компоненты скорости в направлении y. При значениях на стене $u = 0$ и $v = 0$ в уравнении (4.57) левая часть становится равной нулю. Таким образом, имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4.59}$$

При падении давления в направлении течения ($\partial p/\partial x$ отрицательна) профиль скорости искривлен (выпуклый). При повышении давления ($\partial p/\partial x$ положительно) профиль скорости напротив искривлен (вогнуто) и поэтому имеет точку перегиба. Если повышение давления слишком велико, то вблизи стенки происходит обратное течение и поток в пограничном слое отрывается.

При условии $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ образуется точка отрыва где течение в пограничном слое покидает стенку. Так как профили в случае отрыва течения должен иметь вогнутую кривизну, то *место отрыва* будет лежать в области повышенного давления.

В качестве *толщины пограничного слоя* вводится расстояние от стенки, для которого имеем $u = 0,99 \cdot U$. Толщину вытеснения δ_1 пограничного слоя рассчитывают из уравнения:

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy. \tag{4.60}$$

Оно показывает, насколько (на какое расстояние от стенки) был вытеснен внешний лишенный трения поток вследствие наличия пограничного слоя.

Толщина потери количества движения

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy \tag{4.61}$$

является мерой для определения относительной потери количества движения жидкости в сравнении с потоком, лишенным трения.

4.2.4. Возникновение турбулентности

Движение жидкости в трубе

При движении вязких жидкостей через длинную прямую (прямолинейную) трубу при высокой скорости и большом числе Рейнольдса, закон Га-

гена – Пуазейля, который приводится в уравнении (4.45), заменяют другим законом. Падение давления значительно выше и приблизительно пропорционально второй степени расхода массы. Одновременно колебания скоростей определяют характер течения. В ламинарном потоке окрашенная жидкость образует прямую линию. При большом числе Рейнольдса окрашенная струя жидкости обрывается и краска окрашивает жидкость равномерно по потоку. Упорядоченное движение называется *ламинарным*, а неупорядоченное *турбулентным*.

Этот эксперимент впервые был проведен О. Рейнольдсом в 1883 г. На рис. 4.53 показана окрашенная струя ламинарного и турбулентного течения в трубе.

Основное движение потока происходит в направлении оси трубы. В турбулентном потоке вследствие пульсации течения возникает сильное перемешивание, которое создает поперечное движение, перпендикулярно основному течению. Это поперечное движение вызывает обмен количеством движения в этом направлении. Поэтому при турбулентном течении в трубе распределение скорости по диаметру трубы более равномерное и наполненное, чем при ламинарном потоке в трубе (см. рис. 4.54).

О. Рейнольдс открыл на основании своих экспериментов, что переход от ламинарной формы течения в турбулентную всегда происходит при одинаковом числе Рейнольдса $Re_d = u_m \cdot d/\nu$, где $u_m = \dot{V}/A$ означает среднюю скорость течения (d – диаметр трубы, $\dot{V}$ – объемный расход, A – площадь поперечного сечения трубы). Численное значение *критического числа Рейнольдса*, при котором происходит переход, составляет

$$Re_{\text{крит}} = \left(\frac{u_m}{\nu}\right)_{\text{крит}} = 2300. \tag{4.62}$$

Исходя из этого, течения в трубах, число Рейнольдса в которых $Re < Re_{\text{крит}}$ называются ламинарными, а течения, в которых $Re > Re_{\text{крит}}$ называется турбулентными. Численное значение критического числа Рейнольдса в большей степени зависит от входа в трубу. О. Рейнольдс предположил, что в случае небольших пульсаций скорости на входе критическое число Рейнольдса больше. Этот факт нашел свое подтверждение при экспериментах. Были получены значения $Re_{\text{крит}}$ до 40 000. Нижнее граничное значение критического числа Рейнольдса составило около 2 000. Ниже этого числа Re даже очень сильно возмущенное течение остается ламинарным. Сегодня нам известно из результатов теории устойчивости, что ламинарно-турбулентный

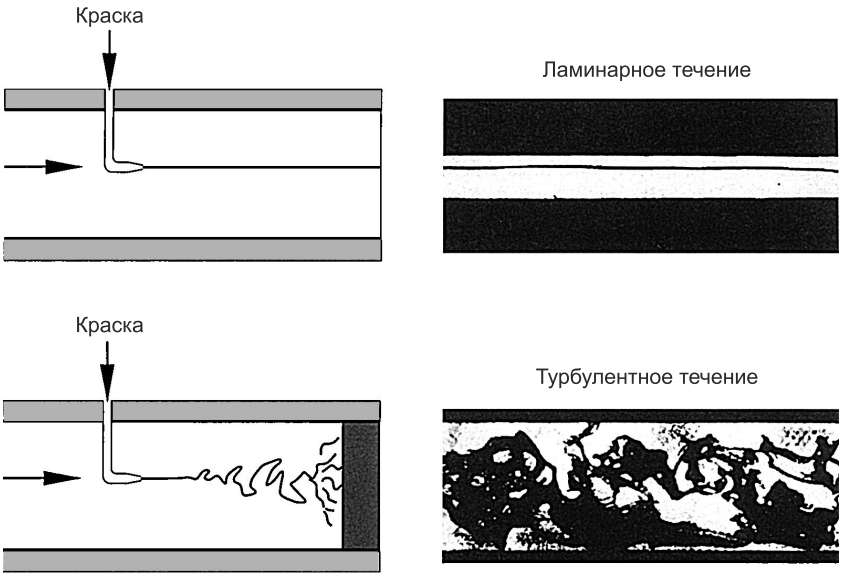


Рис. 4.53. Ламинарное и турбулентное течение в трубе (О. Рейнольдс 1883 г.)

переход вызывается трехмерным нестационарным течением. Течение в трубе по сравнению с двухмерным течением является устойчивым.

С ламинарно-турбулентным переходом связано также изменение закона сопротивления в трубе, в то время, как при ламинарном движении перепады давления пропорциональны первой степени средней скорости потока u_m, то при турбулентном движении этот перепад пропорционален квадрату средней скорости течения. Это значительное сопротивление потока связано в сущности с турбулентным перемешиванием.

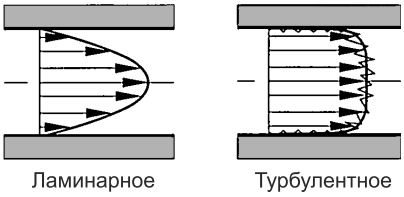


Рис. 4.54. Распределение скоростей при ламинарном и турбулентном движении в трубе

При ламинарно-турбулентном переходе, так называемой перемежаемости, речь идет о проблеме устойчивости.

Ламинарное движение находится под воздействием небольших возмущений, которые могут быть вызваны при течении в трубе, например, при входе. При малых числах Рейнольдса, т. е. при больших значениях v_1 затухающее действие вязкости достаточно большое, чтобы снова привести к затуханию эти небольшие возмущения. Лишь при довольно большом числе Рейнольдса затухания (успокаивающего действия) уже недостаточно, возмущения нарастают, и, в конце концов, начинается переход в турбулентную форму движения. В следующей главе будет показано что в плоских пограничных слоях сначала возникают двумерные возмущения, за которыми при дальнейшем течении следует трехмерные течения.

Как уже упоминалось, исследования теории устойчивости параболического профиля скорости при течении в трубе показывают, что он устойчив по отношению к двухмерным возмущениям. В отличие от пограничного слоя о чем пойдет речь в следующей главе, ламинарно-турбулентный переход при течении в трубе с самого начала возникает с трехмерными возмущениями.

Математическое дополнение Рейнольдса

Математическое описание турбулентных течений вытекает из экспериментальных результатов (рис. 4.53). При турбулентном течении мгновенную (истинную) скорость можно представить как сумму усредненной по времени скорости $\overline{u}(x, y, z)$ и пульсационной составляющей $u'(x, y, z)$. Дополнения Рейнольдса для турбулентных течений записываются в соответствии с изображением 4.55 в следующем виде.

$$u(x_1 y_1 z_1 t) = \overline{u}(x_1 y_1 z) + u'(x_1 y_1 z). \tag{4.63}$$

Определим усредненное по времени значение составляющей скорости u в произвольной точке:

$$\overline{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(x, y, z, t) dt. \tag{4.64}$$

T есть соответствующий большой интервал времени с условием, что возрастание T не приведет к дальнейшему изменению усредненного по времени значения $\overline{u}$. Из определения среднего по времени значения можно вывести, что средние значения (по времени) величин пульсаций становятся равными нулю

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{v'} = 0, \quad \overline{\omega'} = 0. \tag{4.65}$$

Течения в пограничном слое

Возникновение турбулентности не ограничивается течениями в трубах и каналах. Она наблюдается также в пограничных слоях. Число Рейнольдса $U\delta/u$ определяется здесь по толщине пограничного слоя δ и скоростью U вне пограничного слоя.

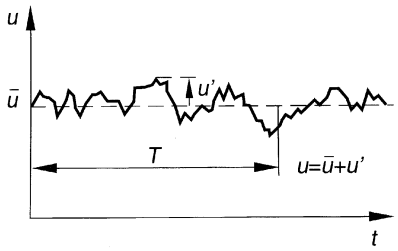


Рис. 4.55. Дополнения Рейнольдса для составляющей скорости u в направлении x

У обтекаемых тел толщина пограничного слоя вблизи контура поверхности очень мала. Движение сначала ламинарное и при переходе критического числа Рейнольдса становится турбулентным.

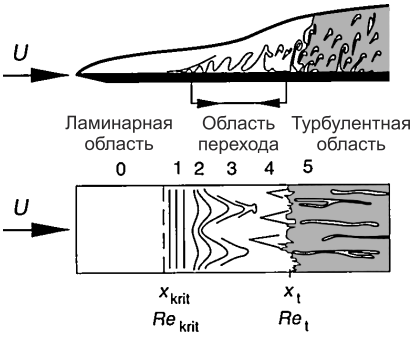
Толщина ламинарного пограничного слоя возрастает пропорционально $\sqrt{x}$, где x это расстояние до передней кромки. До критического числа Рейнольдса течение происходит без возмущений и при незначительной степени турбулентности.

Экспериментальные результаты исследований ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое обобщены на рис. 4.56. На ламинарное движение в пограничном слое при критическом числе Рейнольдса накладываются двухмерные волны возмущения, которые названы волнами Толмина–Шлихтинга. Далее по течению вниз накладываются трехмерные течения, которые приводят к характерному образованию λ-вихрей, с локальными тангенциальными слоями в пограничном слое. Распад λ-вихря вызывает турбулентные пятна, которые начинают переход в турбулентный поток пограничного слоя. При Re_t процесс перехода завершается, вниз по течению пограничный слой становится турбулентным.

Как видно из рис. 4.56, толщина пограничного слоя при ламинарно-турбулентном переходе сильно возрастает.

Теория устойчивости

Начало ламинарно-турбулентного перехода можно рассмотреть с помощью теории устойчивости. Эксперименты в этом направлении были поставлены уже прошлом веке и привели в конце-концов к успеху в 1930 году.



0 Ламинарное течение
1 Неустойчивые волны Толмина-Шлихтинга
2 Трехмерные волны, L-вихрь
3 Распад вихря
4 Образование турбулентных пятен
5 Турбулентное течение

Рис. 4.56. Схема ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое вдоль обтекаемой плоской пластинки

В основе теоретических исследований лежит представление, о том что в ламинарных течениях имеются незначительные возмущения. При движении в трубе они могут возникнуть при втекании, в то время как в пограничных слоях обтекаемых тел, они могут возникнуть в результате шероховатости стенки или в результате возмущения во внешнем течении. Теория рассматривает поведение во временной плоскости таких возмущений, накладывающихся на ламинарное основное течение, форму которых в отдельных случаях еще предстоит установить. Основным вопросом является следующий: затухают ли возмущения в зависимости от времени или возрастают. Если возмущения в зависимости от времени затухают, то основное течение считается устойчивым. И наоборот, если возмущение со временем возрастает, то основное течение неустойчивое, т. е. возникает возможность перехода в турбулентное течение

$$Re_{\text{krit}} = \left(\frac{U \cdot x}{\nu}\right)_{\text{krit}} = 5 \cdot 10^5. \tag{4.66}$$

Таким образом, можно развить теорию расчета критического числа Рейнольдса для определенного течения. При исследовании устойчивости

движение разлагается на основное течение, устойчивость которого нужно исследовать и на наложенное движение возмущения. Основное течение, которое можно считать устойчивым, обозначается далее составляющими скорости U_0, V_0, W_0 и давлением P_0. Это основное течение и представляет собой решение уравнения Навье–Стокса (4.49). Для движения возмущения, изменяющегося во времени, соответствующими величинами являются u', v', w', p'. Результирующая скорость течения получается при использовании добавления возмущения

$$u = U_0 + u', \quad v = V_0 + v', \quad w = W_0 + w', \quad p = P_0 + p'. \tag{4.67}$$

В большинстве случаев предполагается, что величина возмущения мала по сравнению со значением основного течения.

Для двухмерного несжимаемого основного течения U_0, V_0 и двухмерного движения возмущения (u'иv') результирующее течение по уравнению (4.67) удовлетворяет двухмерным уравнениям Навье–Стокса. Основное течение $U_0(y)$ выбрать очень просто, так что U_0 зависит только от y. Составляющая скорости V_0 становится равной 0. Течение в пограничном слое приближенно выполняет это условие, т. к. зависимость основного течения U_0 от координаты длины x намного меньше, чем от поперечной координаты y. Это условие параллельного течения. Для давления основного течения $P_0(x, y)$ нужно также учитывать зависимость от x, т. к. перепад давлений $\partial P_0/\partial x$ создает течение.

Таким образом, рассматриваемое основное течение имеет вид:

$$U_0(y), \quad V_0 = 0, \quad P_0(x, y). \tag{4.68}$$

На это основное течение накладывается двухмерное движение возмущения (рис. 4.57), которое также зависит от времени.

Соответствующими составляющими скорости и давления являются:

$$u'(x, y, t), \quad v'(x, y, t), \quad p'(x, y, t). \tag{4.69}$$

Результирующее течение получаем по формуле (4.67)

$$u = U_0 + u', \quad v = v', \quad p = P_0 + p'. \tag{4.70}$$

Основное течение (4.68), в соответствии с условием, есть решение уравнений Навье–Стокса. Результирующее течение (4.70) тоже должно удовлетворять уравнениям Навье–Стокса. Наложенное движение возмущения (4.69) предполагается небольшим, т. е. всеми квадратичными членами движения возмущения будем пренебрегать в отличие от линейных членов.

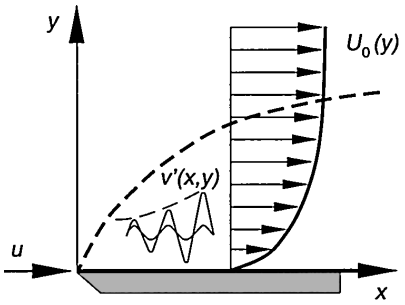


Рис. 4.57. Основное течение $U_0(y)$ и волна возмущения $v'(x,y)$ в пограничном слое пластинки

Цель исследований устойчивости заключается в том, чтобы установить: затухает или, наоборот, возрастает движение возмущения в зависимости от времени для определенного основного течения. В зависимости от этого основное течение называют устойчивым или неустойчивым.

Подставив уравнение (4.70) в уравнение Навье–Стокса получим, если пренебречь квадратичными членами в скоростях возмущения следующее соотношение:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \cdot \frac{dU_0}{dy} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \cdot \left(\frac{d^2 U_0}{dy^2} + \Delta u' \right),$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \cdot \Delta v',$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0.$$

где Δ есть оператор Лапласа $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Учитывая выполнение уравнений Навье–Стокса для основного течения (в случае пограничного слоя), эти уравнения упрощаются до вида:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \cdot \frac{dU_0}{dy} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \cdot \Delta u',$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \cdot \Delta v', \qquad (4.71)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,$$

это три уравнения для u', v' и p'. Соответствующие граничные условия требуют, чтобы скорости возмущения u' и v' на граничных стенках и на бесконечности были равны нулю. Из уравнений (4.71) можно исключить давление p'; таким образом вместе с уравнением неразрывности получаются два уравнения для u' и v'.

Для описания составляющих возмущения для волн Толмина – Шлихтинга используется волновая добавка

$$u' = \hat{u}(y) \cdot \exp(i \cdot a \cdot x - i \cdot \omega \cdot t), \quad v' = \hat{v}(y) \cdot \exp(i \cdot a \cdot x - i \cdot \omega \cdot t), \tag{4.72}$$

где a — это волновое число, ω — круговая частота, $\hat{u}, \hat{v}$ — амплитуды функции волн возмущения. Для рассматриваемой проблемы устойчивости с точки зрения временной зависимости ω является комплексной:

$$\omega = \omega_r + i \cdot \omega_i,$$

с действительной частью — окружной частотой ω_r и временным коэффициентом усиления возмущения ω_i. При $\omega_i > 0$ получается неустойчивый пограничный слой, в котором волны Толмина-Шлихтинга со временем увеличиваются. Целесообразно наряду с a и ω ввести фазовую скорость волны возмущения:

$$c = \frac{\omega}{a} = c_r + i \cdot c_i.$$

Подставив волновое волновое представление возмущений для u' и v' (4.72) в дифференциальное уравнение , получим, например, для функции амплитуды $\hat{v}(y)$ уравнение Орра–Зоммерфельда:

$$\begin{aligned}(a \cdot U_0 - \omega) \cdot \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + a \cdot (a \cdot \omega - a^2 \cdot U_0 - \frac{d^2 U_0}{dy^2}) \cdot \hat{v} + \\ + i \cdot \frac{1}{Re_d} \cdot (\frac{d^4\hat{v}}{dy^4} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + a^4 \cdot \hat{v}) = 0.\end{aligned} \tag{4.73}$$

Причем безразмерные величины вводятся с характерной скоростью на границе пограничного слоя U_δ, характерной длиной $d = \sqrt{\nu \cdot x / U_\delta}$ и характерным временем d/U_δ. Уравнение Орра–Зоммерфельда является обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка, которое при граничных условиях на стенке и невозмущенном течении

$$\begin{aligned} y = y_w: \quad & \hat{v} = 0, \quad \frac{d\hat{v}}{dy} = 0, \\ y \to \infty: \quad & \hat{v} = 0, \quad \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \end{aligned} \tag{4.74}$$

представляет задачу на собственные значения с числом Рейнольдса Re_d в качестве параметра. Эта проблема решается обычно численно спектральным методом.

Решение задачи на собственные значения изображается в виде диаграммы устойчивости (рис. 4.58). Диаграмма устойчивости составляется в пространстве волнового числа a и числа Рейнольдса Re_d. Для нулевой величины мнимой части комплексного собственного значения ω на диаграмму наносятся соответствующие пары значений (Re_d, a). Эта нейтральная кривая отделяет устойчивое течение от неустойчивого. Она называется еще нейтральной или индифферентной кривой, т.к. в случае $\omega_i = 0$ амплитуда возмущений сохраняет свое первоначальное значение. В области внутри такой нейтральной кривой имеем $\omega_i > 0$, т.е. течение неустойчиво. В области вне кривой отрицательное значение возрастает и исследуемое основное течение при рассматриваемом числе Рейнольдса устойчиво к появлению возмущений с соответствующим волновым числом a.

Таким образом, можно определить число Рейнольдса, выше которого данное ламинарное движение становится неустойчивым. Чтобы показать это, на рис. 4.58 наносится касательная к нейтральной кривой параллельно оси a. Точка пересечения этой касательной с абсциссой дает значение искомого критического числа Рейнольдса Re_{krit}. Для пограничного слоя Блазиуса значение критического числа Рейнольдса составляет:

$$Re_{\text{krit}} = \left(\frac{U_\delta \cdot x}{\nu} \right)_{\text{krit}} = 5 \cdot 10^5. \tag{4.75}$$

При критическом числе Рейнольдса $Re_{krit} = 5 \cdot 10^5$ из рис. 4.58 получается критическое волновое число $a_{krit} = 2\pi\lambda_{krit}$ с помощью которого можно рассчитать критическую длину волны λ_{krit} наложенных возмущений. С физической точки зрения это означает, что ламинарное основное течение для чисел Рейнольдса меньше Re_{krit} остается устойчивым по отношению к возмущениям любой длины волны, т.к. в этом численном диапазоне чисел Рейнольдса для всех длин волн соблюдается условие $\omega_i < 0$. При представлении критического числа Рейнольдса через характерную длину $d = \sqrt{\nu \cdot x / U_\delta}$ получается значение

$$Re_{krit} = \frac{U_\delta \cdot d}{\nu} = 302. \tag{4.76}$$

Это представление целесообразно для сравнения с неустойчивостью сжимаемых пограничных слоев. Таким образом, включив волну Толмина–

Шлихтинга в сжимаемое течение пограничного слоя при адиабатической стенке также получим $Re_{krit} = 302$. Различия наблюдаются лишь при изотермических условиях.

Влияние ламинарно-турбулентного перехода

Влияние ламинарно-турбулентного перехода в двухмерном течении пограничного слоя было представлено и обобщено Х. Шлихтингом в 1968 году. Переход можно путем соответствующих мер сдвинуть вниз по течению.

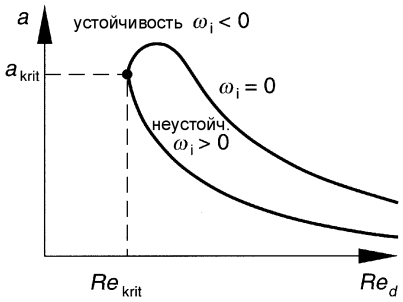


Рис. 4.58. Диаграмма устойчивости пограничного слоя пластинки

Это ведет к уменьшению сопротивления. На ламинарно-турбулентный переход можно оказать влияние посредством подвижных поверхностей, ускорения граничного слоя путем вдува, через градиенты давления, отсасывание пограничного слоя и охлаждение поверхности. Далее будет рассмотрено влияние градиента давления, которые имеет место при ускорении на профиле крыла.

При обтекании пластинки на различных расстояниях от передней кромки пластинки образуются подобные профили скорости, а градиент давления $\partial p/\partial x$ вызывает различия ламинарные профили пограничного слоя вдоль профиля крыла. В области уменьшающегося давления $\partial p/\partial x < 0$ профили скорости не имеют точки перегиба, а в области возрастания давления $\partial p/\partial x > 0$ скоростные профили имеют точку перегиба. В то время как у медленно обтекаемой пластинки все профили скорости обнаруживают одинаковое критическое число Рейнольдса $Re_{krit} = 302$, у профиля крыла граница устойчивости для отдельных профилей пограничного слоя различна. В области уменьшающегося давления получаются большие критические

числа Рейнольдса, а в области возрастающего давления — меньшие, чем при обтекании пластинки.

Градиент давления на профиле крыла можно описать с помощью форпараметра Λ

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\mu \cdot U\delta} \cdot \frac{\partial p_\delta}{\partial x} = \frac{\delta^2}{\nu} \cdot \frac{\partial U_\delta}{\partial x},$$

где δ — толщина пограничного слоя и U_δ — это скорость на границе пограничного слоя. Параметр формы Λ принимает значение между $\Lambda = -12$ и $\Lambda = +12$, при $\Lambda = -12$ происходит отрыв ламинарного пограничного слоя.

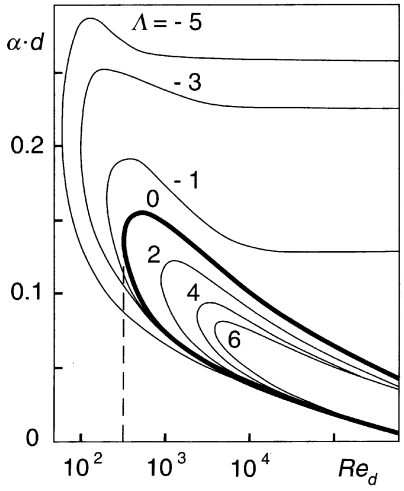


Рис. 4.59. Диаграмма устойчивости для ламинарных профилей пограничного слоя при уменьшении давления $\Lambda > 0$ и повышения давления $\Lambda < 0$

В передней точке профиля $\Lambda = 7,05$, а при минимуме давлений $\Lambda = 0$. $\Lambda > 0$ означает уменьшение давления, $\Lambda < 0$ увеличение давления. Профили скорости при $\Lambda < 0$ имеют точку перегиба.

На рис. 4.59 показана диаграмма устойчивости ламинарного профиля пограничного слоя с уменьшением давления и возрастанием давления. Для профилей скорости в области уменьшающегося давления $\Lambda > 0$ при $Re_d \to \infty$, как и у пограничного слоя пластины с $\Lambda = 0$, обе ветви нейтральной кривой стремятся к 0. Для профиля скорости при возрастании

давления $\Lambda < 0$, наоборот, верхняя ветвь кривой имеет другую асимптоту, таким образом, также при $Re_d \to \infty$ имеет место конечная область длины волн возникших возмущений. Как можно увидеть для пограничных слоев в области возрастания давления, неустойчивая область длин волн возмущения, охватывающая нейтральную кривую, намного больше, чем в области уменьшающегося давления.

Распространение турбулентных возмущений

До сих пор мы рассматривали возникновение ламинарно-турбулентного перехода с точки зрения теории устойчивости. Далее рассмотрим возмущения в переходной области, которые уже включены в рис.4.56 как турбулентные пятна.

Рис. 4.60 демонстрирует распространение местных турбулентных возмущений в переходной области ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя пластинки. Временная последовательность распространения турбулентных возмущений показывает, что турбулентность, возникшая в результате возмущений, распространяется далее вниз по течению сама по себе.

Возмущение внесено в пограничный слой, при кратковременном отсасывании небольшого количества жидкости из пограничного слоя. Камера двигалась на тележке вместе с возмущением таким образом можно было наблюдать всегда одну и ту же группу вихрей. При пространственном развитии вихрей вниз по течению образуются все новые вихри пока, наконец не образуется полностью турбулентное течение в пограничном слое.

До сих пор имеется небольшое количество теорий относительно процесса распространения турбулентных возмущений, также как и точной теории возникшего турбулентного состояния.

4.2.5. Турбулентные течения

Очень многие технические течения являются турбулентными. В соответствии с дополнением Рейнольдса (4.63) здесь подразумевается наложение на усредненное по времени главное движение турбулентных пульсаций. Для наглядности на рис.4.61. представлены снимки турбулентного течения в водном русле. Одна и та же картина течения была заснята при одинаковой скорости течения и различной скорости движения камеры.

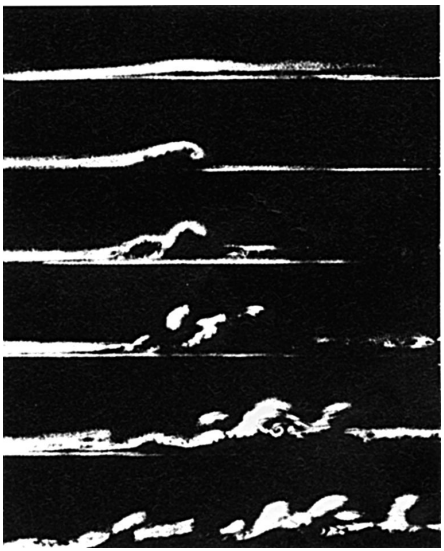


Рис. 4.60. Распространение турбулентного возмущения

На 4 снимках можно увидеть: больше или меньше продольная скорость потока скорости движения камеры. При малой скорости камеры на стенке видна турбулентная структура. При большей скорости движения камеры турбулентные структуры видны внутри течения. На снимках можно увидеть места, где продольная скорость течения на какое-то мгновение совпадает с движением камеры.

Представленный на рисунке продольный и поперечный обмен количеством движения турбулентного течения вызывает турбулентное движение перемешивания, которое в большой степени ответственно за большое сопротивление турбулентного течения.

Перемешивание по Прандтлю

В главе 4.1.9 уже говорилось, что пульсации скорости вызывают кажущиеся напряжения, например, турбулентное напряжение сдвига $\tau' = -\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$, которое связано с распределением скоростей. При этом существенное значение имеет путь перемешивания Прандтля, т. е. путь, где

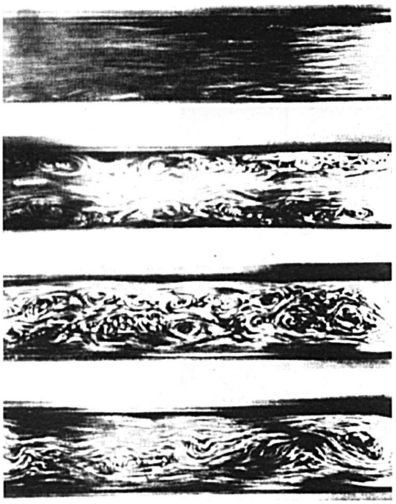


Рис. 4.61. Турбулентное течение в водном русле, движущаяся камера. Снимки Никурадзе 1929 год. Воспроизведение В. Толмин 1931 год

элемент жидкости в результате турбулентного перемешивания с окружающей жидкостью теряет свою индивидуальность.

На рис. 4.62 элемент жидкости в рассматриваемом пограничном слое сдвигается с точки y со средней скоростью $\bar{u}(y)$ проходит путь длиной l. Разница скорости на новом месте составляет $\overline{u}(y+l) - \bar{u}(y)$. В первом приближении мы можем записать $l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y)$. Этот путь указывает величину пульсаций. Величину v' получаем предполагая, что два элемента жидкости,которые входят в рассматриваемый слой с разных сторон, сближаются или удаляются друг от друга с относительной скоростью $2 \cdot l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y)$. Вследствие неразрывности поперечная скорость имеет такое же значение. Таким образом, для v‘ получим значение $l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y)$. При образовании среднего значения $\overline{u' \cdot v'}$ следует обратить внимание на знак компонентов u и v. К положительным v' относится отрицательная u и к отрицательным v' положительные u'. Произведение $u' \cdot v'$ поэтому всегда отрицательное. Кажущееся напряжение сдвига становится положительным и составляет величину $\rho \cdot (l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y))^2$. Для турбулентного напряжения сдвига τ' получаем

$$\tau' = \rho \cdot l^2 \cdot \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \tag{4.77}$$

Из уравнения (4.77) следует, что кажущееся напряжение турбулентного движения смешивания изменяется пропорционально квадрату скорости.

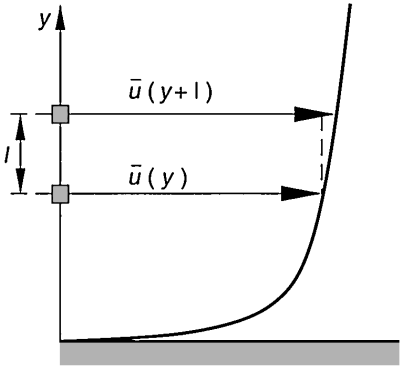


Рис. 4.62. Путь перемешивания Прандтля

В действительности все гидравлические сопротивления обнаруживают подобное поведение. Длина l, которую называют длиной пути перемешивания Прандтля имеет некоторое родство со средней длиной пути свободного пробега молекул в кинетической теории газов. В этой теории перенос количеств движения, вызванный молекулярным движением рассматривается совершенно также как перенос количеств движения элементов жидкости в случае с турбулентным течением. Путь перемешивания l турбулентного движения в общем зависит от места. Однако, нет общей теории о том, каков этот путь в каждом отдельном случае. И все-таки для ряда отдельных случаев можно найти подходящие положения, которые приводят к хорошо подтверждаемым результатам.

Свободная струя

Для струи достаточно большого числа Рейнольдса рекомендуется длину пути перемешивания l в каждом поперечном сечении считать пропорциональной ширине струи в этом сечении, т.е. $l = \alpha \cdot b$. При этом b это половина диаметра параболического распределения скоростей, максимальная скорость которого и объем жидкости совпадают с действительным потоком. α — это постоянная пропорциональности с $\alpha \approx 0,125$.

Такое установление профиля скоростей является необходимым, т.к. вязкий поток диффузно переходит во внешнюю жидкость. Скорость струи, вытекающей через круглое отверстие уменьшается с возрастанием расстояния от отверстия, причем во всех поперечных сечениях имеется колоколоподобное распределение скорости (см. рис. 4.63). Так как в струе присутствует почти такое же давление, как и в окружающей среде, то в ней образуются преимущественно вязкие напряжения, которые уменьшают скорость с удалением от отверстия и захватывают с собой при этом одновременно все новые и новые массы неподвижной жидкости. Напряжение (вязкости) τ' возрастает, начиная от середины струи, в радиальном направлении от нуля до максимального значения, чтобы затем снова упасть до нулевого значения.

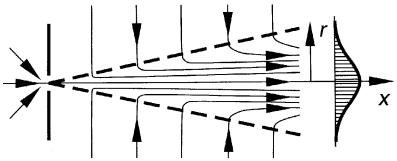


Рис. 4.63. Центральные линии тока расширяющейся струи воздуха

Вследствие приближенно постоянного давления вполне возможно предположить, что количество движения струи $J = \rho \cdot \int u^2 \cdot dA$ будет одинаково для всех значений x. Таким образом J пропорционально $\rho \cdot {u_1}^2 \cdot \pi \cdot b^2$, где u_1 есть максимальная скорость в поперечном сечении A струи. Так как J постоянна, то отсюда следует, что u_1 пропорциональна $1/b$ и вместе с тем пропорциональна также $1/x$. Течение происходит согласно рис. 4.63. Если b — это половина диаметра, для которого имеем $u/u_1 = 0,5$, то получается для $x/d > 10$, (d — диаметр струи при $x = 0$); $b/x = 0{,}0848$ и, кроме того, $u_1(x)/u_1(x = 0) = 6{,}57 \cdot d/x$. Количество жидкости $\int u \cdot dA$, протекающее в осевом направлении, пропорционально $u_1 \cdot \pi \cdot b^2$ и линейно возрастает с увеличением расстояния x. Жидкость, находящаяся в пространстве, притекает поэтому к струе с радиальной скоростью $v \sim \sqrt{J/\rho}/r$.

При $l = \alpha \cdot b$, если $\partial\overline{u}/\partial y$ приближенно равно $-2 \cdot u_1/b$, то получаем для вязкого напряжения τ' согласно уравнению (4.77) среднее значение τ'_m. Таким образом, имеем

$$\tau'_m = -4 \cdot \rho \, l^2 \cdot \left(\frac{u_1^2}{b} \right) = -4 \cdot \alpha^2 \cdot \rho \cdot u_1^2.$$

Слой смешения

Другим важным случаем турбулентного течения является размыв края струи при обтекании угла (рис.4.64). Здесь u_1 постоянная, τ'_m с $l = \alpha \cdot b$ пропорциональна $\alpha^2 \cdot \rho \cdot {u_1}^2$ и, следовательно, тоже постоянна. В дальнейшем рассматривается расширение в перпендикулярном к отмеченной плоскости направлении за 1 единицу. Таким образом, потеря количества движения приходящего течения пропорциональна ${\tau'}_m \cdot x$, т.е. $b \sim \alpha^2 \cdot x$, как и в свободной струе. Жидкость окружающей среды равномерно приобретает количество движения.

Турбулентность на стенке

При течении потока вдоль стенки длина пути перемешивания при приближении к стенке должна стремиться к нулю. Отсюда следует, что $\partial\overline{u}/\partial y$ внутри потока уменьшается, а вблизи стенки принимает большое значение. На стенке при $y = 0$ имеет место условие прилипания. Вследствие этого, в непосредственной близости от стенки образуется тонкий слой трения (ламинарный подслой), где $\partial\overline{u}/\partial y = \tau_w/\mu$ с вязким напряжением на стенке τ_w.

Для теоретического изучения рассмотривается гладкая стенка и для упрощения полагается, что вязкое напряжение $\bar{\tau} = \tau_w$ является постоянным в направлении x и z до бесконечности. Следовательно имеем:

$$\bar{\tau} = \tau_w = \mu \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \cdot \overline{u' \cdot v'}. \tag{4.78}$$

Средняя скорость зависит только от y и определяется полностью через τ_w, ρ, ν. Эту связь можно отразить в трехмерной форме. Тогда нужно ввести динамическую скорость (скорость трения) $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$. Отношение ν/u_τ — это характеристическая длина. Общее вязкое напряжение в слое, близком к стенке, состоит из среднего значения напряжение трения и вязкого напряжения турбулентности, дает для положительных градиентов $d\overline{u}/dy$.

$$\tau_w = \mu \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho \cdot l^2 \cdot \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2. \tag{4.79}$$

Первое слагаемое уравнения (4.79) действительно для вязкого слоя, вторая часть действительна в промежуточном, близком к стенке слое. Распределение скорости можно записать в виде

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = f(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}) \tag{4.80}$$

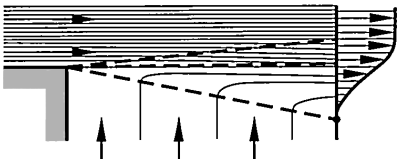


Рис. 4.64. Линии тока при обтекании угла

где f функция $y \cdot u_\tau/\nu$. Внутри вязкого нижнего подслоя $y \cdot u_\tau/\nu \leqslant 1$ действительно выражение $f(y \cdot u_\tau/\nu) = y \cdot u_\tau/\nu$. При большом расстоянии до стенки $y \cdot u_\tau/\nu > 50$ $\mu \cdot (d\overline{u}/dy)$ приближается к нулю, $-\overline{u' \cdot v'}$ становится приближенно ${u_\tau}^2$. Течение определяется только величинами u_τ и y. Допустим, что $l = \kappa \cdot y$, тогда получим

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{u_\tau}{y}, \tag{4.81}$$

где κ есть постоянная Кармана. На основании экспериментов получим для κ значение 0,4. После интегрирования уравнения (4.81) имеем:

$$\bar{u} = u_\tau \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \ln(y) + C \right) \tag{4.82}$$

или воспользовавшись уравнением (4.80):

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = f(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}) = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}) + C_1. \tag{4.83}$$

Уравнение (4.83) называется логарифмическим законом стенки. В соответствии с измерениями, проведенными Никурадзе в 1932 году для гладкой трубы получаем $\kappa = 0,4$ а для постоянной интеграла $C_1 = 5{,}5$.

Ход экспериментально полученного распределения скоростей изображен на рис. 4.65. На рисунке можно наглядно увидеть действие логарифмического закона для стенки для значений больше $y \cdot u_\tau/\nu = 50$ (кривая 2). Кривая 1 показывает распределение скорости $u/u_\tau = y \cdot u_\tau/\nu$ вязкого нижнего подслоя.

При турбулентном течении по шероховатой стенке наряду с вязким напряжением $\mu \cdot (\partial\overline{u}/\partial y)$ на стенку передаются дополнительные силы, вызванные шероховатостью. Они складываются в результирующую силу трения, среднее значение которой называется вязким напряжением стенки τ_w. Непосредственное влияние шероховатости стенки проявляется в вязком нижнем

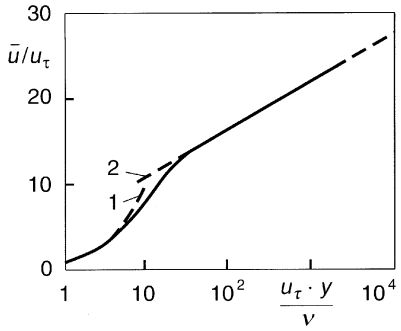


Рис. 4.65. Логарифмический закон стенки и распределения скоростей в вязком нижнем подслое

подслое, если толщина его такого же порядка, как высота шероховатости. Тем самым изменяется определение интегральной постоянной C_1: к пространственному среднему размеру шероховатости k добавляется следующая характеристическая длина. Основное значение здесь имеет число Рейнольдса $Re_{krit} = k \cdot u_\tau/\nu$ образующее здесь в связи с шероховатостью. Если Re_{krit} велико, то можно пренебречь v/u_τ относительно k. Из уравнения (4.82) при $C = C_2 - (1/\kappa) \cdot \ln(k)$ получаем:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(\frac{y}{k}) + C_2. \tag{4.84}$$

Для малого значения Re_{krit} вместо C_2 выступает функция от $k \cdot u_\tau/\nu$, которая для очень малых значений Re_{krit} принимает вид $C_1 + + (1/\kappa)\ln(ku_\tau/\nu)$, в результате чего уравнение (4.84) переходит в уравнение (4.83). Таким образом, стенка с незначительной шероховатостью является гидравлически гладкой.

Поток в трубе

Для турбулентного течения в трубе с постоянным поперечным сечением динамическая скорость u_τ снова является характеристической скоростью.

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{2 \cdot \rho} \cdot \frac{R}{l}}. \tag{4.85}$$

Внутри течения в трубе вязкость не играет никакой роли. Таким образом, радиус трубы R является единственной характеристической длиной. Таким образом имеем:

$$\bar{u_{max}} - \bar{u}(y) = u_\tau \cdot F(\frac{y}{R}), \tag{4.86}$$

с универсальной функцией F, максимальной скоростью $\overline{u}_{\max}$ в середине трубы и расстоянием от стенки $y = R - r$. Этот закон в равной степени действителен для гладких и шероховатых труб при очень больших числах Рейнольдса. Функцию F нужно определить экспериментально. Для средней скорости течения w из уравнения (4.86) можно вывести уравнение

$$w = \bar{u}_{max} - 2 \cdot u_\tau \cdot \int_0^1 (1 - \frac{y}{R}) \cdot F(\frac{y}{R}) \cdot d(\frac{y}{R}). \tag{4.87}$$

При приближении к стенке вне вязкого нижнего подслоя снова действительно уравнение (4.82). Берется $C = (\overline{u}_{max}/u_\tau) - (1/\kappa) \cdot \ln(R) + A$. Значение A является следующим характерным числом турбулентного потока в трубе. При $A = -0,6$ для малых значений y/R имеем

$$\bar{u}_{max} - \bar{u} = u_\tau \cdot (0,6 - 2,5 \cdot \ln(\frac{y}{R})). \tag{4.88}$$

Уравнения (4.85) и (4.88) достаточны для того, чтобы, применив уравнения (4.83) и (4.84) закона обтекания стенки, рассчитать распределение скорости и падение давления в гладких и шероховатых трубах.

Течения в пограничном слое

Турбулентные пограничные слои ограничены с одной стороны твердой стенкой, с другой стороны они имеют границу с внешним течением, лишенным трения. Поскольку толщина пограничного слоя в направлении течения возрастает, то происходит непрерывный переход жидкости внешнего потока в пограничный слой и на верхней границе пограничного слоя образуется свободная турбулентность. Вблизи стенки в зависимости от качества поверхности (гладкая или шероховатая) возникает уже рассмотренное течение (около обтекания стенки).

В плоском пограничном слое закон стенки (закон течения около стенки) (4.83) действителен только для близкого к стенке слоя. Во внешней

части плоского пограничного слоя отклонения от закона течения у стенки всегда больше, чем в трубе. Поэтому для плоского пограничного слоя сформулирован закон для внешнего потока. Закон в виде уравнения:

$$\frac{U-\overline{u}}{u_\tau} = G(\frac{y}{\delta}), \tag{4.89}$$

где G — это функция, δ — толщина пограничного слоя и U — скорость внешнего потока. Для любого турбулентного пограничного слоя действительно соотношение:

$$\frac{U-\overline{u}}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa}\cdot\ln(\frac{y}{\delta}) + \frac{\pi(x)}{\kappa}\cdot(2-w(\frac{y}{\delta})).$$

Это уравнение применимо также для кильватерного течения. Функцию кильваторной струи $w(y/\delta)$ и параметр $\pi(x)$ можно определить эмпирически. Тогда только параметр $\pi(x)$ будет зависеть от турбулентности внешнего потока.

Вместо толщины пограничного слоя лучше использовать относительную (исходящую) длину $\delta_1 \cdot U/u_\tau$, образованную с помощью толщины вытеснения δ_1. Тогда уравнение (4.89) примет вид:

$$U-\overline{u} = u_\tau \cdot F(\frac{y\cdot u_\tau}{\delta_1\cdot U}).$$

F — это безразмерная функция, которая, благодаря определению для δ_1 (4.60), выполняет условие:

$$\int_0^\infty F(\frac{y\cdot u_\tau}{\delta_1\cdot U})\cdot d(\frac{y\cdot u_\tau}{\delta_1\cdot U}) = 1.$$

На рисунке 4.66 представлен экспериментально полученный внешний закон течения плоского пограничного слоя.

Однако этот внешний закон по сравнению с законом (4.86) течения в трубе не является как бы само-собой разумеющимся, т. к. распределение касательных напряжений зависит здесь от распределения скорости. Поэтому F в плоском пограничном слое зависит от коэффициента трения в данном месте $c_f = 2\cdot(u_\tau/U)^2$. Распределение скорости зависит от внешнего течения.

При приближении к стенке распределение скорости переходит в логарифмический закон стенки (закон течения около стенки) (4.82). Уравнение (4.89) при установлении интегральной постоянной C принимает вид:

$$U - \overline{u} = u_\tau \cdot \Big(-\frac{1}{\kappa} \cdot \ln(\frac{y \cdot u_\tau}{\delta_1 \cdot U}) + K\Big). \tag{4.90}$$

Постоянная K приблизительно равна $-1{,}5$. Если соединить уравнение (4.90) с логарифмическим законом стенки (4.83), то получим уравнение для локального коэффициента трения c_f как функцию числа Рейнольдса $Re_1 = U \cdot \delta_1/\nu$:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{c_f}{2}}} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln\Big(\frac{U \cdot \delta_1}{\nu}\Big) + C_1 + K. \tag{4.91}$$

После подстановки соответствующих численных значений, полученных после измерений на гладких пластинах, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{c_f}{2}}} = 2{,}5 \cdot \ln \frac{U\delta_1}{\nu} + 3{,}7. \tag{4.92}$$

Подобным образом можно рассчитать коэффициент трения на шероховатых поверхностях.

Следует ввести величину

$$I = \int_0^\infty F^2 d(\frac{yu_t}{\delta u}).$$

Из функции (рис. 4.66) получается значение $I = 6{,}2$. Таким образом, можно вывести зависимость

$$\delta_2 = \delta_1 \cdot \Big(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} \cdot I\Big) \tag{4.93}$$

между толщиной потерь количества движения δ_2 (уравнение 4.61) и толщиной, вытеснения δ_1. С помощью уравнений (4.92) и (4.93) можно проинтегрировать уравнение количества движения ламинарного пограничного слоя и рассчитать сопротивление трения пластин при турбулентном течении.

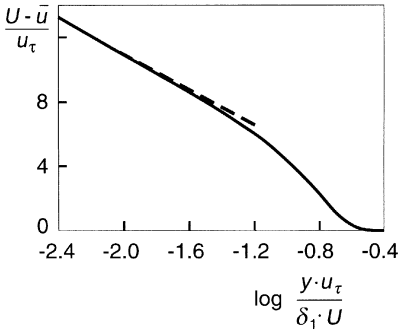


Рис. 4.66. Внешний закон турбулентного пограничного слоя

Закон внешнего течения можно использовать также для пограничных слоев с *переменным давлением*. Оказалось, что профили скорости, измеренные при различных давлениях при малых значениях y, ведут себя приблизительно как однопараметрическое семейство кривых в соответствии с уравнением (4.90). Изменяется только постоянная K. Таким образом существует тесная связь между K и интегралом I.

Так как закон течения около стенки (4.83) можно применять при различных распределениях давления, поэтому уравнения (4.91) и (4.93) с соответствующими численными значениями для K и U действительны также при изменяющемся давлении вдоль стенки. Коэффициент трения в пограничных слоях уменьшается с увеличением давления. Людвиг (Ludwieg) и Тиллманн (Tillmann) в 1949 г. вывели на основании своих измерений уравнение

$$c_f = 0{,}246 \cdot 10^{(-0{,}678H)} \cdot Re_2^{-0{,}268}, \tag{4.94}$$

где $H = \delta_1/\delta_2$ и $Re_2 = U \cdot \delta_2/\nu$.

Профили скоростей турбулентных пограничных слоев при изменении давления можно характеризовать параметром формы $H = \delta_1/\delta_2$. Однако используется еще одна связь между давлением и параметром формы. Для изменения H с местным градиентом давления получим второе дифференциальное уравнение:

$$\delta_2 \cdot \frac{dH}{dx} = -M \cdot \frac{\delta_2}{U} \cdot \frac{dU}{dx} - N, \tag{4.95}$$

где M и N есть функции H и Re_2 (у шероховатых поверхностей также функции k/δ_2), которые должны быть определены экспериментально.

4.2.6. Отрыв потока и образование вихрей

Слои трения, замедляющиеся на поверхности воды, могут образовать свободные разделительные поверхности или вихри (срав. гл. 4.1.3 и 4.1.7). Если внешний поток ускоряется в результате снижения давления в направлении движения, то также и частицы жидкости в слое трения получают ускорение в направлении движения. Поток сохраняет поэтому свое направление вдоль поверхности тела во всем пограничном слое. Если, наоборот, давление уменьшается против направления течения, то внешний поток замедляется. В результате этого более медленные частицы жидкости в слое трения затормаживаются еще сильнее. Если замедление достаточно велико, то поток отрывается от стенки и появляется область обратного течения. На рис. 4.67 наглядно представлен постоянный процесс отрыва при заданном давлении p. *Разделительный слой*, возникший в результате отрыва, свертывается в один или несколько вихрей. Вследствие обратного течения вблизи стенки картина линий тока течения пограничного слоя около места отрыва обнаруживает очень сильное утолщение пограничного слоя. С этим явлением связана передача массы жидкости из пограничного слоя во внешнее течение. В месте отрыва линия тока стенки покидает стенку под определенным углом. Положение места отрыва характеризуется тем, что на стенке градиент скорости исчезает, т. е. напряжение трения на стенке τ_w становится равным нулю:

$$\tau_w = \mu \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w = 0 \quad \text{(отрыв)}. \tag{4.96}$$

На рис. 4.68 показаны 6 фотографий, изображающих возникновение отрыва потока на цилиндре, находящемся в приведенной в движении жидкости. В начале движения устанавливается потенциальное течение. Через некоторое время поток отрывается от цилиндра. В последующем течении образуется область обратного течения с ярко выраженными вихрями. Разделительный слой в жидкости хорошо виден при скоплении алюминиевого порошка.

Если проанализировать структуру снимков, изображающих обтекание цилиндра в главе 3.3, то можно увидеть 4 структуры полуседла S' в точке торможения и точки отрыва на цилиндре, а также точку седла S и два фокуса F в кильватерном следе. Снимки показывают, что вихри в области

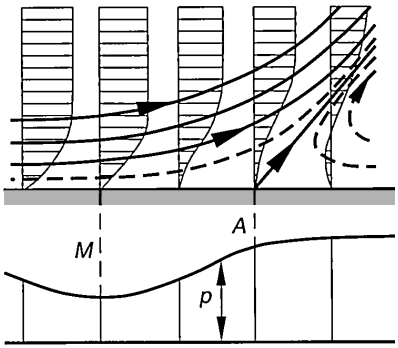


Рис. 4.67. Процесс отрыва потока (M — максимальная скорость, A — точка отрыва)

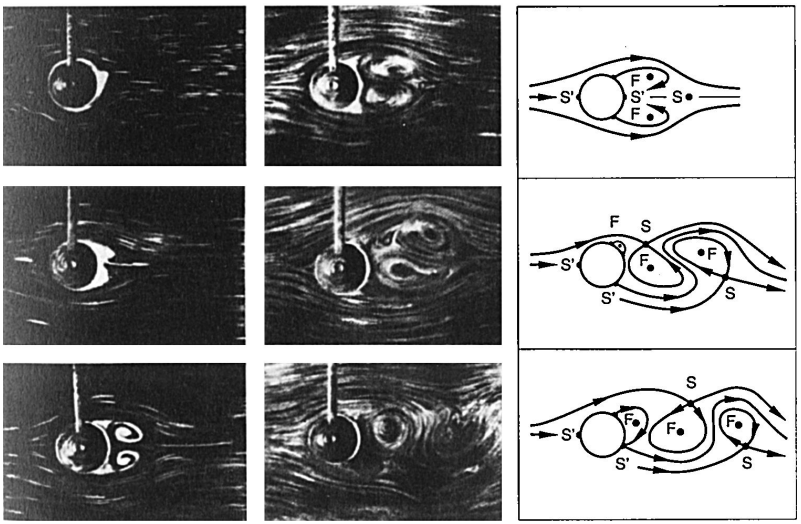


Рис. 4.68. Образование вихрей при обтекании неподвижного цилиндра

обратного потока с течением времени возрастают и в конце концов становятся неустойчивыми. После прохождения критической временной точки образуется *вихревая дорожка Кармана* с периодическими уплывающими вихрями, структура которых характеризуется чередованием фокуса F и точек седла S.

Подобный процесс отрыва наблюдается при течении в канале, расширяющемся в направлении потока (диффузор, см. рис. 4.73). Перед самым узким (критическим) сечением давление в направлении потока уменьшается. Поток прилегает к стенкам. После критического сечения канал расширяется и давление возрастает в направлении течения. Вследствие этого пограничный слой отрывается от обеих стенок, образуя область обратного движения. Непосредственное (само) течение имеет место только в области ядра поперечного сечения канала.

Если течение в канале меняет направление в обратную сторону, то в искривленной части потока возникает падение давления поперек направленного потока. В результате скорость на внешней стенке уменьшается и поток отрывается, как это изображено на рис. 4.69. Далее падение давления, вызванное изменением направления, затухает вниз по течению, скорость на внешней стенке возрастает и поток снова прилегает к стенке.

Аналогичная картина отрыва потока образуется при входе в колено трубы или перед внезапным сужением в канале. Также перед зданием, обтекаемым ветром (см. рис. 4.70), или столбом, стоящем в реке, возникает отрыв потока у основания вверх по течению от препятствия, а также в набегающем потоке. Образующийся при этом разделительный слой неустойчивый и поэтому вниз по течению возникает бегущий вихрь.

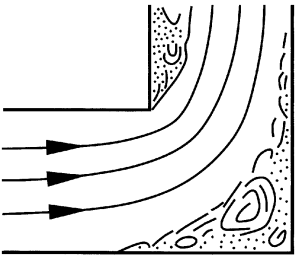


Рис. 4.69. Обтекание угла

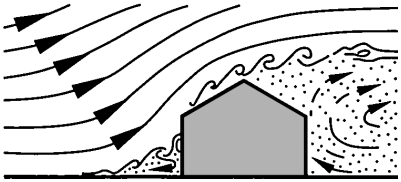


Рис. 4.70. Обтекание здания

В технике пытаются, несмотря на возрастание давления, избегать отрыва потока, чтобы уменьшить потери течения. Этого можно достичь, если каналы сделать с постепенным расширением или формы тел узкими, чтобы ускорение внешнего течения преобладало над возрастанием давления. Как правило, это удается, если пограничный слой в замедляющей части является турбулентным.

В течении с возрастанием давления поток, обтекающий тело, может оставаться ламинарным вплоть до отрыва, если поверхность очень гладкая, а набегающий поток малотурбулентный. Незадолго до места отрыва профиль пограничного слоя обнаруживает точку перегиба. Это оказывается достаточным критерием для возникновения неустойчивости в пограничном слое. Начинается ламинарно-турбулентный переход, который при достаточно большом числе Рейнольдса вниз по течению может привести снова к прилипанию турбулентного течения пограничного слоя. Возникновение турбулентного течения пограничного слоя зависит, во-первых, от числа Рейнольдса, образованного радиусом кривизны, и, во-вторых, от изменения кривизны поверхности стенки. Ламинарный отрыв потока (с турбулентным возникновением) часто наблюдается в тонких профилях крыла с острой носовой кривизной и соответственно большими установочными углами атаки.

На рис. 4.71 показан переход от отрывающегося течения пограничного слоя при малом числе Рейнольдса до *присоединенного* течения при больших числах Рейнольдса. Картинкам соответствуют значения $2\cdot10^4$, $5\cdot10^4$ и $6\cdot10^4$ для числа Рейнольдса $U\cdot r/\nu$, образованного радиусом кривизны.

В турбулентном потоке вследствие турбулентного перемешивания точка отрыва обтекаемого тела перемещается вниз по течению. Вследствие этого область обратного течения позади тела существенно уменьшается. С этим связано значительное уменьшение сопротивления трения, что проявляется в виде скачка в значении коэффициента сопротивления $c_w = f(Re)$. Это явление было продемонстрировано Л. Прандтлем в его знаменитом эксперименте, когда он наложил на шар тонкую проволочную сеть и ламинарный пограничный слой уже при малом числе Рейнольдса искусственно стал турбулентным.

Таким образом, он добился уменьшения сопротивления, которое без проволочной сетки возможно лишь при большом числе Рейнольдса.

Воздействие на отрыв потока

Вращение

Отрыв потока в большинстве случаев является нежелательным, т. к. он связан с потерями. Существует несколько возможностей искусственно повлиять на пограничный слой для предотвращения отрыва потока. Если, например, привести во вращение поперечно обтекаемый цилиндр так, чтобы окружная скорость вращения была равна или была больше максимальной скорости течения по окружности цилиндра, то на стороне, где жидкость

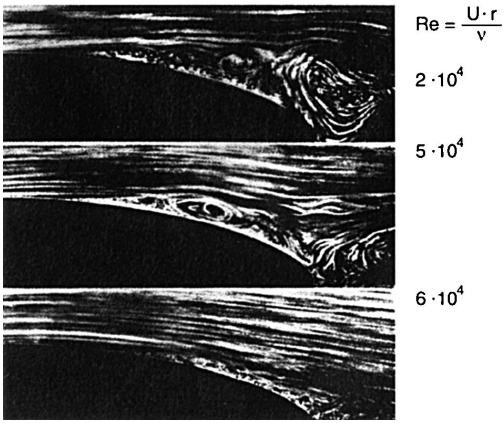


Рис. 4.71. Ламинарный отрыв и возникновение турбулентности при возрастании числа Рейнольдса

и стенка двигаются в одном направлении, наблюдается ускорение пограничного слоя. Таким образом, так не возникает отрыва. На другой стороне стенка движется навстречу жидкости и затормаживая пограничный слой, таким образом, здесь можно наблюдать только обратное течение, а затем и отрыв вихря. На цилиндре остается циркуляция, противоположная вихрю. Образование вихря в начале движения представлено на снимках рис. 4.72. Для последних трех снимков отрыва вихря представлен эскиз структуры потока.

Отсасывание

Другим, очень эффективным средством предотвращения отрыва пограничного слоя является отсасывание. Через узкую щель или через поры в стенке обтекаемого тела в области обратного течения жидкость в пограничном слое отсасывается внутрь тела. Если действие отсасывания довольно сильное, то таким образом можно предотвратить скопление замедленной жидкости и отрыв пограничного слоя. Пример отсасывания пограничного слоя показан на рис. 4.73. Рассматривается поток в сильно расширяющемся канале. Без отсасывания наступает отрыв потока. Но если область обратного течения по обеим сторонам диффузора отсасывается, то поток заполняет

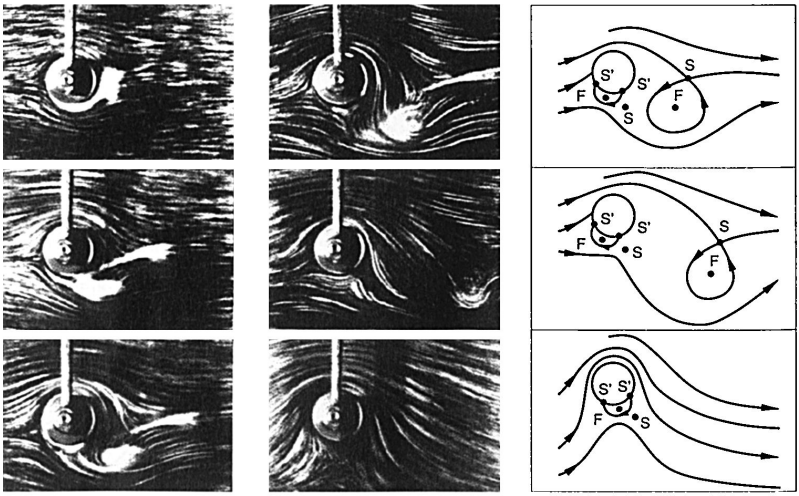


Рис. 4.72. Развитие течения вокруг вращающегося цилиндра

все поперечные течения канала и таким образом предотвращается отрыв потока.

Тангенциальная продувка

Отрыв пограничного слоя можно также предотвратить с помощью тангенциальной продувки в пограничный слой. Струя из стенки, которая вдувается в пограничный слой через щель в контуре параллельно направлению основного потока, может доставить пограничному слою достаточное количество кинетической энергии для предотвращения отрыва потока.

На основании этого принципа можно существенно увеличить максимальную силу подъема крыла, правда за счет увеличения сопротивления.

Расположение предкрылка у крыла самолета (рис. 4.74) служит для предотвращения отрыва. В этом случае возрастание давления, которое должен преодолеть пограничный слой несущего крыла, меньше, чем без предкрылка.

Определенное сходство с этим расположением обнаруживает использование дополнительных крыльев для улучшения течения в коленах труб. Примером тому являются поворотные лопасти, которые обычно использу-

ются в аэродинамической трубе. Вспомогательные крылья применяют также и в других течениях, чтобы получить резкие повороты без больших потерь.

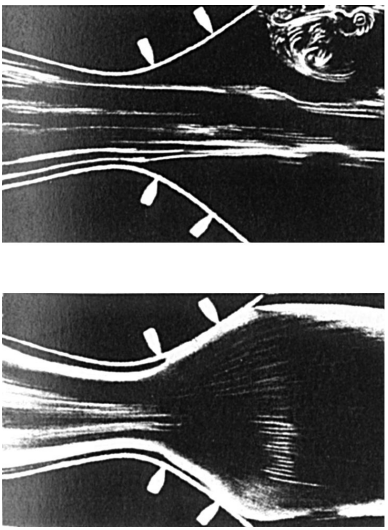


Рис. 4.73. Поток в сильно расширяющемся канале

Тот факт, что отрыва потока не возникает, можно объяснить тем, что в результате распределения давления вокруг вспомогательных крыльев давление на стенке, к которой дополнительные крылья обращают свою сторону с давлением, больше, чем в потоке без дополнительных крыльев. Поэтому возрастание давления, которое должен преодолеть пограничный слой, меньше.

4.2.7. Вторичные потоки

Колено

Рассмотрим поток жидкости вдоль плоской (ровной) стенки. Вследствие поперечного градиента давления он отклоняется параллельно стенке. Слои, близкие к стенке вследствие их незначительной скорости, отклоняются больше, чем более далекие от стенки. В результате образуется вторичный поток, который накладывается на главный поток.

Уравнение (4.9) дает у лишенного трения потока для соотношения радиусов кривизны следующую зависимость: $r_1/r_0 = w_1^2/w_0^2$. Фактически, в потоке присутствует трение. Трение на стенке в связи с боковым градиентом давления вызывает отклонение пограничного слоя в направлении пониженного давления. Это отклонение не превышает при ламинарном течении 45°, а при турбулентном — максимально 25°–30°. Если, например, жидкость движется в изогнутой трубе, то ядро основного потока, обладая наибольшей скоростью, стремится двигаться по возможности прямолинейно.

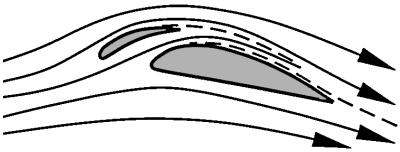


Рис. 4.74. Разрезное крыло

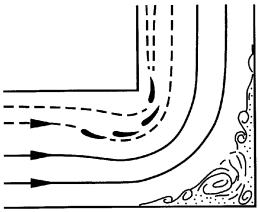
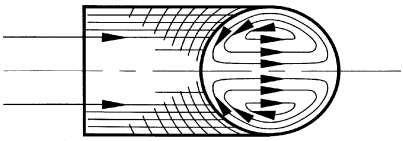
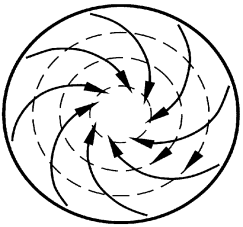


Рис. 4.75. Поворотные лопатки в канале



Вторичные потоки
в круглой изогнутой трубе



Вторичный поток на дне
круглого цилиндра

Рис. 4.76. Вторичные потоки в искривленной трубе на основании вращающегося сосуда.

Ламинарные крайние слои поэтому сильно отклоняются и стремятся к внутренней стороне дуги искривления. Таким образом, на главное течение параллельно оси трубы на искривленном участке трубы накладывается перпендикулярный вторичный поток. Он направлен в крайних слоях внутрь,

а в ядре — наружу. На левом снимке рис. 4.76 изображен вторичный поток в колене, который приводит к перемещению места максимальной скорости в направлении внешнего радиуса дуги колена.

В естественном течении рек также проявляет себя вторичный поток в излучинах. Он переносит донные наносы (песок, гравий), увлекаемые донным течением, от внешней стороны излучины и накапливает их на внутренней стороне. Вследствие этого русло реки снаружи углубляется, а внутри становится более мелким. В сочетании с разрушением внешней стороны излучины (вследствие особенно быстрого течения) это приводит к тому, что русло реки всюду, где только возможно, образует сильно искривленные излучины, называемые меандрами.

Вращающийся сосуд

Другим примером вторичного потока является поток, возникающий вблизи дна круглого вращающегося сосуда (рис. 4.76, справа). Вследствие медленной скорости в донном слое, центробежная сила меньше, чем сила в середине сосуда. И как следствие этого — донное течение направляется внутрь. Каждодневное наблюдение показывает, что маленькие частички, находящиеся на дне сосуда, движутся к середине дна и там накапливаются. Этот факт может быть объяснен с помощью рассматриваемого донного течения.

Изображения, получаемые с помощью окрашивания стенки (дна)

Линии тока в непосредственной близости к стенке можно сделать видимыми, если окрасить стенку. Для водных потоков используют масляную краску, для воздушных потоков — смесь красителей с керосином. Движущийся поток в течение довольно короткого времени (для воды это ≈ 5 мин) прочерчивает на окрашенной стенке картину линий тока, указывающих направление средних скоростей близко к стенке слоя жидкости. Такая картина линий тока позволяет получать ценные выводы о характере течения, в особенности, о точках отрыва. Необходимо подчеркнуть, что эти картины линий тока позволяют судить только о движении слоев жидкости, близких к стенкам, и не дают никакого представления о движении ядра течения (основной массы).

На рис. 4.77 и 4.78 показаны 2 фотографии потоков жидкости, сделанные А. Хиндерксом. Рис. 4.77 изображает течение на дне русла, перегороженного поперек плоской пластиной. По широкой белой полосе, оги-

бающей пластину, можно сделать вывод об образовании подковообразного вихря, который, встречая область повышенного давления перед пластиной, отрывается от дна. Обе точки основания вихря указывают на образование за пластиной спиралевидного, направленного внутрь течения, которое которое обнаруживает вихри, идущие вплоть до ядра потока (основного течения).

На рис. 4.78 изображена фотография придонного течения в изогнутом канале прямоугольного сечения. На фотографии можно четко увидеть отклонение придонного слоя внутрь изгиба. Сходимость линий тока на дне, направленных вниз по течению (относительно кривизны), указывает на отрыв от внутренней стороны вследствие возрастания давления.

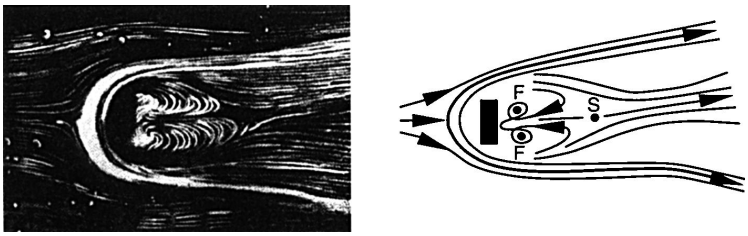


Рис. 4.77. Течение на дне русла, перегороженного поперек вертикальной пластиной

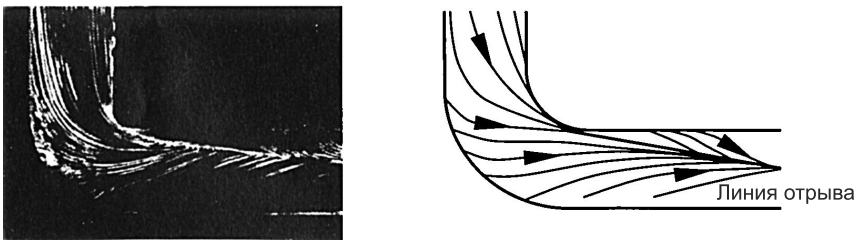


Рис. 4.78. Визуализация придонного течения в прогнутом канале прямоугольного сечения с использованием краски. Изображение линии отрыва в изогнутом канале

Каналы с прямоугольным и треугольным поперечными сечениями

При турбулентном течении в прямых каналах некруглого поперечного сечения наблюдаются также вторичные потоки. Они вызывают поперечные

потоки, направленные в углы каналов, как это показано на рис. 4.79. Возникновение вторичных потоков можно объяснить тем, что в местах большого касательного напряжения жидкость передается внутрь канала и потом она движется к с местам с меньшим касательным напряжением изнутри к стенке, например, в углы. Это приводит к тому, что в местах с большим касательным напряжением скорость несколько уменьшается, а в местах с меньшим касательным напряжением, наоборот, несколько увеличивается. Таким путем достигается значительное выравнивание касательного напряжения на стенке.

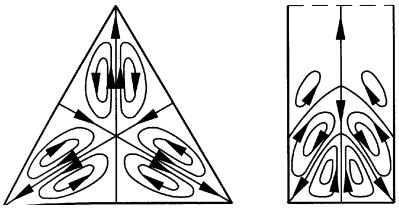


Рис. 4.79. Вторичные потоки в каналах с треугольным и прямоугольным поперечным сечением

Колеблющиеся тела

Вторичные потоки наблюдаются также у колеблющихся тел. Пусть $U(x)\cos(\omega t)$ — скорость вне пограничного слоя. Тогда, согласно Х. Шлихтингу, можно получить дополнительную скорость u', которая вблизи стенки вне пограничных слоев будет иметь значение

$$u' = \frac{3}{4}\frac{U}{\omega}\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Она направлена из мест большей скорости в места меньшей скорости. Рис. 4.80 демонстрирует снимки потока жидкости вокруг колеблющегося круглого цилиндра. Камера движется вместе с цилиндром. Металлические блестки, делающие видимым движение воды, образуют при достаточно длительном времени освещения широкие полосы. Вторичный поток направлен сверху и снизу к цилиндру и удаляется от него влево и вправо по направлению колебаний. Несимметричность полученной на фотографии картины объясняется слабым собственным движением воды в опытном резервуаре.

4.2.8. Течение с преобладающей вязкостью

Как уже было показано в гл. 4.2.2, в тех случаях, когда жидкость характеризуется большой вязкостью и малым числом Рейнольдса, можно пренебречь силами инерции по сравнению с силами трения. Эти, так называемые,

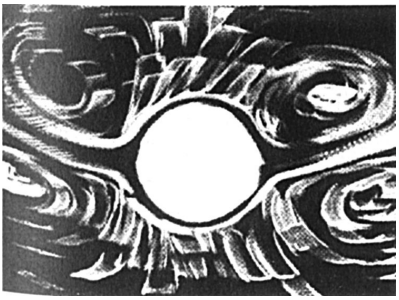


Рис. 4.80. Вторичный поток около круглого цилиндра, совершающего колебания в направлении, перпендикулярном к оси камеры, двигающейся вместе с цилиндром. Х. Шлихтинг, 1932

ползущие течения обладают тем общим свойством, что для них сопротивление пропорционально первой степени скорости. В этой и последующих главах мы рассмотрим подробнее 3 примера течения с преобладающей ролью вязкости.

Поток грунтовых вод

Примером течений с преобладающей вязкостью являются потоки грунтовых вод в земляном грунте. Течение между отдельными песчинками при ползущем движении по аналогии с течением в трубе по закону Гагена – Пуазейля прямо пропорционально перепаду давления и обратно пропорционально вязкости μ:

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{4.97}$$

Проницаемость k имеет размерность площади и зависит только от пористости среды. Применив уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{4.98}$$

Для давления p действительно то же отношение, что и для потенциала скорости ϕ потока, лишенного трения. Подпочвенные течения, следовательно, являются потенциальными течениями, описание которых представлено в главе 4.1.5. Существенное различие между ними заключается в том, что характеристика p должна быть однозначной и постоянной, в то время как ϕ на разделительной поверхности может быть непостоянной и у течений с циркуляцией многозначной.

Используя уравнения (4.97) и (4.98), можно рассмотреть подпочвенное течение, например, вокруг колодца. При этом во внимание принимается откачивание воды из колодца, т. е. наряду с распределением скоростей также понижение уровня подпочвенных вод вблизи колодца.

Предполагаемая пропорциональность между скоростью и перепадом давления имеет место только до тех пор, пока число Рейнольдса, составленное по диаметру песчинок, остается достаточно малым. Предельное значение указанного числа Рейнольдса равно $Re_d = u \cdot d/\nu \approx 10$.

Поток Хеле–Шоу

Ползущие течения устанавливаются также между двумя параллельными пластинками, поставленными на очень небольшом расстоянии друг от друга (ячейка Хеле–Шоу). Возникает течение, очень похожее на течение Гагена – Пуазейля, с параболическим профилем скоростей (рис. 4.54, ламинарный поток). Среднее значения скорости по ширине зазора при малых скоростях можно снова взять пропорционально перепаду давления:

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -k\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{4.99}$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

дает

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{4.100}$$

Таким образом, для зазора (щели) получается гладкое лишенное трения потенциальное течение. В этом потоке, в зазоре, линии тока можно моделировать. Впервые такой опыт проведен Хеле–Шоу в 1898 г. Он ввел в

жидкость, протекающую между двумя стеклянными пластинами, струйки окрашенной жидкости, которые делали видимым потенциальное течение. Если в щель Хеле–Шоу поместить цилиндр, можно получить линии тока (как это изображено на рис. 4.81) ползущего обтекания цилиндра при малых числах Рейнольдса. Это обтекание соответствует потенциальному течению.

4.2.9. Смазка подшипников

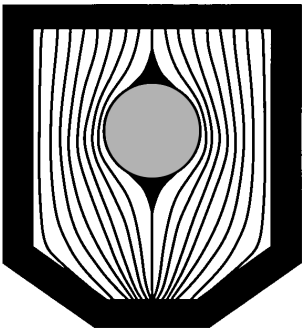


Рис. 4.81. Обтекание цилиндра

Следующим примером течений с преобладанием вязкости являются течения в смазанных подшипниках и направляющих машины (станка). Между движущимися противоположно друг друга частями (деталями) машины (цапфой и подшипником) или ползуном (башмаком) и направляющей опорной поверхностью возникают течения слоев масла (смазки) в зазоре. Они (течения) защищают твердые тела от взаимного контактирования. Способность цапфы в подшипнике и башмака в опорной поверхности воспринимать большие перегрузки при незначительном трении является результатом процесса течения в слое смазки.

Рассмотрим в качестве примера движения ползуна на плоской поверхности, причем для упрощения исследования предположим, что обе скользящие поверхности простираются в направлении, перпендикулярном к движению столь далеко, что течение жидкости в слое смазки можно рассматривать как плоское. Движение будем рассматривать в системе отчета, которая неподвижна относительно ползуна. Опорная поверхность ползуна движется вправо со скоростью v. Таким образом мы можем предположить постоянное течение.

Предварительно исследуем течение через щель высотой h с закругленной верхней стенкой (башмаком) и параллельной ей нижней стенкой (опорной поверхностью), которая движется со скоростью v. Ось x направлена в сторону движения опорной поверхности, а ось y — перпендикулярна стенкам. Повышение давления dp/dx сокращенно запишем как p'. Причем p' вследствие незначительной толщины слоя не зависит от h. Пусть скорость течения в направлении оси x есть u. В соответствии с замечаниями, сделан-

ными в гл. 4.2.1 для течения в щели при пренебрежении инерцией и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ относительно $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ получим:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p'.$$

После интегрирования имеем:

$$\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = p' \cdot y + C_1,$$

$$\mu \cdot u = p' \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2.$$

Условие прилипания для $y = 0$, что u равна относительной скорости v опорной поверхности относительно ползуна, выполнимо при $C_2 = \mu \cdot v$. Для $y = h$ значение u должно быть равно 0. Таким образом, для C_1 имеем:

$$C_1 = -\left(\frac{\mu \cdot v}{h} + \frac{p' \cdot h}{2}\right).$$

Следовательно можем определить распределение скоростей в щели:

$$u = \frac{p'}{2 \cdot \mu} \cdot (y^2 - h \cdot y) + \frac{v}{h} \cdot (h - y). \tag{4.101}$$

Положительная сила трения на единицу площади на нижней стенке равна:

$$\tau_0 = -\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = -C_1 = \frac{\mu \cdot v}{h} + \frac{p' \cdot h}{2}, \tag{4.102}$$

а на нижней

$$\tau_h = -\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=h} = \frac{\mu \cdot v}{h} - \frac{p' \cdot h}{2}. \tag{4.103}$$

При рассмотрении этих результатов нужно обратить внимание на то, что возрастанию давления в направлении положительной оси соответствует положительное p'. Отрицательное p' означает перепад давления.

Количество жидкости на единицу глубины в течении щели рассчитывается по формуле:

$$Q = \int_0^h u \cdot dy.$$

Таким образом, получаем:

$$Q = \frac{v \cdot h}{2} - \frac{p' \cdot h^3}{12 \cdot \mu}. \tag{4.104}$$

После этих предварительных вычислений может быть рассчитан ползун, несущий большую нагрузку с переменными градиентами p' в направлении оси x (см. рис. 4.82). Так как v есть постоянная скорость ползуна, то на основании уравнения неразрывности $Q = \text{const}$ мы должны принять, что высота щели изменится вместе с x. При таком условии (h изменится в направлении x) из уравнения (4.104) получим:

$$p' = \frac{dp}{dx} = 12 \cdot \mu \cdot \left(\frac{v}{2 \cdot h^2} - \frac{Q}{h^3} \right). \tag{4.105}$$

$p(x)$ получается после интегрирования этого уравнения. Вначале и в конце ползуна давление p должно быть равно давлению окружающей среды (p_0). Отсюда получается до сих пор еще неизвестное значение для Q. Следовательно, мы можем получить представление о характеристике p. Если l — это длина щели, то путем дальнейшего интегрирования мы можем рассчитать результирующую силу давления течения в ползуне при $\int\limits_0^l p \cdot dx$, а также момент $\int\limits_0^l p \cdot x \cdot dx$. Из отношения момента и силы следует расстояние точки воздействия силы от места $x = 0$. Сила трения рассчитывается по уравнению (4.102) при $\int\limits_0^l \tau_0 \cdot dx$. Таким образом, можно определить результирующую силу, действующую на ползун по величине, направлению и положению для каждого данного случая высота щели h. Очень часто результирующая сила давления указывается, из чего можно получить данные о высоте щели.

Силу трения можно рассчитать с помощью τ_n. Причем нужно принять во внимание, что давление p на площади, наклоненной от направления движения на угол, тангенс которого равен $\operatorname{tg}\delta = dh/dx$, создает составляющую силу в направлении движения. Так как на конце ползуна имеется давление p_0, то это составляющая сила равна $-\int\limits_0^l (p - p_0) \cdot (dh/dx) \cdot dx$. Путем частичного интегрирования при $p = p_0$, для $x = 0$ и $x = l$, мы получим для составляющей силы $+\int\limits_0^l p' \cdot h \cdot dx$. Используя теперь уравнения (4.102) и (4.103), мы можем сделать вывод, что все сказанное выше совпадает с силой трения, рассчитанной из τ_0.

Простейший случай переменной высоты щели мы получим, если примем ползун и опорную поверхность плоскими, но наклоненными друг от-

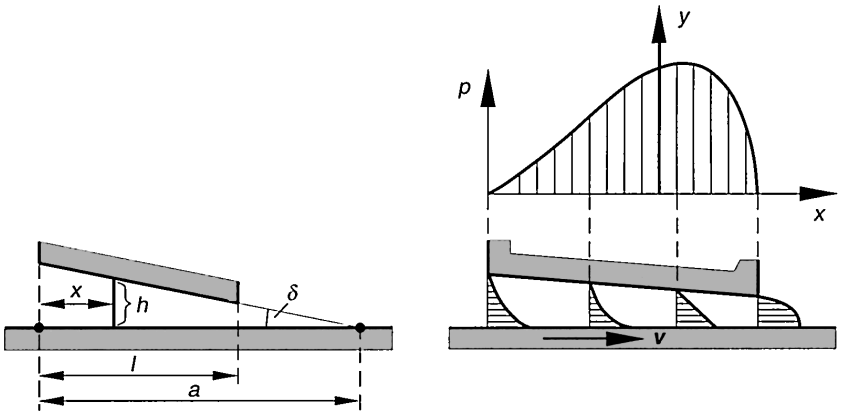


Рис. 4.82. Течение в щели между ползуном и опорной поверхностью

носительно друга на малый угол δ. Пусть абциссы концов ползуна равны $x = 0$ и $x = l$. Прямая пересечения обеих плоскостей находится на расстоянии a от передней кромки башмака $(x = 0)$ (рис. 4.82), а высоту зазора примем равной

$$h = (a - x) \cdot \delta.$$

После интегрирования уравнения (4.105) получим оба интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{h^3} = \frac{1}{2 \cdot \delta^3} \cdot \left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{2 \cdot a \cdot x - x^2}{2 \cdot \delta^3 \cdot a^2 \cdot (a-x)^2}$$

и

$$\int_0^x \frac{dx}{h^2} = \frac{1}{\delta^2} \cdot \left(\frac{1}{(a-x)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{x}{\delta^2 \cdot a \cdot (a-x)}.$$

Следовательно для распределения давлений получим:

$$p = p_0 + \frac{6 \cdot \mu \cdot x}{\delta^2 \cdot a \cdot (a-x)} \cdot \left(v - \frac{Q \cdot (2 \cdot a - x)}{\delta \cdot a \cdot (a-x)} \right). \qquad (4.106)$$

По уравнению (4.106) $p = p_0$ при $x = 0$. Таким образом, для $x = l$ имеем

$p = p_0$, скобки в уравнении (4.106) исчезают

$$Q = \frac{v \cdot \delta \cdot a \cdot (a - l)}{2 \cdot a - l}. \tag{4.107}$$

Заменив снова $\delta(a - x)$ на h, получим:

$$p = p_0 + \frac{6 \cdot \mu \cdot v \cdot x \cdot (l - x)}{h^2 \cdot (2 \cdot a - l)}. \tag{4.108}$$

Для оценке среднего давления вычислим сначала давление p_1 под серединой ползуна $x = \frac{1}{2}$. Это давление не совпадает с максимальным давлением, т. к. h изменяется с x. Однако, если это уравнение в направлении x происходит не слишком быстро, то давление близко к максимальному значению. Из уравнения (4.108) при $h = \delta \cdot (a - l/2) = h_m$ получим

$$p_1 - p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu \cdot v \cdot l^2}{h_m^2 \cdot (2 \cdot a - l)}.$$

Предположим, что давление под ползуном распределяется по параболе, тогда среднее избыточное давление p_m приближенно равно $(2/3) \cdot (p - p_0)$, т.е.

$$p_m = \frac{\mu \cdot v \cdot l^2}{h_m^2 \cdot (2 \cdot a - l)}. \tag{4.109}$$

Эта формула ясно показывает, что даже при сравнительно малом μ, благодаря очень малой толщине слоя h_m, могут возникнуть очень большие давления. Максимальное давление лежит по уравнению (4.108) из-за уменьшения h в направлении течения за серединой ползуна. Поэтому там же происходит и результирующая сила. На рис. 4.82 показано также распределение согласно уравнению (4.108). В нижней части показано соответствующее распределение скоростей в щели. Различная кривизна кривых распределения скоростей ясно показывает, что давление в разных системах разное.

Распределение давления и положение результирующей силы давления зависят от соотношения l/a. Поэтому Митчелу (Mitchell) в 1905 пришла идея снабдить башмак подшипника шарнирным соединением, расположенным немного дальше середины поверхности скольжения (рис. 4.83). Таким образом, автоматически устанавливалось определенное наклонное положение (точнее определенное a). При сильном наклоне потока середина давления лежит далеко позади, а при слабом наклоне намного впереди. Благодаря

этому, правильное положение получается особенно устойчивым. Таким образом, Митчелу удалось добиться равномерной безупречной работы ползуна при любых нагрузках.

Фактически в таких подшипниках часть масла, попадающая под башмак во входном сечении, вытекает с боков башмака. Это приводит к довольно значительному уменьшению давления внутри, но в качественном отношении все остается по-прежнему.

Касательные напряжения на башмаке, вследствие распределения давления, на входе меньше, а на выходе — больше обычного трения. На опорной поверхности имеет место обратное соотношение. Соответствующее значение этих касательных напряжений легко найти при помощи уравнений (4.102), (4.103), (4.105) и (4.107).

Далее займемся оценкой силы трения. Эта оценка тем точнее, чем больше будет отношение a/l. Для этой цели примем, что распределение касательных напряжений изображается трапецией, поэтому среднее значение силы трения на единицу площади можно считать приближенно равным силе трения на средней линии трапеции. Так как на этой линии величина p' очень мала, то, на основании равенства (4.102), мы имеем:

$$\tau_m \approx \frac{\mu \cdot v}{h_m}.$$

Из уравнения (4.109) исключается толщина h_m слоя смазки:

$$h_m = \sqrt{\frac{\mu \cdot v \cdot l^2}{p_m \cdot (2 \cdot a - l)}}. \tag{4.110}$$

Тогда получим:

$$\tau_m = \sqrt{\frac{\mu \cdot v \cdot p_m}{l}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a - l}{l}}. \tag{4.111}$$

Величина $\mu \cdot v/l$ есть не что иное как очень малое касательное напряжение, которое возникает при слое смазки толщиной l. Следовательно действительное касательное напряжение по порядку своей величины равно среднему геометрическому из только что указанного малого напряжения трения и среднего значения нагрузки башмака. Таким образом, при заданных значениях l и a сопротивление скольжению измениться пропорционально квадратному корню из вязкости, нагрузки и скорости. Эта закономерность действительна не только для рассматриваемых средних значений; при точных расчетах получается точно такая же зависимость.

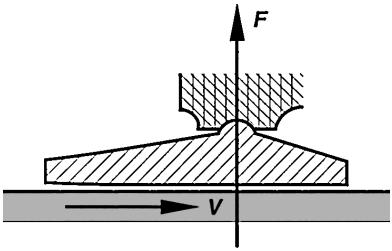


Рис. 4.83. Башмак ползуна, Митчел 1905 г.

Коэффициент трения выражается через

$$f = \frac{\tau_m}{p_m}.$$

При заданных значениях l и a, т.е. заданных размерах башмака, в соответствии с уравнением (4.83), коэффициент трения пропорционален $\sqrt{\mu \cdot v/(p_m \cdot l)}$.

Для смазанной цапфы, вращающейся в подшипнике, соотношение получается не столь простыми, как для ползуна. Теперь в расчет вводится новая величина — зазор подшипника. В результате перемещения центра цапфы в горизонтальном и вертикальном направлении появляются еще две новые неизвестные величины. В сущности здесь также образуется клинообразная прослойка масла, увлекаемая вращающейся цапфой от широкой стороны щели к узкой (рис. 4.84). Расчеты упрощаются, если предположить, что эксцентриситет цапфы e мал по сравнению с зазором S. Такой случай имеет место при быстром вращении хорошо смазанной и умеренно нагруженной цапфы в полностью закрытом подшипнике. В этом случае можно принять

$$h = s + e \cdot \cos(\varphi + \alpha),$$

где γ есть центральный угол, а α есть угол между направлением силы и направлением линии, соединяющей середины цапфы и подшипника. Угол α составляет около $90°$. Точка минимального расстояния между цапфой и подшипником при этом лежит против направления давления цапфы в направлении вращения.

Расчеты, проведенные аналогично расчетам башмака, приводят к результату, что e/s пропорционально безразмерной величине $L =$

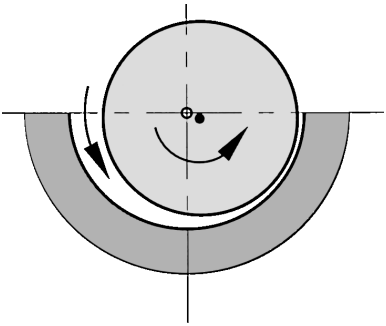


Рис. 4.84. Цапфа в подшипнике

$= (p_m \cdot s^2)/(\mu \cdot v \cdot r)$, где p_m есть среднее давление подшипника, r радиус цапфы, а v — окружная скорость. Безразмерное число L можно также вывести из уравнения (4.109) для башмака:

$$\frac{l}{2 \cdot a - l} = \frac{p_m \cdot h_m^2}{\mu \cdot v \cdot l}.$$

Левая сторона этого уравнения соответствует e/s. Справа появляется h_m вместо s и l вместо r. В безразмерном числе учитывается влияние изменяющейся нагрузки подшипника, различного зазора с маслом различной вязкости и окружной скорости. Коэффициент трения f_l подшипника (отношение касательной силы к нагрузке на подшипнике) можно записать аналогично коэффициенту трения башмака. Он имеет вид $f_l \sim \sqrt{\mu \cdot v/(p_m \cdot r)}$. В 1932 г. Вальгер на основании экспериментов установил значение 2,4.

В предыдущих рассуждениях мы исходили из того, что подшипник полностью покрывает масляная пленка, которая предотвращает любое металлическое соприкосновение. На основании технологических допусков при изготовлении подшипников, цапф и башмаков при малой ширине зазора h все-таки происходит соприкосновение металлов. Точно также при использовании выведенных уравнений нужно исключить появление в масляной пленке отрицательных давлений. Возникновение таких давлений приводит к разрыву масляной пленки. Разрыв пленки обычно наступает у сильно нагруженных подшипников. В результате разрыва возникают условия, сходные с условиями работы подшипника, лишь частично закрывающего цапфу. Теория подобных подшипников здесь не будет рассматриваться.

При больших нагрузках вследствие нагрева смазки наблюдаются значительные отклонения от выведенных формул. Г. Фогельполь в 1938 г. показал, что те масла, вязкость которых с возрастанием температуры уменьшается незначительно, лучше подходят для смазки сильно нагруженных подшипников. Он указал также, что при так называемом смешанном трении бóльшая часть нагрузки подшипника воспринимается «гидродинамически» тем небольшим количеством масла, которое содержится между неровностями обеих соприкасающихся поверхностей. Только небольшая часть нагрузки воспринимается механически соприкасающимися вершинами неровностей.

4.2.10. Движение жидкостей в трубах и каналах

Среднее значение касательного напряжения τ_w на поверхности стенок для турбулентного движения жидкости можно рассчитать из $\lambda' \cdot \rho \cdot w^2/2$, где λ' есть число, зависимое от шероховатости стенки, а w есть средняя скорость. Падение давления в трубе или канале длиной l должно уравновешиваться касательными напряжениями на поверхности стенок. Обозначив площадь поперечного сечения через A, а смоченный периметр через U, будем иметь:

$$(p_1 - p_2) \cdot A = \tau_w \cdot l \cdot U = \lambda' \cdot \rho \cdot \frac{w^2}{2} \cdot l \cdot U, \tag{4.112}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \lambda' \cdot \frac{U}{A} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}. \tag{4.113}$$

В открытом русле (река или канал) свободная поверхность воды не причисляется к смоченному периметру. Величина A/U называется гидравлическим радиусом r_h. Для потока, движущегося под действием силы тяжести (например, река), обычно задается уклон его свободной поверхности $i = (z_1 - z_2)/l$, рис. 4.85, связанный с падением давления вдоль горизонтальной линии соотношением $p_1 - p_2 = g \cdot \rho \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot \rho \cdot l \cdot i$ (сравн. гл. 2.6). Таким образом, из (4.112) получаем:

$$\tau_w = g \cdot \rho \cdot r_h \cdot i \tag{4.114}$$

и из уравнения (4.113):

$$i = \frac{1}{g \cdot \rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda'}{r_h} \cdot \frac{w^2}{2 \cdot y}. \tag{4.115}$$

Решая последнее уравнение относительно w, мы найдем:

$$w = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\lambda'} \cdot r_h \cdot i}.$$

В приложениях к рекам и каналам это уравнение записывается в следующем виде:

$$w = \mathrm{C} \cdot \sqrt{r_h \cdot i} \tag{4.116}$$

и называется формулой Шези. Коэффициент C является функцией гидравлического радиуса и шероховатости стенки. При глубине воды от 0,5 до 3 м этот коэффициент равен 80 м$^{(1/2)} \cdot s^{-1}$ для стенки из гладкого дерева или гладко отштукатуренной каменной кладки; от 30 до 50 м$^{(1/2)} \cdot s^{-1}$ — для земляных стенок и от 24–49 м$^{(1/2)} \cdot s^{-1}$ для стенок из гальки.

Трубы с круглым поперечным сечением

У труб радиусом R гидравлический радиус r_h равен

$$r_h = \frac{A}{U} = \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{R}{2} = \frac{d}{4}. \tag{4.117}$$

Введя в уравнение (4.113) $4/d$ для U/A и λ для $4 \cdot \lambda'$ получим:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}. \tag{4.118}$$

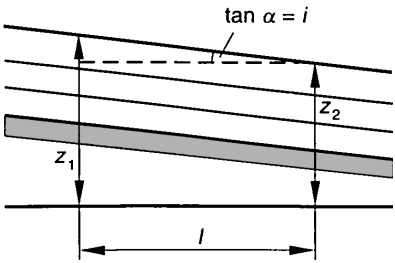


Рис. 4.85. Движение жидкости в русле

Величина λ называется коэффициентом сопротивления. Коэффициент сопротивления для ламинарных и турбулентных течений в трубе представлен на рис. 4.86 как функция числа Рейнольдса Re_d. Для ламинарного течения в трубе действует закон Гагена–Пуазейля (4.45). При объемном расходе жидкости Q для средней скорости будем иметь $w = Q/(\pi \cdot R^2)$. Таким образом, для потерь давления в трубе получаем:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8 \cdot \mu \cdot w}{R^2} = 32 \cdot \mu \cdot \frac{w}{d^2}. \tag{4.119}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4.118), коэффициент потерь λ составляет:

$$\lambda = \frac{64 \cdot \mu}{\rho \cdot w \cdot d} = \frac{64}{Re_d}. \tag{4.120}$$

Были получены многочисленные экспериментальные результаты относительно поведения турбулентных течений в гладких трубах. До значения числа Рейнольдса около 80 000 действителен закон Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{Re^{\frac{1}{4}}}. \tag{4.121}$$

Теория устойчивости для течения в трубе Гагена–Пуазейля (см. гл. 4.2.4) показывает, что при критическом числе Рейнольдса $Re_{krit} = 2300$ происходит ламинарно-турбулентный переход, таким образом, уравнение (4.120) в соответствии с рисунком 4.86 после переходной области переходит в уравнение (4.121).

Неявное уравнение для коэффициента сопротивления для гладких труб с турбулентным потоком вывел Прандтль (1932 г.) для числа Рейнольдса менее, чем 10^6:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg(Re_d \cdot \sqrt{\lambda}) - 0,8. \tag{4.122}$$

За основу берутся уравнения в главе 4.2.5, учитывая логарифмический закон стенки (4.83)

Оценка экспериментальных результатов дает для шероховатых труб при установившемся течении, используя уравнение (4.84), следующее разложение уравнения (4.122):

$$\frac{1}{\lambda} = 1,74 - 2 \cdot \lg(\frac{18,7}{Re_d \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{2 \cdot k}{d}). \tag{4.123}$$

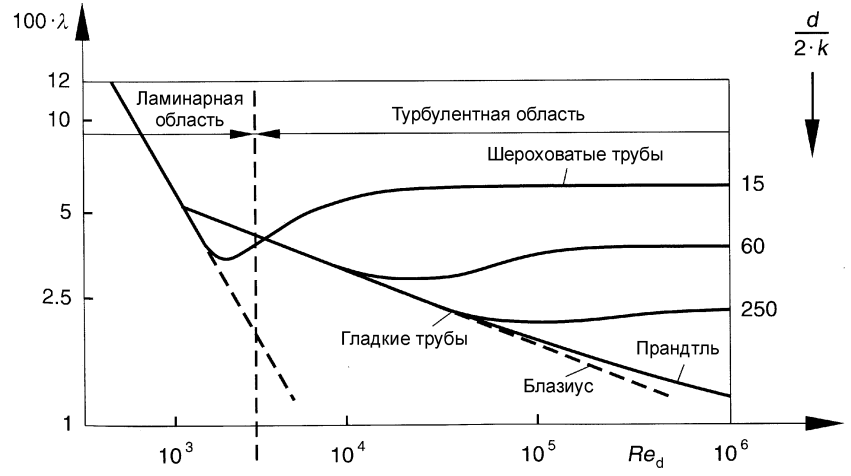


Рис. 4.86. Диаграмма Никурадзе: коэффициент сопротивления λ для гладких и шероховатых труб

Шероховатость k есть пространственное (объемное) среднее значение шероховатости поверхности стенок трубы. Для очень больших чисел Рейнольдса коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса. Вязкий подслой турбулентного пограничного слоя при движении жидкости в трубе перекрывает шероховатости на поверхности трубы.

Первые измерения потерь в шероховатых трубах были проведены Никурадзе в 1933 г. Труба с внутренней стороны обклеивалась просеянным песком, состоящим из зерен различной величины. Эти эксперименты, проведенные Никурадзе, и дали диаграмме, изображенной на рис. 4.86, его имя.

Входной поток (поток в начальном участке трубы)

Уравнения (4.119)–(4.123), а также рис. 4.86 действительны для установившегося течения в трубе, причем рассматривается отрезок трубы, находящийся от входа на расстоянии, равном приблизительно 60-и диаметрам трубы d. Во входном поперечном сечении трубы скорость распределена почти равномерно. Замедление, вызванное трением, начинается от стенки трубы. Сначала в ламинарном течении образуется вниз по течению увеличи-

вающийся (растущий)слой заторможенной жидкости (рис. 4.87). Вследствие этого скорость ядра течения в середине трубы должна возрастать в такой мере, чтобы через каждое поперечное сечение протекало одно и то же количество жидкости. Увеличение скорости ядра течения на входном участке трубы влечет за собой падение давления вдоль оси трубы в соответствии с уравнением Бернулли. Это падение давления больше, чем падение давления при течении по закону Гагена–Пуазейля. Далее вниз по течению зона трения охватывает все поперечное сечение трубы. Таким образом, устанавливается известное состояние течения по закону Гагена–Пуазейля. Это происходит, согласно согласно расчетам и наблюдениям Шиллера (1922) на протяжении начального участка длиной $l = 0,03 \cdot d \cdot Re_d$. При превышении критического числа Рейнольдса $Re_{krit} = 2300$ начинается ламинарно-турбулентный переход и образуется турбулентное установившееся течение в трубе.

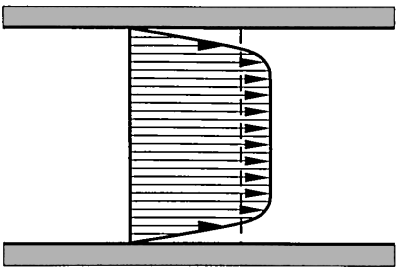


Рис. 4.87. Распределение скоростей на начальном участке трубы. (Профиль скоростей)

Если поток во входном поперечном сечении трубы уже турбулентный, то начальный участок l до возникновения установившегося течения в трубе намного короче.

Движение жидкостей в трубе с переменным поперечным сечением

При внезапном сужении в трубе (рис. 4.88) наряду с падением давления без трения, возникают еще потери давления, связанные с трением. Резкое сужение трубы или дроссельная шайба вызывают сжатие струи. Коэффициент сжатия можно рассчитать согласно Вейсбаху: $\alpha = 0,63+0,37\cdot(A_1/A_0)^3$.

Если за сужением следует внезапное расширение (дроссельная шайба),

то возникает потеря давления, равная

$$p_0 - p_2 = \frac{\rho \cdot w_0^2}{2} \cdot \left(\frac{A_0}{\alpha \cdot A_1} - 1 \right)^2 .$$

Дроссельные шайбы (рис. 4.88) или трубки (Venturi) Вентури (рис. 4.89) используются для измерения количества протекающей жидкости. Потеря давления, свободная от трения, рассчитываемая по уравнению Бернулли, при использовании дроссельной шайбы составляет:

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho \cdot w_0^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_0}{\alpha \cdot A_1} \right)^2 - 1 \right] .$$

Если разность давлений $p_0 - p_1$ измеряется через отверстие до сужения трубы и после сужения, то можно рассчитать при известном коэффициенте сжатия α, w_0 и вместе с тем секундный расход $A_0 \cdot w_0$. Экспериментальным путем для $A_1/A_0 < 0,7$ получается уравнение

$$\alpha = 0,598 + 0,4 \cdot \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^2 .$$

При постепенном расширении в трубке Вентури (рис. 4.89) повышение давления намного больше, чем при внезапном расширении диафрагмы с отверстиями. Потери давления в трубке можно записать по формуле:

$$p_0 - p_2 = \xi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (w_1^2 - w_2^2),$$

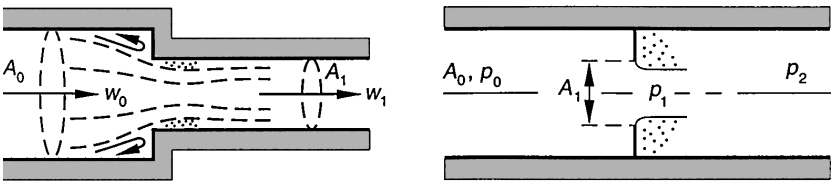


Рис. 4.88. Сужение трубы

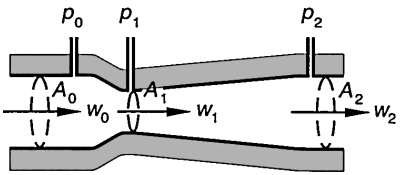


Рис. 4.89. Трубка Вентури

где ξ — коэффициент сопротивления, определяемый для каждого отдельного случая опытным путем. Значения ξ для трубок Вентури составляют от 0,15 до 0,2. Коэффициент сжатия α при равномерном потоке (без отрыва) можно приравнять к 1.

Расширение поперечного сечения в диффузорах служит для повышения давления. При условии течения, лишенного трения, скорость во всех поперечных сечениях постоянная. Под влиянием трения течение вблизи стенки замедляется и, если угол раствора диффузора слишком большой, происходит отрыв потока.

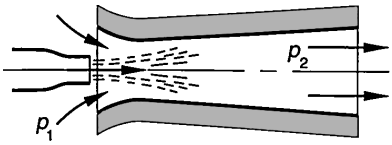


Рис. 4.90. Струйный насос.

Повышение давления $p_2 - p_1$ во внезапно или постепенно расширяющейся трубе используется в так называемых струйных насосах (рис. 4.90) для всасывания жидкостей. Для того, чтобы достичь в водоструйном воздушном насосе разность давления 1 бар, скорость струи w_1 должна составлять 20 м/сек. Следующим примером является горелка Бунзена, где струя газа, выходящего из трубки, засасывает воздух и перемешивается с ним.

4.2.11. Сопротивление движению тел в жидкости

Закон сопротивления Ньютона

Уже Ньютон вывел заключение, что сопротивление, которое жидкость оказывает движущемуся в ней телу, должно быть пропорционально площади A тела, плотности ρ жидкости и квадрату скорости v. В правильности этого результата можно убедиться путем простого рассуждения: тело при своем движении должно каждую секунду вытеснять со своего пути массу жидкости $M = \rho \cdot A \cdot v$, при этом оно должно сообщать каждой частице

жидкости скорость, которую можно считать пропорциональной скорости тела. Сопротивление равно количеству движения, сообщаемому жидкости в течении одной секунды, следовательно, оно пропорционально величине

$$M \cdot v = \rho \cdot A \cdot v^2.$$

По теории Ньютона предполагается, что сопротивление жидкости движущемуся в ней телу, можно рассматривать с точки зрения законов упругого удара.

Ньютон представлял себе, что среда, в которой движется тело, состоит из неподвижных частиц, которые при столкновении с движущимся телом,отражаются от него. Образующееся при этом сопротивление не учитывает, однако гидродинамическое обтекание тела и процессы, возникающие позади движущегося тела.

Для пояснения приведем примеры обтекания двугранника (рис. 4.91). Обтекание двугранника происходит, очевидно, совершенно по-иному, чем обтекание двух пластинок, наклоненных друг к другу под таким же углом, но удаленных друг от друга. В самом деле, во втором случае жидкость протекает между пластинками, в первом же случае она этого не может делать. Согласно измерениям Эйфеля (1907 г.) сопротивление двугранника составляет около 60 % от сопротивления пластинок, установленных в жидкости отдельно друг от друга и под тем же углом к потоку. Согласно теории Ньютона, оба объекта должны иметь одинаковое сопротивление.

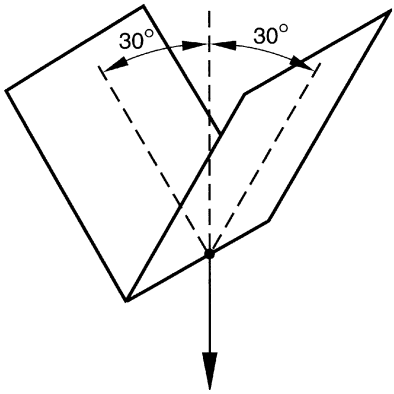


Рис. 4.91. Обтекание двухгранника

Другим примером является обтекание круглого диска и круглого цилиндра, длина которого равна диаметру или двойному диаметру. Были замерены коэффициенты сопротивления, равные 1, 12, 0,91 и 0,85. Меньшее сопротивление более длинного цилиндра можно объяснить тем, что поток лучше прилегает к поверхности более длинного цилиндра и область донного течения уменьшается. Таким образом, всасывающее действие потока на заднюю поверхность значительно меньше, чем в двух других случаях.

Сопротивление давлению и сопротивление трения

Гидродинамическое сопротивление состоит из сопротивления, вызванного разностью давлений, и сопротивления, обусловленного трением. Запишем коэффициенты сопротивления:

$$c_w = c_d + c_f.$$

Общий коэффициент сопротивления c_w равен

$$c_w = \frac{W}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A}, \tag{4.124}$$

где W есть сила сопротивления, $(\rho/2) \cdot v^2$ — динамическое давление, A — площадь поперечного сечения. Для коэффициента сопротивления давления c_d и общего сопротивления трения c_f запишем:

$$c_d = \frac{W_d}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A}, \quad c_f = \frac{W_f}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A},$$

где W_d — это сила давления, а W_f — это сила трения.

Коэффициент сопротивления c_w в сущности является функцией числа Рейнольдса $Re_l = v \cdot l/\nu$:

$$c_w = f(Re_l). \tag{4.125}$$

В том случае, когда числом Рейнольдса можно пренебречь, как, например, у поперечно обтекаемых пластин, то зависимости от числа Рейнольдса не возникает, и значение c_w остается постоянным. Для круглых пластин значение c_w составляет 1,12. Для потоков вдоль пластины, напротив, доминирует коэффициент сопротивления трения c_f. Коэффициент сопротивления давления c_d ничтожно мал.

Общее сопротивление можно разложить на две части: на сопротивление, обусловленное разностью давлений, и на сопротивление трения. Если исходить из представления, что сопротивление давления в сильной степени зависит от формы тела, а сопротивление трения от величины поверхности тела, то полное сопротивление можно разложить на сопротивление формы и на сопротивление поверхности.

Если быть более точными, то сопротивление трения также довольно заметно зависит и от формы поверхности, поэтому приведенное разделение является не совсем верным.

При движении тела на свободной поверхности жидкости возникает особый вид сопротивления давления, так называемое волновое сопротивление, причиной которого является система волн, вызванная движением тела. Так как волновое движение происходит под действием силы тяжести (капиллярные силы мы не учитываем), то здесь имеет место свой характерный безразмерный показатель — число Фруда. Этот показатель образован зависимостью скорости v, длины l, силы тяжести g

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l}}. \tag{4.126}$$

Системы волн, образующиеся при движении двух геометрически подобных тела, например, корабля в натуральном размере и его уменьшенной модели, будут геометрически подобны только в том случае, если число Фруда в обоих движениях имеет одинаковое значение.

Небольшие изменения формы корабля и его скорости очень сильно отражаются на волновом сопротивлении; при удлинении корпуса корабля оно может и увеличиваться, и уменьшаться, смотря по тому, будет ли кормовая волна, интерферирующая с системой носовых волн, усиливать или ослаблять эту систему. Сопротивление увеличится, если корма попадет в одну из впадин носовой системы волн, и, наоборот, уменьшится, если корма попадет на один из гребней носовой системы волн.

4.2.12. Теория сопротивления жидкости

При потенциальном течении жидкости, лишенной трения, не возникает ни сопротивления движения, ни подъемной силы, перпендикулярной к направлению движения. Этот результат можно легко объяснить, если применить теорему о количестве движения для контрольной поверхности, проведенной вокруг тела на некотором расстоянии от него. Скорость возмущений, вызванная вытеснительным действием тела, быстро уменьшается во все стороны. Если контрольную поверхность проводить до бесконечности, то значения количества движения будут равны нулю. Так как использование закона количества движения для каждой контрольной поверхности должно давать одинаковый результат, следовательно, сопротивление равно нулю.

Из различных попыток определить сопротивление тел, не выходя из рамок теории идеальной жидкости, рассмотрим две, наиболее типичные: обтекание пластинки Кирхгофа и вихревую дорожку Кармана.

Обтекание пластинки по Кирхгофу

При обтекании плоской пластинки (рис. 4.92) поток в точке торможения разделяется и образует поверхности разрыва, введенные в главе 4.1.3. Позади пластины жидкость находится в состоянии покоя, образуется так называемая, зона мертвой воды. Так как давление в этом пространстве постоянно, то постоянным должно быть также давление во всех точках поверхности раздела, следовательно, на основании теоремы Бернулли, должна быть одинаковой и скорость. Вычисления показывают, что при соблюдении этого условия возможно только такие решения задачи, при которых поверхности раздела простираются до бесконечности, а скорость на поверхностях раздела равна скорости невозмущенного потока, т. е. скорости жидкости в бесконечности. Что касается распределения давления, то в центре ее мы имеем максимальное давление, по мере приближения к краям пластинки давление уменьшается и на краях становится равным давлению в невозмущенном потоке. За пластинкой имеет место постоянное давление невозмущенной жидкости. Отсюда следует, что коэффициент сопротивления давления c_d пропорционален площади пластинки и динамическому давлению. Кирхгоф (1869) рассчитал для пластинки бесконечной длины постоянное значение $c_d = 2 \cdot \pi/(4 + \pi) = 0,88$.

Однако в действительности поверхности раздела очень неустойчивы и быстро распадаются, образуя вихри (см. гл. 4.1.3). Поэтому зона мертвой воды за пластинкой не доходит до бесконечности, и поток на некотором расстоянии за пластинкой опять слипается. В связи с этим давление позади пластинки значительно ниже, чем в невозмущенном потоке. Таким образом, задняя поверхность пластинки оказывает подсасывающие действие, и сопротивление получается значительно больше, чем по расчетам Кирхгофа. Для бесконечно широкой пластинки коэффициент общего сопротивления равен $c_w = 1,98$. При обтекании прямоугольных пластинок жидкость огибает боковые грани и, попадая в подсасывающее пространство, значительно уменьшает существующие в нем разрежение. Таким образом коэффициент общего сопротивления становится равным $c_w = 1,17$.

Расчеты Кирхгофа плохо согласуются с результатами опыта. Наоборот, хорошее совпадение расчета с опытом получается в том случае, когда пространство позади пластинки на основании небольшого давления и высокой скорости заполняется вследствие кавитации пузырьками воздуха. В этом случае поверхности раздела устойчивые и хорошо выполняются условия теории течения, лишенного трения.

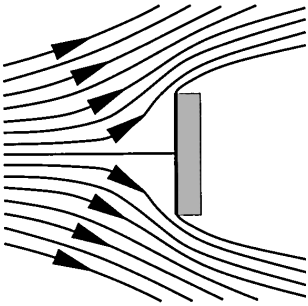


Рис. 4.92. Обтекание плоской пластинки по Кирхгофу

Вихревая дорожка Кармана

При обтекании узких пластинок при определенных обстоятельствах позади тела происходит периодический отрыв вихрей (рис. 4.93). Это наблюдение побудило Кармана (1912 г.) исследовать устойчивость параллельных вихревых нитей. Самая устойчивая система получилась при отношении расстояния h между обоими рядами вихрей к расстоянию l $h/l = 0,281$. Вихревые дорожки, наблюдающиеся в действительности, обладают расположением очень близким к указанному отношению h/l теории устойчивости (идеальной жидкости). Рис. 4.93 показывает, что вследствие трения вниз по течению вихри отрываются, форма вихрей расплывается и расстояния между ними постепенно увеличивается.

Периодический отрыв вихрей создает сопротивление, которое было рассчитано Карманом. Сам факт, что измеряя фотографический снимок вихревой системы, и измеряя скорость вихря, можно определить коэффициент сопротивления тела, производящего вихри, можно считать успехом теории течения лишенного трения.

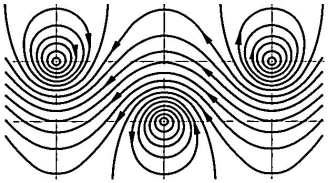
Сопротивление трения при обтекании пластинки

Сопротивление трения пластинки относится ко всей поверхности тела A. Сила сопротивления равна

$$W_f = \int\limits_A \tau_w \cdot \sin(x, \boldsymbol{n}) \cdot dA = c_f \cdot A \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2}. \qquad (4.127)$$

где x — это направление обтекания, $\boldsymbol{n}$ нормаль к поверхности в определенной точке, а c_f — коэффициент сопротивления трения. Для узкой прямоугольной пластинки шириной b и длиной l имеем $A = 2 \cdot b \cdot l$.

Вихревая дорожка позади пластинки



Линии тока в вихревой дорожке (по Карману, 1912)

Рис. 4.93. Вихревая дорожка Кармана

Коэффициент трения при ламинарном обтекании пограничного слоя пластинки пропорционален $\sqrt{l}$. При турбулентном обтекании на гладких поверхностях при достаточно высоких числах Рейнольдса он пропорционален $l^{0,8}$–$l^{0,85}$, на шероховатых поверхностях он пропорционален $l^{0,65}$–$l^{0,75}$. Если ввести число Рейнольдса $Re_l = v \cdot l/\nu$, образованное l, то для гладких поверхностей получается характеристика, изображения на рис. 4.94. c_f и Re_l нанесены логарифмически. Сплошные линии и линии, изображенные штрихами, означают при этом различные уравнения для расчета коэффициента сопротивления трения.

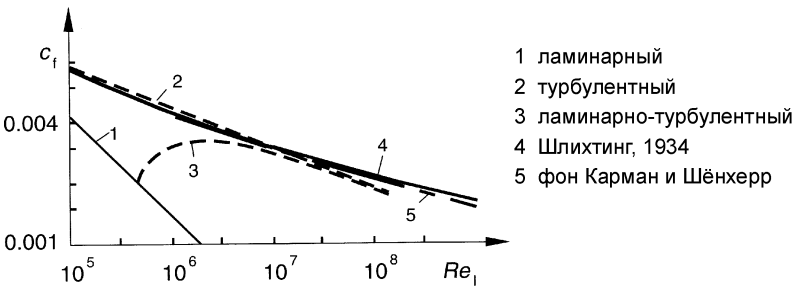


Рис. 4.94. Коэффициент трения c_f гладких пластинок в зависимости от числа Рейнольдса Re_l

При ламинарном течении кривая 1 соответствует:

$$c_f = \frac{1,33}{\sqrt{Re_l}}. \tag{4.128}$$

Если течение пограничного слоя пластинки с самого начала турбулентное, кривая 2 означает:

$$c_f = \frac{0,074}{Re_l^{0,2}}. \tag{4.129}$$

Если течение пограничного слоя сначала ламинарное, но при критическом числе Рейнольдса $5 \cdot 10^5$ переходит в турбулентный пограничный слой, то кривая 3 соответствует:

$$c_f = \frac{0{,}074}{Re_l^{0,2}} - \frac{1700}{Re_l}. \tag{4.130}$$

Это уравнение может быть использовано при числе Рейнольдса до $5 \cdot 10^6$. Для чисел Рейнольдса до $5 \cdot 10^8$ Шлихтинг (1934) указал следующую интерполяционную формулу (кривая 4):

$$c_f = \frac{0{,}455}{(\lg(Re_l))^{2,58}}. \tag{4.131}$$

Кривая 5 соответствует интерполяции по экспериментам Кармана и Шёнхерра (1932)

$$\sqrt{c_f} = \frac{0{,}242}{\lg(Re_l \cdot c_f)}. \tag{4.132}$$

Характеристика турбулентного течения на шероховатых плоскостях, представленная в главе 4.2.10 дает возможность рассчитать сопротивление трения шероховатых пластинок. Можно ожидать, что в полностью установившемся потоке сопротивление при указанной длине пластинки и указанной высоте шероховатости k пропорциональна квадрату скорости. Коэффициент сопротивления трения c_f увеличивается с увеличением соотношения k/l. Так как это соотношение при постоянном k с возрастанием длины уменьшается, то c_f для возрастающего числа Рейнольдса при постоянной скорости уменьшается.

Расчет сопротивления шероховатых пластин впервые был проведен Прандтлем и Шлихтингом в 1934 году на основе измерений Никурадзе на шероховатых трубах. Результаты исследований показаны на рис. 4.95 для гладких и шероховатых поверхностей.

Связь сопротивления с состояниями кильватерного потока

Рис. 4.96 показывает усредненный по времени кильватерный поток (след) позади тела, движущегося со скоростью U. Система отсчета находится в состоянии покоя.

След представляет собой поток жидкости, которая приводится в движение в результате сопротивления тела. При движении тела жидкость впереди него расходится во все стороны как от источника (глава 4.1.5). Мощность источника Q совпадает с количеством жидкости протекающий в следе и тесно связана с сопротивлением. Пусть скорость потока в следе относительно неподвижной жидкости равна w. Тогда количество жидкости, протекающей в кильватерном потоке на достаточно большом расстоянии от тела будет равна:

$$Q = \int_N w \cdot dA. \tag{4.133}$$

Интеграл следует распространить только на область кильватерного потока N. Применяя теорему о количестве движения к области источника и следа, получим соотношение:

$$W = \rho \cdot Q \cdot U. \tag{4.134}$$

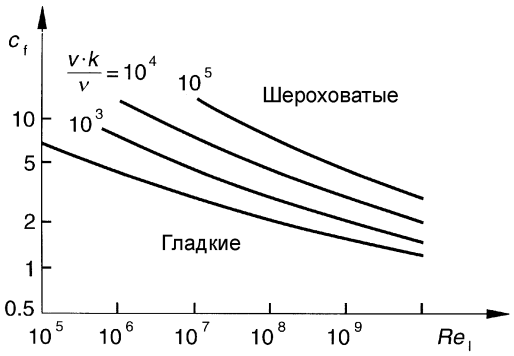


Рис. 4.95. Сопротивление трения c_f гладких и шероховатых пластинок в зависимости от числа Рейнольдса Re_l

Из равенства (4.133) и (4.134) следует, что сопротивление тела можно определить, если измерить распределение скорости в следе. В. Бетц впервые указал на возможность такого способа вычисления сопротивления.

Пусть скорость относительно тела в следе U равна w. При помощи трубки Пито (см. главу 4.1.2) покоящейся относительно тела, нужно измерить общее давление $p_g = p + (\rho/2) \cdot (U - w)^2$. Если полное давление p_{g_0} в невозмущенной жидкости равно $p_0 + (\rho/2) \cdot U^2$, то на достаточном большом расстоянии от тела в соответствии с уравнениями (4.133) и (4.134) можно рассчитать сопротивление

$$W = \int_N (p_{g_0} - p_g) \cdot dA. \tag{4.135}$$

Причем членом $(\rho/2) \cdot w^2$ мы будем пренебрегать.

Только что рассмотренные свойства потока, создаваемые движущими телами, позволяют получить важное представление о поле давлений. Это поле давлений создается источником. Радиальная скорость для точечного источника равна $w_r = Q/(4 \cdot \pi \cdot r^2)$, а для линейного источника плоского потока мощностью Q_1 на единицу длины равна $Q_1/(2 \cdot \pi \cdot r)$. Если ограничиться в точности первым порядком, то при образовании квадрата результирующей скорости на большом расстоянии от источника нужно рассматривать только составляющую x радиальной скорости, которая равна $u = w_r \cdot \cos(\varphi)$. Выражение $(\rho/2) \cdot (U + u)^2 - U^2 = (\rho/2) \cdot (2 \cdot U \cdot u + u^2)$ в уравнении Бернулли, отбрасывая член второго порядка, дает:

$$p - p_0 = -\rho \cdot U \cdot u = -\rho \cdot \frac{Q \cdot U}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \cos(\varphi), \quad -\rho \cdot \frac{Q_1 \cdot U}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \cos(\varphi).$$

Используя уравнение (4.134) получим

$$p - p_0 = -\frac{W \cdot \cos(\varphi)}{4 \cdot \pi \cdot r^2}, \quad -\frac{W_1 \cdot \cos(\varphi)}{2 \cdot \pi \cdot r},$$

где W_1 есть сопротивление на единицу длины линейного источника при плоском течении. Отсюда видно, что в случае линейного источника, возмущение давления на большом расстоянии от тела могут быть довольно значительными. Это обстоятельство всегда необходимо учитывать при измерениях в потоке, в котором имеется решетка измерительного прибора, поставленная поперек течения. Впереди движущегося тела давление повышено, а позади — понижено. Кильватерный поток, к которому уравнение Бернулли вследствие трения неприменимо, дает дополнительную величину в поле давления.

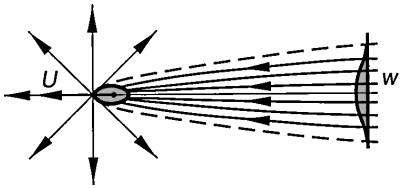


Рис. 4.96. Кильватерный поток за движущимся телом, покоящаяся система отсчета

Относительно кильватерного потока обладающего трением следует заметить следующее. При числе Рейнольдса $Re_d < 1$ существуют аналитические решения Озеена (1910) при движении шара и решения Ламба (1911) для цилиндра. Полученные ими результаты хорошо совпадают с измерениями, представленными на рис. 4.98. При увеличении числа Рейнольдса позади цилиндра образуется сначала постоянная область обратного течения (рис. 4.97) и в итоге ламинарная вихревая дорожка Кармана. Выводы о сопротивлении относятся следовательно к средней скорости кильватерного потока.

Коэффициент сопротивления c_w как функция числа Рейнольдса Re_d, образованная диаметром тела d, изображена на рис. 4.98 для шара, цилиндра и диска, причем коэффициент сопротивления определяется положением места отрыва. Решающим фактором при этом является, какой вид течения пограничного слоя присутствует на теле — ламинарный или турбулентный. При турбулентном отрыве пограничного слоя отрыв (место отрыва) сдвигается вниз по течению и сопротивление в результате этого значительно уменьшается (см. главу 4.2.6).

Такое поведение впервые было установлено при исследовании сопротивления шаров. При числе Рейнольдса $3 \cdot 10^5$ сопротивление падает до значения ниже $c_w = 0,1$. С возрастанием числа Рейнольдса значение c_w снова повышается до $0,18$. Тот факт, что уменьшение сопротивления связано действительно с переходом к турбулентному пограничному слою, прекрасно доказал Прандтль во время своего знаменитого эксперимента с проволочной сеткой: если вокруг шара несколько выше от того места, где ожидается отрыв при ламинарном течении расположить проволочную сетку (толщина проволоки должна соответствовать вязкому нижнему слою), то ниже числа Рейнольдса $3 \cdot 10^5$ наблюдается уменьшение сопротивления. Место отрыва, благодаря проволоке, сдвигается вследствие вынужденного турбулентного течения пограничного слоя с $80°$ до $111°$–$120°$.

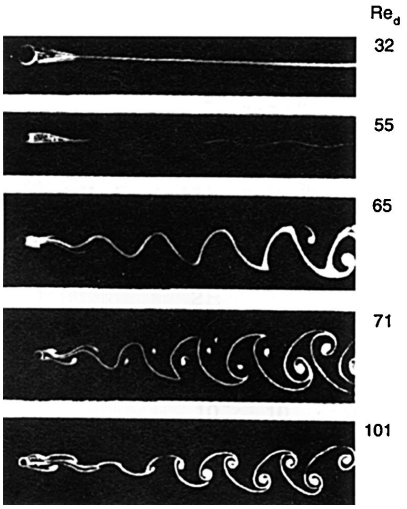


Рис. 4.97. Вихревая дорожка Кармана за круглым цилиндром (Хоманн 1936 г.)

Для ползущего потока $Re_d < 1$ при обтекании шара действует закон Стокса $c_w = 24/Re_d$. У круглого цилиндра переход от больших значений сопротивления к малым значениям происходит при числе Рейнольдса приближенно $Re_d = 5 \cdot 10^5$. Сопротивление падает с $c_w = 1{,}2$ до $c_w = 0{,}3$. Для ползущего потока здесь вместо закона Стокса применяется закон Ламба

$$c_w = \frac{8 \cdot \pi}{Re_d \cdot (2 - \ln(Re_d))}.$$

У круглых цилиндров место отрыва зафиксировано, таким образом ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое тела не играет никакой роли. Следовательно, коэффициент сопротивления остается на значении $c_w = 1,18$.

Воздушные корабли (дирижабли) с небольшим значением сопротивления

В авиационной технике особую важность имеет форма тела, которое обладает наименьшим сопротивлением. Поэтому при проектировании ста-

раются придать такие формы тела, при которых не происходит отрыва потока, то есть так называемые обтекаемые тела. Для таких обтекаемых тел распределение давления, рассчитанное с помощью уравнения для потенциала, очень хорошо совпадает с фактическим распределением давления (см. рис. 4.99). Отклонения могут возникнуть только на задней кромке. Там пограничный слой тела переходит в касательный (тангенциальный) слой потока за телом. Следовательно, в распределении давления, полученного путем измерений не происходит повышение давления (без трения) до теоретического значения. Коэффициент сопротивления, полученный экспериментальным путем составляет $c_w = 0,04$, следовательно, сопротивление этого тела в 28 раз меньше сопротивления круглой пластинки с таким же диаметром.

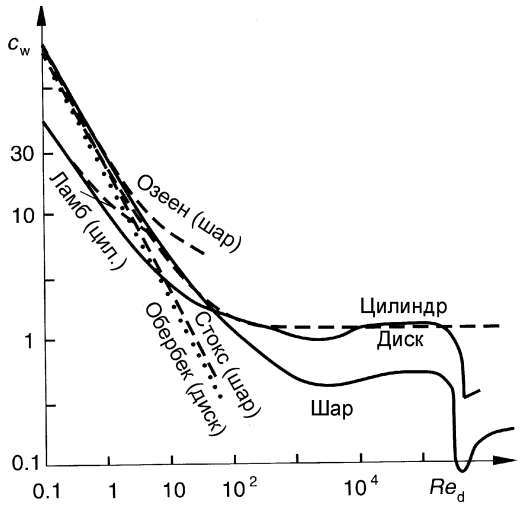


Рис. 4.98. Зависимость коэффициентов сопротивления шара, цилиндра и диска от числа Рейнольдса Re_d

Для того чтобы избежать отрыва течения, стремятся к тому, чтобы сопротивление трения крыльев было как можно меньше. Эта задача выполнена, если на значительном протяжении крыла сохранить ламинарный поток. Причем сохранить такой ламинарный поток, в котором скорость увеличивается легче, чем поток, в котором скорость уменьшается. Следовательно,

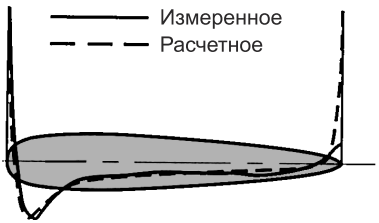


Рис. 4.99. Распределения давления на поверхности модели дирижабля (Г. Фурманн, 1910 г.)

профиль крыла должен иметь такую форму, чтобы максимальная скорость обтекающего потока получалась возможно дальше от передней точки профиля. Для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы место наибольшей толщины профиля лежало возможно ближе к его концу. Всякого рода выступ и неровности даже небольшие впереди этого места недопустимы, т. к. иначе может возникнуть преждевременный ламинарно-турбулентный переход.

4.2.13. Топология и течение неньютоновских сред

В главе 4.2.1 рассматриваются нелинейные свойства текучести неньютоновой жидкости. В качестве примера течения неньютоновской жидкости исследуем сформировавшееся течение в круглой трубе, касательное напряжение которого должно удовлетворять потенциальному закону (4.50).

Течение в трубе

Движущейся силой установившегося потока в трубе является постоянная разность давлений Δp. Градиент давления вдоль трубы такой же постоянный $dp/dz = -\Delta p/l$ как и при течении ньютоновской жидкости. Для определения решения используется уравнение неразрывности для несжимаемых жидкостей

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{4.136}$$

и уравнение Навье–Стокса для установившегося потока без сил тяжести,

$$\rho \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{v} = -\nabla \boldsymbol{p} + \nabla \cdot \tau, \tag{4.137}$$

где τ есть тензор вязких напряжений. В цилиндрических координатах будем иметь

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = u(r), \quad p = p(z). \tag{4.138}$$

Для этих зависимостей выполняется уравнение неразрывности и левая часть уравнения (4.137) приравнивается нулю. В этом случае τ имеет только две составляющие. Для $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ применяя уравнения (4.50) имеем

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = K \cdot \left|\frac{du}{dr}\right|^{n-1} \cdot \frac{du}{dr}. \tag{4.139}$$

Таким образом компонента z уравнения (4.137) составляет:

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot \tau_{rz}). \tag{4.140}$$

Составляющие по координатам r и φ уравнения (4.137) выполняются тождественно. Из уравнения (4.140) после интегрирования получим:

$$\tau_{rz} = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}.$$

Касательное напряжение τ_{rz} имеет при $r = 0$ конечное значение. Следовательно, константа интегрирования C_1 должна быть равна нулю. С помощью уравнения (4.139) получим:

$$K \cdot \left|\frac{du}{dr}\right|^{n-1} \cdot \frac{du}{dr} = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{r}{2}.$$

Так как давление уменьшается в направлении оси z, то $dp/dz = -\Delta p/l$ отрицательно. Следовательно, du/dr также должно быть отрицательным

$$\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2 \cdot K \cdot l}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot r^{\frac{1}{n}}.$$

После интегрирования получаем

$$u(r) = -\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{\Delta p}{2 \cdot K \cdot l}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot r^{\frac{n+1}{n}} + C_2,$$

постоянная C_2 определяется из условия прилипания на стенке $u(R) = 0$ при радиусе трубы R. Таким образом будем иметь:

$$u(r) = -\frac{n}{n+1} \cdot \left[\frac{R^{n+1}}{2 \cdot K} \cdot \frac{\Delta p}{l}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \qquad (4.141)$$

При $n = 1$ уравнение (4.141) совпадает с профилем скоростей ньютоновской жидкости. При $n < 1$ на стенке получается более крутая кривая (градиент) скоростей, как это показано на рис. 4.100. Общий расход жидкости Q рассчитывается по формуле (4.141):

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} u(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = \frac{n}{3 \cdot n + 1} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot K} \cdot \frac{\Delta p}{l}\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (4.142)$$

Таким образом для средней скорости u_m имеем:

$$u_m = \frac{Q}{\pi \cdot R^2} = \frac{n}{3 \cdot n + 1} \cdot R \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot K} \cdot \frac{\Delta p}{l}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

При $n = 1$ и $K = \mu$ выполняется закон Гагена–Пуазейля для течения в трубе ньютоновой жидкости.

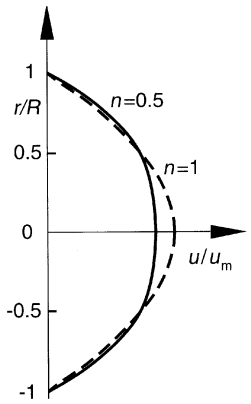


Рис. 4.100. Распределение скоростей неньютоновской жидкости при течении в круглой трубе

Эффект Вайсенберга

При сдвиговых (касательных) течениях высокомолекулярных жидкостей возникают неньютоновы эффекты, которые могут быть эффекты, которые могут быть обусловлены нормальными напряжениями. В качестве примера рассмотрим эффект Вайсенберга. Неньютоновская жидкость движется между двумя концентрическими цилиндрами радиусами R_1 и R_2 рис. 4.101, причем цилиндр, находящийся внутри, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Жидкость имеет свободную поверхность, на которую действует атмосферное давление. Высота столба жидкости на такой отметке, что течение на

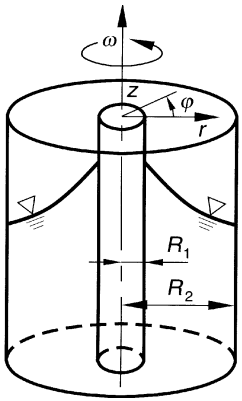


Рис. 4.101. Течение между двумя концентрическими цилиндрами. Внутренний цилиндр вращается

основании цилиндра не оказывает никакого влияния на форму свободной поверхности.

В цилиндрических координатах только компонента φ скорости $v_\varphi(r)$ отлична от нуля. Таким образом, между двумя цилиндрами происходит осесимметричное течение. Давление зависит только от r. Тензор напряжения неньютоновской жидкости должен иметь следующую форму:

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{r\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.143}$$

$\tau_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ зависят только от r. Из уравнения Навье–Стокса при установившемся течении (4.137) для компонент r и φ следует:

$$-\rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{dp}{dr} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}, \tag{4.144}$$

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot \tau_{r\varphi}) + \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}(r^2 \cdot \tau_{r\varphi}). \tag{4.145}$$

Компонента z уравнения (4.137) выполняется тождественно. Используя ньютоново уравнение в цилиндрических координатах для касательного на-

пряжения $\tau_{r\varphi} = \mu \cdot (dv_\varphi/dr - v_\varphi/r)$ из уравнения (4.145) получается:

$$0 = \mu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot v_\varphi)). \tag{4.146}$$

После интегрирования можно определить распределение скоростей. Оно идентично с соответствующим распределением скоростей ньютоновской жидкости:

$$v_\varphi(r) = A \cdot r + B \cdot \frac{1}{r}. \tag{4.147}$$

При граничных условиях $v_\varphi(r = R_1) = \omega \cdot R_1$ и $v_\varphi(r = R_2) = 0$ для постоянных получим

$$A = -\frac{\omega \cdot R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{\omega \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Из уравнения (4.144) следует уравнение для расчета давления:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{d(\ln(r))}{dr} \cdot \frac{dp}{d(\ln(r))} = -\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{r}$$

или

$$\frac{dp}{d(\ln(r))} = -\sigma_{\varphi\varphi} + \rho \cdot v_\varphi^2. \tag{4.148}$$

Формально $\sigma_{\varphi\varphi}$ можно заменить на разность нормальных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$. Допустим, что на свободную поверхность действует постоянное внешнее давление. Тогда изменения высоты жидкости h пропорционально градиенту давления

$$\frac{dh}{dr} = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{dp}{dr}. \tag{4.149}$$

У молекулярных жидкостей $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} > 0$. Из уравнений (4.148) и (4.149) для больших значений разности нормальных напряжений следует, что уровень жидкости h на вращающемся внутреннем цилиндре выше, чем на внешнем цилиндре, который находится в состоянии покоя. Этот подъем жидкости на вращающемся внутреннем цилиндре был описан Вайсенбергом в 1947 году в виде эффекта нормального напряжения и может наблюдаться у многих вязко-упругих жидкостей.

Расширение струи жидкости

Рис. 4.102. Расширение свободной струи вязко-упругой жидкости

Другой эффект нормального напряжения наблюдается, когда вязко упругая жидкость истекает в виде свободной струи из сопла или отверстия цилиндрической трубки. Струя, вытекающая вниз из вертикальной трубы (рис. 4.102) расширяется в случае с неньютоновской жидкостью, прежде чем снова сузится вследствие силы тяжести. Если исходить из того, что на поперечном сечении отверстия имеется сформированный поток Гагена–Пуазейля, уравнение Навье–Стокса в радиальном направлении приведется к

$$\frac{d(p-\sigma_{rr})}{dr} = -\frac{1}{r}\cdot(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}). \qquad (4.150)$$

С помощью уравнения (4.150), учитывая общее количество движения в области насадки и функции нормального напряжения, также как и при эффекте Вайсенберга, расширение струи может быть связано с нормальными напряжениями неньютоновской жидкости. Расширение струи при этом тем больше, чем меньше радиус трубы. Это соответствует эффекту Вайсенберга, согласно которому подъем жидкости на вращающемся стержне тем больше, чем меньше диаметр внешнего цилиндра.

4.3. Динамика газа

Значительные изменения плотности и объема происходят при течении газа и пара, у которых имеются большие разности давления. Изменение объема, а, следовательно, и изменения давления возникают в основном в следующих случаях:

1) Когда пространство, занятое газом, находящимся под действием силы тяжести, имеет большое протяжение в высоту.

   Такие движения встречаются в свободной атмосфере. Они рассматриваются в гл. 11.2.

2) В потоке газа имеют место большие скорости.

   Они возникают при выравнивании давления между двумя областями, имеющими различные давления, либо при движении тела в газе с очень

большой скоростью. На практике такие движения возникают, например, в паровых и газовых турбинах и других подобных устройствах. Кроме того, они имеют место при движении ракет и самолетов, а также в пропеллерах самолетов и в реактивных двигателях. Гидроаэродинамика сжимаемой среды называется также газовой динамикой.

3) Когда движение газа связано с большим ускорением.

Они возникают в покоящемся или движущимся газа, если части стенки или тело выполняют быстрые колебания. Причиной может послужить быстрое открывание и закрывание клапанов и вентилей или распространение взрывных волн.

4) Когда наблюдаются большие температурные различия.

Они могут возникнуть при тепловом переходе, при небольших скоростях течения. Подобные течения с тепловым переходом рассматриваются в гл. 8.

4.3.1. Распространение возмущений давления. Скорость звука

В качестве примера рассмотрим покоящуюся массу газа в трубе, в которой в результате движения поршня происходит повышение давления, которое распространяется в спокойном газе в соответствии с рис. 4.103.

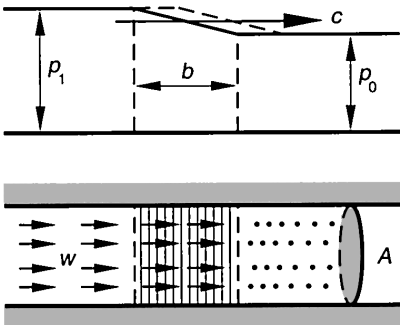


Рис. 4.103. Волна давления в трубе

Причем предполагается, что распределение давления движется вправо без изменения формы с постоянной скоростью c. Поскольку газ при этом

сжимается, его скорость после повышения давления становится w. Для простоты расчета примем, что повышение давления $p_1 - p_0$ мало по сравнению с первоначальным давлением p_0, тогда будет мало также изменение плотности $\rho_1 - \rho_0$, кроме того, будет мала также скорость w. Приращение массы газа в единицу времени в трубе равно: $A \cdot (\rho_1 - \rho_0) \cdot c$, масса, протекающая за единицу времени составляет $A \cdot \rho_1 \cdot w$ из уравнения неразрывности следует

$$\rho_1 \cdot w = (\rho_1 - \rho_0) \cdot c. \tag{4.151}$$

Уравнение движения вместе с потоком $A \cdot w \cdot \rho_1$, протекающим за единицу времени с увеличением количества движения за единицу времени $A \cdot w \cdot \rho_1 \cdot c$ и вместе с результирующей силой $A \cdot (p_1 - p_0)$, приводит к соотношению

$$p_1 - p_0 + \rho_1 \cdot w^2 = \rho_1 \cdot w \cdot c. \tag{4.152}$$

Учитывая данные предпосылки, можно пренебречь квадратическим членом $\rho_1 \cdot w^2$. Применив уравнение (4.151) из уравнения (4.125) получим:

$$c^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}.$$

Выражение на правой стороне зависит исключительно от закона сжатия газа жидкости. При небольших течениях оно может быть заменено на дифференциальное частное $dp/d\rho$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}. \tag{4.153}$$

Таким образом, если изменение давления в газе незначительно, то скорость их распространения не зависит от их величин, ни от ширины переходной области, а зависит только от закона сжатия газа. Величину c — скорость распространения малых изменений давления — называют скоростью звука.

Для газов в соответствии с законом адиабатического изменения состояния $p = \text{const} \cdot \rho^{\kappa}$, т. е.

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa \cdot \text{const} \cdot \rho^{\kappa - 1} = \kappa \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{4.154}$$

Используя уравнение состояние идеальных газов $p = R \cdot \rho \cdot T$ (R — газовая постоянная, специфичная для определения вещества), получим

$$c = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}.$$

Таким образом, скорость звука газа зависит только от температуры. Для воздуха при температуре 0° С, т. е. $T = 273K$ можем записать:

$$c = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = 331 \text{ м/с}.$$

Распространение волн давления

В системе отсчета движущейся вместе с текущим газом, изменение давления распространяется относительно газа со скоростью звука c. Относительно скорости течения w изменение давления движется вниз по течению со скоростью $c + w$, а вверх по течению со скоростью $c - w$. Но если w будет больше, чем c, то изменение давления не смогут распространяться вверх по течению.

Если скорость течения w меньше скорости звука c, то возмущение распространяется во всех направлениях в виде шаровой волны. Если же скорость потока больше скорости звука, то все шаровые волны движутся внутри конуса вниз по течению от точки A, где и произошло возмущение (рис. 4.104). При движении источника звука A со скоростью $w > c$ в покоящемся газе получим аналогичную картину. Возмущения распространяются внутри конуса вверх по течению от источника звука. Угол раствора этого, так называемого, конуса Маха можно определить следующим образом. В течение короткого промежутка времени τ точечное возмущение вырастает в шар радиусом $c \cdot \tau$ и центром, удаленном от источника возмущения на расстояние $w \cdot \tau$. Конус касается шара тангенциально, следовательно, должно иметь место соотношение:

$$\sin(\alpha) = \frac{c \cdot \tau}{w \cdot \tau} = \frac{c}{w} = \frac{1}{M}. \tag{4.155}$$

Угол α называют углом Маха, а M — числом Маха. При $M < 1$ говорят о дозвуковых течениях, при $M \approx 1$ — о течениях, близких к звуковым, и при $M > 1$ — о сверхзвуковых течениях.

Аналогичные отношения можно использовать при движении тел в покоящемся воздухе. Если тело движется со сверхзвуковой скоростью, то возмущения, вызванные телом, распространяются внутри конуса Маха. На рис. 4.105 показана в качестве примера головная волна снаряда, летящего со сверхзвуковой скоростью. При этом разность давлений настолько велика, что приближение небольших возмущений не оказывает никакого влияния, и головная волна распространяется со сверхзвуковой скоростью. Угол наклона головной волны больше, чем угол Маха α.

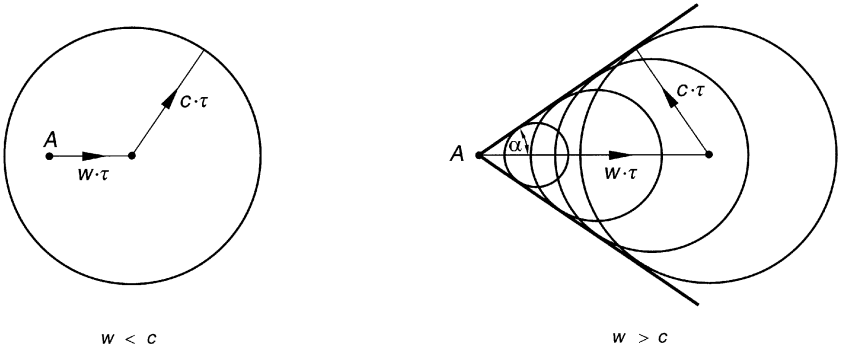


Рис. 4.104. Распространение волны давления

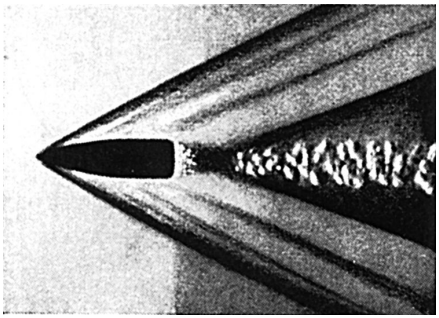


Рис. 4.105. Полет снаряда

Уравнение неразрывности (4.151) и уравнение движения (4.152) для распространения скорости (волнового фронта) фронта волны обусловлены неизменностью (постоянством) формы волны. Это условие выполняется при небольших возмущениях состояния набегающего потока или при скачках уплотнения, рассматриваемых в гл. 4.3.4. Изменения давления конечной величины, напротив, изменяют при распространении формы волны. Это объясняется тем, что конечные изменения давления являются следствием многих небольших изменений. Следовательно, каждое новое возмущение движется в состоянии уже изменившемся под влиянием предшествующей волны. Пусть w_0 — скорость течения до волны, тогда изменение скорости

течения можно рассчитать по уравнению (4.151)

$$w_1 - w_0 = \frac{c \cdot (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1}. \tag{4.156}$$

Изменение плотности $d\rho = \rho_1 - \rho_0$ связано с изменением давления dp и изменением звуковой скорости dc. Применив уравнение (4.154) для dc, получим:

$$2 \cdot c \cdot dc = 2 \cdot c \cdot (c_1 - c_0) = \kappa \cdot \frac{dp}{\rho} - \kappa \cdot \frac{p}{\rho^2} \cdot d\rho =$$

$$= \frac{dp}{d\rho} \cdot (\kappa - 1) \cdot \frac{d\rho}{\rho} = \frac{c^2 \cdot (\kappa - 1) \cdot (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1}.$$

Таким образом, изменение плотности $\rho_1 - \rho_0$ можно объяснить изменением звуковой скорости $c_1 - c_0$ и, с помощью уравнения (4.156) можем записать:

$$w_1 - w_0 = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot (c_1 - c_0). \tag{4.157}$$

Скорость течения в плоской звуковой волне изменяется на $2/(\kappa - 1)$ кратное значению изменения скорости звука. Аналогичный результат получается и при сильных изменениях.

Для волны сжатия, изображенной ни рис. 4.106 скорость звука в волне больше, чем скорость звука до волны. Следовательно, согласно уравнению (4.157) скорость течения тоже будет больше.

Скорость распространения каждой части волны равна сумме локальной скорости звука и локальной скорости течения $c + w$. Следовательно, возмущение движется все быстрее, при этом увеличивается глубина волны. В определенный момент времени волна очень круто поднимается и происходит вертикальный скачок, который называется скачком уплотнения. Подробно это явление будет рассмотрено в гл. 4.3.4.

Если волна разрежения (рис. 4.106) переходит справа в покоящуюся среду $w_0 = 0$, то газ в волне течет влево. В соответствии с уравнением (4.157) w_1 при $c_1 < c_0$ является отрицательным. За фронтом волны возмущение замедляется по мере уменьшения давления. Такая волна разрежения постепенно становится все более и более пологой.

4.3.2. Установившиеся потоки с изменениями объема

В сжимаемом потоке без трения для линии тока соблюдается обобщенное уравнение Бернулли (4.4). Если пренебречь силой тяжести, то уравнение

Бернулли примет вид:

$$F + \frac{w^2}{2} = F_0 = \text{const.} \tag{4.158}$$

с функцией давления $F(p) = \int dp/\rho$. Для изоэнтропного изменения состояния

$$\rho = \rho_0 \cdot (\frac{p}{p_0})^{1/\kappa}$$

вычисление интеграла дает:

$$F = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot (\frac{p}{p_0})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{4.159}$$

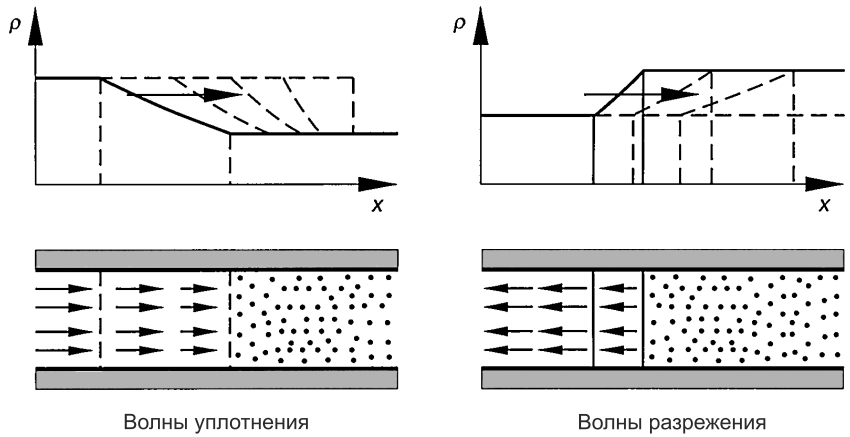


Рис. 4.106. Распространение волн уплотнения и разрежения.

Если p_0 есть давление при $w_0 = 0$, например, давление покоя в котле при процессах истечения, то

$$w = \sqrt{2 \cdot (F_0 - F)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot (1 - (\frac{p}{p_0})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}})}. \tag{4.160}$$

При расширении газа до вакуума ($p = 0$) из (4.160) получим максимальную скорость движения:

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \cdot c_0. \tag{4.161}$$

Для воздуха при $t = 0°C$ максимальная скорость расширения равна:

$$w_{\max} = 740 \text{ м/с}.$$

Речь идет при этом о гипотетическом граничном значении. Вследствие недостижимости абсолютной нулевой точки температуры и конденсации взятого газа это значение практически недостижимо. С помощью гиперзвуковых аэродинамических труб с использованием воздуха достигают максимального значения, которое на 10% менее теоретического (4.161).

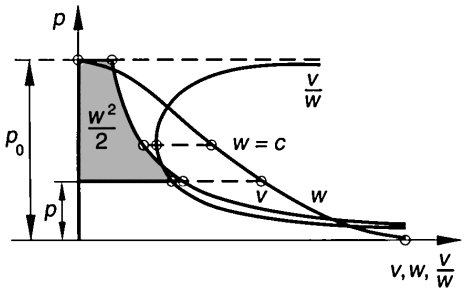


Рис. 4.107. Зависимость удельного объема v, скорости w и отношения v/w от давления p.

Зависимость скорости w от давления p графически изображена на рис. 4.107. Дополнительно изображена также зависимость удельного объема $v = 1/\rho$ от давления при адиабатическом изменении состояния. Заштрихованная поверхность $\int_p^{p_0} v \cdot dp$ представляет собой разность $F_0 - F$. Уравнение неразрывности установившегося движения сжимаемой жидкости (см. гл. 3.2) требует, чтобы через каждое поперечное сечение струйки газа в единицу времени (в одну секунду) проходила одна и та же масса, т. е. чтобы вдоль струйки газа соблюдалось уравнение:

$$A \cdot \rho \cdot w = \text{const}. \tag{4.162}$$

Зависимость поперечного сечения струйки газа A от давления p изображается функцией $1/(\rho \cdot w) = v/w$. Характер этой зависимости можно выяснить, исходя из уравнений (4.160) и (4.162) следующим образом:

Когда давление равно $p = p_0$, то скорость равна $w = 0$ и поэтому $A = \infty$. При уменьшении p скорость w постепенно возрастает; однако p

изменяется при этом незначительно, следовательно, поперечное сечение струйки A уменьшается. В дальнейшем, когда давление p становится очень малым, и продолжает дальше уменьшаться, скорость w приближается к значению $w_{\max}$ и поэтому изменяется незначительно, но зато плотность ρ уменьшается очень сильно; это означает, что при неограниченном уменьшении p поперечное сечение A увеличивается и стремится к бесконечности.

Очевидно, между областью уменьшения A и областью увеличения поперечного сечения струйки должен быть минимум A. Этот минимум имеет место там, где относительное приращение скорости dw/w равно относительному уменьшению плотности $-d\rho/\rho$. Вычисления показывают, что это происходит в том месте, где скорость течения равна скорости звука. Вследствие адиабатического охлаждения эта скорость звука не соответствует скорости звука начального состояния. Из-за понижения температуры она уменьшается (для воздуха при 20° С в начальном состоянии она равна 315 м/сек). После прохождения минимума скорость течения становится больше скорости звука. Таким образом, теперь, в таком течении при уменьшении давления (приращение скорости) увеличивается поперечное сечение струйки газа. Непрерывное ускорение газа от дозвуковой области до сверхзвуковой требует сначала сужения, а после звукового прохода расширения трубы. Такая конструкция называется соплом Лаваля.

На простом отверстии без расширения, как только противодавление уменьшится, устанавливается сверхзвуковая скорость. Для воздуха критическое отношение давлений: противодавление к покоящемуся давлению равно 0,53 давления в покоящемся газе. Общая формула для критического давления идеального газа имеет вид:

$$\frac{p'}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Скорость соответственно равна:

$$w' = c' = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}}.$$

Таким образом, истекающая масса газа не зависит от противодавления. После выхода из отверстия поперечное сечение струи газа расширяется, и притом, вследствие инерции, настолько сильно, что давление внутри нее становится меньше давления в окружающем пространстве. Вследствие этого, течение снова суживается и давление в нем становится снова таким же, как и в отверстии. Этот процесс периодически повторяется (рис. 4.108).

Давление p_m в выходном сечении можно измерить, сделав отверстие вблизи самого края насадки (ср. рис. 4.109). Если давление p_2 меньше критического давления p', то давление p_m почти постоянно и равно критическому давлению. При более высоком противодавлении p_2 оно (p_m) совпадает с p_2.

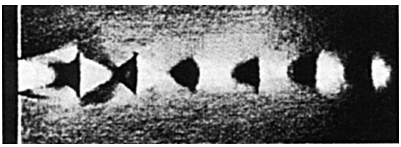


Рис. 4.108. Сверхзвуковая струя. Мах 1897 г.

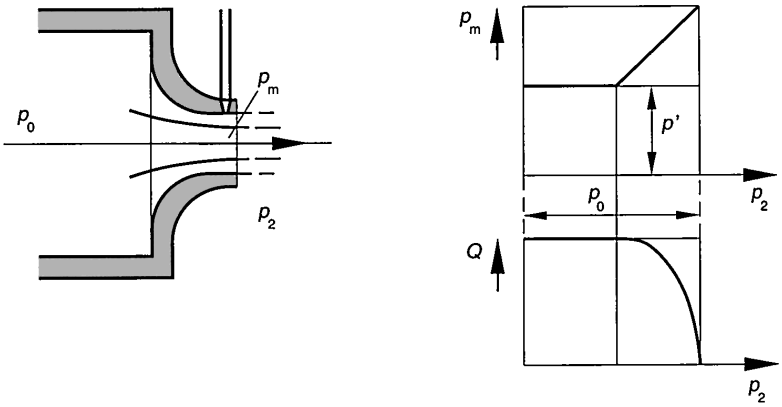


Рис. 4.109. Количество истекающего газа и давление в выходном отверстии в зависимости от p_2. Измерение давления в выходном сечении отверстия

При постепенном уменьшении p_2 увеличивается истекающее количество газа

$$Q = A \cdot \rho_m \cdot w_m = A \cdot (\frac{p_2}{p_0})^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot p_0 \cdot \rho_0 \cdot (1 - (\frac{p_2}{p_0})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}})} \quad (4.163)$$

и достигает постепенно при критическом давлении максимума

$$Q_{\max} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot p_0 \cdot \rho_0}. \quad (4.164)$$

При дальнейшем уменьшении $p_2, Q = Q_{\max} = \text{const}$. Зависимость давления p_m и расхода Q от противодавления p_2 графически изображено на рис. 4.109. Лучше понять эту зависимость помогут рассуждения относительно распространения давления, сделанные в гл. 4.3.7. Предположим, что к выходному концу отверстия примыкает камера, давление в которой можно регулировать с помощью вентиля (рис. 4.110).

Пусть давление p_2 в камере больше критического давления p'. Если вентиль открыть, то давление p_2 в конце понизится, и образуется волна разрежения, двигающаяся к отверстию, которая изменяет состояние течения в отверстии. При дальнейшем понижении давления p_2 не изменит состояние течения в отверстии, т. к. изменения, которые распространяются со скоростью звука, не могут достичь отверстия. Поэтому состояние течения остается там постоянным.

Течение через сопло Лаваля

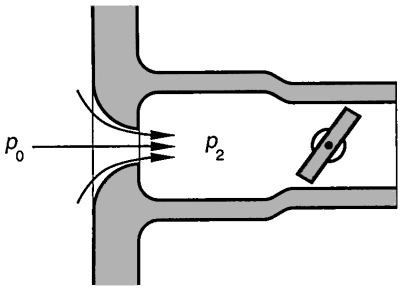


Рис. 4.110. Дроссель (вентиль)

Для того, чтобы при сверхкритическом соотношении давлений получить сверхзвуковой поток, шведский инженер Лаваль, конструируя свою паровую турбину, применил насадок особой формы, изображенный на рис. 4.111. Пусть задано давление перед соплом p_0. Тогда можно определить значения w и v/w, соответствующие каждому давлению p в соответствие рис. 4.107 для течения, свободного от трения. Так как расход газа, т. е. количество его массы, пробегающей в одну секунду равен $Q = A \cdot \rho \cdot w = A \cdot w/v$, то для каждого заданного значения, соответствующее каждому поперечному сечению A, из рис. 4.107 можно найти соответствующее значение давления. При течении через сопло Лаваля минимум поперечного сечения струи газа совпадает с минимумом поперечного сечения сопла. Расход составляет тогда максимум и рассчитывается как и при простом истечении из отверстия по формуле (4.164). Изменение давления вдоль оси сопла изображено жирной линией на рис. 4.111 до самого низкого конечного значения p_u. Но так как каждому значению v/w согласно рис. 4.107 соответствуют всегда два разных дав-

ления, то после самого узкого поперечного сечения появляется еще вторая кривая, которая ведет к верхнему конечному давлению p_0.

Найдем теперь изменение давления вдоль оси сопла при меньших расходах; мы получим линии выше p_0. Изменение расхода Q в зависимости от давления p_2 изображено на правой диаграмме рис. 4.111. Мы видим, что расход возрастает от нуля до $Q_{\max}$. Начиная от давления p_0, в самом узком сечении сопла устанавливается звуковая скорость течения и при дальнейшем понижении давления расход остается постоянным.

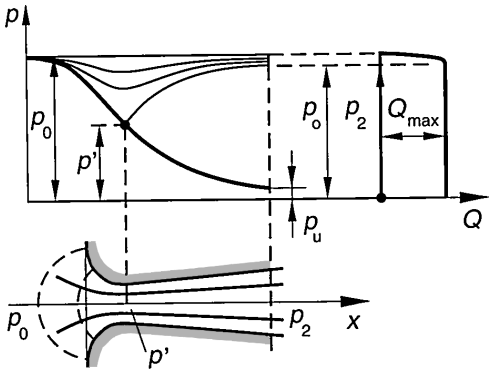


Рис. 4.111. Течение через сопло Лаваля

Из предыдущих рассуждений следует, что если в газе при движении через сопло давление изменяется между p_0 и p_u, то обязательно должна происходить потеря энергии. А. Стодола, наблюдая за изменением давления в таких потоках, обнаружил, что в них возникают разрывные изменения давления, так называемые скачки уплотнения, которые рассматриваются в гл. 4.3.4. Для их расчета наряду с уравнением неразрывности и уравнением Бернулли используется уравнение энергии.

4.3.3. Уравнение энергии для сжимаемых потоков

Движение газов может быть различным образом связано с потерями механической энергии связано с потерями механической энергии обусловленными трением, турбулентностью или разрывными процессами, такими, как скачки уплотнения. Механическая энергия переходит при этом в тепло-

вую энергию, которая у газов, вследствие расширения, снова может быть использована.

Уравнение энергии, необходимое для описания потерь, выводится аналогично уравнению количества движения (в гл. 4.1.8) для однородного потока, лишенного трения.

Рассмотрим изменение энергии в ограниченной области установившегося потока газа. Лучше использовать для этого отрезок трубки тока (рис. 4.35). Так как мы рассматриваем установившееся движение, то изменение состояния выделенной массы в течение промежутка времени dt заключается только в том, что через сечение A_1 из трубки тока выходит элемент массы $dm = \rho_1 \cdot A_1 \cdot w_1 \cdot dt$, а через сечение A_2 выходит элемент массы $dm' = \rho_2 \cdot A_2 \cdot w_2 \cdot dt$, причем вследствие неразрывности течения $dm = dm'$. При таком изменении содержимого трубки тока энергия струйки газа может измениться, очевидно, только на величину, равную притоку энергии извне за тот же промежуток времени dt. Энергия элемента массы складывается из кинетической, потенциальной и тепловой энергии, последняя называется также внутренней энергией e. Если принять, что потенциальная энергия обуславливается исключительно полем тяготения, то содержание энергии в массе dm будет равно $dm \cdot (w^2/2 + d \cdot z + e)$. Приток энергии к массе, заключенной в выделенном отрезке трубки тока, складывается из работы сил давления на торцевых поверхностях трубки и из возможного поступления тепла через боковые поверхности. Работой сил трения пренебрегалось. Работа сил давления, действующих на площадь A_1 равна $A_1 \cdot \rho_1 \cdot w_1 \cdot dt$. Если удельный объем газа равен v_1, а $dm = \rho_1 \cdot A_1 \cdot w_1 \cdot dt = A_1 \cdot w_1 \cdot dt/v_1$, то получим $dm \cdot \rho_1 \cdot v_1$ и для работы сил давления, действующих на площадь A_2 — соответственно: $dm \cdot \rho_2 \cdot v_2$. Возможный приток тепла между A_1 и A_2 обозначим $q_{1,2} \cdot dm$. Таким образом, для изменения содержания энергии запишем формулу:

$$dm \cdot (\frac{w_2^2}{2} + g \cdot z_2 + e_2) - dm \cdot (\frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1 + e_1) = dm \cdot (p_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot v_2 + q_{1,2})$$

откуда следует

$$\frac{w_2^2}{2} + g \cdot z_2 + e_2 + p_2 \cdot v_2 = \frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1 + e_1 + p_1 \cdot v_1 + q_{1,2}$$

или для любой точки конечного поперечного сечения:

$$\frac{w^2}{2} + g \cdot z + e + p \cdot v = \text{const} + q. \tag{4.165}$$

Это уравнение применяется также в дифференциальной форме:

$$w \cdot dw + g \cdot dz + de + d(p \cdot v) = dq. \tag{4.166}$$

Величина $e + p \cdot v$ есть энталпия h. Для идеальных газов имеют место формулы:

$$e = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot p \cdot v = c_v \cdot T,$$

$$h = e + p \cdot v = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot p \cdot v = c_p \cdot T.$$

где c_v и c_p удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении. При установившемся потоке без теплопередачи общая энергия остается постоянной, т. к. присутствующая энергия трения полностью превращается в теплоту. Для слоистых потоков силой тяжести можно пренебречь. Тогда уравнение энергии примет вид:

$$h + \frac{w^2}{2} = \text{const}. \tag{4.167}$$

Из первого закона термодинамики следует, что теплота, полученная любым элементом массы газа извне, вместе с теплотой, возникшей вследствие работы сил трения, увеличивают внутреннюю энергию элемента на dW_R, тогда мы можем записать

$$dq + dW_R = de + p \cdot dv. \tag{4.168}$$

Сложив уравнение (4.168) с уравнением (4.166), имея в виду, что $d(p \cdot v) = = p \cdot dv + v \cdot dp$ мы найдем:

$$w \cdot dw + g \cdot dz + v \cdot dp + dW_R = 0. \tag{4.169}$$

отсюда после интегрирования получим уравнение Бернулли, дополненное членом W_R

$$\frac{w^2}{2} + g \cdot z + \int v \cdot dp + W_R = \text{const}. \tag{4.170}$$

4.3.4. Теория прямого скачка уплотнения

При прямом скачке уплотнения происходит следующее явление: газ, движущийся в виде параллельного потока со скоростью w_1 и имеющий

давление p_1 и удельный объем v_1 в результате установившегося прямого скачка уплотнения при переходе через некоторую плоскость AA (рис. 4.112) скачкообразно уплотняется, причем скорость его движения уменьшается до значения w_2, давление увеличивается до значения p_2, а удельный объем уменьшается до значения v_2. Для изменения параметров состояния и скорости в результате прямого скачка уплотнения имеют место следующие уравнения:

уравнение неразрывности:

$$m = \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2}; \tag{4.171}$$

уравнение количества движения:

$$m \cdot (w_1 - w_2) = p_2 - p_1; \tag{4.172}$$

уравнение энергии:

$$\frac{w_1^2}{2} + h_1 = \frac{w_2^2}{2} + h_2, \tag{4.173}$$

где m — элемент массы газа с единичной плотностью, энтальпия h — функция p и v. Применив уравнение (4.171) к уравнению (4.172) можно исключить w_1 и w_2. Тогда получим $p_2 - p_1 = (v_1 - v_2) \cdot m^2$. И далее, используя уравнение энергии (4.173) получим:

$$(p_2 - p_1) \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} = h_2 - h_1.$$

Полученное отношение p_2 в зависимости от v_2 для заданного p_1 и v_1 называется адиабатой Гюгонио. Допустимы даны три параметра состояния, например, p_1, v_1 и p_2. Тогда можно определить четвертую величину, в данном случае v_2. Следовательно, рассчитать m и скорости w_1, w_2. Таким образом, для прямого скачка уплотнения будем иметь:

$$w_1 \cdot w_2 = c'^2,$$

с критической звуковой скоростью c' протекания. Что касается скоростей w_1 и w_2, то одна из них больше, а другая меньше звуковой скорости c. Теоретически здесь возможен как скачок уплотнения, так и скачек разрежения. Так как энтропия увеличивается только на скачке уплотнения, то, согласно второму закону термодинамики, физически возможны только скачки уплотнения.

Уравнение (4.171)–(4.173) для установившегося скачка можно распространить, изменив систему отсчета, также и на нестационарные волны уплотнения. Если сообщить потоку, изображенному на рис. 4.112 скорость w_1, тогда скорость перед плоскостью скачка уплотнения будет равна нулю. Скачок уплотнения будет распространяться влево со скоростью $u = w_1$, а масса газа позади скачка будет двигаться со скоростью $w = w_1 - w_2$.

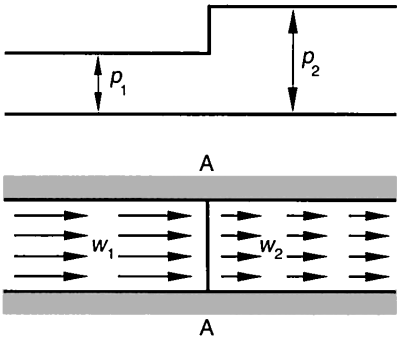


Рис. 4.112. Прямой скачок уплотнения

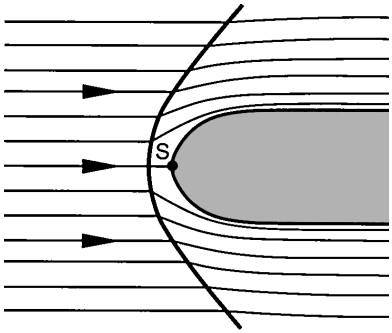


Рис. 4.113. Головная ударная волна

Уравнение количества движения для нестационарного распространения скачка уплотнения принимает вид: $p_2 - p_1 = \rho \cdot U \cdot w$. Скорость распространения U скачка всегда больше скорости звука и при очень большой разности давлений может сделаться чрезвычайно большой, что в действительности и наблюдается при взрывах.

При скачке уплотнения величина $(w_1^2 - w_2^2)/2$, содержащаяся в $h_1 - h_2$ ведет к увеличению теплосодержания. При криволинейном скачке уплотнения, различные струйки газа нагреваются по-разному, что приводит к потере однородности массы газа и к нарушению потенциального характера течения позади скачка.

Прямой скачок уплотнения в сопле Лаваля

Если на срезе сопла Лаваля (рис. 4.111) внешнее давление p_2 находится в пределах от p_0 до p_u, то в сопле возникает прямой скачок уплотнения.

Этот скачок переводит сверхзвуковую область течения в звуковую. Таким образом, кривые изменения давления на рис. 4.111 могут быть дополне-

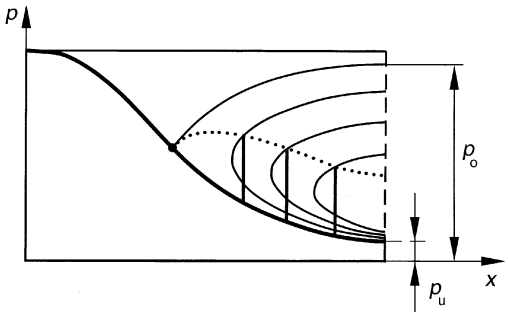


Рис. 4.114. Теоретическое распределение давления в сопле Лаваля при скачках уплотнения

ны другими кривыми, построенными для тех же значений полной энергии и расхода. Эти кривые изображены отдельно на рис. 4.114. Переход от кривой нормального изменения давления к распределению давления, которое зависит от противодавления p_2, осуществляется в результате скачка уплотнения, место возникновения которого однозначно определяется уравнением количества движения.

Однако фактически процессы, происходящие внутри сопла Лаваля, намного сложнее. Так вместо прямых скачков уплотнения могут возникнуть косые скачки. Взаимодействие скачков уплотнения с пограничным слоем на стенке вследствие внезапного возрастания давления может привести к отрыву потока.

На рис. 4.115 изображены снимки потока газа (Прандтль 1907 г.) при различных противодавлениях на срезе сопла. На первом рисунке изображен невозмущенный поток сжатого воздуха, входящего в сопло при давлении ($p_0 = 7$ бар) и расширяющего до внешнего давления. Стенки сопла намеренно выполнены шероховатыми, поэтому на снимке отчетливо можно увидеть перекрещивающиеся в сверхзвуковой части сопла линии установившихся звуковых волн. На втором рисунке проведена фотография потока, в котором звуковая скорость не достигается. В таком потоке плотность уменьшается вплоть до самого узкого поперечного сечения, а затем начинает возрастать. На шероховатой стенке нигде не возникают установившиеся волны. На третьем рисунке показан снимок скачка уплотнения вниз по течению от самого узкого сечения сопла. Отчетлива видна установившаяся звуковая волна в сверхзвуковой области перед скачком уплотнения и непре-

рывное увеличение плотности замедленного дозвукового течения вниз по течению от вертикального скачка уплотнения.

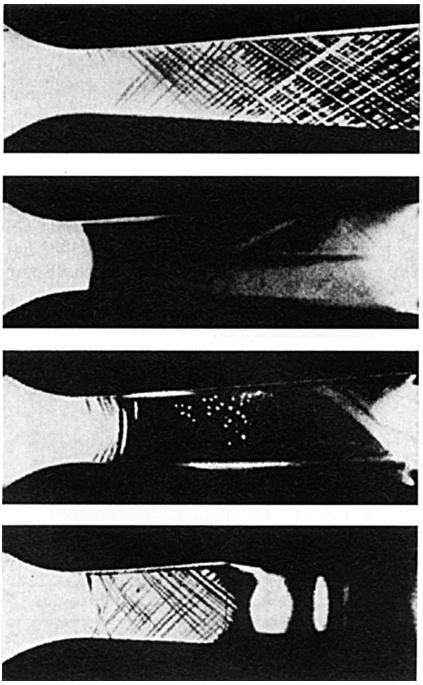


Рис. 4.115. Снимки течения через сопло Лаваля.

Если противодавление p_2 продолжает уменьшаться, то скачок уплотнения будет двигаться в направлении выходной части сопла. Вследствие взаимодействия с пограничным слоем стенки происходит разветвление скачка и отрыв пограничного слоя, который можно увидеть на рис. 4.115.

4.3.5. Обтекание угла, свободная струя. Сверхзвуковой поток около угла

Рассмотрим сначала сверхзвуковое течение, в котором вблизи стенки (рис. 4.116) возникает небольшое, нерегулярное понижение давления. Это понижение давления распространяется под углом Маха α и ведет к ускоре-

нию течения в направлении перпендикулярном скачку давления. Вследствие этого скорость течения возрастает и одновременно происходит отклонение потока. Если в точке A возникает дальнейшее постоянное понижение давления, то оно распространяется в измененном течении под другим углом Маха $\alpha' < \alpha$ и вызывает дальнейшее увеличение и отклонение скорости.

Это расширение Прандтля–Майера, которое в действительности протекает постоянно, теоретически можно рассматривать как потенциальное течение. Вдоль каждой прямой, проведенной из точки A давление, а также величина и направление скорости постоянны. Каждая характеристика образует с направлением течения на ней угол Маха, вследствие чего составляющая скорости, перпендикулярная к этой прямой, всегда равна скорости звука, соответствующей состоянию газа в этом месте.

Характер расширения от звуковой скорости до максимальной скорости (сверхзвуковой поток в вакууме) показан на рис. 4.117. Отклонение потока составляет $129°$. Так как характеристики представляет собой линии, вдоль которых давление и скорость остаются постоянными, можно комбинировать области, заключающиеся между двумя характерными радиус-векторами с прямолинейными участками потока. Пусть, например, сверхзвуковой поток движется со скоростью w_1 параллельно стенке, а за концом стенки (точка A на правом изображении рис. 4.117) имеет место давления p_2, меньшее на некоторую величину чем давление p_1 в параллельном потоке. До линии 1, образующейся с направлением потока угол Маха a_1 ($\sin(a_1) = c_1/w_1$), поток будет двигаться без изменений. Начиная от этой линии расширение газа между характеристиками 1 и 2 приводит к уменьшению давления от p_1 до p_2. После установления давления p_2 на линии 2 поток будет двигаться прямолинейно и равномерно в новом направлении.

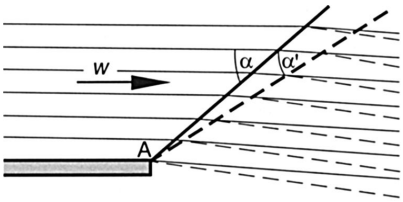


Рис. 4.116. Сверхзвуковой поток с понижением давления

Это направление образует с линией 2 угол a_2, который соответствует скорости w_2.

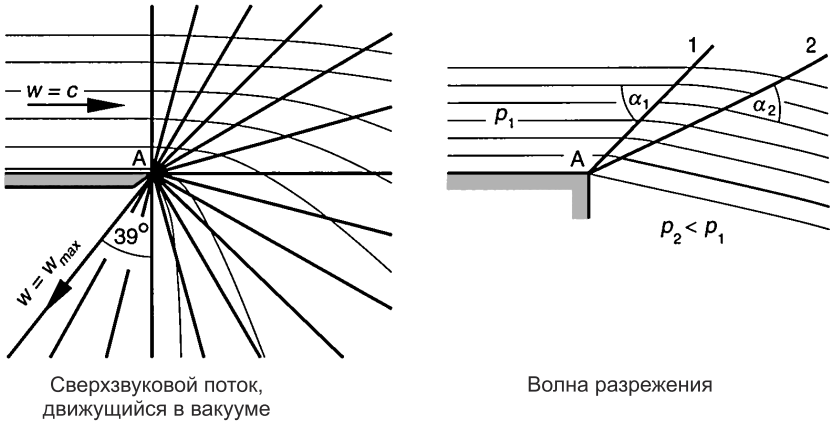


Рис. 4.117. Течение около угла Прандтля – Майера

Если на стенке имеется один или несколько выпуклых углов, то и в этом случае поток можно представить как комбинацию прямолинейных участков и областей, в которых происходит расширение, границами которых всегда являются линии, образующие углы Маха. Течение вдоль непрерывно изогнутой стенки можно рассматривать как состояние из отдельных элементов.

Стенка в данном случае может быть также вогнутой. Однако решение потенциального уравнения в данном случае остается правильным до тех пор, пока какие-нибудь две соседние линии не пересекаются под углом Маха (рис. 4.118). Если такое пересечение происходит то в этом месте состояние течения изменяется прерывно и устанавливается скачок уплотнения.

При течении вдоль стенки с вогнутым углом, когда давление в потоке повышается, а также при истечении струи газа в пространство с более высоким давлением, в потоке всегда возникает разрывное изменение состояния. Вследствие этого образуются так называемые косые скачки уплотнения (рис. 4.119). Тогда линия 2 на рис. 4.119 должна была бы лежать впереди линии 1, что физически невозможно.

Вместо этого возникает скачок уплотнения, причем плоскость скачка лежит между линиями 1 и 2. Уравнения для составляющих скорости перпендикулярных к плоскости скачка уплотнения те же самые, как и для прямого скачка уплотнения (гл. 4.3.4). К уравнениям прямого скачка добавляются поперечные компоненты скоростей, остающиеся неизменными в случае ко-

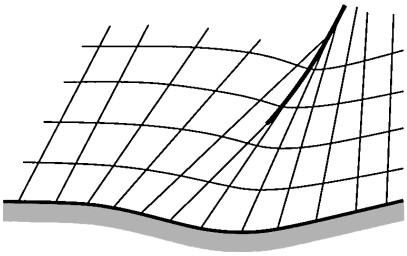


Рис. 4.118. Поток вдоль криволинейной стенки

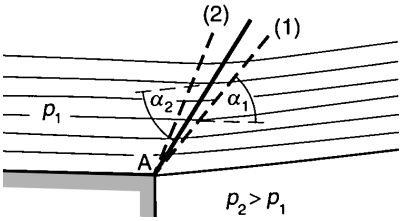


Рис. 4.119. Косой скачок уплотнения

сого скачка уплотнения. 3 верхних изображения на рис. 4.121 представляют собой примеры теоретических размышлений, связанных с течением около угла с расширением и с косыми скачками уплотнения на выходе из сопла.

Свободные газовые струи

В сверхзвуковой свободной газовой струе образуется периодическая структура из скачков уплотнения и волн расширения. Косые волны разряжения и уплотнения при пересечении проникают друг через друга без заметного взаимного влияния. Достигнув свободных границ, они полностью отражаются от них, причем так, что линии разряжения превращаются в линии уплотнения, и, наоборот. Если в параллельной сверхзвуковой струе давление на выходе меньше, чем в струе, то в соответствие с левым изображением на рис.4.120 на каждой выходной кромке возникает волна разряжения. Волны разряжения пересекаются и отражаются на противоположной границе струи как скачки уплотнения. Скачки распространяются дальше внизу по течению и отражаются на противоположной границе струи как

волна. Этот процесс периодически повторяется. Давление p_2 в середине поля волны меньше, чем противодавление в той же мере, в какой p_1 больше чем p_2.

Если противодавление больше, чем давление в струе, то сначала возникают косые скачки уплотнения (рис. 4.120).

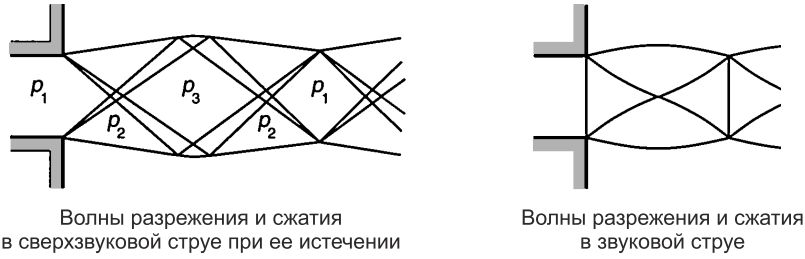


Рис. 4.120. Волновая структура в свободной струе

Они отражаются на границе струи как волны разряжения, которые распространяются затем в соответствие с первым изображением на рис. 4.121. Если начальная скорость равна звуковой скорости, то на выходе образуется угол Маха $\alpha = 90^\circ$ и формируется характерная структура — тройная точка в соответствие с правым изображением на рис. 4.120 с прямым скачком уплотнения. Картины течений на рис. 4.121. обнаруживают структуры свободной струи при избыточном давлении при равном давлении, и при давлении, на выходе ниже атмосферного.

Скорость на выходе на первых трех снимках одинаковая. На четвертом снимке показан случай, когда скорость на выходе равна скорости звука. На представленных снимках светлые области соответствуют разряжению, а темные области — уплотнению. Если струя выходит из отверстия не в виде параллельного потока, то картина сложнее. Однако, длина волны остается во всех случаях довольно постоянной. Для плоского движения с учетом уравнения (4.155), длина волны равна

$$\lambda = 2d_m \cot(a_m) = 2d_m \sqrt{\left(\frac{w}{c}\right)^2 - 1},$$

где d_m есть средний диаметр струи, а a_m и w/c_m средние значения угла Маха a и отношения w/c. Волновая структура при истечении струи из

круглого отверстия показана на рис. 4.108. Картина линий еще более усложняется вследствие конусообразного перекрещивания волн. Длина волны в свободной струе, у которой скорость на выходе равна скорости звука, была экспериментально определена для сжатого воздуха (RE_{mden}):

$$\lambda = 0.89d\sqrt{\frac{p_0 - 1,9p_2}{p_2}},$$

d есть диаметр отверстия, p_0 — давление в резервуаре, p_2 — давление в пространстве, в которое втекает струя.

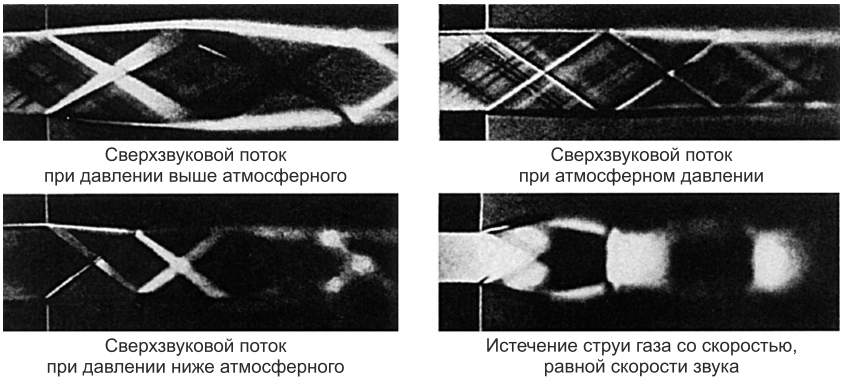


Рис. 4.121. Волновая структуры свободной струи при различных условиях истечения в выходном отверстии (Прандтль, 1907 г.)

4.3.6. Приближенный метод расчета двухмерных сверхзвуковых потоков

Разработанный в 1929 году Л. Прандтлем и А. Буземанном приближенный метод разбивает непрерывное в действительности изменение состояния потока, изображенного на предшествующих рисунках, на отдельные прерывные изменения. Каждое изменение при этом соответствует процессу, изображенному на рисунках 4.116 и 4.119. Отдельные волны разрежения и волны уплотнения выберем таким образом, чтобы линии тока отклонялись на определенный, заранее заданный угол, например на 2°. И так, скорости в промежуточных полях между отдельными линиями разрежения и уплотнения имеют только такие направления, которые отличаются друг от друга на

кратное 2°. Вследствие связи величины скорости до и после каждой волны разрежения или уплотнения с заданным углом отклонения, для абсолютных значений скоростей возможна только дискретная последовательность значений. Если выделить на плане скоростей (годографе) векторы скорости с общим центром O, то получим равномерный сетевой график, обладающий круговой симметрией (рис. 4.122). Точки сетки — дискретные значения скорости. Каждая линия, соединяющая две соседние точки соответствует переходу от одного состояния к другому с поворотом на 2°. Состояния потока на рисунке 4.117, где на каждой характеристике, проходящей через точку A, имеет место постоянная скорость, воспроизведены на рисунке 4.122 вытянутой кривой. Если в потоке линии разрежения или уплотнения идут только в одну сторону, как на рисунках 4.117 и 4.118, то на плане скоростей по кривой движутся вперед или обратно. Все же в целом существуют линии разрежения или уплотнения в обе стороны. Для того, чтобы задать линии потока на данном поле скоростей течения, должны быть заранее заданы скорости и их направления в поперечном сечении, и, кроме того, для случая свободной струи — давление на ее боковых границах, а для случая жестких ограничивающих стенок — направление течения на них. Только в этом случае проблема определена однозначно. Линии разрежения или уплотнения, подходящие изнутри потока к его границам, отражаются от них, притом следующим образом: если граница потока — свободная поверхность струи, где скорость должна оставаться постоянной, то отражение происходит так, что линия уплотнения превращается в линию разрежения и наоборот; если же границами потока являются неподвижные стенки, то после отражения линия уплотнения остается линией уплотнения, а линия разрежения — линией разрежения. Оба соотношения можно считать с плана скоростей, приведенного на рисунке 4.122.

Разность чисел, надписанных около двух разделяющихся кривых в годографе, дает значение угла, образуемого с начальным направлением вектора скорости, изображенного точкой пересечения этих кривых. Значение, являющееся суммой этих чисел, дает возможность найти из специальной таблицы величину скорости и давления.

Важным условием является то, что способ применим только к лишенным трения потокам, в которых постоянная Бернулли одинакова на всех линиях тока, а следовательно, к потенциальным потокам.

Если сходятся вместе несколько линий уплотнения, то далее они продолжаются как скачок уплотнения. До тех пор пока увеличение давления в скачке уплотнения не слишком велико, можно приближенно рассматри-

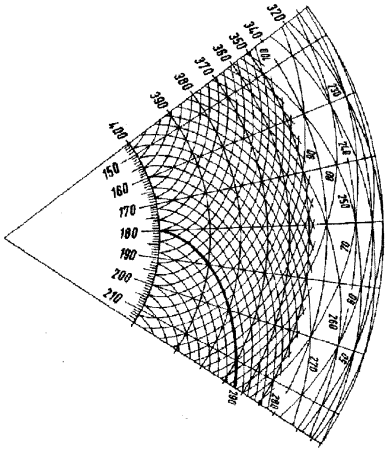


Рис. 4.122. План скоростей

вать процесс скачка уплотнения как обратимый. А это означает, что для дальнейшего определения величин и направлений скоростей можно и далее пользоваться планом скоростей. Для случая более сильного скачка уплотнения уже проявляются значительные отклонения (ошибки). Графический метод, позволяющий работать с сильными скачками уплотнения, был предложен А. Буземанном в 1929 году.

При проведении графических построений полей скоростей течений полезны следующие высказывания. Линии разрежения или уплотнения расположены на плане скоростей всегда перпендикулярно к отрезкам, соединяющим соответствующие две точки состояния. Это можно объяснить тем, что составляющая скорости, параллельная линии разрежения или уплотнения, при переходе потока через эти линии остается неизменной. Только перпендикулярная к волновому фронту составляющая увеличивается или уменьшается сообразно с тем, идет ли речь о переходе через линию разрежения или через линию уплотнения. Это означает, что вектор, соединяющий на плане скоростей точки состояния, соответствующие состояниям до и после перехода через линии разрежения или уплотнения, расположен перпендикулярно к этим линиям.

Если рассматриваемый объект — идеальный газ постоянной удельной теплоемкости, а это означает, что справедливо изентропическое уравнение $p = \mathrm{const} \cdot \rho^k$, то каждая, изображенная на рисунке 4.122 кривая представ-

ляет собой эпициклоиду. Поэтому в этом случае упрощается проведение касательных к этим кривым.

Хотя на сегодняшний день графический приближенный способ (метод характеристик) для лишенных трения сверхзвуковых воздушных потоков заменен численными методами решения общих основных уравнений аэрогидродинамики (глава 5), он тем не менее полезен для физического понимания сверхзвуковых воздушных потоков и для применения базовых методов.

В качестве примера применения приведем решение следующей задачи: какую форму следует придать стенкам расширяющегося сопла для того, чтобы при истечении из него газа получилась параллельная струя. Очевидно, для этого необходимо, чтобы линии разрежения , подходящие к стенкам, не отражались от них; только при соблюдении этого условия линии тока станут параллельными. Для выполнения этого условия стенки сопла должны в каждой своей точке изменять свое направление на такой угол, который вызывал бы появление линии уплотнения, отходящей от стенки под таким же углом, под каким отходит отраженная линия разрежения; это приводит к затуханию всех линий разрежения, а поток становится параллельным. Результат построения при сдвиге направления на 2^0 демонстрирует рисунок 4.123.

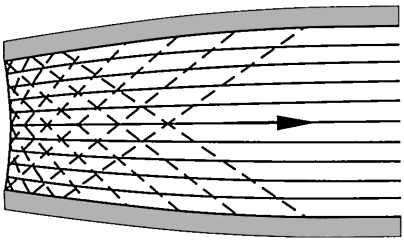


Рис. 4.123. Форма расширяющейся части сопла для получения параллельной струи

Два перекрывающихся скачка уплотнения незначительной интенсивности, как они, например, показаны на трех первых картинках рисунка 4.121, проникают друг в друга без существенных взаимных возмущений. При скачках уплотнения большей интенсивности это уже не выполняется. Прежде всего происходит зеркальное отражение скачка (правая картинка рисунка 4.124). При определенной интенсивности скачка, т. е. когда будет преодолен определенный предельный угол, зеркальное отражение переходит

в маховское отражение с дополнительным диском Маха (прямой скачок уплотнения) (правая картинка на рисунке 4.124). При этом возрастание давления $p_3 - p_1$ над диском Маха велико именно на то значение, как сумма двух изначальных увеличений давления $p_2 - p_1$ и $p_3 - p_2$. Так как потеря полного давления в скачке уплотнения приближенно пропорциальна третьей степени скачка давления, то над диском Маха возникает более значительная потеря давления и температуры, чем от двух отраженных скачков.

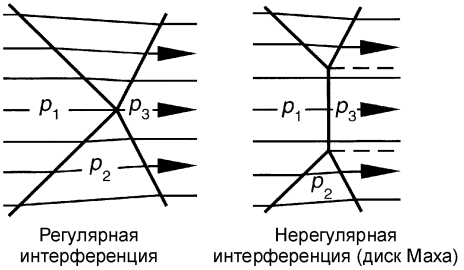


Рис. 4.124. Встречные скачки уплотнения

4.3.7. Дозвуковые потоки

В этой главе будут описаны лишенные трения устойчивые потоки, у которых скорость как по величине так и по направлению лишь незначительно отличается от заданной скорости u_0. При этом u_0 может быть либо дозвуковой либо сверхзвуковой скоростью. Составляющие незначительных отклонений скорости потока от u_0 будут обозначим как u и v. Все выводы проведем только для величин первого порядка малости u и v. Величина скорости потока $\omega = \sqrt{(u_0 + u)^2 + v^2}$.

Справедливо обобщенное уравнение Бернулли (4.158)

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{\omega^2}{2} = \text{const}$$

или, в дифференциальной форме:

$$\frac{dp}{\rho} + \omega \cdot d\omega = 0.$$

При $dp/\rho = (dp/d\rho) \cdot d\rho/\rho = c^2 \cdot d\rho/\rho$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = -M^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega}, \tag{4.174}$$

которое справедливо для всех потоков с единой постоянной Бернулли, а именно — для плоских (двухмерных) потоков. Относительное изменение плотности $d\rho/\rho$ исчезает при малых числах Маха. Поэтому для чисел Маха, которые меньше 0,2 следует учитывать несжимаемость. При $M = 1$ относительное изменение плотности как раз противопоставлено относительному изменению скорости. В приближении это означает постоянство $\rho \cdot \omega$ или постоянное поперечное сечение элементарной струйки потока.

Уравнение неразрывности дает в итоге:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot (u_0 + u)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) = 0.$$

Так как течение по скорости из-за $\omega^2 = (u_0+u)^2+v^2$ в первом приближении задано через u-течение, то из уравнения неразрывности и уравнения (4.174), а также с помощью линеаризации в первом приближении получаем :

$$(1 - M_0^2) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{4.175}$$

Это линейное газодинамическое уравнение с числом Маха $M_0 = u_0/c_0$. Оно справедливо не только для околозвуковой области $M \approx 1$, в которой потоки больше не являются малыми и линеаризация невозможна. Если введем в рассмотрение потенциал скорости φ (смотри главу 4.1.5)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

то из уравнения (4.175) получаем:

$$(1 - M_0^2) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{4.176}$$

Сомножитель перед $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ меняет свой знак при $M_0 = 1$. Для дозвуковых M-чисел $M_0 < 1$ дифференциальное уравнение согласно уравнению Лапласа имеет эллиптический тип. Для сверхзвуковых чисел Маха M оно имеет

такой же тип, как уравнение для колебаний струны, т. е. гиперболический тип. Для $M_0 > 1$ любая непрерывная и дважды дифференцируемая функция F с аргументом $(y = \pm x \cdot \mathrm{tg}\,(\bar{\alpha}))$ является решением уравнения (4.176), если $\bar{\alpha}$ определена соответствующе. Получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = F'' \cdot \mathrm{tg}^2\,(\bar{\alpha}) \text{ и } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F''.$$

Чтобы удовлетворять уравнению (4.176) необходимо выполнение

$$(M_0^2 - 1) \cdot \mathrm{tg}^2(\bar{\alpha}) = 1,$$

отсюда находим:

$$\mathrm{tg}\,(\bar{\alpha}) = \pm \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}},$$

следовательно:

$$\sin(\bar{\alpha}) = \frac{\mathrm{tg}(\bar{\alpha})}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)}} = \pm \frac{1}{M_0}.$$

Решение представляет волны произвольной формы, прямолинейные фронты которых $(y = \pm x \cdot \mathrm{tg}\,\bar{\alpha} + \mathrm{const})$ наклонены относительно оси X вправо и влево на постоянный угол Маха $\bar{\alpha}$ на всем поле потока.

В случае дозвуковых потоков характерные решения получим в следующей форме: рассматриваемый дозвуковой поток сжимаемого газа сравним с соответствующим несжимаемым потоком при прочих равных условиях. Координаты точек несжимаемого потока обозначим через X и Y, составляющие возмущенной скорости, мало отличающейся от u_0, — через U и V. Несжимаемый поток с его потенциалом Φ, согласно главе 4.1.5,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0 \tag{4.177}$$

должен удовлетворять уравнению Лапласа (потенциальному уравнению). Сопоставление со сжимаемым потоком осуществляется таким образом, что потенциалы φ и Φ связаны друг с другом пропорциональным соотношением:

$$\varphi(x, y) = a \cdot \Phi(X, Y). \tag{4.178}$$

a — числовой коэффициент.

Для того чтобы функция φ удовлетворяла дифференциальному уравнению (4.176) и одновременно функция Φ — уравнению (4.177), необходимо производить согласование x с X и y с Y в различных масштабах. Если положим, что $Y/y = b \cdot X/x$ с координатным масштабным коэффициентом b, то путем верного выбора b можно добиться согласования в соответствии с (4.178). Для упрощения расчетов произвольно примем $x = X$, вследствие чего получаем $Y = b \cdot y$. С помощью этого упрощения и уравнения (4.178) из уравнения (4.176) следует:

$$a \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \cdot (1 - M_0^2) + a \cdot b^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0. \tag{4.179}$$

Это уравнение тождественно уравнению (4.177), если принять $b^2 = 1 - M_0^2$.

Угол δ, образуемый какой-нибудь линией тока и осью x, определяется из соотношения

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{v}{u_0 + u}.$$

Для него в первом приближении справедливо также равенство $\mathrm{tg}(\delta) = v/u_o = (1/u_0) \cdot \partial\varphi/\partial y$.

Соответственно для несжимаемого потока с углом Δ, образуемым линией тока и осью x, получаем:

$$\mathrm{tg}(\Delta) = \frac{V}{u_0} = \frac{1}{u_0} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y}.$$

Если оба потока вызваны присутствием в несжимаемом и сжимаемом течении одного и того же тела, то на линии тока, ограничивающей тело, должно соблюдаться условие $\mathrm{tg}(\delta) = \mathrm{tg}(\Delta)$. Отсюда следует $\partial\varphi/\partial y = \partial\Phi/\partial Y$. Из (4.178) и при $Y = b \cdot y$ получаем $a \cdot b = 1$, а это означает условие

$$a = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_0^2}}. \tag{4.180}$$

Для сравнения распределения давления обоих течений достаточно рассмотреть градиенты давления в направлении оси x. Конечные перепады давления в обоих потоках соотносятся как их градиенты. В сжимаемом потоке главный член градиента давления вдоль оси x из нелинейного члена уравнения Эйлера равен $\rho \cdot (u_0 + u) \cdot \partial u/\partial x$ в первом приближении он равен $\rho \cdot u_0 \cdot \partial u/\partial x = \rho \cdot u_0 \cdot \partial^2\varphi/\partial x^2$. А в несжимаемом потоке $\rho \cdot u_0 \cdot \partial^2\Phi/\partial X^2$.

Отсюда следует, что перепады давления сжимаемого потока в аппроксимации в $1/\sqrt{1-M_0^2}$ раз больше, чем у сравниваемого с ним несжимаемого потока.

Обтекание профиля

Это соотношение приближенно применимо, как подтверждают опыты, также к тонким крыльям, установленным на небольших углах атаки, правда при условии, что нигде около крыла не достигается скорость звука (рис. 4.125). Тогда подъемная сила для сжимаемого потока увеличивается в сравнении с несжимаемым течением в a раз при заданном в (4.180) соотношении (правило Прандтля).

Вопрос о значении a в уравнении (4.178) также может быть сформулирован по-другому. Какую форму должно иметь тело, чтобы разности давлений в обтекающем его сжимаемом потоке были той же величины, как и в несжимаемом. Этот вопрос важен для случая, когда распределение давления вдоль обтекаемого тела в несжимаемом потоке близко предельному состоянию, после перехода через которое, вследствие влияния трения, отрыв потока от тела. В этом случае должно быть выбрано $a = 1$. Тогда справедливо $\mathrm{tg}(\delta) = b \cdot \mathrm{tg}(\Delta)$. Следовательно, если необходимо избежать отрыв потока от тела, оно в сжимаемом потоке должно быть тем тоньше, чем более u_0 приближается к скорости звука.

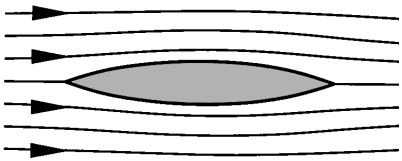


Рис. 4.125. Обтекание тела с заостренным концом

Волнообразная стенка

Рассмотрим эту задачу на примере. Поток со средней скоростью u_0 движется вдоль волнистой стенки, контур которой задан уравнением

$$y_1 = a \cdot \sin(\mu \cdot x), \text{ при } \mu = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}.$$

При этом λ — длина волны. Из уравнения $v/u_0 = dy_1/dx$ получаем скорость вблизи стенки, где $y = 0$:

$$v_0 = u_0 \cdot a \cdot \mu \cdot \cos(\mu \cdot x).$$

В несжимаемой сравниваемой жидкости $V_0 = v_0$ при $Y = 0$. Соответствующий ей потенциал скоростей равен

$$\Phi = -u_o \cdot a \cdot \cos(\mu \cdot X) \cdot e^{-\mu \cdot Y}.$$

А потенциал скоростей в сжимаемом потоке равен

$$\varphi = -A \cdot \cos(\mu \cdot x) \cdot e^{-\mu \cdot y \cdot \sqrt{1-M_0^2}}. \qquad (4.181)$$

Отсюда при $y = 0$ получаем $v_0 = \partial\varphi/\partial y = A \cdot \mu \cdot \sqrt{1 - M_0^2} \cdot \cos(\mu \cdot x)$. Сравнение с несжимаемым потоком приводит к $A = u_0 \cdot a/\sqrt{1 - M_0^2}$. На рисунке 4.126 изображены течение около волнистой стенки для несжимаемого потока ($u_0 \ll c$), сжимаемый поток в области дозвуковых скоростей ($u_0 = 0{,}9 \cdot c$) и в области сверхзвуковых скоростей ($u_0 = 1{,}25 \cdot c$).

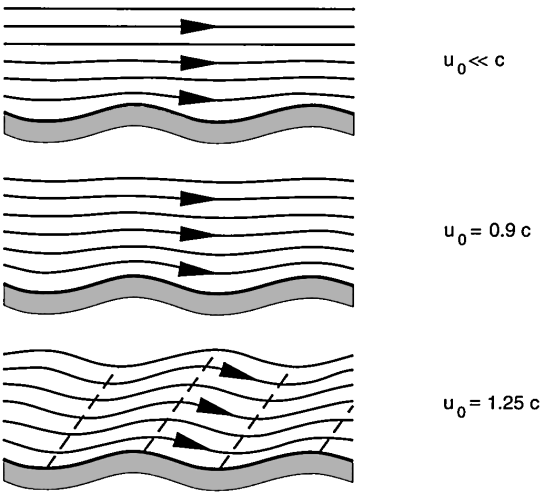


Рис. 4.126. Поток около волнистой стенки

4.3.8. Обтекания профилей

Сверхзвуковой воздушный поток

При достаточно заостренном и тонком профиле позволительно применять метод характеристик, приведенный в главе 4.3.6, для получения отчетливой картины обтекания его двумерными сверхзвуковыми потоками. Давление на каждом элементе поверхности таких тел определяется скоростью притекания газа и наклоном элемента поверхности, если не учитывать незначительные потери энергии вследствие скачка уплотнения на передней кромке. У обтекаемого тела, изображенного на рисунке 4.127, в вершине возникает косой скачок уплотнения (головной скачок уплотнения), вызывающий повышенное давление. Из-за выпуклой формы поверхности профиля образуются линии разрежения; при переходе потока через эти линии повышенное давление понижается до тех пор, пока вблизи задней кромки профиля не возникнет разрежение (вакуум). На заднем фронте профиля оба потока, обтекающие тело с обеих его сторон, сталкиваются под конечным углом. Это приводит к появлению скачка упрлотнения (хвостовой скачок). Позади него давление примерно равно невозмущенному давлению набегающего потока. Линии разрежения, по мере удаления от тела, расходятся. Линии, исходящие от поверхности вблизи переднего конца профиля, пересекаются при этом с передним скачком уплотнения, а исходящие от задней части — с хвостовым скачком. Поэтому сила этих скачков уплотнения в поле потока постепенно становится слабее. Таким образом, теоретически составленная картина подтверждается посредством демонстрации шлирен-фотографии на рисунке 4.127. При этом нож теневого прибора позиционируется так, что осветление интерпретирует увеличение плотности, а затемнение — уменьшение плотности.

Чтоб суметь выяснить влияние независимости расположения пластинки от толщины профиля, рассмотрим сначала тонкую плоскую пластинку (рис. 4.128).

На напорной стороне (где давление повышено) возникает скачок уплотнения, а на подсасывающей стороне — волна разрежения. Обе волны отклоняют направление потока на угол α, а угол наклона пластинки — против направления истечения. До того момента, пока направление потока остается постоянным, давление в нем и скорость не меняются. Поэтому результирующая аэродинамическая сила приложена к пластинке точно в ее середину. На задней кромке пластинки давление выравнивается, вследствие чего на подсасывающей стороне возникает скачок уплотнения, а на напорной сто-

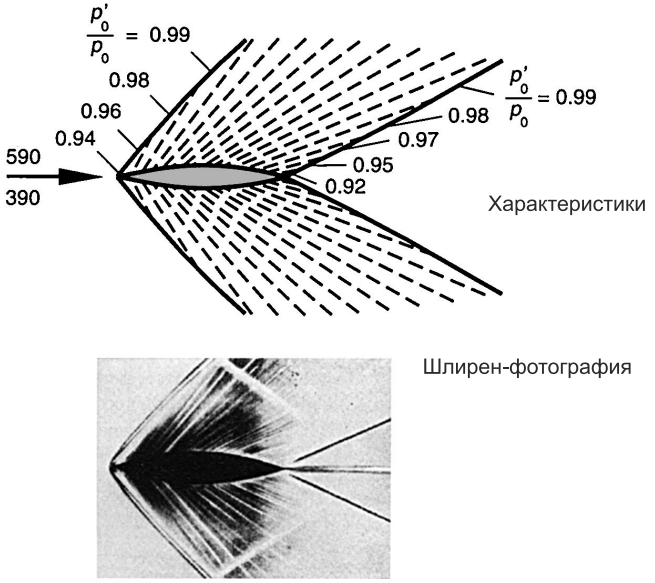


Рис. 4.127. Сверхзвуковой воздушный поток при обтекании заостренного профиля, p_0 — величина полного давления потока, p_0' — значение давления, которое получилось из начального давления после понижения его вследствие потери энергии в скачке уплотнения

роне — волна разрежения. При малых углах атаки результирующее аэродинамическое усилие примерно пропорционально углу атаки α и в идеальном (лишенном трения) потоке направлено точно перпендикулярно к поверхности пластинки. Эквивалент вытеснения в обеих волнах содержится в формирующихся поперечных скоростях. Поперечная скорость с определенного расстояния будет меньше из-за выхода волн разрежения в скачки уплотнений. Но в той же мере увеличивается их распространение в ширину, так что вытеснение (подъемная сила) позади пластинки в каждом поперечном к направлению потока сечении будет передаваться дальше как импульс.

Тонкая, заостренная спереди и сзади пластинка, при необходимости немного изогнутая кверху является наиболее оптимальным для движения в сверхзвуковых воздушных потоках профилем. Обычные утолщенные впереди профили крыла из-за их значительного сопротивления не выгодны

для сверхзвуковых потоков. Вследствие этого наилучшее соотношение сопротивления к подъемной силе W/A, в противоположность к дозвуковым потокам, никогда не меньше чем $\mathrm{tg}(\alpha)$.

С помощью дифференциального уравнения (4.176) можно получить приближенные формулы для распределения давления в потоках, изображенных на рисунках 4.127 и 4.128. Каждый потенциал $\varphi = F(x - y \cdot \cot(\alpha'))$ дает в итоге возможный возмущенный поток к основному потоку u_0, при этом α' — угол Маха набегающего (невозмущенного) потока.

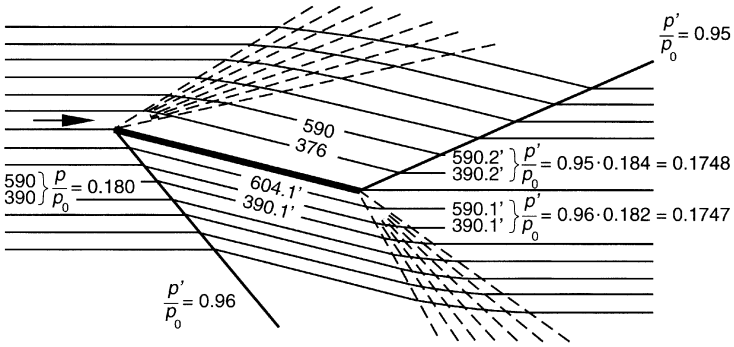


Рис. 4.128. Обтекание сверхзвуковым потоком наклоненной пластинки, числа на поле по Буземанну 1931

Если обозначить F' производную потенциала по аргументу $(x - y \cdot \cot(\alpha'))$, то для составляющих возмущения получаем $u = \varphi_x = F'$ и $v = \varphi_y = -F' \cdot \cot(\alpha')$ или

$$u = -\frac{v}{\cot(\alpha')}. \tag{4.182}$$

Поскольку угол потока задан приближенно как $\mathrm{tg}(\delta) = v/u_0$ и перепады давления пропорциональны u, то для коэффициента давления c_p получаем:

$$c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot u_0^2} = 2 \cdot \mathrm{tg}(\delta) \cdot \mathrm{tg}(\alpha'). \tag{4.183}$$

При положительном угле атаки на профиле возникает повышенное давление, при отрицательном — разрежение (вакуум). Поэтому крыло также имеет сопротивление в лишенном трения сверхзвуковом потоке.

Чтобы получить безразмерный коэффициент сил, силы делятся на произведение давления и площади. При этом в качестве давления применяется скоростной (динамический) напор $\rho_0 \cdot u_0^2/2$. При больших числах Маха скоростной напор $\rho_0 \cdot u_0^2/2$ означает средний набегающий импульс, который связан с повышением давления в головном скачке уплотнения. В качестве площади A выбирают наибольшую площадь проекции профиля. Таким образом устанавливаем

$$F_a = c_a \cdot A \cdot \frac{\rho_0 \cdot u_0^2}{2},\ W = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho_0 \cdot u_0^2}{2}. \tag{4.184}$$

Поставленная наклонно пластинка, изображенная на рисунке 4.128, в сверхзвуковом потоке на верхней стороне имеет постоянное пониженное давление (разрежение), а нижней стороне — постоянное избыточное давление. На напорной стороне и на стороне всасывания для c_a каждый раз появляется компонента соответственно уравнению (4.183), если угол потока δ заменяется на угол атаки α:

$$c_a = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_0^2 - 1}}. \tag{4.185}$$

Поскольку тангенциальная сила обращается в ноль (исчезает) в сверхзвуке ($M_0 > 1$), то для коэффициента (лобового) сопротивления это означает:

$$c_w = c_a \cdot \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{4 \cdot \alpha^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}}. \tag{4.186}$$

Уравнения (4.185) и (4.186) впервые были приведены Аккеретом, 1925.

Околозвуковой поток

Из закона сохранения энергии (4.167) для идеального газа постоянной удельной теплоемкости можно вывести точное отношение, если вместо температуры ввести в энтальпию звуковую скорость

$$\frac{1}{M^2} - 1 = \frac{k+1}{2} \cdot \left(\frac{c'^2}{w^2} - 1 \right). \tag{4.187}$$

Здесь c' — критическая скорость звука. Если ω незначительно отличается от c', как это при $M \approx 1$ подтверждается у околозвукового потока, то при u

в качестве компоненты возмущения приближенно получаем:

$$1-M^2 = (k+1)\cdot\left(\frac{c'}{u_0+u}-1\right)+\ldots = (k+1)\cdot\left(1-\frac{u_0+u}{c'}\right)+\ldots\ . \quad (4.188)$$

Итак, разность $1-M^2$ пропорциональна $c'-(u_0+u)$.

Если приближаемся к значению $M_0=1$ скорости сверхзвукового набегающего потока, то головной скачок уплотнения отрывается от центра профиля и движется по пути против течения среды. Хвостовая волна, напротив, остается неизменной в сверхзвуковой области на кромке профиля. Чем ближе M_0 приближается к 1, тем слабее головной скачок уплотнения до того времени, пока при $M_0=1$ он не исчезает совсем. Возникает распределение давления, которое в области динамического напора имеет на носке профиля дозвуковой характер, а в зоне пониженного давления в среде — сверхзвуковой характер с хвостовой волной. Эта хвостовая волна сохраняется так же и при $M_0<1$. Местные сверхзвуковые области, возникающие на профиле в околозвуковом набегающем потоке, демонстрирует рисунок 4.129. Здесь сверхзвуковые характеристики в локальных сверхзвуковых областях обнаруживаются посредством возмущений на поверхности профиля. Вследствие смещенного вниз по течению центра всасывания и завершающегося скачка уплотнения порождается сопротивление потока.

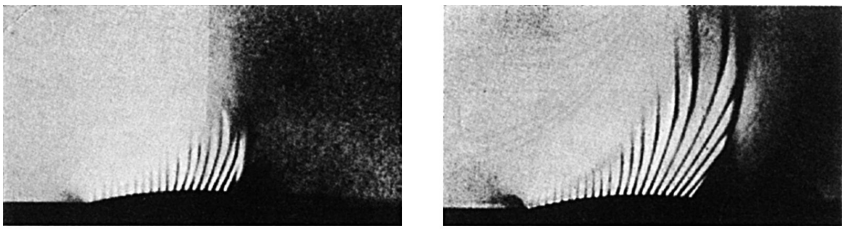
Вблизи звукового набегающего потока возникает, прежде всего на передней части профиля, почти независящее от M_0 распределение по числу Маха. Это можно объяснить тем, что головной скачок уплотнения при незначительном сверхзвуковом набегающем потоке находится далеко от профиля, в отличие от почти прямого скачка импульса, который вызывает приближенно параллельный дозвуковой поток. Поэтому численные распределения Маха на профиле различаются лишь незначительно, если обтекание происходит при $M_0=0,90$ или при $M_0=1,10$. Этот эффект обозначают как замораживание числового распределения Маха.

В первом приближении с помощью уравнения 4.188 для коэффициентов давления получаем:

$$c_p = \frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\cdot\rho_0\cdot u_0^2} = \\ = -2\cdot\frac{u}{u_0} = -2\cdot\left(\frac{u_0+u}{c'}-1\right) = -\frac{2}{k+1}\cdot(M^2-M_0^2). \quad (4.189)$$

Отсюда для изменения c_p с M_0 при $M_0 = 1$ получаем:

$$\left.\frac{dc_p}{dM_0}\right|_{M_0=1} = \frac{4}{k+1}. \tag{4.190}$$



Давление в камере 1,6 бар Давление в камере 1,8 бар

Рис. 4.129. Возникновение локальной сверхзвуковой области

При всем вышесказанном можно указать сопротивление потока при $M_0 = 1$.

Распределения давления на профиле при дозвуковом набегающем потоке представлены на рисунке 4.130. Вследствие появления скачков уплотнений, которые вниз по течению заканчивают сверхзвуковые области, увеличивается сопротивление давлении.

Обтекание дозвуковой несущей поверхности будет детально изложено в главе 6.

Головная ударная волна (головной скачок уплотнения)

При сверхзуковом обтекании затупленного тела, перед ним появляется стационарная головная ударная волна (рис. 4.113), которая представляет собой не что иное, как скачок уплотнения впереди тела. Этот скачок уплотнения переводит сверхзвуковую скорость (относительно тела), имеющую место до головной волны, в дозвуковую скорость после головной волны. Скачок уплотнения перед вершиной тела получается прямым, но по обе стороны от вершины он переходит в косой скачок. С увеличением расстояния от тела увеличение давления становится все меньше и меньше, и скачок уплотнения постепенно переходит в линии уплотнения, расходящиеся в виде конуса. Головная волна располагается тем ближе к телу, чем больше скорость движения тела.

Для тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, газодинамическая картина обтекания выглядит соответственно. Головная волна отчетливо слышна, например, у сверхзвукового самолета или у снаряда (рис. 4.105) как звуковой удар (хлопок). Повышение давления, возникающее в критической точке S, как при малых так и при значительных скоростях пропорционально квадрату скорости:

$$p_s - p_\infty = \frac{\rho_\infty \cdot \omega_\infty^2}{2} \cdot c_p.$$

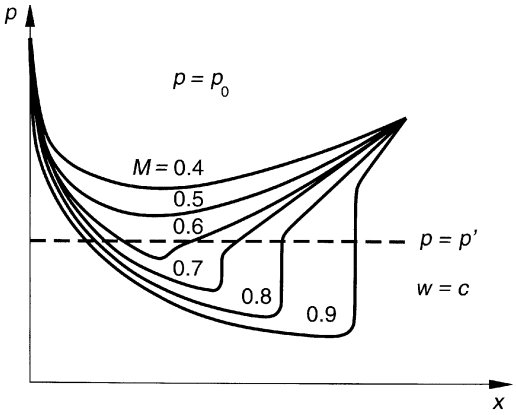


Рис. 4.130. Характер распределения давления на профиле при дозвуковом набегающем потоке

Коэффициент давления c_p — функция числа Маха. Полное повышение давления складывается из двух компонент: из непрерывной составляющей головной волны позади головной волны и дискретной составляющей над головным скачком уплотнения (ударная компонента (импульса)). Для сравнения рассматривается коэффициент давления c_{p_0} воображаемого изоэнтропического (лишенного потерь) замедления потока до точки полного торможения потока. Значения c_p, составляющей импульса и c_{p_0} в зависимости от числа Маха, приведены в нижеследующей таблице.

$M = w/c$	0	0,5	1,0	1,5	2	3	∞
c_p	1	1,065	1,275	1,53	1,655	1,75	1,85
Компонента импульса	–	–	0	0,92	1,25	1,48	1,65
c_{p_0}	1	1,065	1,275	1,69	2,48	4,85	∞

Посредством аналогичного заключения из поведения динамического напора можно сделать вывод, что также и сопротивление при очень больших скоростях пропорционально квадрату скорости.

5

Основные уравнения аэродинамики

5.1. Уравнение неразрывности

Сохранение массы в элементарном параллелепипеде объема $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ для установившихся несжимаемых потоков привело в главе 3.2 к уравнению неразрывности (3.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

с компонентами u, v, w вектора скорости. В этой главе вывод уравнения неразрывности приводится для неустановившихся и сжимаемых потоков.

В общих чертах сохранение массы в элементе объема можно сформулировать следующим образом:

Изменение массы в элементе объема в единицу времени $= \sum$ втекающего потока массы в элемент объема $- \sum$ вытекающего потока массы в элемент объема.

На рис. 5.1 изображен элемент объемом dV. Его ребра имеют длину dx, dy и dz. Через левую грань площадью $dy \cdot dz$ поступает поток массы $\rho \cdot u \cdot dy \cdot dz$. Величина $\rho \cdot u$ изменяет свое значение от координаты x до координаты $x + dx$, таким образом, что выходящий через правую грань $dy \cdot dz$ поток массы можно выразить

$$(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx\ ) \cdot dy \cdot dz$$

Для направлений y и z действительны аналогичные величины на соответствующих гранях $dx\ dz$ и $dx \cdot dy$.

Изменение массы в единицу времени в рассматриваемом параллелепипеде соответствует по закону сохранения массы разнице поступившего и

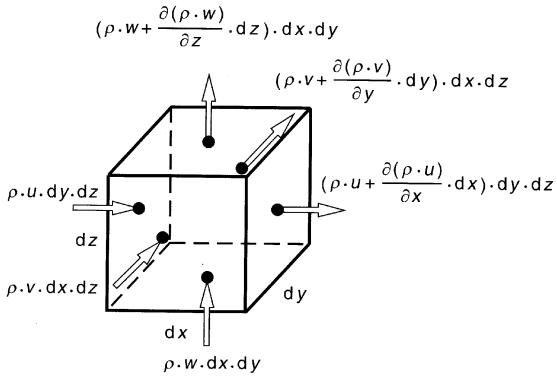


Рис. 5.1. Входящие и выходящие потоки в элемент объема dV

вышедшего потока массы. Член

$$\frac{\partial(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

соответствует математическому выражению для изменения массы в параллелепипеде во времени. В соответствии с предыдущими рассуждениями получается:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \left(\rho \cdot u - (\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx)\right) \cdot dy \cdot dz + \left(\rho \cdot v - (\rho \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot dy)\right) \cdot dx \cdot dz + \left(\rho \cdot w - (\rho \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dz)\right) \cdot dx \cdot dy.$$

Тем самым уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0. \tag{5.1}$$

Для несжимаемой жидкости оно соответственно упрощается (3.4):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5.2}$$

При векторном способе написания выведенные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v}) = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{5.3}$$

где оператор $\nabla\cdot$ представляет дивергенцию соответствующего вектора. Оператор ∇ содержит следующие компоненты:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T.$$

5.2. Уравнения Навье–Стокса

5.2.1. Ламинарные течения

Уравнение Навье–Стокса имеет векторную форму и вытекает из закона сохранения импульса в элементарном параллелепипеде объема dV. Оно было выведено в главе 4.2.1 для вязких несжимаемых потоков. Ниже мы рассмотрим вывод уравнения для элементарного объема dV сжимаемых потоков. Для параллелепипеда рис. 5.1 рассмотрим аналогичным образом, как и при выведении уравнения неразрывности, изменение импульса во времени внутри параллелепипеда. Импульс соответствует произведению массы и скорости. Итак, жидкость внутри параллелепипеда обладает импульсом $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \boldsymbol{v}$.

$$\frac{\partial(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \boldsymbol{v})}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot \boldsymbol{v})}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \tag{5.4}$$

Изменение количества движения во времени можно выразить следующим образом.

Изменение импульса в параллелепипеде =

$\sum$ *поступившие в параллелепипед потоки импульса —*

$\sum$ *вышедшие из параллелепипеда потоки импульса —*

$\sum$ *действующие на параллелепипед касательные напряжения и нормальное напряжение +*

$\sum$ *силы, действующие на массу.*

Сначала необходимо рассмотреть только одну составляющую вектора импульса $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \boldsymbol{v}$, а именно составляющую, которая действует в направлении x. Ее изменение в единицу времени можно выразить следующим

образом:

$$\frac{\partial(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot u)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \tag{5.5}$$

Подобно тому, как и при рассмотрении потока массы, за единицу времени через поверхность параллелепипеда в параллелепипед поступает или выходит импульс. При выведении уравнения неразрывности использовалась величина ρ, а теперь рассматривается $(\rho \cdot u)$. Аналогично выведению уравнения неразрывности задаются поступающие и выходящие потоки импульса.

Снова рассматривается элементарный объем в виде параллелепипеда, который изображен на рис. 5.2. Поначалу ограничимся направлением x изменения импульса $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \boldsymbol{v}$ во времени.

Через левую грань $dy \cdot dz$ параллелепипеда поступает поток импульса

$$(\rho \cdot u) \cdot u \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot u \cdot u \cdot dy \cdot dz \tag{5.6}$$

Величина $\rho \cdot u \cdot u$ изменяет свое значение в направлении x

$$\frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \tag{5.7}$$

таким образом, что выходящий из правой грани параллелепипеда поток импульса можно обозначить выражением

$$(\rho \cdot u \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz. \tag{5.8}$$

Импульс $\rho \cdot u$, действующий в направлении x, поступает в объем также и через остальные грани $dx \cdot dz$ и $dx \cdot dy$ с составляющими скорости v или w.

Для направлений y и z действительны аналогичные рассуждения, так что на каждой грани можно задать потоки импульса (рис. 5.2).

Поступающие и выходящие потоки импульса не являются единственной причиной для изменения импульса во времени в параллелепипеде, импульс внутри объема изменяется дополнительно из-за сил, действующих на объем параллелепипеда. К этим силам относятся касательные и нормальные напряжения. Они изображены на рис. 5.3.

Их величина изменяется в направлении x, y, z. На рисунке в точках $x + dx$, $y + dy$ и $z + dz$, соответственно, обозначены их величины и соответственные изменения.

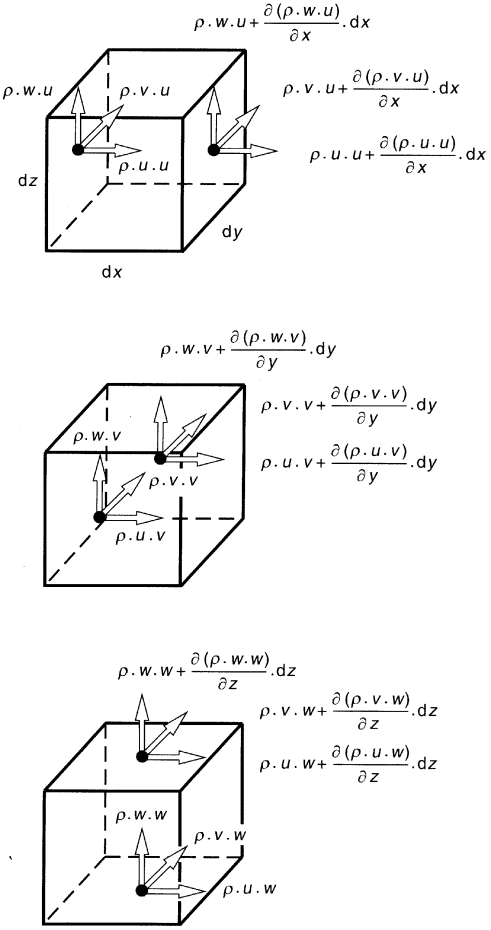


Рис. 5.2

Относительно обозначения и знака нормального и касательного напряжений, согласно главе 4.21, действует правило, что первый индекс показывает, на какой грани действует напряжение. Если, например, нормаль к поверхности, на которую действует напряжение, имеет направление x, то оно обозначается x в качестве первого индекса; второй индекс задает, в каком координатном направлении действует результирующая сила (рис. 5.3).

Сила положительна, если нормаль грани ориентирована в положительном направлении координат. Она отрицательна, если нормаль направлена противоположно положительному направлению координат. Объемные силы действуют на массу, к ним относятся сила тяжести, электрическая и магнитные силы, которые также влияют на потоки, они обозначаются $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$.

В соответствие с определением в начале главы для изменения импульса в единицу времени действительно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho\cdot u}{\partial t}\cdot dx\cdot dy\cdot dz = &\left(\rho\cdot u\cdot u - (\rho\cdot u\cdot u + \frac{\partial(\rho\cdot u\cdot u)}{\partial x}\cdot dx)\right)\cdot dy\cdot dz + \\ &+\left(\rho\cdot u\cdot v - (\rho\cdot u\cdot v + \frac{\partial(\rho\cdot u\cdot v)}{\partial y}\cdot dy)\right)\cdot dx\cdot dz + \\ &+\left(\rho\cdot u\cdot w - (\rho\cdot u\cdot w + \frac{\partial(\rho\cdot u\cdot w)}{\partial z}\cdot dz)\right)\cdot dx\cdot dy + \\ &+F_x\cdot dx\cdot dy\cdot dz + \\ &+\left(-\tau_{xx} + (\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x})\right)\cdot dy\cdot dz + \\ &+\left(-\tau_{yx} + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y})\right)\cdot dx\cdot dz + \\ &+\left(-\tau_{zx} + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z})\right)\cdot dx\cdot dy.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Тем самым получается

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho\cdot u}{\partial t} + \frac{\partial \rho\cdot u\cdot u}{\partial x} + \frac{\partial \rho\cdot u\cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \rho\cdot u\cdot w}{\partial z} = \\ = F_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Для направления y и z получаются соответствующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho\cdot v}{\partial t} + \frac{\partial \rho\cdot v\cdot u}{\partial x} + \frac{\partial \rho\cdot v\cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \rho\cdot v\cdot w}{\partial z} = F_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho\cdot w}{\partial t} + \frac{\partial \rho\cdot w\cdot u}{\partial x} + \frac{\partial \rho\cdot w\cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \rho\cdot w\cdot w}{\partial z} = F_x + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}.$$

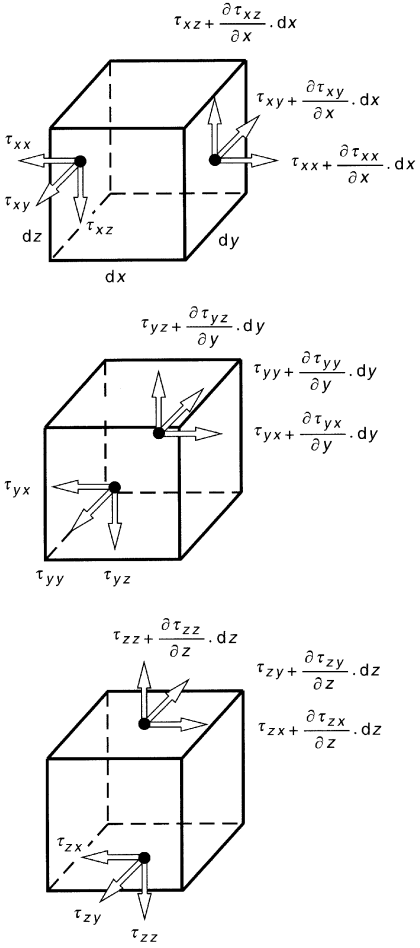


Рис. 5.3

Давление p представляется как след тензора напряжения:

$$p = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}. \tag{5.11}$$

Знак минус учитывает, что давление воздействует как отрицательное нормальное напряжение.

Три нормальных напряжения τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz} соответственно разделяются на составные части, давление p и составляющие трения потока σ_{xx}, σ_{yy} или σ_{zz}:

$$\tau_{xx} = \sigma_{xx} - p, \quad \tau_{yy} = \sigma_{yy} - p, \quad \tau_{zz} = \sigma_{zz} - p. \tag{5.12}$$

Если подставить τ_{xx}, τ_{yy} и τ_{zz} в соответствии с уравнением (5.12) в (5.10), то получится:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial \rho \cdot u \cdot w}{\partial z} =$$

$$= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} =$$

$$= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial z} =$$

$$= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \tag{5.15}$$

Для ньютоновской жидкости действует

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \tag{5.16}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

с условием симметрии

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \tag{5.17}$$

Если поставить нормальное и касательное напряжение согласно уравнениям (5.16) в уравнения сохранения импульса (5.13), (5.14) и (5.15), то получатся уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial(\rho\cdot u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\cdot u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\cdot u\cdot v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\cdot u\cdot w)}{\partial z}=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right],$$

$$\frac{\partial(\rho\cdot v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\cdot v\cdot u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\cdot v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\cdot v\cdot w)}{\partial z}=F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right],$$

$$\frac{\partial(\rho\cdot w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\cdot w\cdot u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\cdot w\cdot v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\cdot w^2)}{\partial z}=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$$

С помощью уравнения неразрывности (5.1) можно переписать левые части уравнений Навье–Стокса следующим образом:

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right],$$

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)=F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right],$$

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]. \tag{5.18}$$

Для несжимаемых потоков с уравнением неразрывности (5.2) $\Delta v = 0$ получаются уже известные уравнения Навье–Стокса (4.49):

$$\begin{gathered}
\rho\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\
\rho\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)=F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\
\rho\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)=F_z-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),
\end{gathered}\tag{5.19}$$

которые в векторном виде можно представить как

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\cdot\Delta\boldsymbol{v},\tag{5.20}$$

в этой записи ∇p представляет градиент p, $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$ — скалярное произведение вектора скорости и оператора набла. Вклад вязких напряжений дает векторный оператор $\Delta\boldsymbol{v}$, который применяется для каждой составляющей вектора скорости

$$\begin{gathered}
\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}\right)^T,\quad \boldsymbol{v}\cdot\nabla=u\cdot\frac{\partial}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial}{\partial z},\\
\Delta\boldsymbol{v}=\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial z^2}.
\end{gathered}\tag{5.21}$$

Уравнения (5.19) составляют с уравнением неразрывности (5.2),

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\tag{5.22}$$

систему уравнений из четырех нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка для 4 неизвестных u, v, w и p. Она должна решаться для заданных начальных и граничных условий.

Если, напротив, рассмотреть сжимаемый поток, то нужно учитывать как дополнительное неизвестное плотность ρ. Поэтому необходимо другое уравнение, уравнение энергии. Оно рассматривается для ламинарных течений в главе (5.3).

5.2.2. Уравнение Рейнольдса для турбулентных потоков

Для турбулентных потоков действителен введенный в главе 4.24 подход Рейнольдса (4.62). Чтобы суметь применить его для турбулентных сжимаемых потоков, вводят среднемассовые величины:

$$\widetilde{u} = \frac{\overline{\rho \cdot u}}{\bar{\rho}}, \quad \widetilde{v} = \frac{\overline{\rho \cdot v}}{\bar{\rho}}, \quad \widetilde{w} = \frac{\overline{\rho \cdot w}}{\bar{\rho}}. \tag{5.23}$$

Черта над произведением означает согласно (4.63) осреднение по времени

$$\overline{\rho \cdot u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\rho \cdot u) \cdot dt. \tag{5.24}$$

Истинное (мгновенное) значение компонент скорости складывается из суммы их осредненных среднемассовых величин (5.23) и пульсационных составляющих (u'', v'', w''). Давление и плотность осредняются обычным образом. Их пульсации обозначаются одним штрихом. Так получается для сжимаемых потоков

$$\begin{gathered} \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p', \\ u = \widetilde{u} + u'', \quad v = \widetilde{v} + v'', \quad w = \widetilde{w} + w''. \end{gathered} \tag{5.25}$$

Важно заметить, что осредненные по времени пульсационные составляющие $\bar{f''}$ (f'' соответствует любой непостоянной величине u'', v'' и т. д.) не равны нулю.

Действуют следующие правила Рейнольдса для двух любых величин f и g:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{\rho' \cdot \widetilde{u}} = 0. \tag{5.26}$$

Осредняя по времени уравнение неразрывности (5.1), получим:

$$\begin{gathered} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right) \cdot dt = 0, \\ \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z}} = 0. \end{gathered} \tag{5.27}$$

Если подставить в уравнение величины u, v, w согласно уравнению (5.25) и правилам расчета (5.26) и с $\overline{\rho \cdot f''} = 0$, то получится:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial [\rho \cdot (\widetilde{u} + u'')]}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial [\rho \cdot (\widetilde{v} + v'')]}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial [\rho \cdot (\widetilde{w} + w'')]}{\partial z}} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{[\rho \cdot (\widetilde{u} + u'')]}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{[\rho \cdot (\widetilde{v} + v'')]}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{[\rho \cdot (\widetilde{w} + w'')]}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{[\rho \cdot (\widetilde{u}_i + u_i'')]}}{\partial x_i} = 0.$$

Второе слагаемое содержит сокращенную запись суммирования для трех координатных и скоростных направлений $(i = 1, \ldots, 3)$ и его можно преобразовать:

$$\frac{\partial \overline{[\rho \cdot (\widetilde{u}_i + u_i'')]}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{(\rho \cdot \widetilde{u}_i)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{(\rho \cdot u_i'')}}{\partial x_i} = \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_i)}{\partial x_i}.$$

Тогда осредненное по времени уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \widetilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \widetilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \widetilde{w})}{\partial z} = 0. \tag{5.28}$$

Оно почти не изменилось по сравнению с первоначальным уравнением неразрывности. Сейчас оно содержит не величины ρ и u_i, а $\overline{\rho}$ и $\widetilde{u}_i$. Осреднение по времени уравнений Навье–Стокса проводится аналогично осреднению по времени уравнения неразрывности. Сначала рассмотрим уравнение движения для направления x. Из (5.13) получается

$$\overline{\frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z}} = \overline{F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}},$$

с

$$\sigma_{xx} = \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \right), \quad \tau_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

С введением правила вычисления (5.26) получаем:

$$\frac{\partial \overline{(\rho \cdot u)}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{(\rho \cdot u^2)}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(\rho \cdot u \cdot v)}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho \cdot u \cdot w}}{\partial z} = F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z}. \tag{5.29}$$

Согласно определению $\widetilde{u}$ имеем $\overline{\rho \cdot u} = \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}$, поэтому все слагаемые левой и правой частей известны кроме трех слагаемых левой части уравнения, которые содержат частные пространственные производные. Они в дальнейшем рассматриваются, причем для u, v и w используется подход Рейнольдса (5.25):

$$\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\widetilde{u}+u'')^2]}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\widetilde{u}+u'')\cdot(\widetilde{v}+v'')]}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\widetilde{u}+u'')\cdot(\widetilde{w}+w'')]}}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\widetilde{u}^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\widetilde{u}''^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(2\cdot\rho\cdot\widetilde{u}\cdot u'')}}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\widetilde{u}\cdot\widetilde{v})}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\widetilde{u}\cdot v'')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot\widetilde{v})}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot v'')}}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\widetilde{u}\cdot\widetilde{w})}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\widetilde{u}\cdot w'')}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot\widetilde{w})}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot w'')}}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{u}^w)}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''^2)}}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{u}\cdot\widetilde{v})}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot v'')}}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{u}\cdot\widetilde{w})}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot w'')}}{\partial z}.$$

Если подставить результат в уравнение (5.29), получится уравнение Рейнольдса для направления x.

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{u})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{u}\cdot\widetilde{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{u}\cdot\widetilde{w})}{\partial z}=F_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial\bar{\sigma}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\tau}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\tau}_{zx}}{\partial z}-\left(\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot v'')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot w'')}}{\partial z}\right). \tag{5.30}$$

Для осредненных по времени нормальных напряжений и напряжений сдвига σ_{xx}, τ_{yx} и τ_{zx} получаются дополняющие уравнения:

$$\bar{\sigma}_{xx}=\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}})\right)+\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial u''}{\partial x}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}})\right), \tag{5.31}$$

$$\bar{\tau}_{ij}=\mu\cdot\left(\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial x_i}\right)+\mu\cdot\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right). \tag{5.32}$$

Выражения $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ и $\nabla \cdot \boldsymbol{v}''$ для дивергенции имеют вид

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z}.$$

Уравнение (5.30) содержит по сравнению с уравнением Навье–Стокса для ламинарных течений (5.18), в правой части дополнительные члены, которыми учитываются пульсационные движения потока. Дополнительные члены в (5.30) должны быть смоделированы подходящим образом, так как законченная теория турбулентности пока не создана.

Для направления y и z, соответственно, уравнения Рейнольдса для турбулентных сжимаемых течений представляются следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{u}\widetilde{w}}{\partial z} = F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \tag{5.33}$$

$$+\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} - \left(\frac{\partial(\overline{\rho u''^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho u'' v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho u'' w''})}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{v}\widetilde{w}}{\partial z} = F_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \tag{5.34}$$

$$+\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} - \left(\frac{\partial(\overline{\rho v'' u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v''^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho v'' w''})}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{w}\widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{w}\widetilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\widetilde{w}^2}{\partial z} = F_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \tag{5.35}$$

$$+\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z} - \left(\frac{\partial(\overline{\rho w'' u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho w'' v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho w''^2})}{\partial z} \right),$$

с

$$\bar{\sigma}_{ii} = \mu \left(2\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}) \right) + \mu \left(2\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\nabla \overline{\boldsymbol{v}''}) \right), \tag{5.36}$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \mu \left(\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_i} \right). \tag{5.37}$$

Для несжимаемых течений уравнения (5.23) и (5.25) упрощаются:

$$\widetilde{u} = \bar{u}, \qquad \widetilde{v} = \bar{v}, \qquad \widetilde{w} = \bar{w}, \tag{5.38}$$
$$u = \bar{u} + u', \qquad v = \bar{v} + v', \qquad w = \bar{w} + w', \qquad p = \bar{p} + p'.$$

Уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \rho\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \rho\bar{w}}{\partial z}=0. \tag{5.39}$$

Для уравнений Навье-Стокса с учетом осреднения по времени для несжимаемой жидкости получается:

$$\frac{\partial \rho\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial \rho\bar{u}^2}{\partial x}+\frac{\partial \rho\bar{u}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \rho\bar{u}\bar{w}}{\partial z}=F_x-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z}-\left(\frac{\partial(\rho\overline{u'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{u'v'})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{u'w'})}{\partial z}\right), \tag{5.40}$$

$$\frac{\partial \rho\bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial \rho\bar{v}\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \rho\bar{v}^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho\bar{v}\bar{w}}{\partial z}=F_y-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z}-\left(\frac{\partial(\rho\overline{v'u'})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{v'^2})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{v'w'})}{\partial z}\right), \tag{5.41}$$

$$\frac{\partial \rho\bar{w}}{\partial t}+\frac{\partial \rho\bar{w}\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \rho\bar{w}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \rho\bar{w}^2}{\partial z}=F_z-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+$$
$$+\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z}-\left(\frac{\partial(\rho\overline{w'u'})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{w'v'})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{w'^2})}{\partial z}\right). \tag{5.42}$$

5.3. Уравнение энергии

5.3.1. Ламинарные течения

Уравнение энергии для стационарного режима движения без трения было уже использовано в главе 4.3.2. Для трехмерного уравнения баланса энергии в элементарном параллелепипеде на рисунке 5.4 действует правило:

Изменение общей энергии в элементе объема в единицу времени = потокам энергии, втекающим и вытекающим через сечение + втекающие и вытекающие потоки теплоты за счет теплопроводности + совершенной работе в элементе объема силами давления, нормального и касательного напряжения за это время, + приток энергии снаружи + работа за время, которая вызвана действием объемных сил.

Энергия, находящаяся в элементе объема состоит из внутренней энергии $\rho e dxdydz$ и кинетической энергии $\rho(V^2/2)dxdydz = (1/2)\rho(u^2+v^2+w^2)dxdydz$ ($\boldsymbol{vv} = V^2$). Изменение энергии в элементе объема в единицу времени записывается:

$$\frac{\partial[\rho\Big(e+\frac{V^2}{2}\Big)dxdydz]}{\partial t} = \\ = \frac{\partial[\rho\Big(e+\frac{V^2}{2}\Big)]}{\partial t}dxdydz. \quad (5.43)$$

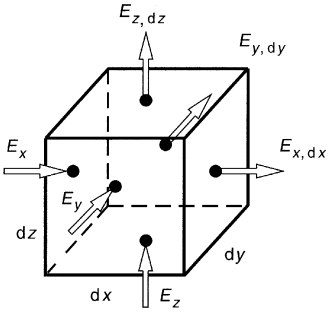


Рис. 5.4. Конвективные энергетические потоки в элементе объема dV

Энергия в элементе объема изменяется из-за внутренней энергии за это же время, втекающей и вытекающей с потоком в элемент объема. Эта составляющая обозначается $d\dot{E}$. На рисунке 5.4 изображены втекающие и вытекающие потоки энергии.

Аналогично, как и при выводе уравнения Навье–Стокса, получается для выражения $d\dot{E}$:

$$d\dot{E} = \left[\rho\big(e+\frac{V^2}{2}\big)u - \left(\rho\big(e+\frac{V^2}{2}\big)u + \frac{\partial(\rho(e+\frac{V^2}{2})u)}{\partial x}dx\right)\right]dy\,dz + \\ + \left[\rho\big(e+\frac{V^2}{2}\big)v - \left(\rho\big(e+\frac{V^2}{2}\big)v + \frac{\partial(\rho(e+\frac{V^2}{2})v)}{\partial y}dy\right)\right]dx\,dz + \\ + \left[\rho\big(e+\frac{V^2}{2}\big)w - \left(\rho\big(e+\frac{V^2}{2}\big)w + \frac{\partial(\rho(e+\frac{V^2}{2})w)}{\partial z}dz\right)\right]dx\,dy,$$

$$d\dot{E} = -\left(\frac{\partial(\rho(e+\frac{V^2}{2})u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho(e+\frac{V^2}{2})v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho(e+\frac{V^2}{2})w)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \quad (5.44)$$

Энергия в элементе объема изменяется из-за передачи энергии, которая поступает или выходит за единицу времени из элемента объема благодаря теплопроводности. Эта составляющая изменения будет в дальнейшем обозначаться $d\dot{Q}$. Согласно закону теплопроводности Фурье тепловая энергия переносится в направлении снижающихся температур. Для одномерной задачи теплопроводности, например, действительно уравнение $\dot{q} = -\lambda(dT/dx)$. Для определения количества тепла dQ плотность теплового потока необходимо умножить на площадь соответствующей грани. Коэффициент теплопроводности λ в общем случае зависит от давления и температуры. Если обратиться к закону теплопроводности Фурье для расчета составляющей $d\dot{Q}$, то для общего потока энергии путем теплопроводности в элемент объема получится

$$d\dot{Q} = \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x} - \left[-\lambda\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x})dx\right]\right) dy\,dz + \\ + \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y} - \left[-\lambda\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y})dy\right]\right) dx\,dz + \\ + \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial z} - \left[-\lambda\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(-\lambda\frac{\partial T}{\partial z})dz\right]\right) dx\,dy, \tag{5.45}$$

$$d\dot{Q} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})\right) dx\,dy\,dz. \tag{5.46}$$

Затем составляется выражение для работы, совершенной силами давления, нормального и касательного напряжения. На любой поверхности элемента объема действуют три напряжения, которые вызваны трением и гидростатическим давлением. Силы, действующие из-за давления и напряжения, выполняют работу в элементе объема. Работа за единицу времени, называемая также мощностью, получается соответственно из произведения скорости и силы, которая действует в направлении соответствующей компоненты скорости. Работа за единицу времени учитывается с положительным знаком, если компонента скорости совпадает с направлением действия силы давления, нормального или касательного напряжений. Если это не так, то работе за единицу времени присваивается отрицательный знак.

Сначала определяется мощность $d\dot{A}_x$, которая отводится или подается к элементу объема через грани с площадью $dy \cdot dz$

$$d\dot{A}_x = pdy\,dz \cdot u - \left(p\,dy\,dz \cdot u + \frac{\partial(pdy\,dz \cdot u)}{\partial x}dx\right) -$$

$$
\begin{aligned}
&- \sigma_{xx} dy\, dz \cdot u + \left(\sigma_{xx}\, dy\, dz \cdot u + \frac{\partial(\sigma_{xx} dy\, dz \cdot u)}{\partial x} dx \right) - \\
&- \tau_{xy} dy\, dz \cdot v + \left(\tau_{xy}\, dy\, dz \cdot v + \frac{\partial(\tau_{xy} dy\, dz \cdot v)}{\partial x} dx \right) - \\
&- \tau_{xz} dy\, dz \cdot w + \left(\tau_{xz}\, dy\, dz \cdot w + \frac{\partial(\tau_{xz} dy\, dz \cdot w)}{\partial x} dx \right), \qquad (5.47)
\end{aligned}
$$

$$
d\dot{A}_x = \left(-\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x} \right) dx\, dy\, dz. \qquad (5.48)
$$

Для направления y и z получают соответствующие выражения для $d\dot{A}_y$ и $d\dot{A}_z$

$$
A_y = \left(-\frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz} w)}{\partial y} \right) dx\, dy\, dz. \qquad (5.49)
$$

$$
A_z = \left(-\frac{\partial(pw)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy} v)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz} w)}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz. \qquad (5.50)
$$

$d\dot{A}$ получается из суммы $d\dot{A}_x, d\dot{A}_y, d\dot{A}_z$.

Согласно правилу и уравнениям (5.43), (5.44), (5.46), (5.48), (5.49), (5.50), а также выражениям $(\rho \dot{q}_s) dx\, dy\, dz$ для мощности излучения и $(\boldsymbol{F} v) dx\, dy\, dz$ для мощности массовых сил, закон энергии дает:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho \cdot [e + \frac{V^2}{2}])}{\partial t} = \\
&= - \left(\frac{\partial(\rho \cdot [e + V^2] \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot [e + \frac{V^2}{2}] \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot [e + \frac{V^2}{2}] \cdot w)}{\partial z} \right) + \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \qquad (5.51) \\
&\quad + \left(-\frac{\partial(p \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xx} \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot w)}{\partial x} \right) +
\end{aligned}
$$

$$+\left(-\frac{\partial(p\cdot v)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{yx}\cdot u)}{\partial y}+\frac{\partial(\sigma_{yy}\cdot v)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{yz}\cdot w)}{\partial y}\right)+$$

$$+\left(-\frac{\partial(p\cdot w)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_{zx}\cdot u)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_{zy}\cdot v)}{\partial z}+\frac{\partial(\sigma_{zz}\cdot w)}{\partial z}\right)+\boldsymbol{F}\cdot v+\rho\cdot\dot{q}_s.$$

С допущением для нормального и касательного напряжения (5.16) и уравнением неразрывности (5.1) получается после некоторого преобразования, пренебрегая излучением,

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial e}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial e}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial e}{\partial z}\right)=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right]\right)-p\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+\mu\cdot\Phi, \tag{5.52}$$

с диссипативной функцией Φ

$$\Phi=2\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \tag{5.53}$$

Она содержит только квадратичные члены и в любом месте в поле течения больше нуля.

При выведении уравнения энергии до сих пор не делалось ограничений. Оно действительно в общем случае и описывает баланс энергии в элементарном элементе объема также для течений, в которых, например, протекают химические процессы или, что равнозначно, проходят процессы горения. Предполагалось, что течение гомогенно и что поток – ньютонова среда. В дальнейшем выводится уравнение энергии для идеальных газов.

Для идеального газа удельные теплоемкости c_p и c_v не являются функцией температуры и действительны следующие термодинамические отношения:

$$e=c_v\cdot T,\quad h=e+\frac{p}{\rho}=c_p\cdot T, \tag{5.54}$$

или

$$e=c_p\cdot T-\frac{p}{\rho}. \tag{5.55}$$

Уравнение (5.55), примененное в уравнении (5.52) для e, дает с использованием уравнения неразрывности (5.51) уравнение энергии для идеального газа:

$$\rho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \mu \cdot \Phi. \tag{5.56}$$

5.3.2. Турбулентные течения

Для уравнения энергии вводится осредненная по времени температура

$$\widetilde{T} = \frac{\overline{\rho \cdot T}}{\bar{\rho}}, \quad \widetilde{e} = \frac{\overline{\rho \cdot e}}{\bar{\rho}} \tag{5.57}$$

и правила Рейнольдса (5.25)

$$T = \widetilde{T} + T'', \quad e = \widetilde{e} + e''. \tag{5.58}$$

Используя уравнение неразрывности (5.1) для преобразования левой части уравнения энергии (5.56), получим (заметим, что здесь по повторяющемуся индексу осуществляется суммирование):

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + T \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u_i)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot T)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot T \cdot u_i)}{\partial x_i}.$$

Итак, уравнение энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot T)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot T \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot T \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot T \cdot w)}{\partial z} = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \Psi. \tag{5.59}$$

Ψ — сумма следующих производных

$$\Psi = \sigma_{xx}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_{yy}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \\ + \tau_{xz}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{zz}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Для осредненного по времени уравнения энергии величины u, v, w, p и T применяются согласно уравнениям (5.25) и (5.58). Отсюда получается следующее уравнение:

$$\overline{\frac{\partial(\rho\cdot c_p(\widetilde{T}+T''))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\cdot c_p\cdot(\widetilde{T}+T'')\cdot(\widetilde{u}_i+u_i''))}{\partial x_i}} = \\ \overline{\left(\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial t} + (\widetilde{u}_i+u_i'')\cdot\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\lambda\cdot\frac{\partial(\widetilde{T}+T'')}{\partial x_i}\right]\right) + \Psi}. \tag{5.60}$$

С применением уже известных правил расчета получают осредненное по времени уравнение энергии для идеального газа

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot c_p\cdot\widetilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\cdot c_p\cdot\widetilde{T}\cdot\widetilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\cdot c_p\cdot\widetilde{T}\cdot\widetilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\cdot c_p\cdot\widetilde{T}\cdot\widetilde{w})}{\partial z} = \\ \frac{\partial\bar{p}}{\partial t} + \widetilde{u}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \widetilde{v}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \widetilde{w}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \overline{u''\cdot\frac{\partial p}{\partial x}} + \overline{v''\cdot\frac{\partial p}{\partial y}} + \overline{w''\cdot\frac{\partial p}{\partial z}} + \\ \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x} + \lambda\cdot\overline{\frac{\partial T''}{\partial x}} - c_p\cdot\overline{\rho\cdot T''\cdot u''}\right) + \\ \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial y} + \lambda\cdot\overline{\frac{\partial T''}{\partial y}} - c_p\cdot\overline{\rho\cdot T''\cdot v''}\right) + \\ \frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial z} + \lambda\cdot\overline{\frac{\partial T''}{\partial z}} - c_p\cdot\overline{\rho\cdot T''\cdot w''}\right) + \bar{\Psi} \tag{5.61}$$

с

$$\bar{\Psi} = \overline{\sigma_{kk}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \tau_{ij}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \bar{\sigma}_{kk}\cdot\frac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial x_k} + \overline{\sigma_{kk}\cdot\frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} + \bar{\tau}_{ij}\cdot\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij}\cdot\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}. \tag{5.62}$$

Для осредненных по времени нормальных и касательных напряжений $\bar{\sigma}_{kk}$ или $\bar{\tau}_{ij}$ действительны уравнения (5.36) и (5. 37).

Уравнение (5.61) содержит в правой части три дополнительных слагаемых. Заметим, что количество членов $\bar{\Psi}$ по сравнению с Ψ удвоилось. Член $\partial(c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot u_j''})/\partial x_j$ возникает от нелинейных конвективных членов. Он описывает в уравнении энергии дополнительную передачу энергии, которая вызвана турбулентными пульсационными движениями.

При расчете несжимаемых течений уравнение энергии отделяется от уравнения неразрывности и уравнений Навье–Стокса, т.е сначала можно решить уравнения (5.40)–(5.42) и использовать затем при знании $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ и $\bar{p}$ уравнение энергии для определения температурного поля.

Уравнение энергии для несжимаемой среды имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho \cdot c \cdot \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot c \cdot \bar{T} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot c \cdot \bar{T} \cdot \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot c \cdot \bar{T} \cdot \bar{w})}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \overline{u' \cdot \frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{v' \cdot \frac{\partial p'}{\partial y}} + \overline{w' \cdot \frac{\partial p'}{\partial z}} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot v'}\right) + \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot w'}\right) + \bar{\Psi}.$$

5.4. Основные уравнения в форме законов сохранения

5.4.1. Иерархия основных уравнений

Исходным пунктом являются на рисунке 5.5 континиуумиальные уравнения сохранения массы, импульса и энергии, которые были выведены в главах 5.1 до 5.3. Для ньютоновских сред получаются уравнения Навье-Стокса для сжимаемых и несжимаемых потоков. осреднение по времени уравнений Навье–Стокса привело к уравнениям Рейнольдса для турбулентных течений. Расчет возмущений в поле течения осуществляется с помощью положения (постулата) об описании возмущений дифференциальными уравнениями возмущенного движения.

Из уравнений Навье-Стокса выводятся упрощенные уравнения модели, изображенные на рисунке 5.6. Для течений без трения получаются уравнения Эйлера. Если течение к тому же безвихревое, то справелдливо уравне-

ние для потенциала. Течения при небольших числах Маха приводят к уравнениям Навье–Стокса для несжимаемого течения. Если плотность потока зависит только от температуры, а не от давления, то с учетом гидродинамической подъемной силы получаются уравнения Буссинеска.

Для течений с большими числами Рейнольдса толщина пограничного слоя мала по сравнению с геометрическими размерами, поэтому отдельными членами внутри приграничного слоя можно пренебречь. Это ведет к параболизированным уравнениям Навье–Стокса и уравнениям пограничного слоя.

5.4.2. Уравнения Навье–Стокса

Для численных расчетов течений выгоднее переписать основные уравнения (5.1), (5.18) и (5.58) из предыдущих глав в форме законов сохранения. Это означает, что члены, отражающие сохранения массы, импульса и энергии в основных уравнениях представлены как дивергенция этих величин: в уравнении неразрывности в виде $\nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v})$, в уравнении импульса как $\nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v}v)$, а в уравнении энергии как $\nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v} \cdot E)$ с полной энергией E.

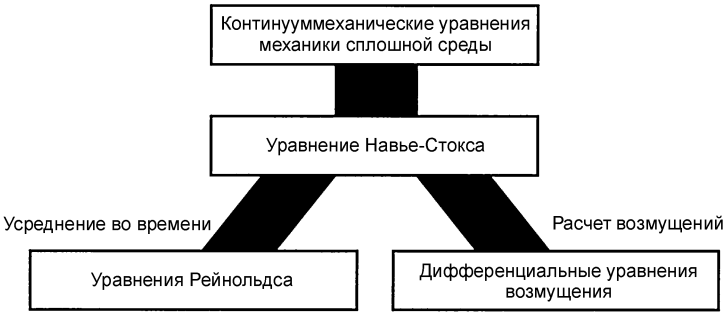


Рис. 5.5. Иерархия основных механических уравнений течений

Введем безразмерные декартовые координаты

$$x_m^* = \frac{x_m}{l}, \quad m = 1, 2, 3,$$

с характерной длиной l.

Декартовые координаты x_m

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix},$$

и безразмерное время

$$t^* = \frac{t \cdot u_\infty}{l},$$

с характерной скоростью для всего поля течения u_∞ представляют четыре независимых переменных, в которых формулируются дифференциальные уравнения. Зависимые переменные обобщены в векторе

$$\boldsymbol{U}^*(x_m^*, t^*) = \begin{pmatrix} \rho^* \\ \rho^* \cdot u_1^* \\ \rho^* \cdot u_2^* \\ \rho^* \cdot u_3^* \\ \rho^* \cdot E^* \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

с безразмерной плотностью ρ^*

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty},$$

исходной плотностью ρ_∞, характерной для всего поля течения, компонентами $\rho^* \cdot u_m^*$ безразмерного вектора импульса

$$\rho^* \cdot \boldsymbol{u}^* = \frac{\rho \cdot \boldsymbol{u}}{\rho_\infty \cdot u_\infty} = \begin{pmatrix} \rho^* \cdot u_1^* \\ \rho^* \cdot u_2^* \\ \rho^* \cdot u_3^* \end{pmatrix}$$

и безразмерной удельной полной энергией $\rho^* E$ единицы объема

$$\rho^* E = \frac{\rho \cdot e_{ges}}{\rho_\infty \cdot u_i n f t y^2}.$$

Величина $\boldsymbol{u}$ обозначает вектор скорости, а E — общую энергию единицы массы (внутренняя энергия +кинетическая энергия $(1/2) \cdot \boldsymbol{u}^2$).

Безразмерные уравнения Навье-Стокса для сжимаемого потока в форме сохранения массы, импульса и энергии имеют вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial t^*} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{F}_m^*}{\partial x_m^*} - \frac{1}{Re_l} \cdot \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{G}_m^*}{\partial x_m^*} = 0. \tag{5.65}$$

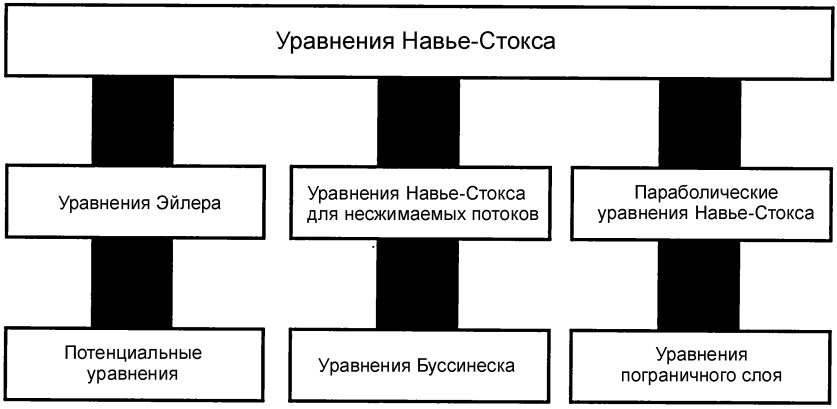


Рис. 5.6. Упрощенные модельные уравнения

Об этих уравнениях говорят как об уравнениях в форме законов сохранения или консервативной форме уравнений, так как система дифференциальных уравнений (5.65) была выведена для постоянного в пространстве контрольного объема таким образом, что каждое уравнение выражает непосредственно сохранение массы, импульса или энергии. Вектор решения (5.65) содержит в каждой строчке консервативные переменные, относящиеся к объему, т. е. масса единицы объема ρ^*, импульс единицы объема $\rho^* \cdot \boldsymbol{u}^*$ и общая энергия единицы объема $\rho^* \cdot e^*_{ges}$. В противоположность к консервативным переменным стоят физические переменные: скорость, давление, температура, которые использовались в предыдущих главах.

В (5.65) F^*_m вектор конвективных потоков в направлении m:

$$F^*_m = \begin{pmatrix} \rho^* \cdot u^*_m \\ \rho^* \cdot u^*_m \cdot u^*_1 + \delta_{1m} \cdot p^* \\ \rho^* \cdot u^*_m \cdot u^*_2 + \delta_{2m} \cdot p^* \\ \rho^* \cdot u^*_m \cdot u^*_3 + \delta_{3m} \cdot p^* \\ u^*_m \cdot (\rho^* \cdot E + p^*) \end{pmatrix} \tag{5.66}$$

($\delta_{ij=1}$ для $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$) и G^*_m вектор диссипативных потоков в

координатном направлении m

$$G_m^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{m1}^* \\ \tau_{m2}^* \\ \tau_{m3}^* \\ \sum_{l=1}^{3} u_l^* \cdot \tau_{lm}^* + \dot{q}_m^* \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

с безразмерной *внутренней энергией*

$$e^* = E^* - \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{3} u_m^{*2},$$

безразмерным *давлением*

$$p^* = (\kappa - 1) \cdot \rho^* \cdot e = \frac{p}{\rho_\infty \cdot u_\infty^2},$$

безразмерной *температурой*

$$T^* = (\kappa - 1) \cdot \kappa \cdot M_\infty^2 \cdot e^* = \frac{T}{T_\infty},$$

безразмерными *напряжениями* и безразмерным *потоком тепла* в направлении m

$$\tau_{ij}^* = \mu^* \cdot \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \cdot \mu^* \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \cdot \delta_{ij}.$$

Эти уравнения содержат свойства вещества (материала)

$$\cdot q_m^* = \frac{\mu^*}{(\kappa - 1) \cdot Pr \cdot M_\infty^2} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x_m^*} = \frac{\mu^* \cdot \kappa}{Pr} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial x_m^*} = \frac{\lambda^*}{(\kappa - 1) \cdot M_\infty^2 \cdot Pr_\infty} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x_m^*}.$$

$Pr_\infty = \nu_\infty / k_\infty$ — число Прандтля, $\kappa = c_p / c_v$ — показатель адиабаты, μ^* — безразмерную динамическую вязкость, которая задана для воздуха в атмосферных условиях $Pr_\infty = 0{,}71, \kappa = 1{,}4$ и формулой Сатерленда

$$\mu^* = (T^*)^{3/2} \cdot \frac{1 + S}{T^* + S}, \quad S = \frac{110.4K}{T_\infty}$$

Исходная величина T_∞ представляет температуру, характерную для течения. Следующие безразмерные показатели характеризуют поле течения:

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty} \qquad \text{число Маха,}$$

$$Re_l = \frac{\rho_\infty \cdot u_\infty \cdot l}{\mu_\infty} \qquad \text{число Рейнольдса,}$$

$$Pr_\infty = \frac{\nu_\infty}{k_\infty} \qquad \text{число Прандтля.}$$

В них a_∞ это характерная скорость звука и μ_∞ динамическая вязкость.

В этом случае речь идет о системе из пяти связанных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так как время содержится в качестве независимой переменной и преобладают пространственно направленные механизмы передачи, то уравнения параболические.

Если интерес представляют стационарные течения, то производные по времени исчезают. Тогда уравнения эллиптические в дозвуковой зоне и гиперболические в сверхзвуковой. Поэтому они называются тогда уравнениями смешанного типа.

Нужно учитывать следующие граничные условия: на твердой стенки действует условие прилипания

$$\boldsymbol{u}^* = 0, \tag{5.68}$$

а также либо температурные граничные условия изотермической стенки

$$T^* = T^*_W, \tag{5.69}$$

с заданной безразмерной температурой стенки T^*_W, либо температурные граничные условия адиабатной стенки

$$\frac{\partial T^*}{\partial \boldsymbol{n}^*} = 0, \tag{5.70}$$

с безразмерной координатой $\boldsymbol{n}^*$ в нормальном направлении к стенке.

Другая граница — это граница дальнего поля, которая ограничивает это условие на бесконечности, которое, в свою очередь, ограничивает область расчета при задачах внешнего обтекания. Если граница дальнего поля достаточно удалена от обтекаемого тела, там преобладает невозмущенное внешнее течение $\boldsymbol{u}^*$ или граничное условие течения без трения главы 5.4.3.

В случае, если невозможно определить границу дальнего поля, где трение не играет роли, как, например,в случае пограничного слоя, отрывного течения или следа, где поток покидает пределы зоны интегрирования, то невозможно задать математически точные граничные условия. В этом случае может помочь экстраполяция параметров течения из поля течения на границу.

Вектор решения при $t = t_0 = 0$ определяется начальным условием

$$\boldsymbol{U}^*(x_i^*, 0) = \boldsymbol{U}_0^*(x_i^*). \tag{5.71}$$

Краевая задача для уравнений Навье-Стокса состоит из дифференциальных уравнений (5.65)–(5.67), граничных условий (5.68)-(5.70) и начального условия(5.71).

5.4.3. Производные модельные уравнения

Если следовать рисунку 5.6, то, пренебрегая $\boldsymbol{G}^*$ в уравнениях Навье–Стокса (5.65), получится безразмерное уравнение Эйлера в форме сохранения для сжимаемых течений

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial t^*} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{F}_m^*}{\partial x_m^*} = 0, \tag{5.72}$$

с уже заданными определениями $\boldsymbol{U}^*$ вектора решения (5.64) и конвективными потоками $\boldsymbol{F}_m^*$ (5.66).

Речь идет о системе из пяти связанных нелинейных дифференциальных уравнениях первого порядка. Уравнения Эйлера описывают течения без трения, в которых могут появляться криволинейные скачки уплотнения. Поле потока характеризуется числом Маха M_∞.

На твердой стенке в качестве граничного условия действует условие скольжения

$$\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{5.73}$$

с нормалью к стенке $\boldsymbol{n}$. Оно гласит, что стенка непроницаема и общий вектор скорости направлен параллельно стенке.

На границах поля потока мерилом для задания граничных условий является характер распространения информации. Для этого необходимо делать различие между границами втекания и вытекания потока (в зависимости от направления скорости) и между границами до- и сверхзвука (в

зависимости от того, больше или меньше единицы локальное число Маха). На соответствующих границах нельзя задавать ни слишком много, ни слишком мало информации, так как тогда проблема либо будет чрезмерно определена, либо недоопределена. Количество граничных условий дает теория характеристик.

	Граница втекания потока		Граница вытекания потока	
	Сверхзвук	Дозвук	Сверхзвук	Дозвук
Количество заданных переменных	5	4	0	1
Количество рассчитываемых переменных	0	1	5	4

Другое упрощение получится, если предположить, что течение дополнительно изоэнтропно. Тогда течение не может больше содержать прямых или искривленных скачков уплотнения. Можно показать, что подобное течение является безвихревым, т. е.:

$$\omega^* = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3^*}{\partial x_2^*} - \dfrac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*} \\ \dfrac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*} - \dfrac{\partial u_3^*}{\partial x_1^*} \\ \dfrac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} - \dfrac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \end{pmatrix} = 0,$$

в координатном способе описания:

$$\omega^* = \nabla \times \boldsymbol{u}^* = 0$$

Для безвихревых течений имеет смысл ввести потенциальную функцию Φ^*

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1^*} = u_1^*, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2^*} = u_2^*, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_3^*} = u_3^*. \tag{5.74}$$

Подставляя эти соотношения в уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости, после преобразований получим безразмерное линейное уравнение для потенциала:

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial {x_1^*}^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial {x_2^*}^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial {x_3^*}^2} = 0, \quad \Delta \Phi^* = 0. \tag{5.75}$$

Это скалярное эллиптическое линейное уравнение второго порядка. Течения, которые можно описать с помощью уравнения для потенциала, называются также потенциальными течениями, они были введены в главе 4.1.5.

Сохранение импульса для несжимаемых течений выполняется автоматически предположением об отсутствии завихренности. Уравнение энергии представляет собой дополнительное несвязанное уравнение.

У твердой стенки, как и у уравнения Эйлера, в качестве граничного условия действует условие проскальзывания:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1^*} \cdot n_1^* + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2^*} \cdot n_2^* + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_3^*} \cdot n_3^* = 0, \tag{5.76}$$

с компонентами нормали стенки n_1^*, n_2^*, n_3^*. Каждая линия тока может восприниматься как твердая стенка.

На бесконечности возмущение, внесенное телом, должно затухать:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1^*} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2^*} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_3^*} = 0. \tag{5.77}$$

Граничные условия наложены на производные потенциала, и в самом уравнении (5.75) встречаются только производные потенциальной функции. Поэтому дополнительно необходимо установить значение Φ^* в любом месте поля течения.

Преимущество уравнения для потенциала состоит в том, что оно линейно. Это значит, что каждая линейная комбинация известных решений (например, параллельное течение, источник, сток, потенциальный вихрь) опять представляет собой какое-то решение.

Для несжимаемых ламинарных течений действительны уравнения Навье-Стокса (5.20). В безразмерной форме они, вместе с уравнением неразрывности (5.3) имеют вид:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \boldsymbol{u}^* = 0, \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^* = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p^* + \frac{1}{Re_l} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*. \end{gathered} \tag{5.78}$$

У твердых стенок действительно условие прилипания:

$$\boldsymbol{u}^* = 0. \tag{5.79}$$

Уровень давления может устанавливаться в любой точке (x_1^*, x_2^*, x_3^*):

$$p^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = p_1^*.$$

На границах втекания и вытекания потока можно задать направление или величину скорости. При этом следует обратить внимание, что должно выполняться уравнение неразрывности.

Может быть желательным задать давление на границах входа и выхода потока, например, при задании определенной разницы давления между двумя поперечными сечениями какого-нибудь потока в трубе. При этом все же следует обратить внимание, что в этих поперечных сечениях профиль скорости может устанавливаться свободно. Задание скорости и давления у той же границы допустимо только в исключительных случаях.

В главах 7 и 8 рассматриваются течения с теплопередачей. При этом в некоторых случаях можно пренебречь изменением плотности вследствие изменения давления. Вследствие распространения тепла плотность все же меняется с температурой. Например, в конвективных течениях это является причиной для появления подъемной силы $\rho^*(T) \cdot \boldsymbol{g}$.

В рамках аппроксимации Буссинеска изменение плотности учитывается только в члене подъемной силы и ею пренебрегают во всех других членах. При этом для плотности используется зависимость:

$$\rho(T) = \rho_) \cdot [1 - \alpha \cdot (T - T_0)], \tag{5.80}$$

с коэффициентом температурного расширения α, относительной плотностью ρ_0 и относительной температурой T_0. Вязкость предполагается постоянной. Диссипацией энергии дополнительно пренебрегают. Если ввести это предположение в уравнения Навье-Стокса (5.18) и в уравнение энергии (5.56) и применить безразмерные величины, используемые в задаче передачи тепла

$$\times_m^* = \frac{x_m}{l}, \quad t^* = \frac{k_\infty \cdot t}{l^2}, \quad \boldsymbol{u}^* = \frac{l}{k_\infty} \cdot \boldsymbol{u},$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}, \quad p^* = (p + \rho_\infty \cdot g \cdot x_3) \cdot \frac{l^2}{\rho_\infty \cdot \nu_\infty \cdot k_\infty},$$

то получатся безразмерные уравнения Буссинеска:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \boldsymbol{u}^* = 0, \\ \frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^* \right) = Ra_\infty \cdot T^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \nabla p^* + \Delta \boldsymbol{u}^*, \\ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla T^* = \Delta T^*, \end{gathered} \tag{5.81}$$

с безразмерным числом Релея:

$$Ra_\infty = \frac{g \cdot l^3}{k_\infty \cdot \nu_\infty} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty).$$

В зависимости от величины числа Прандтля Pr_∞ следует ожидать различного его влияния не развитие нестационарных конвективных течений в среде. Если число Pr_∞ мало (например, 0,71 для воздуха, 10^{-2} для жидких металлов), то нестационарные эффекты легче развиваются. Если число Pr_∞ велико (7 для воды, 10^3 для минерального масла), то свободноконвективные течения склонны к образованию стационарных конвективных потоков. Нестационарный член обладает в этом случае меньшим влиянием, так как он умножается на маленький коэффициент $1/Pr_\infty$.

Если дополнительно принять во внимание диффузию массы в двухкомпонентном слое жидкости (например раствор соли), то на основе градиента концентрации получат вторую часть подъемной силы.

Для описания обмена массы внутри смеси из нескольких компонентов, состоящей из N частей, можно составить N уравнений баланса массы. Если m_k означает массу части k, то величина ρ_k называется парциальной плотностью части k в смеси. Плотность смеси ρ определяется как

$$\rho = \sum_{k=1}^{N} \rho_k. \tag{5.82}$$

Каждая часть k обладает к тому же собственной скоростью $\boldsymbol{u}_k$. Тем самым можно сформулировать по аналогии с однокомпонентным потоком ($N = 1$), исключив источники массы или отрицательные источники массы, для каждой отдельной части N соотношений баланса массы:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{5.83}$$

Если просуммировать эти уравнения неразрывности для компонентов, то с введением концентрации массы $c_k = \rho_k/\rho$ частей $k(\sum_{k=1}^{N} c_k = 1)$ получится следующее безразмерное уравнение для плотности смеси:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \cdot \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}^*) = 0, \tag{5.84}$$

с безразмерной скоростью течения смеси

$$\boldsymbol{u}^* = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \boldsymbol{u}_k^*. \tag{5.85}$$

С безразмерным давлением $p^* = \sum_{k=1}^{N} p_k^*$ и линейным термическим уравнением состояния $\rho^* = 1 - (\alpha_m \cdot (T^* - T_m)) \cdot (T^* - T_m) - (\beta_m \cdot (c - c_m)) \cdot (c - c_m)$ (β и m коэффициенты, учитывающие влияние на плотность отклонений температуры и концентрации от средних значений) для двухкомпонентной смеси получаются следующие безразмерные уравнения Буссинеска для смеси из двух веществ:

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot \boldsymbol{u}^* = 0, \\
Le_\infty \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla c) \right) = \Delta c, \\
\frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla) \boldsymbol{u}^* \right) = \Delta \boldsymbol{u}^* - \nabla p^* + (Ra_\infty \cdot T^* + Ra_{D\infty} \cdot c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla T^* = \Delta T^*,
\end{gathered} \tag{5.86}$$

с дополнительными безразмерными характерстиками – диффузионным числом Релея $Ra_{D\infty} = -\beta_m \cdot (c - c_m) \cdot g \cdot l^3/(k_m \cdot \nu_m)$ и числом Льюиса $Le = k_m/D_m$ (коэффициент диффузии D)

Если рассматривать раствор соли, то легко можно заметить, что для $c = 0$ (чистая вода) или $c = 1$ (это значит также $Ra_{D\infty} = 0$) (соленая вода на границе растворимости) приведенная выше система уравнений переходит в систему уравнений конвекции Релея–Бенара.

Уравнение Эйлера (5.72) создает основу для решения некоторых задач несжимаемых течений со свободными подвижными границами, которые рассматриваются в 9 главе. При этом исходят из предположения, что обе стороны пограничной поверхности течения свободны от вихря. Интегрирование уравнения Эйлера ведется при одновременном введении потенциала скорости $\boldsymbol{u} = -\nabla\Phi$ в обобщенное уравнение Бернулли в форме:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot (\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} = C_k, \tag{5.87}$$

причем C_k является константой интегрирования, которая может иметь в фазах k по обе стороны разделительной поверхности различные значения. Уравнение Бернулли (5.87) является исходным уравнением для описания волновых процессов в слоистых несжимаемых средах. Оно также может использоваться для того, чтобы описать динамику обусловленного давлением начальной фазе роста пузырей.

Для пузырей сферической формы Релеем в 1917 году, Плессетом и Цвиком в 1954, из уравнения Бернулли было выведено дифференциальное уравнение для радиуса R_B отдельного пузыря под влиянием поля давления. При этом пузырь газа круглой формы рассматривается в бесконечной жидкости. Баланс массы дает исходя из изменяющегося во времени объема пузыря для скорости $\boldsymbol{u}(R_B, r, t)$ соотношение:

$$\boldsymbol{u}(R_B, r, t) = \frac{R_B^2}{r^2} \cdot \frac{dR_B}{dt}. \tag{5.88}$$

Скорости может соответствовать потенциал в форме:

$$\Phi = \frac{R_B^2}{r} \cdot \frac{dR_B}{dt}.$$

Если ввести это соотношение в уравнение Бернулли(5.87), то для состояний на поверхности пузыря и на большом расстоянии от поверхности следует, таким образом, для $r \to \infty$ уравнение Релея–Плессета:

$$R_B \cdot \frac{d^2 R_B}{dt^2} + \frac{3}{2} \cdot (\frac{dR_B}{dt})^2 = \frac{1}{\rho_k} \cdot (p_R - p_\infty). \tag{5.89}$$

При этом индекс k характеризует жидкую фазу, а индекс R и ∞ состояния давления на границе пузыря и в бесконечности. Уравнение должно дополняться, если на поверхности пузыря происходят фазовые переходы, если воздействуют поверхностное натяжение или силы вязкости или если газ и жидкость не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Для течений при больших числах Рейнольдса тот факт, что коэффициент $1/Re_l$ $\boldsymbol{G}_m^*$ в уравнении (5.65) мал, не обязательно ведет к пренебрежению диссипативных потоков. Для течений типа пограничного слоя величина члена трения зависит от того, рассматриваются ли градиенты скорости параллельно или перпендикулярно к контуру тела.

Так как контур тела проходит в общем не параллельно ни к одной из осей координат, то уравнения Навье-Стокса (5.65) следует сначала записать в согласованных с телом криволинейных координатах. Криволинейные координаты $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*$ вводятся уравнениями преобразования

$$\xi_1^* = \xi_1^*(x_m^*), \quad \xi_2^* = \xi_2^*(x_m^*), \quad \xi_3^* = \xi_3^*(x_m^*).$$

Преобразованные уравнения имеют вид:

$$J^{-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial t^*} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{F}}^*_m}{\partial \xi_m^*} - \frac{1}{Re_l} \cdot \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{G}}^*_m}{\partial \xi_m^*} = 0, \tag{5.90}$$

с определителем Якоби

$$J^{-1} = \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_3^*} + \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_2^*} + \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_1^*} -$$
$$- \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_2^*} - \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_3^*} - \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_1^*}.$$

Те члены в $\boldsymbol{G}^*$, которые содержат производные по направлению параллельному к контуру тела, в общем, малы (кроме случая отрыва течения). Это ведет к тому, что этими членами можно пренебречь. Течения большей частью развиваются вниз по течению, что соответствует параболическому механизму развития течения. Стационарным уравнениям Навье–Стокса это свойство передается тогда, когда давление в пограничном слое явно задано. Градиентом давления в направлении нормали к стенке ξ_3^* пренебрегают.

Тем самым получаются параболические уравнения Навье–Стокса в безразмерном виде для стационарных течений пограничного слоя:

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \hat{\hat{\boldsymbol{F}}}^*_m}{\partial \xi_m^*} - \frac{1}{Re_l} \cdot \frac{\partial \hat{\hat{G}}^*_3}{\partial \xi_m^*} = 0, \tag{5.91}$$

с

$$\hat{\hat{\boldsymbol{F}}}^*_m = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho^* \cdot \hat{u}_m^* \\ \rho^* \cdot \hat{u}_m^* \cdot u_1^* + \dfrac{\partial \xi_m^*}{\partial x_1^*} \cdot p_s^* \\ \rho^* \cdot \hat{u}_m^* \cdot u_2^* + \dfrac{\partial \xi_m^*}{\partial x_2^*} \cdot p_s^* \\ \rho^* \cdot \hat{u}_m^* \cdot u_3^* + \dfrac{\partial \xi_m^*}{\partial x_3^*} \cdot p_s^* \\ \hat{u}_m^* \cdot (\rho^* \cdot e_{tot}^* + p_s^*) \end{pmatrix}, \tag{5.92}$$

$$\hat{\hat{G}}_3^* = J^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_l^*}\cdot \tau_{l1}^* \\ \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_l^*}\cdot \tau_{l2}^* \\ \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_l^*}\cdot \tau_{l3}^* \\ \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_l^*}\cdot \left(\sum_{m=1}^3 u_m^*\cdot \tau_{m3}^* + \dot{q}_3^*\right) \end{pmatrix} \tag{5.93}$$

и

$$\hat{u_m^*} = \frac{\partial \xi_m^*}{\partial x_1^*}\cdot u_1^* + \frac{\partial \xi_m^*}{\partial x_2^*}\cdot u_2^* + \frac{\partial \xi_m^*}{\partial x_3^*}\cdot u_3^*, \quad m = 1,2,3.$$

Если дополнительно пренебречь воздействием искривления контура тела, то проведенная Прандтлем оценка порядка величин ведет к пренебрежению всеми производными по направлению x в членах трения (5.91). Это оправданно, если толщина пограничного слоя у течений с большими числами Рейнольдса мала по сравнению с размерами тела. Так как давление пограничного слоя задано, то отсутствует в соответствии с $\partial p^*/\partial x_3^* = 0$ третье уравнение сохранения импульса и получаются уравнения пограничного слоя Прандтля в декартовых координатах x_m^*:

$$\frac{\partial(\rho^*\cdot u_1^*)}{\partial x_1^*} + \frac{\partial(\rho^*\cdot u_2^*)}{\partial x_2^*} + \frac{\partial(\rho^*\cdot u_3^*)}{\partial x_3^*} = 0$$

$$\rho^*\cdot\left(u_1^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} + u_3^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*}\right) = -\frac{\partial p_s^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re_l}\cdot\frac{\partial}{\partial x_3^*}\left(\mu^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*}\right)$$

$$\rho^*\cdot\left(u_2^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + u_3^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*}\right) = -\frac{\partial p_s^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re_l}\cdot\frac{\partial}{\partial x_3^*}\left(\mu^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*}\right)$$

$$\rho^*\cdot\left(u_1^*\cdot\frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + u_3^*\cdot\frac{\partial T^*}{\partial x_3^*}\right) = \frac{\mu^*}{(\kappa-1)\cdot Re_l\cdot Pr_\infty}\cdot\frac{\partial^2 T^*}{\partial {x_1^*}^2} +$$

$$+\frac{\mu^*}{Re_l}\cdot\left[\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*}\right)^2\right] + u_1^*\cdot\frac{\partial p_s^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial p_s^*}{\partial x_2^*}. \tag{5.94}$$

5.4.4. Уравнения Рейнольдса для турбулентных течений

Если написать уравнения Рейнольдса (5.28), (5.33),(5.35),(5.61) в соответствии с главой 5.4.2 в форме законов сохранения для среднемассовых

величин, то получатся осредненные по времени основные уравнения для размерных величин течения:

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{F}}_m}{\partial x_m} - \frac{1}{Re_l} \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{G}}_m}{\partial x_m} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{R}_m}{\partial x_m} = 0, \tag{5.95}$$

с вектором решения

$$\bar{\boldsymbol{U}}(x_m, t) = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_1 \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_2 \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_3 \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{E} \end{pmatrix} \tag{5.96}$$

По сравнению с уравнениями Навье–Стокса в форме законов сохранения (5.65) добавляется член $\boldsymbol{R}_m$ на основе допущения Рейнольдса и определения осреднения по времени.

Вектор осредненных по времени конвективных потоков запишется

$$\bar{\boldsymbol{F}}_m = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_m \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_m \cdot \widetilde{u}_1 + \delta_{1m} \cdot \bar{p} \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_m \cdot \widetilde{u}_2 + \delta_{2m} \cdot \bar{p} \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u}_m \cdot \widetilde{u}_3 + \delta_{3m} \cdot \bar{p} \\ \widetilde{u}_m \cdot (\bar{\rho} \cdot \widetilde{e}_{tot} + \bar{p}) \end{pmatrix}, \tag{5.97}$$

Вектор осредненных диссипативных потоков

$$\bar{\boldsymbol{G}}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{m1} \\ \bar{\tau}_{m2} \\ \bar{\tau}_{m3} \\ \sum_{l=1}^{3} \widetilde{u}_l \cdot \bar{\tau}_{lm} + \bar{\dot{q}}_m \end{pmatrix}, \tag{5.98}$$

и дополнительный вектор турбулентных потоков

$$\boldsymbol{R}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u''_1 \cdot \widetilde{u}''_m} \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u''_2 \cdot \widetilde{u}''_m} \\ \bar{\rho} \cdot \widetilde{u''_3 \cdot \widetilde{u}''_m} \\ -\sum_{l=1}^{3} u'_l \cdot \bar{\tau_{lm}} + \bar{\rho} \cdot \widetilde{h' \cdot u'_m} \sum_{l=1}^{3} u'_m \cdot \bar{\rho} \cdot \widetilde{u'_l \cdot u'_m} + \frac{1}{2} \cdot \bar{\rho} \cdot \sum_{l=1}^{3} u'_l \cdot \widetilde{u'_l} \cdot u'_m \end{pmatrix}, \tag{5.99}$$

с энтальпией $h = e + \frac{p}{\rho}$ и

$$\widetilde{E} = \widetilde{e} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\widetilde{u}_m^2}{2} + k,$$

$$k = \sum_{m=1}^{3} \frac{\widetilde{u_m'' \cdot u_m''}}{2},$$

k является турбулентной кинетической энергией встречающиеся в дополнительном члене $\boldsymbol{R}_m$, в котором потоки неизвестны. Видно, что система уравнений имеет больше неизвестных, чем уравнений, и является незамкнутой. Связанная с этим проблема замыкания уравнений Рейнольдса для турбулентных течений ведет к тому, что отдельные члены $\boldsymbol{R}_m$ для каждой проблемы должны моделироваться эмпирическими зависимостями. Так как до сих пор неизвестно ни одной завершенной теории моделирования турбулентности и, тем самым, ни одного решения проблемы замыкания, в приложении даются ссылки на специальную литературу.

5.4.5. Многофазные течения

Для многофазных течений, которые рассматриваются в главе 9, для каждой отдельной фазы формулируются уравнения сохранения. В фазе k с плотностью ρ_k каждая передающаяся со скоростью u_k балансовая величина ϕ_k входит в следующее уравнение сохранения:

$$\frac{\partial \rho_k \cdot \phi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k \cdot \phi_k) = \rho_k \cdot \boldsymbol{f}_k + \nabla \boldsymbol{j}_k. \tag{5.100}$$

Изменение по времени удельной величины сохранения $\rho_k \cdot \phi_k$ с конвективным потоком $\nabla \cdot (\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k \cdot \phi_k)$ определяется объемным источником или стоком $\boldsymbol{f}_k$ и диссипативными потоками $\boldsymbol{j}_k$. Значение $\boldsymbol{f}_k$ и $\boldsymbol{j}_k$ в уравнении (5.100) приведено для соответствующих удельных балансовых величин $\rho_k \cdot \phi_k$, плотности ρ_k, импульса $\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k$ и энергии $\rho_k \cdot E_k$ следующим образом:

Φ_k	Величина баланса Ψ_k	Источник / сток $\boldsymbol{f}_k$	поток $\boldsymbol{j}_k$	сачок M_i
Масса	1	0	0	0
Импульс	$\boldsymbol{u}_k$	$\boldsymbol{g}$	$-p_k \cdot \boldsymbol{E} + \tau_k$	$\boldsymbol{m}_i^\sigma$
Энергия	$E_k = e_k + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{u}_k^2$	$\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{u}_k + Q_k$	$q_k + (-p_k \cdot \boldsymbol{E} + \tau_k) \cdot \boldsymbol{u}_k$	e_i^σ

Здесь $\boldsymbol{g}$ вектор силы тяжести, $\boldsymbol{E}$ — единичный тензор, τ_k — тензор вязких напряжений, Q_k объемные источники тепла и q_k — тепловые потоки.

В качестве граничных условий в многофазных течениях дополнительно к границам интегрируемой области выступают также фазовые граничные поверхности, которые определяются как разрывы для каждой фазы. На каждой такой граничной поверхности потоки должны удовлетворять следующим условиям скачка, которые можно представить в общей форме соотношением

$$[(\rho_k \cdot \phi_k) \cdot (\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{j}_k) \cdot \boldsymbol{n}_k] = \boldsymbol{M}_i \tag{5.101}$$

Левая часть (5.101) обозначает скачок потока на фазовой граничной поверхности. При этом $\boldsymbol{v}_i$ является скоростью фазовой граничной поверхности, $\boldsymbol{n}_k$ — нормаль граничной поверхности, которая направлена из области течения фазы k и $\boldsymbol{M}_i$ скачок в результате разрыва потоков $\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k \cdot \Phi_k - \boldsymbol{j}_k$ на фазовой граничной поверхности. Скачок $\boldsymbol{M}_i$ связан с деформацией фазовой пограничной поверхности в зависимости от поверхностного натяжения σ. $\boldsymbol{m}_i^\sigma$ и ϵ_i^σ описывают разрыв импульса или энергии, вызванный тензором напряжения на поверхности.

Аналитическое описание многофазных течений требует подходящих способов осреднения. Целесообразно проводить статистический процесс осреднения и осредненные состояния можно понимать как совокупное осреднение по ансамблю значений. Для процессов, у которых состояния во времени и пространстве независимы друг от друга, можно заменить совокупное осреднение осреднением по времени-пространству. Совокупное осреднение каждой величины Φ_k фазы k тем самым определяется как

$$\overline{\Phi_k(\boldsymbol{x},t)}^k = \frac{1}{V} \cdot \int_V \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} X_k \cdot \Phi_k \cdot dt \right) \cdot d\boldsymbol{x}. \tag{5.102}$$

Совокупное осреднение тем самым для квазистационарных двухфазных течений эквивалентно способу временного и локального осреднения, при котором интегрируют по контрольному объему V и малому временному интервалу Δt. При этом для масштаба времени должны выполняться определенные условия. С одной стороны, временной интервал Δt должен быть достаточно большой, чтобы турбулентные колебания, осредненые через Δt, исчезли. С другой стороны, временной интервал Δt должен выбираться таким малым, чтобы при интегрировании уравнений переноса не пропадала

информация о переходном поведении осредненных величин состояния. Величина контрольного объема должна выбираться так, чтобы пространственное осреднение не влияло на результаты.

У многофазных течений определение средних значений для соответствующих фаз в определенном месте усложняется тем, что в том же самом месте в различное время могут появиться различные фазы с различными параметрами течения. Это означает, что параметры течения не выступают как непрерывные функции. Поэтому целесообразно ввести фазовую индикаторную функцию $X_k(\boldsymbol{x},t)$. Если локальный вектор x находится внутри контрольного объема V_k и время t внутри временного интервала Δt_K фазы k, то X_k имеет значение 1, а иначе значение фазовой индикаторной функции — 0. Для осреднения балансовой величины Φ_k фазы k ее сначала умножают на фазовую индикаторную функцию. Совокупное осредненное значение этой фазовой индикаторной функции в области определения представляет собой локальную долю объема ϵ_k фазы k. Если фазовая индикаторная функция вводится в общую форму уравнения баланса (5.100) и предпринимается совокупное осреднение уравнения, то из этого следуют уравнения сохранения плотностей, импульсов, энергий, осредненных для фазы k. С введенными здесь обозначениями

$$\overline{\Phi_k(\boldsymbol{x},t)}^k = \frac{\overline{\Phi_k(x,t)\cdot X_k(\boldsymbol{x},t)}^k}{\epsilon_k} = \Phi_k(\boldsymbol{x},t) - \Phi'_k(\boldsymbol{x},t) \tag{5.103}$$

можно совокупно осредненную общую форму уравнений сохранения контрольного объема для фазы k, применив правило Лейбница и теорему Гаусса, представить следующим образом

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(\epsilon_k\cdot\overline{\rho_k\cdot\Phi_k}^k)}{\partial t} - \frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_i}\rho_k\cdot\Phi_k\cdot(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_k)\cdot dS - \\
-\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_i}\rho_k\cdot\Phi_k\cdot(\boldsymbol{u}_w\cdot\boldsymbol{n}_k)\cdot dS + \nabla\cdot\epsilon_k\cdot bar\boldsymbol{u}_k{}^k\cdot\overline{\rho_k\cdot\Phi_k}^k + \\
\nabla\cdot\epsilon_k\cdot\overline{\boldsymbol{u}'_k\cdot\rho)k\cdot\Phi'_k}^k + \frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_i+A_{wk}}\rho_k\cdot\Phi_k\cdot(\boldsymbol{u}_k\cdot\boldsymbol{n}_k)\cdot dS = \\
\epsilon_k\cdot\bar{\boldsymbol{f}}_k{}^k + \nabla\cdot\epsilon_k\cdot\bar{\boldsymbol{j}}_k{}^k + \frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_i+A_{wk}}(\boldsymbol{j}_k\cdot\boldsymbol{n}_k)\cdot dS.
\end{gathered} \tag{5.104}$$

Границы для области течения фазы k составляются из свободных граничных поверхностей между фазами с поверхностью A_i и твердо-жидкими ограничениями между фазой k и стенкой с поверхностью A_{wk}. Первые три слагаемых в левой части следуют из осреднения нестационарного члена. Так как свободная пограничная поверхность может двигаться со скоростью $\boldsymbol{v}_i$, а стенка со скоростью $\boldsymbol{u}_w$, получаются два поверхностных интеграла $\int_{A_i} dS$ и $\int_{A_w k} dS$. Последнее слагаемое в левой части получается из осреднения дивергенции $\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k \cdot \Phi_k$ для фазы k через общую границу. Также из осреднения дивергенции потока $A_i + A_{wk}$ получается поверхностный интеграл через общую границу $\boldsymbol{j}_k$ фазы k в правой части уравнения (5.104). Совокупное осреднение условия на разрыве (5.101) дает то, что сумма потоков через фазовую пограничную поверхность исчезает. Тем самым можно задавать в следующей форме уравнения сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы k для контрольного объема V с твердой стенкой:

$$\frac{\partial \epsilon_k \cdot \overline{\rho_k}^k}{\partial t} + \nabla \cdot \epsilon_k \cdot \bar{\rho_k}^k \cdot \bar{\boldsymbol{u}_k}^k = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{A_i} \rho_k \cdot (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}_k) \cdot \boldsymbol{n}_k \cdot dS = \Gamma_k, \tag{5.105}$$

$$\frac{\partial \epsilon_k \cdot \overline{\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k}^k}{\partial t} + \nabla \cdot \epsilon_k \cdot (\overline{\rho_k \cdot \boldsymbol{u}_k}^k \cdot \bar{\boldsymbol{u}_k}^k + \bar{p_k}^k \cdot E - \bar{\tau_k}^k + \overline{\boldsymbol{u}'_k \cdot \rho_k \cdot \Phi'_k}^k) =$$
$$= \epsilon_k \cdot \bar{\rho}_k^k \cdot \boldsymbol{g} + \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{A_i} (\bar{\tau_k}^k - \bar{p_k}^k \cdot E) \cdot \boldsymbol{n}_k \cdot dS + \overline{\boldsymbol{u}_k^i \cdot \Gamma_k}^k, \tag{5.106}$$

$$\frac{\partial \epsilon_k \cdot \overline{\rho_k \cdot E_k}^k}{\partial t} + \nabla \cdot \epsilon_k \cdot (\overline{\rho_k \cdot E_k}^k \cdot \bar{\boldsymbol{u}_k}^k + \bar{p_k}^k \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_k^k - \bar{\tau_k}^k \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_k^k +$$
$$+ q_k + \overline{\boldsymbol{u}'_k \cdot \rho_k \cdot E'}^k) = \epsilon_k \cdot \bar{\rho}_k^k \cdot \boldsymbol{g} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_k^k + \epsilon_k \cdot \bar{\rho}_k^k \cdot \bar{Q}_k^k +$$
$$+ \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{A_i} (\bar{\tau_k}^k - \bar{p_k}^k \cdot E) \cdot \bar{\boldsymbol{u}_k}^k \cdot \boldsymbol{n}_k \cdot dS + \overline{E_k^i \cdot \Gamma_k}^k. \tag{5.107}$$

При этом Γ_k представляет собой плотность источника массы для фазы k. С помощью этого члена можно учесть обмен массы между двумя фазами, например, при процессах конденсации и испарения. Для интеграла выполняется условие сохранение массы для всех фаз $\sum_k \Gamma_k = 0$. $\boldsymbol{u}_k^i$ является скоростью массы с плотностью источника Γ_k и энергией E_k^i.

В уравнении баланса два последних члена описывают процессы обмена в фазах.

5.4.6. Течения с химическими реакциями

Наряду с уже введенными в главе 5.4.2 уравнениями сохранения для массы, импульса и энергии (5.65), для рассматриваемых в гл. 10 течений с протеканием реакций необходимо добавить уравнения баланса парциальной плотности массы ρ_i каждого компонента i, присутствующего в течении. Локальная скорость течения $\boldsymbol{u}_i$ частиц компонента i составлена из осредненной скорости течения $\boldsymbol{u}$ центра масс и диффузионной скорости $\boldsymbol{U}_i$ частиц вида i (скорость относительно центра масс).

Так как из-за химических реакций частицы компонентов превращаются друг в друга, в уравнениях баланса появляются источниковые члены, которые представляются как произведение молярной массы M_i и скорости образования частиц вида i $\dot{\omega}_i$ в молярной шкале (например, в моль/(м^{3}с)). Если ввести в рассмотрение плотность диффузионного потока или поток диффузии $\rho_i \cdot U_i = \boldsymbol{j}_i$, то по аналогии с (5.100) получится:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \cdot \boldsymbol{u}_i) + \nabla \cdot \boldsymbol{u}_i = M_i \cdot \dot{\omega}_i. \tag{5.108}$$

Из уравнения сохранения полной энергии $\rho \cdot E = \rho \cdot e + (1/2) \cdot \rho \cdot \boldsymbol{u}^2$ с использованием уравнения импульса (5.18) следует уравнение баланса удельной внутренней энергии e при пренебрежении силой тяжести:

$$\frac{\partial (\rho \cdot e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot e \cdot \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_q + \tau : \nabla \boldsymbol{u} = 0, \tag{5.109}$$

причем ':' означает свертку тензоров τ и $\nabla \boldsymbol{u}$. Это уравнение с помощью соотношения $\rho \cdot h = \rho \cdot e + p$ можно преобразовать в уравнение сохранения для удельной энтальпии:

$$\frac{\partial (\rho \cdot h)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot h \cdot \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_q + \tau : \nabla \boldsymbol{u} - \nabla \cdot (p \cdot \boldsymbol{u}) = 0. \tag{5.110}$$

Более детальные модели для расчета диффузионного потока $\boldsymbol{j}_i$, потока тепла $\boldsymbol{j}_q$, тензора напряжения сдвига τ и вязкости μ для многокомпонентных потоков приводятся в гл. 10. Там же определяется энтальпия и внутренняя энергия как функция температуры и состава смеси.

Если при рассмотрении турбулентных течений заинтересованы в определении средних по времени величинах, а не временных флуктуаций, то

можно вывести осредненные по массе уравнения Рейнольдса. Для уравнения сохранения массы компонента i с применением приближения $\boldsymbol{j}_i = -D_i \cdot \rho \cdot \nabla\omega_i$ получается

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{\omega}_i)}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{\rho}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\widetilde{\omega}_i) + \nabla\cdot(-\overline{\rho\cdot D_i\cdot\nabla\omega_i} + \overline{\rho\cdot\boldsymbol{u}''\cdot\omega_i''} = \overline{M_i\cdot\dot{\omega}_i}. \quad (5.111)$$

Для уравнения сохранения энергии (5.110) при использовании выражения $\boldsymbol{j}_q = -\lambda\cdot\nabla T$ получается:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\widetilde{h})}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{\rho}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\widetilde{h}) + \nabla\cdot(\overline{-\lambda\cdot\nabla T} + \overline{\rho\cdot\boldsymbol{u}''\cdot h''} = 0. \quad (5.112)$$

При этом члены $\tau : \nabla\boldsymbol{u}$ и $\nabla\cdot(p\cdot\boldsymbol{u})$ не учитываются , так как они существенны только при появлении ударных волн или детонации, т. е. при значительном градиенте давления. По аналогии с неосредненными уравнениями необходимо ввести уравнение состояния. Из $p = \rho\cdot R\cdot T\cdot\sum_i(\omega_i/M_i)$ получается при осреднении

$$\widetilde{p} = R\cdot\sum_{i=1}^{N}\left((\bar{\rho}\cdot\widetilde{T}\cdot\omega_i + \bar{\rho}\cdot T''\cdot\omega_i'')\cdot\frac{1}{M_i}\right). \quad (5.113)$$

Если молярные массы близки, можно приближенно предположить, что средняя молярная масса остается постоянной. После осреднения с этим предположением уравнение состояния идеального газа будет иметь вид:

$$\widetilde{p} = \frac{\bar{\rho}\cdot R\cdot\widetilde{T}}{\bar{M}}, \quad (5.114)$$

причем в этом уравнении $\bar{M}$ — это осредненная средняя молярная масса рассмотриваемой смеси.

В уравнениях сохранения частиц появляются источниковые члены, обращение с которыми часто очень затруднено. По этой причине является целесообразным рассмотреть уравнения сохранения для химических элементов. Элементы при химических реакциях ни образуются, ни разрушаются, тем самым в этих уравнениях отсутствуют источниковые члены. Вводят дробь элемент-массы:

$$Z_i = \sum_{j=1}^{N}(\mu_{ij}\cdot\omega_j), \quad i = 1, \ldots, M, \quad (5.115)$$

причем N — число компонентов, а M — число элементов в рассматриваемой смеси, μ_{ij} обозначает долю массы элемента i в веществе j.

Если приближенно предположить, что все коэффициенты диффузии D_i в (5.111) одинаковы, то можно суммировать умноженные на μ_{ij} уравнения сохранения (5.65) и получить простое соотношение:

$$\frac{\partial(\rho \cdot Z_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot Z_i \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot (\rho \cdot D \cdot \nabla Z_i) = 0. \tag{5.116}$$

Это уравнение в силу условия сохранения элемента $\sum(\mu_{ij} \cdot M_i \cdot \omega_i) = 0$ не содержит больше источникового члена, что можно выгодно использовать в гл. 10. Тогда благодаря осреднению по времени из (5.116) получится также свободное от члена источника уравнение:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \widetilde{Z}_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} \cdot \widetilde{Z}_i) + \nabla \cdot (-\overline{\rho \cdot D \cdot \nabla Z_i} + \overline{\rho \cdot \boldsymbol{u}'' \cdot Z_i}) = 0. \tag{5.117}$$

5.5. Дифференциальные уравнения возмущенного движения

В гл. 7 рассматривается гидродинамическая неустойчивость. Необходимые для этого дифференциальные уравнения для возмущения получаются введением математического выражения для решения:

$$\boldsymbol{u}^*(x, y, z, t) = \boldsymbol{U}_0^*(x, y, z) + \epsilon \cdot \boldsymbol{u}'^*(x, y, z, t). \tag{5.118}$$

При этом $\boldsymbol{U}_0^*$ — безразмерное основное течение, которое искажено малыми возмущениями (гидродинамическая неустойчивость). $\boldsymbol{u}'$ — это параметр развития, который служит мерой для малой величины возмущения. При этом начальное возмущение к моменту времени $t^* = 0$ унифицируется до 1:

$$|\epsilon \cdot \boldsymbol{u}'^*|_{t^*=0} = \epsilon \Rightarrow |\boldsymbol{u}'|^*_{t^*=0} = 1.$$

Для безразмерных величин возмущений $\boldsymbol{u}^*, p^*, \rho^*, T^*$ тем самым получается математические выражения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^* &= \boldsymbol{U}_0^* + \epsilon \cdot \boldsymbol{u}'^*, \quad p^* = p_0^* + \epsilon \cdot p'^*, \\ \rho^* &= \rho_0^* + \epsilon \cdot \rho'^*, \quad T^* = T_0^* + \epsilon \cdot T'^*. \end{aligned} \tag{5.119}$$

Если их подставить в безразмерные уравнения сжимаемых потоков (5.1), (5.18), (5.56)

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \rho^* = -\rho^* \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{u}^*, \tag{5.120}$$

$$\rho^* \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{u}^* \right) = -\frac{1}{\kappa \cdot M_\infty^2} \cdot \nabla p^* + \\ + \frac{1}{Re_l} \cdot \left(\nabla \cdot (\mu [\nabla \boldsymbol{u}^* + t \nabla \boldsymbol{u}^*]) - \frac{2}{3} \cdot \nabla (\mu \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{u}^*) \right), \tag{5.121}$$

$$\rho^* \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial t} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla T^* \right) = -(\kappa - 1) \cdot p^{\cdot} \nabla \cdot \boldsymbol{u}^* + \\ + \frac{\kappa}{Re_l} \cdot \left[\frac{1}{Pr_\infty} \cdot \nabla (\lambda \cdot \nabla T^*) - (\kappa - 1) \cdot M_\infty^2 \cdot \Phi^* \right], \tag{5.122}$$

$$\Phi^* = \mu \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}^* + t \nabla \boldsymbol{u}^*)^2 - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{u}^*)^2 \right),$$

то получатся дифференциальные уравнения для возмущений (смотри также Х. Ортеля и Й. Делфса 1996):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla \rho_0 + U_0 \cdot \nabla \rho' + \rho' \cdot \nabla \cdot U_{)} + \rho_0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{u}' = -\epsilon \cdot [\nabla \cdot (\rho' \cdot \boldsymbol{u}')], \tag{5.123}$$

$$\rho_0 \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla U_0 + U_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}' \right) + \rho' \cdot (U_0 \cdot U_0) + \frac{1}{\kappa \cdot M_\infty^2} \cdot \nabla (\rho_0 \cdot T' + T_0 \cdot \rho') - \\ - \frac{1}{Re_l} \cdot [\nabla \cdot (\mu_0 \cdot [\nabla \boldsymbol{u}' + t \nabla \boldsymbol{u}'] + \mu'_\epsilon \cdot [\nabla U_0 + t \nabla U_0]) - \\ - \frac{2}{3} \cdot \nabla (\mu_0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{u}' + \mu'_\epsilon \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{u}')] = \\ \epsilon \cdot (-\rho' \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla U_0 + U_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}') - \rho_0 \cdot \boldsymbol{u}' \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{u}' - \\ - \frac{1}{\kappa \cdot M_\infty^2} \cdot \nabla (\rho' \cdot T') + \frac{1}{Re_l} \cdot [\nabla \cdot (\mu'_\epsilon \cdot [\nabla \boldsymbol{u}' + t \nabla \boldsymbol{u}'] + \mu \epsilon \epsilon' \cdot [\nabla U_0 + t \nabla U_0]) - \\ - \frac{2}{3} \cdot \nabla (\mu'_\epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{u}' + \mu'_{\epsilon\epsilon} \cdot U_0)]), \tag{5.124}$$

$$\rho_0 \cdot \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla T_0 + U_0 \cdot \nabla T' \right) + (\kappa - 1) \cdot [(T_0 \cdot \rho' + \rho_0 \cdot T') \cdot \nabla \cdot U_0 + T_0 \cdot \rho_0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{u}'$$

$$\frac{\kappa}{Re_l}\cdot[(\kappa-1)\cdot M_\infty^2\cdot\Phi'_\epsilon-\frac{1}{Pr_\infty}\cdot\nabla\cdot(\lambda_0\cdot\nabla T'+\lambda'_\epsilon\cdot\nabla T_0)]=$$
$$=\epsilon\cdot(-\rho'\cdot(\frac{\partial T'}{\partial t}+\boldsymbol{u}'\cdot\nabla T_0+U_0\cdot\nabla T')-\rho_0\cdot\boldsymbol{u}'\cdot\nabla T'-$$
$$(\kappa-1)\cdot[(T_0\cdot\rho'+\rho_0\cdot T')\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{u}'+T'\cdot\rho'\cdot\nabla\cdot U_0]- \qquad (5.125)$$
$$-\frac{\kappa}{Re_l}\cdot[(\kappa-1)\cdot M_\infty^2\cdot\Phi'_{\epsilon\epsilon}-\frac{1}{Pr_\infty}\cdot\nabla\cdot(\lambda'_\epsilon\cdot\nabla T'+\lambda'_{\epsilon\epsilon}\cdot\nabla T_0)]).$$

При этом индекс (*) для безразмерных величин течения был опущен и температурная зависимость вязкости $\mu(T)$ и теплопроводность $\lambda(T)$ учитывались соответственно по уравнению Сазерленда:

$$\mu=\lambda=T^{2/3}\cdot\frac{1+S}{T+S},\quad S=\frac{110.4K}{T_\infty}.$$

Пульсации плотности ρ и температуры T также ведут к возмущениям в этих функциях. Для этого μ и λ разлагают в ряд Тейлора

$$(\mu,\lambda)=(\mu,\lambda)_0+\left(\frac{d(\mu,\lambda)}{dT}\right)_0\cdot(T-T_0)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{d^2(\mu,\lambda)}{dT^2}\right)_0\cdot(T-T_0)^2+\ldots$$
$$=(\mu,\lambda)_0+\epsilon\cdot\left(\frac{d(\mu,\lambda)}{dT}\right)_0\cdot T'+\epsilon^2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{d^2(\mu,\lambda)}{dT^2}\right)_0\cdot T'^2+\ldots.$$

Отсюда можно понять, что отклонение коэффициентов переноса от основного состояния $(\mu-\mu_0)$ или $(\lambda-\lambda_0)$ не точно представляют собой член порядка величин ϵ, а содержат члены более высокого порядка ϵ.

Для обозначения этого состояния вводят следующий способ записи:

$$(\mu-\mu_0,\lambda-\lambda_0)=\epsilon\cdot(\mu'_\epsilon,\lambda'_\epsilon)+\epsilon^2\cdot(\mu'_{\epsilon\epsilon},\lambda'_{\epsilon\epsilon})+\ldots,$$

с

$$(\mu'_\epsilon,\lambda'_\epsilon):=\frac{1}{1!}\cdot(\frac{d(\mu,\lambda)}{dT})_0\cdot T',$$
$$(\mu'_{\epsilon\epsilon},\lambda'_{\epsilon\epsilon}):=\frac{1}{2!}\cdot(\frac{d^2(\mu,\lambda)}{dT^2})_0\cdot T'^2.$$

Аналогично определяется отклонение диссипативной функции Φ, вызванное возмущением $\epsilon\cdot\boldsymbol{u}'$:

$$\Phi-\Phi_0=\epsilon\cdot\Phi'_\epsilon+\epsilon^2\cdot\Phi'_{\epsilon\epsilon}+\ldots$$

Подставляют возмущенное состояние течения $\boldsymbol{u} = U_0 + \epsilon \cdot \boldsymbol{u}'$ и возмущенную вязкость в диссипативную функцию (5.122) и получают при разложении в ряд:

$$\Phi - \Phi_0 = \epsilon[\mu'_\epsilon \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\nabla U_0 + t\nabla U_0)^2 - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0)^2) +$$

$$+2 \cdot \mu_0 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\nabla U_0 + t\nabla U_0) \cdot (\nabla \boldsymbol{u}' + t\nabla \boldsymbol{u}') - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0) \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{u}'))] +$$

$$+\epsilon^2 \cdot [\mu'_{\epsilon\epsilon} \cdot (\frac{1}{2}(\nabla U_0 + t\nabla U_0)^2 - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0)^2) +$$

$$2 \cdot \mu'_\epsilon \cdot (\frac{1}{2}(\nabla U_0 + t\nabla U_0) \cdot (\nabla \boldsymbol{u}' + t\nabla \boldsymbol{u}') - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0) \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{u}')) +$$

$$+\mu_0 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}' + t\nabla \boldsymbol{u}') - \frac{2}{3} \cdot \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}')^2)],$$

с

$$\Phi'_\epsilon = \mu'_\epsilon \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\nabla U_0 + t\nabla u_0)^2 - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0)^2) +$$

$$+2 \cdot \mu_0 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\nabla U_0 + t\nabla U_0) \cdot (\nabla \boldsymbol{u}' + t\nabla \boldsymbol{u}') - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0) \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{u}'))],$$

$$\Phi'_{\epsilon\epsilon} = \mu'_{\epsilon\epsilon} \cdot (\frac{1}{2}(\nabla U_0 + t\nabla U_0)^2 - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0)^2) +$$

$$2 \cdot \mu'_\epsilon \cdot (\frac{1}{2}(\nabla U_0 + t\nabla U_0) \cdot (\nabla \boldsymbol{u}' + t\nabla \boldsymbol{u}') - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot U_0) \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{u}')) +$$

$$+\mu_0 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}' + t\nabla \boldsymbol{u}') - \frac{2}{3} \cdot \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}')^2).$$

Давление получают после введения математического выражения возмущения $\boldsymbol{u} = U_0 + \epsilon \cdot \boldsymbol{u}'$ с учетом членов второго порядка по ϵ. При использовании зависимости давления от плотности и температуры по закону идеального газа при разложении в ряд Тейлора остается точным только такой член:

$$p - p_0 = \epsilon \cdot (\frac{\partial p}{\partial \rho})_0 \cdot \rho' + \epsilon \cdot (\frac{\partial p}{\partial T})_0 \cdot T' + \epsilon^2 \cdot (\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial T})_0 \cdot (\rho' \cdot T') =$$

$$= \epsilon \cdot (T_0 \cdot \rho' + \rho_0 \cdot T') + \epsilon^2 \cdot \rho' \cdot T'.$$

Система дифференциальных уравнений для возмущений (5.123)–(5.125) описывает поведение любых возмущений $\boldsymbol{u}'(x, y, z, t)$ стационарного состояния основного потока $U_0(x, y, z)$. Нелинейные члены стоят в правой части. Если предположить малые, но конечные возмущения, можно интерпретировать степени от ϵ как разделение порядка величин нелинейных

эффектов для развития возмущений. Если рассматривать бесконечно малые возмущения, т.е $\epsilon \to 0$, то правые части в этом случае пропадают и получаются линейные дифференциальные уравнения. Если увеличить ϵ как меру для величины наведенных течений, то члены приобретут большее значение и нелинейные эффекты в большей степени повлияют на развитие течений.

Следует заметить, что члены третьего порядка и выше в уравнениях импульса (5.124) или четвертого и выше в уравнениях энергии (5.125) (независимо от величины ϵ) являются только следствием, как правило, очень малых вторых и более высоких производных коэффициентов переноса μ и λ по температуре. Пренебрежение ими даже при умеренных течениях еще оправданно.

В гл. 7 рассматриваются гидодинамические неустойчивости бесконечно малых возмущений с $\epsilon \to 0$. Линейные дифференциальные уравнения возмущений сжимаемых потоков, ответственных за такие возмущения получаются из (5.123)–(5.125) вычитанием правых частей. Так же как и в любом течении, в возмущенном течении должны выполняться граничные условия. На твердой стенке необходимо соблюдать условие прилипания. Необходимые сверх этого граничные условия для пульсации температуры требуют краткого обсуждения. Ради простоты начнем со случая изотермической стенки. Из математического выражения возмущения $T_0(x_w, y_w, z_w) + + \epsilon \cdot T'_w(x_w, y_w, z_w) = T_w$ следует сразу же для любого ϵ температурное условие

$$T'_w = 0.$$

Аналогично, для адиабатных стенок получается, что $\boldsymbol{n} \cdot \nabla T' = 0$. Для пульсации плотности нельзя ставить явные граничные условия. Вместо этого плотность определяется из уравнения неразрывности (5.123), определенного на границе. В случае рассмотрения задач обтекания, сверх того требуется, чтобы на бесконечности все пульсации параметров течения затухали до нуля. Для несжимаемых потоков основные уравнения упрощаются при постоянной плотности ρ и постоянной вязкости μ в соответствии с (5.78)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}^* = 0, \tag{5.126}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{u}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re_l} \cdot \Delta \boldsymbol{u}^*. \tag{5.127}$$

Математическое выражение для возмущений

$$\boldsymbol{u} = U_0 + \epsilon \cdot \boldsymbol{u}', \quad p = p_0 + \epsilon \cdot p'$$

ведет к дифференциальным уравнениям для возмущений несжимаемых потоков

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \tag{5.128}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla U_0 + \epsilon \cdot \boldsymbol{u}' \cdot \nabla \boldsymbol{u}' = -\nabla p' + \frac{1}{Re_l} \cdot \Delta \boldsymbol{u}'. \tag{5.129}$$

Для малых возмущений с $\epsilon \to 0$ левой частью (5.129), в которой присутствует коэффициент ϵ, пренебрегают. Тем самым мы приходим к линейным дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \tag{5.130}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla U_0 = -\nabla p' + \frac{1}{Re_l} \cdot \Delta \boldsymbol{u}'. \tag{5.131}$$

Дифференциальные уравнения для малых возмущений уравнения Буссинеска (5.81) дают по аналогии:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \tag{5.132}$$

$$\frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla U_0 \right) = -\nabla p' + \Delta \boldsymbol{u}' + Ra_\infty \cdot T' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.133}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla T' + T' \cdot \nabla U_0 = \Delta T. \tag{5.134}$$

Для конвекции, вызванной градиентами температуры и концентрации (5.86), дифференциальные уравнения возмущенного движения будут иметь вид:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \tag{5.135}$$

$$Le_\infty \cdot \frac{\partial c'}{\partial t} = \Delta c' + Le_\infty \cdot \omega', \tag{5.136}$$

$$\frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla U_0 \right) = -\nabla p' + \Delta \boldsymbol{u}' +$$

$$+ (Ra_\infty \cdot T' + \Rightarrow_{D\infty} \cdot c') \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.137}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla T' + T' \cdot \nabla U_0 = \Delta T. \tag{5.138}$$

6

Аэродинамика несущей поверхности

6.1. Основы аэродинамики

Целью аэродинамики является предсказание сил и моментов, действующих на обтекаемые тела, такие, например, как профили, крылья, фюзеляжи, корпуса двигателей или на самолет в целом. К аэродинамике относится также предсказание сил воздействия потока на здания, автомобили и суда, а также предсказание аэродинамического нагрева корпусов тел, входящих в плотные слои атмосферы или в атмосферы планет. Другой целью является расчет потерь и теплообмена в аэродвигателях, двигателях ракет и трубопроводах.

Следуя руководству, данному Прандтлем, мы ограничимся в этой главе основами аэродинамики самолетов и, в особенности, аэродинамикой крыла. Она определяется решающим влиянием числа Маха невозмущенного потока.

По мнению Кюхеманна (1978), любое место Земли достижимо за одинаковое время полета, если форма крыльев отвечает необходимому для этого полетному числу Маха M_∞. Рисунок 6.1 показывает типы самолетов для различной относительной дальности $D/(2\pi R)$ вдоль поверхности Земли в зависимости от числа Маха M_∞. Для коротких расстояний используются нестреловидные крылья при дозвуковых числах Маха (глава 6.1). Для средних расстояний применяются стреловидные трансзвуковые крылья (глава 6.2). Для дальних расстояний предлагается сверхзвуковой полет (глава 6.3). Визуализация гиперзвукового полета может быть реализована с помощью гидрогазоаналогии.

В конце концов для транспортных самолетов одержало верх стреловидное крыло при трансзвуковых полетных числах Маха ($M_\infty = 0.8$). Тем самым можно перевозить в крупногабаритных самолетах большое количество пассажиров при времени полета до 12 часов на расстояния до 11000 км. При сверхзвуковом полете ($M_\infty = 2$), который возможен лишь над морем

или пустынными областями по причине сверхзвукового хлопка головной и хвостовой волны самолета, время полета вдвое сокращается.

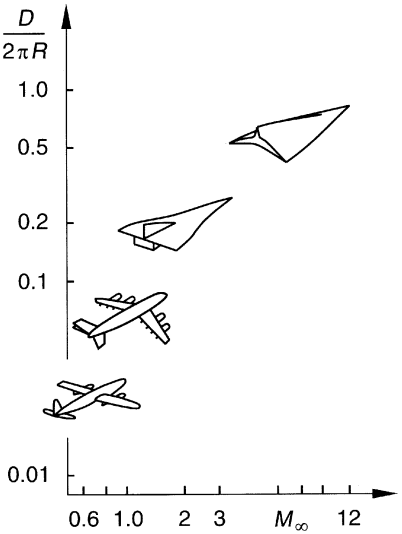


Рис. 6.1. Форма самолетов в зависимости от полетного числа Маха M_∞

6.1.1. Полет птиц и техническая имитация (подражание)

Эволюция развивала полет за прошедшие 10^8 лет разным способом у насекомых, летучих мышей, ящеров, птиц. Так как вращение вокруг оси биологически невозможно, необходимая для полета подъемная сила и поступательное движение достигаются движением взмаха крыла. Поступательное движение возникает благодаря тому, что взмах сверху вниз выполняется с большой силой, а взмах снизу вверх при возможно наименьшем сопротивлении. Большую часть поступательного движения создают у птицы внешние части крыла, которые соответственно рисунку 6.2 имеют наибольший вертикальный размах движения. При этом положение различных профильных сегментов (разрезов) крыла в течение периода колебания из-за деформации крыла изменяется. Внутренняя часть крыла производит в основном подъемную силу. Тем самым функции крыла и пропеллера само-

лета соединяются вместе в крыле птицы. Конечно, это достигается тем, что подъемная сила и поступательное движение в ходе колебания меняются. На связанные с этим проблемы стабилизации воздействуют аэродинамические силы хвостовой поверхности, которые как горизонтальный руль управления совершают также колебательное движение. Самая большая перелетная птица альбатрос достигает при размахе крыльев в 3,8 м максимальной скорости до 110 км/ч и коэффициента аэродинамического качества (отношение подъемной сила к сопротивлению) 20.

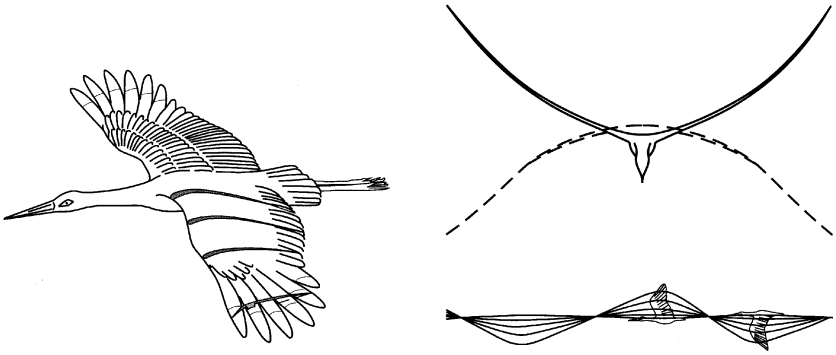


Рис. 6.2. Движение крыла при птичьем полете

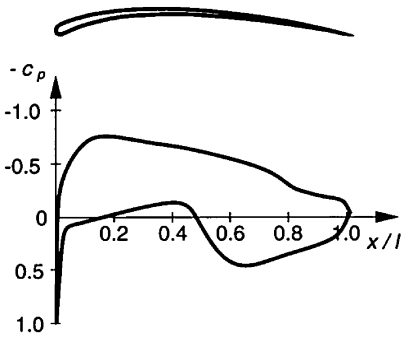


Рис. 6.3. Профиль птичьего крыла и распределение на нем давления

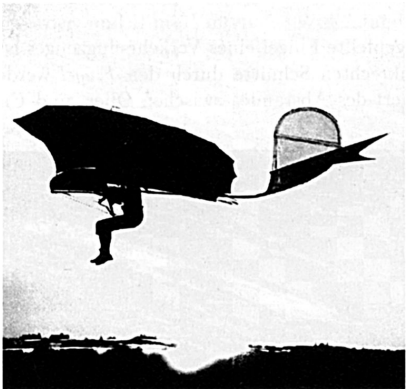


Рис. 6.4. Планер Лилиенталя

Распределение давления для профиля характерного разреза крыла аиста показано на рисунке 6.3 в момент взмаха крыла (положение $\alpha = 0°$). По причине различной кривизны нижней и верхней сторон крыла поток по-разному ускоряется на них, что ведет к большему спаду давления (разрежению) на верхней стороне. Ниже по течению от максимума разрежения поток замедляется, что связано с соответствующим ростом давления. Рассчитанный коэффициент подъемной силы и сопротивления для полетного числа Рейнольдса $Re_l = 1{,}85 \cdot 10^5$ по уравнениям Навье–Стокса (5.20) для ламинарных течений составляет $c_a = 0{,}71$ и $c_w = 0{,}024$. По причине сильного изгиба профиля течение в зоне замедления склонно в отрыву, что предотвращается при нестационарном взмахе крыла.

Первое успешное техническое воплощение птичьего полета удалось Отто Лилиенталю (1891), создавшему планер для полета человека. Рис. 6.4 показывает подобную птице форму жесткого крыла с встроенными вертикальными и горизонтальными поверхностями, которые обеспечивают устойчивости. Контроль полета планера осуществлялся смещением веса под планером. Еще ранее в 1889 году была опубликована книга с названием «Полет птицы как основа искусства полета», которая содержала все аэродинамические данные того времени. У современных транспортных самолетов 100 лет спустя сохранились жесткие крылья (см. рис. 6.5). Взмах крыла птицы был заменен пропеллерами и двигателями, которые по причине их размера размещаются под несущими плоскостями. Фюзеляж вмещает пасса-

жиров, а горизонтальное и вертикальное хвостовое оперение обеспечивает устойчивость полета. По сравнению с полетом птицы изменилась скорость полета. Стремление по возможности быстро, комфортабельно и экономично лететь из одного места в другое, ведет к трансзвуковым скоростям 950 км/час при полетном числе Маха 0.8 на высоте 10 км. При трансзвуковом числе Маха потери уменьшаются при использовании крыльев стреловидной формы, которые рассматриваются в главе 6.2.1. Вертикальные концевые крылышки на крыле сделаны по подобию кончиков крыла птицы, чтобы уменьшить интенсивность свободного вихря и, тем самым, сопротивление крыла.

Рис. 6.5. Транспортный самолет

6.1.2. Профиль и крыло

Если двигать самолет с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_\infty$, то он испытывает равнодействующую сил аэродинамического воздействия силу R (рис. 6.6). Компонентой этой силы в направлении обтекания является сила сопротивления W, компонентой перпендикулярной к нему — подъемная сила A. Наклон равнодействующей R к направлению обтекания и, тем самым, отношение подъемной силы к силе сопротивления зависят, в основном, от геометрической формы крыла и направления обтекания. Большое значение отношения A/W желательно. Для стационарного парения безмоторного самолета равнодействующая воздушная сила R должна быть противоположно направлена и равна весу G. Тем самым для угла скольжения α получается отношение:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{A}{W}. \tag{6.1}$$

Крыло стреловидной формы с углом Ф нарисовано на рис. 6.6. Соответствующие вертикальные разрезы крыла называются профилями. Средняя линия профиля определяется как геометрическое место точек, определяющих середину расстояния между верхней и нижней сторонми крыла - это условное очертание профиля, которое необходимо при описании методов проектирования без учета трения. Положение профиля относительно скорости невозмущенного потока $\boldsymbol{v}_\infty$ обозначается через α. Как было показано в главе 4.2.11, аэродинамические силы — подъемная сила A, сила сопротивления W, а также равнодействующая сила R вызываются распределением давления и распределением касательных напряжений на поверхности крыла. Дополнительно возникает момент M, который отвечает за вращение (поворот). Относящиеся сюда безразмерные коэффициенты это:

$$c_a = \frac{A}{q_\infty S}, \quad c_w = \frac{W}{q_\infty S}, \quad c_m = \frac{M}{q_\infty S l}, \tag{6.2}$$

с $q_\infty = 0.5\rho \boldsymbol{v}_\infty^2$ и площадью крыла S. Коэффициент давления и трения определяются как:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}, \quad c_f = \frac{\tau}{q_\infty}, \tag{6.3}$$

с давлением невозмущенного потока p_∞. Все коэффициенты являются функциями числа Маха набегающего потока M_∞, числа Рейнольдса Re_l, угла атаки α, угла угла стреловидности Ф.

Обтекание профиля

Типичные профили для различных диапазонов числа Маха изображены на рис. 6.7. В противоположность тонким профилям крыла птицы на рисунке 6.3, Прандтль в 1917 году показал, что дозвуковые профили толщиной $d/l \neq 13\,\%$ (например, профиль Геттингера 298) имеют больший коэффициент подъемной силы c_a при меньшем коэффициенте сопротивления c_w.

Профили при трансзвуковом обтекании должны быть в соответствии с рис. 6.7 тоньше, чтобы на профиле осуществлялся переход в сверхзвуковой поток по возможности дальше вниз по течению. У профилей в сверхзвуковом потоке появляются косые скачки уплотнения, которые при острых передних и задних кромках незначительно увеличивают сопротивление.

Различные зоны потоков представлены на рис. 6.8 для трансзвуковых, до- и сверхзвуковых чисел Маха. О трансзвуковых дозвуковых числах Маха говорят, если, как на первом рисунке, ускорение потока на профиле

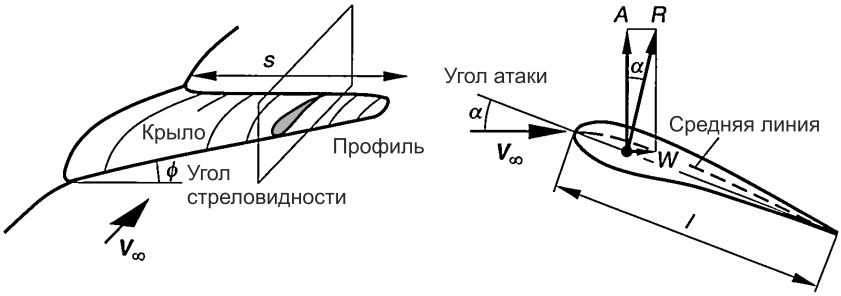


Рис. 6.6. Схема крыла и профиля

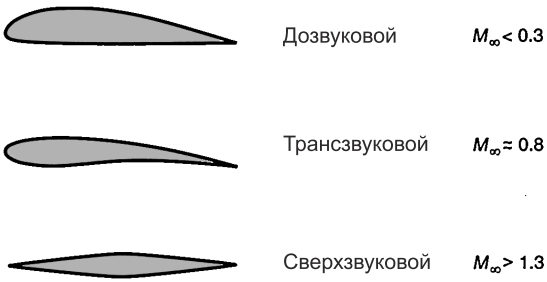


Рис. 6.7. Характерные формы профилей для дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых чисел Маха

приводить к появлению сверхзвукового течения. При этом сверхзвуковая область завершается скачком уплотнения, следствием которого является дополнительное сопротивление давления c_s. Скачки уплотнения обозначены на рисунке 6.8 жирной чертой, а звуковые линии $M = 1$ — штриховой. Замедление потока на профиле вызывает рост давления до задней кромки. Там устанавливается давление, которое незначительно выше давления невозмущенного потока.

Если повысить трансзвуковое число Маха обтекания до значения большего, чем 0.8, сверхзвуковая зона на рисунке займет всю верхнюю сторону профиля. Скачок уплотнения доходит до задней кромки, в то время как на нижней стороне также устанавливается локальная зона сверхзвука со

скачком уплотнения. Скачек на задней кромке обеспечивает необходимое увеличение давления до его значения в следе за профилем.

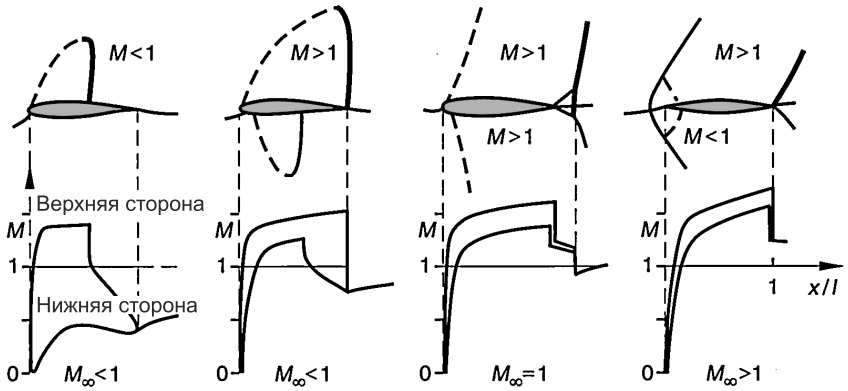


Рис. 6.8. Распределение числа Маха трансзвукового обтекания профиля

Граничный случай потока с числом Маха $M_\infty = 1$ изображен на третьей картинке рисунка 6.8. Скачки уплотнения на верхней и нижней стороне профиля дошли дошли до задней кромки и разветвляются на два косых и один прямой скачек уплотнения в следе за профилем. Звуковая линия идет через все поле потока и почти весь профиль обтекается сверхзвуковым потоком. Если число Маха обдува немного больше 1, то далеко перед профилем образуется отсоединенная головная волна.

Для сверхзвукового обтекания $M_\infty \geqslant 1$ расстояние до ударной головной волны уменьшается. Возникает дозвуковая зона между скачком и профилем. Косые скачки уплотнения идут от задней кромке профиля в область кильватерного течения . Если дальше повышать числа Маха обдува, на острой передней кромке устанавливаются косые скачки уплотнения в соответствии со скачками на нижней кромке.

На рис. 6.9 изображена зависимость коэффициента подъемной силы и сопротивления от числа Маха для заданного профиля. При дозвуковых числах Маха коэффициент подъемной силы растет с возрастанием числа Маха в соответствии с правилом Прандтля–Глауэрта:

$$c_a = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad M_\infty < 1. \tag{6.4}$$

Этому соответствует коэффициент давления профиля, рассчитанный по линейной теории:

$$c_p = \frac{c_{p0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}},$$

причем c_{p0} является коэффициентом давления несжимаемого потока. Уменьшение коэффициента подъемной силы рассчитывается по линейной сверхзвуковой теории в соответствии с правилом Аккерета:

$$c_a = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad M_\infty > 1. \tag{6.5}$$

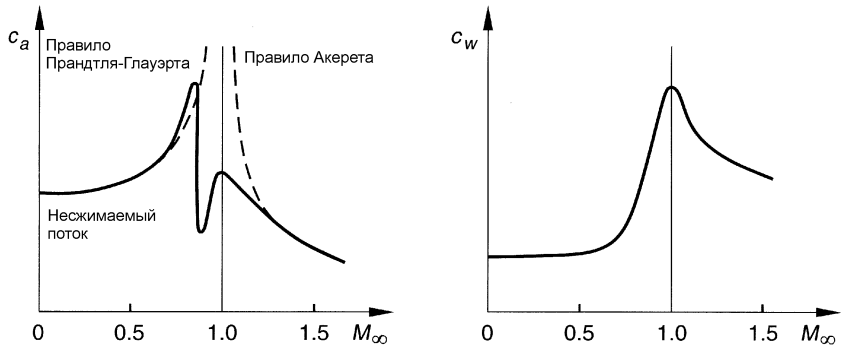


Рис. 6.9. Коэффициент подъемной силы c_a и коэффициент сопротивления c_w в зависимости от числа Маха обдува M_∞

В трансзвуковой дозвуковой области коэффициент подъемной силы проходит максимум. Увеличение (рост) коэффициента подъемной силы объясняется появлением сверхзвуковой области и вторым скачком уплотнения на нижней стороне профиля. Распределение числа Маха на рисунке 6.8 показывает, что дальнейшая с ростом числа Маха перестройка течения приводит к тому, что подъемная сила сильно уменьшается, однако, для чисел Маха больше 0,9 начинает снова возрастать. Новый рост коэффициента подъемной силы наступает тогда, когда скачки уплотнения из области следа подходят к задней кромке профиля и по причине малого угла скачка ослабевают. Только с появлением головной волны и дозвуковой области между

скачком уплотнения и профилем коэффициент подъемной силы в сверхзвуке снова уменьшается в соответствии с формулой Аккерета.

Профиль крыла транспортного самолета выбирают из условия полета в дозвуковом диапазоне с числом Маха около 0,8.

Коэффициент сопротивления c_w ведет себя аналогично коэффициенту подъемной силы c_a, второй максимум при трансзвуковых числах Маха может не наступить. До появления сверхзвуковой области на верхней стороне профиля коэффициент сопротивления при росте числа Маха обтекания остается почти постоянным. С появлением скачка уплотнения на нижней стороне профиля коэффициент сопротивления значительно возрастает. До достижения максимума сопротивления при числе Маха $M_\infty = 1$ в сверхзвуковой области могут быть достигнуты локальные числа Маха до $M = 2$. Скачки уплотнения на профиле становятся такими сильными, что рост давления вызывает срыв потока и из-за этого сопротивление дополнительно увеличивается.

Повысить трансзвуковое полетное число Маха без значительного увеличения сопротивления удается при использовании особых, так называемых суперкритическиих, профилей (рис. 6.10). При этом максимум толщины профиля находится почти вблизи от передней кромки и вытянутая область сверхзвука на профиле завершается слабым скачком уплотнения по возможности далеко вниз по течению.По сравнению с обычными трансзвуковыми профилями разряжение (подсасывание) в передней зоне профиля предотвращается.

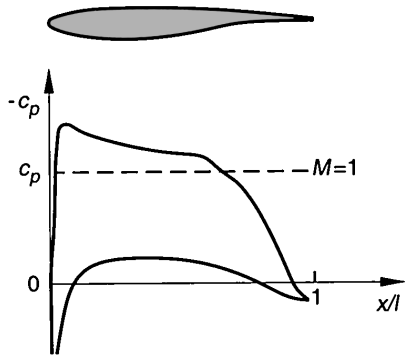


Рис. 6.10. Распределение давления c_p суперкритического профиля

Зависимость коэффициента подъемной силы c_a от угла атаки α для дозвукового профиля приводится на рис. 6.11. Подъемная сила растет с ростом угла атаки сначала линейно, пока обтекание является безотрывным. Для угла атаки $\alpha = 0°$ по причине несимметричного профиля также получают положительный коэффициент подъемной силы. Коэффициент подъемной силы при критическом угле атаки α_{krit} проходит максимум и для больших углов атаки резко падает.

Моментальный снимок на рис. 6.11 показывает, что в этом случае на верхней стороне профиля поток нестационарно срывается. С резким падением коэффициента подъемной силы связан и рост сопротивления профиля.

При взлете и посадке происходит уменьшение скорости и для повышения подъемной силы крыла используют передние и задние закрылки, увеличивающие площадь крыла. Это видно на кривой подъемной силы, изображенной пунктиром на рисунке 6.11, которая приводит к более высоким значениям подъемной силы.

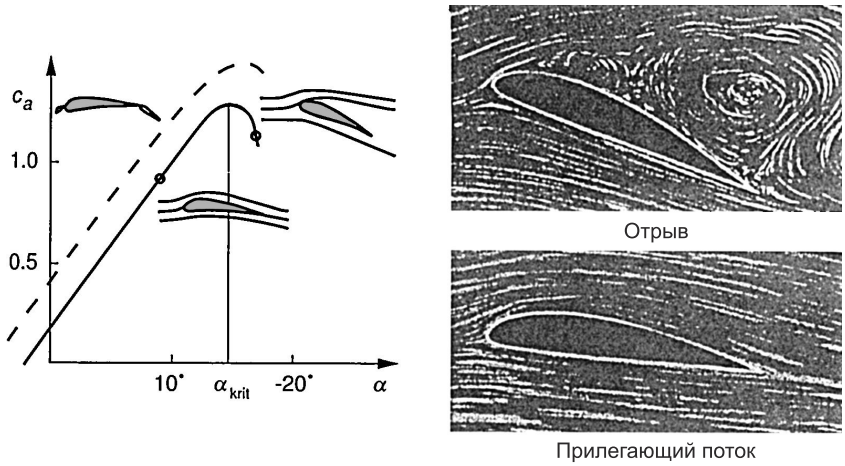


Рис. 6.11. Коэффициент подъемной силы c_a и изображения потока в зависимости от угла атаки α

Важной диаграммой для расчета профилей является поляра крыла (рис. 6.12). Точки на поляре представляют значения коэффициента подъемной силы c_a и коэффициента сопротивления c_w, отвечающие одному и тому же углу атаки. О поляре говорят потому, что из рисунка 6.12 можно

получить силы, непосредственно действующие на профиль. Вектор от начала координат до точки поляры показывает равнодействующую силу $\boldsymbol{R}$. Для суперкритического профиля рисунка 6.12 рост коэффициента подъемной силы с увеличением угла атаки велик, максимальное значение c_a по сравнению с дозвуковыми профилями все же невелико. Для большой области угла атаки коэффициент сопротивления остается небольшим. Расчет при числе Маха обдува $M_\infty = 0.76$ дает значение коэффициента подъемной силы $c_a = 0.57$.

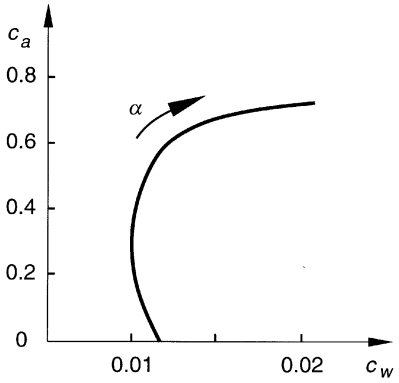


Рис. 6.12. Поляра трансзвукового профиля

Для анализа влияния вязкости при обтекании дозвукового профиля на рис. 6.13 приводятся распределения давления как при невязком обтекании, так и при обтекании вязким потоком с различными случаями отрыва. Пока пограничный слой присоединен к профилю, из-за эффекта вытеснения давление на профиле повышается в сравнении с невязким обтеканием. Когда происходит отрыв потока, на профиле образуется область возвратного течения с постоянным давлением. Подемная сила из-за этого уменьшается.

Если отрыв начинается уже на передней кромке, на профиле это может привести к повторному присоединению потока, так, что область постоянного давления находится в зоне разреженной верхней части профиля и подъемная сила вследствие этого резко уменьшается. Поток определяется тогда средой, обладающей вязкостью, так, что теория обтекания профиля без трения, рассматриваемая в главе 6.1.4, ограничивается случаями безотрывного обтекания и требует корректировки для учета влияния пограничного слоя..

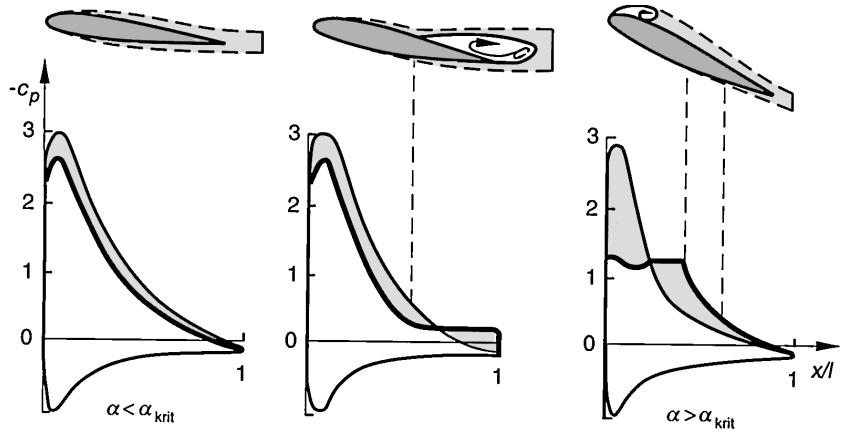


Рис. 6.13. Распределение давления при обтекания профиля с трением и без трения

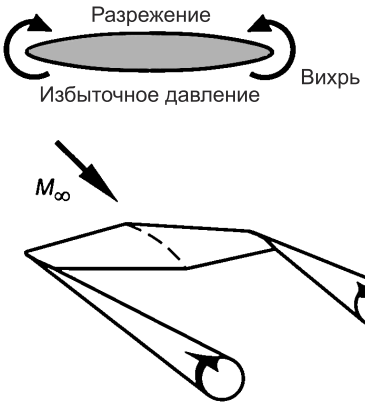


Рис. 6.14. Вихрь на кромке крыла конечного размаха.

Обтекание крыла

В нижеследующем материале главы знания об обтекании профиля переносятся на крыло конечного размаха рисунка 6.6. Обтекание крыла трехмерно.

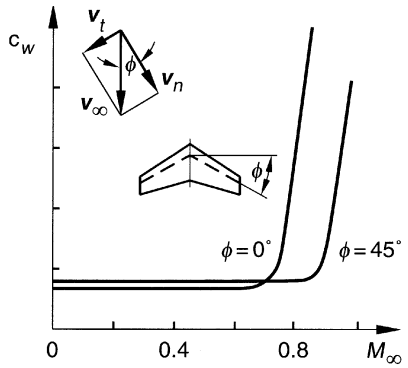


Рис. 6.15. Влияние стреловидности ϕ на коэффициент сопротивления c_w

На двумерный поток профиля накладывается третья компонента скорости в направлении размаха крыльев. Объяснение этому дается на рисунке 6.14. На верхней стороне крыла властвует разрежение, а на нижней стороне — избыточное давление. Это ведет к такому обтеканию кончиков крыла, которое в следе за крылом образует вихрь. Этот вихрь вызывает компоненту скорости, направленную вниз по потоку за крылом. Дополнительное образование вихрей на кромках крыльев изменяет распределение давления таким образом, что возникает дополнительное сопротивление давления, которое называется индуктивным (индуцированным этими вихрями и связанным с подъемной силой). Баланс сопротивления (4.124), состоящий из сопротивления давления и трения, дополняется у крыла индуктивным сопротивлением давления c_i:

$$c_w = c_d + c_f + c_i + c_s. \tag{6.6}$$

При трансзвуковом обтекании крыла добавляется сопротивление давления, связанное с появлением скачка уплотнения на верхней стороне крыла, которое называют волновым сопротивлением c_s. Доли сопротивления для крыла с суперкритическим профилем составляют 51% для сопротивления трения c_f, 35% — для индуктивного сопротивления c_i, 10% для сопротивления давления c_d, 4% для волнового сопротивления c_s.

При этом речь идет о стреловидном трансзвуковом крыле, которое понижает локальное число Маха обтекания сегментов профиля таким образом, что рост сопротивления на рис. 6.9 сдвигается к более высоким числам Ма-

ха. Тот факт, что эффективное профильное число Маха может уменьшиться благодаря стреловидности ϕ на $M_n = M_\infty \cos(\phi)$, был впервые осознан в 1939 году Бетцем (рис. 6.15). При этом он исходил из соображения, что сопротивление давления производится только из-за нормальной к кромке крыла компоненты $\boldsymbol{v}_n$ скорости обтекания. Если обтекание происходит тангенциально (касательно) к размаху крыльев со скоростью $\boldsymbol{v}_t$, то этот поток не вызывает изменения давления на крыле.

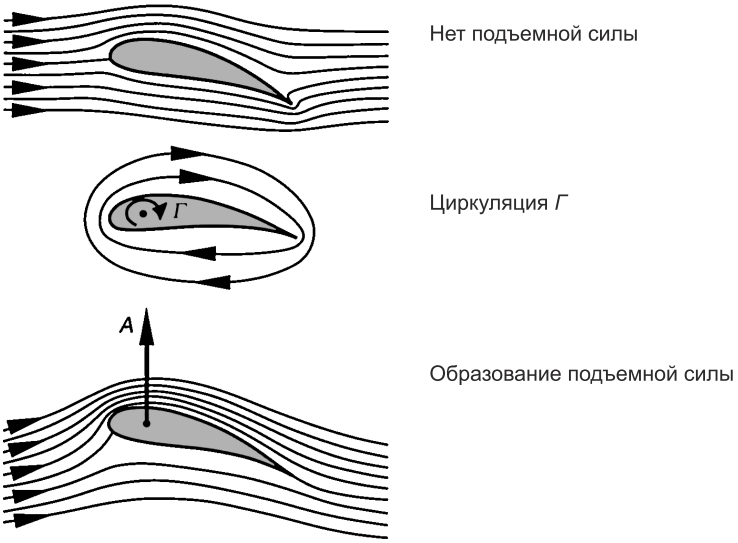


Рис. 6.16. Образование подъемной силы на профиле крыла (обтекание профиля см. рис. 4.29)

6.1.3. Теория крыла

Основой теории крыла Прандтля является понимание того, что аэродинамическая подъемная сила вызывается распределением циркуляции вокруг крыла. При этом исходят из того, что для больших чисел Рейнольдса распределение циркуляции и давления на крыле можно определить из уравнения потенциала скорости $\Delta\phi = 0$ (4.20) для потока без трения.

Суперпозиция частных решений при выполнении на задней кромке

условия обтекания Жуковского-Кутта, позволяет определить подъемную силу профиля при невязком обтекании (рис. 6.16), которая представляется через циркуляцию скорости $\Gamma = \oint \boldsymbol{V}\, d\boldsymbol{s}$ как:

$$A = \rho \Gamma u_\infty. \tag{6.7}$$

Возникновение циркуляции на крыле объясняется на рис. 6.17. При начале движения крыла из состояния покоя на его задней кромке возникает разгонный вихрь (начальный вихрь Прандтля) с отрицательной циркуляцией $-\Gamma$. Так как по теореме Томсона (глава 4.1.5) общая циркуляция должна сохраняться, вокруг крыла возникает такая же циркуляция но с положительным знаком, которую называют присоединенным вихрем. Если соединить присоединенный вихрь, начальный вихрь и пограничные свободные вихри рис. 6.14, то возникает замкнутая вихревая система рис. 6.18, так как по теореме Гельмгольца вихревая нить в свободном потоке не может заканчиваться. Подъемная сила, вызванная присоединенным и свободными вихрями, обуславливает появление индуктивного сопротивления c_i, входящего в уравнение (6.6).

Так как до сегодняшнего дня первоначальные проектные расчеты крыла при дозвуковом обтекании осуществляется по теории Прандтля, то ниже необходимо изложить теоретические основы. Теоретическое положение Прандтля (1920) исходит из того, что для расчета подъемной силы крыло заменяется линией с наложенным распределением циркуляции (так называемой несущей линией Прандтля).

Самая простая вихревая система крыла конечного размаха состоит из присоединенного вихря интенсивности Γ и двух пограничных вихрей одинаковой интенсивности (рис. 6.18).

Так как величина подъемной силы по направлению к кромкам крыла уменьшается, то ее можно приближенно представить с помощью системы вихревых нитей, распределенных по размаху крыла. Для вихревой системы рис. 6.19 в середине крыла совокупность вихревых нитей дает вихрь с суммарной циркуляцией Γ. На расстоянии d вихревая нить с такой интенсивностью наводит скорость $w = \Gamma/(2\pi d)$ (параграф 4.1.7). Полубесконечный вихрь, тянущийся в плоскости разреза крыла назад, наводит в силу симметрии лишь половинное значение $\Gamma/(4\pi d)$. В середине крыла $d = s/2$ суммируются скорости, наведенные левым и правым вихрем. Это дает:

$$w_0 = 2\frac{\Gamma}{4\pi s/2} = \frac{\Gamma}{\pi s}.$$

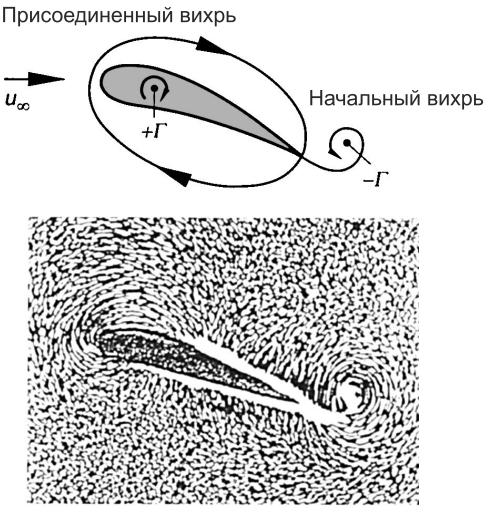


Рис. 6.17. Начальный вихрь и присоединенный вихрь профиля крыла, Л. Прандтль, О. Г.Титйенс 1934

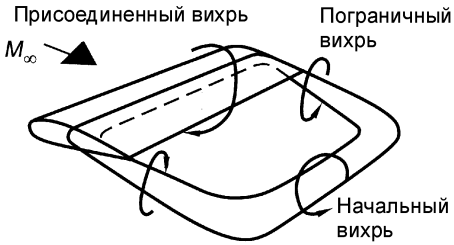


Рис. 6.18. Система вихря вокруг несущего крыла

В соответствии с условием Кутта – Жуковского $\Gamma = A/(\rho s v_\infty)$ для крыла размаха s будет

$$w_0 = \frac{A}{\pi \rho v_\infty s^2}.$$

Вокруг середины крыла получаются большие скорости, которые вблизи кро-

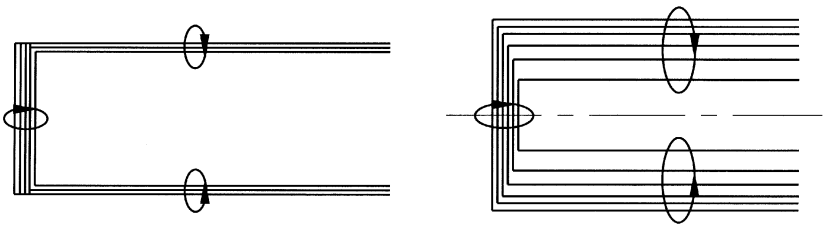


Рис. 6.19. Упрощенная система система вихрей несущего крыла

мок крыльев уходят в бесконечность. Это означает, что предположение о постоянстве распределения подъемной силы по размаху крыла вплоть до его кромок недопустимо. Если предположить изображенное на рисунке 6.20 эллиптическое распределение подъемной силы, то над крылом получат постоянную вертикальную скорость w. В середине циркуляция на $4/\pi$ больше среднего значения. Тем самым отдельные вихревые нити, в среднем, находятся ближе к середине и w становится больше, чем w_0. Интегрирование всех вихревых нитей дает:

$$w = 2w_0 = \frac{2A}{\pi\rho v_\infty s^2}. \tag{6.8}$$

Тем самым получается, что обтекание происходит с углом атаки

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{w}{v_\infty} = \frac{2A}{\pi\rho v_\infty^2 s^2} = \frac{A}{\pi p_s s^2},$$

с динамическим давлением p_s. Так как w при эллиптическом распределении подъемной силы над размахом крыла постоянно, то и $\mathrm{tg}(\alpha)$ тоже постоянен. Тем самым, для индуктивного сопротивления $W_i = A\,\mathrm{tg}(\alpha)$ получается:

$$W_i = \frac{A^2}{\pi p_s s^2}. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) показывает, что индуктивное сопротивление тем меньше, чем больше размах крыльев s, на который распределяется подъемная сила. Это приводит у самолетов с дозвуковым обтеканием к крыльям большого размаха. Длина хорды крыла l в уравнении (6.9) не присутствует. Это связано только с состоянием потока позади крыла, а не с распределением циркуляции по хорде крыла.

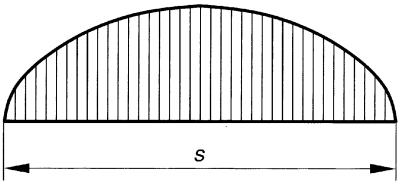


Рис. 6.20. Эллиптическое распределение давления

Распределение интенсивности вихря на средней линии удлиненного профиля вытекает из кинематического условия, что средняя линия должна быть линией обтекания. При этом на распределение вихря накладывается поступательная скорость $\boldsymbol{v}_\infty$, которая образует с хордой профиля угол атаки α (рис. 6.21). Для линии обтекания действительно, что в каждой точке исчезает компонента вертикальной скорости. Для удлиненного профиля можно приближенно заменить среднюю линию хордой профиля, так, что примерно получится:

$$\boldsymbol{v}_\infty \left(\alpha - \frac{dz}{dx}\right) + w(x) = 0. \tag{6.10}$$

$\gamma(x)$ — это интенсивность вихря на единицу длины (напряженность вихря). Бесконечно малый элемент вихря интенсивности $\gamma(x')dx'$ в сечение x' производит бесконечно малую скорость

$$dw = -\frac{\gamma(x')dx'}{4\pi(x - x')}. \tag{6.11}$$

Интегрирование по хорде профиля l дает вертикальную скорость:

$$w(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^l \frac{\gamma(x')\,dx'}{x - x'}. \tag{6.12}$$

Уравнение (6.10) с вертикальной скоростью (6.12) является основным уравнением удлиненных профилей, которое вытекает из требования, что средняя линия является линией обтекания. Тем самым среди прочего рассчитывают рост коэффициента подъемной силы c_a на рисунке 6.11:

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = 2\pi. \tag{6.13}$$

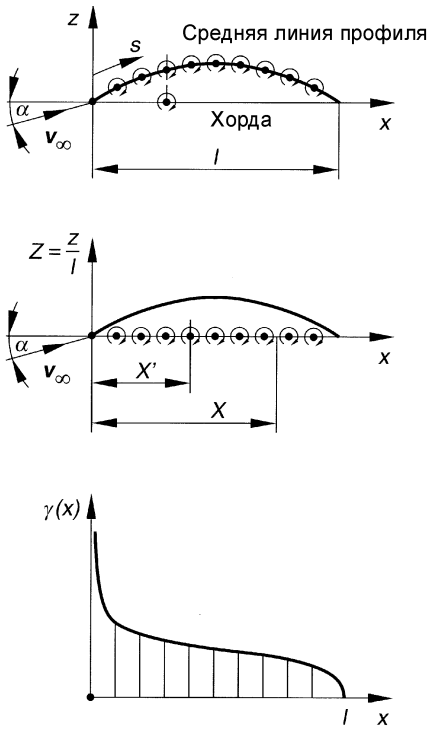


Рис. 6.21. Распределение интенсивности вихрей вдоль средней линии и хорды профиля удлиненного крыла

Перенос на крыло связывают с элементарной вихревой нитью, образованной присоединенным и свободным пограничным вихрем рис. 6.19, которую называются также подковообразным вихрем. Элементарная вихревая нить, которая простирается в обе стороны в бесконечность, производит в соответствии с рисунком 6.22 для каждого бесконечно малого элемента вихря $d\boldsymbol{l}$ в точке P скорость

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}^3|}. \tag{6.14}$$

Это соотношение называется формулой Био–Савара. Интегрирование вдоль

элементарной нити вихря дает:

$$\boldsymbol{v} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}^3|}. \tag{6.15}$$

С определением производной вектора получают направление вектора скорости $w = |\boldsymbol{v}|$, который направлен вниз:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Theta)}{|\boldsymbol{r}^2|}\, dl. \tag{6.16}$$

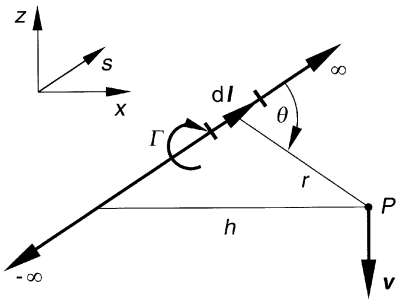


Рис. 6.22. Скорость $\boldsymbol{v}$ в точке P прямой элементарной нити вихря.

С вертикальным расстоянием h к элементу вихря dl получают интегрирование для полубесконечной элементарной вихревой нити:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \tag{6.17}$$

Концепция элементарной вихревой нити была впервые введена Г. Гельмголцем для расчета несжимаемых потоков без трения. Теорема Гельмгольца гласит, что интенсивность вихря Γ вдоль элементарной вихревой нити постоянна, и, что элементарная вихревая нить не может закончиться в поле потока. При этом элемнентарная вихревая нить уходит на бесконечность, где происходит ее смыкание с начальным вихрем (рис. 6.14). Как уже излагалось, Л. Прандтль расширил концепцию подковообразного вихря присединенным вихрем и двумя простирающимися в бесконечность вихрями

для расчета индуцированной подъемной силы крыла, причем учитывается распределение циркуляции по крылу конечного размаха (см. рис. 6.20).

Если рассмотреть отдельный подковообразный вихрь рис. 6.23, то понятно, что присоединенный вихрь размаха крыльев s не вызывает компоненты скорости вдоль элементарной нити вихря.

Этот участок вихревой нити создает лишь вертикальную компоненту скорости $w(y)$. Пограничные вихри также наводят только вертикальную скорость. Из уравнения (6.17) можно получить эту скорость, наводимую полубесконечными пограничными вихрями вдоль размаха присоединенного вихря:

$$w = -\frac{\Gamma}{4\pi(s/2+y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(s/2-y)} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{s}{s^2/4-y^2}. \qquad (6.18)$$

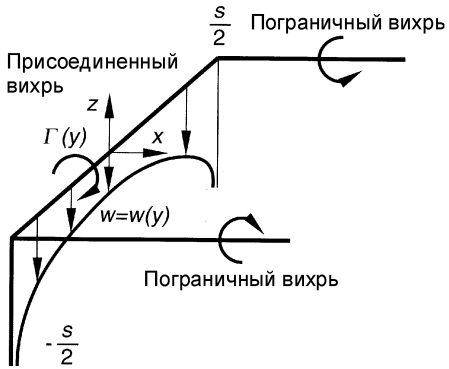


Рис. 6.23. Распределение вертикальной скорости $w(y)$ для отдельного подковообразного вихря

Следует обратить внимание, что w при $\pm s^2$ на кромках крыльев стремится к ∞. Это привело к тому, что Л. Прандтль рассматривал не единственный подковообразный вихрь на крыле, а большое количество подковообразных вихрей, имеющих разную длину присоединенного вихря. Они располагаются вдоль линии, которую называют линией подъемной силы или или несущей линией крыла. Рисунок 6.24 сначала показывает суперпозицию трех подковообразных вихрей. Первый подковообразный вихрь интенсивности $d\Gamma_1$ трансформирует весь присоединенный вихрь от точки

$A\,(y=-s/2)$ до точки $F\,(y=+s/2)$. На него наложен второй подковообразный вихрь силы интенсивности $d\Gamma_2$ от B до E, который перекрывает лишь часть присоединенного вихря. Также действует и третий подковообразный вихрь $d\Gamma_3$. Из этого следует, что интенсивность вихря вдоль линии подъемной силы изменяется. Она составляет вдоль $\overline{AB}$ и $\overline{EF}\,d\Gamma_1$, вдоль $\overline{BC}$ и $\overline{DE}\,d\Gamma_1+d\Gamma_2$ и вдоль $\overline{CD}\,d\Gamma_1+d\Gamma_2+d\Gamma_3$. К каждому элементу вихря вдоль линии подъемной силы присоединяются два пограничных вихря. Интенсивность каждого пограничного вихря равна изменению циркуляции вдоль линии подъемной силы.

Если экстраполировать суперпозицию на бесконечное множество подковообразных вихрей бесконечно малой интенсивности $d\Gamma$, то получится непрерывное распределение интенсивности вихря $d\Gamma(y)$ по размаху крыла. Пусть максимальным значением циркуляции будет Γ_0. Из конечного числа подковообразных вихрей получилась непрерывная пелена вихрей, параллельная скорости обтекания $\boldsymbol{v}_\infty$. Интегрирование интенсивности вихрей поперек этой пелены дает ноль, так как пограничные вихри имеют соответственно попарно одинаковую интенсивность, но с противоположным знаком.

Если рассматривать бесконечно малый элемент dy линии подъемной силы с интенсивностью вихря $\Gamma(y)$, то изменение вихря на этом элементе составит $d\Gamma=(d\Gamma/dy)dy$. Интенсивность пограничного вихря пелены в месте y равно изменению интенсивности присоединенного вихря $d\Gamma$. В месте y' каждый элемент dx пограничного вихря вызывает в соответствии с законом Био-Савара (6.14) вертикальную скорость

$$dw=\frac{\dfrac{d\Gamma}{dy}dy}{4\pi(y'-y)}. \tag{6.19}$$

Интегрирование всех пограничных вихрей дает:

$$w(y')=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\frac{\dfrac{d\Gamma}{dy}}{y'-y}\,dy. \tag{6.20}$$

Следует рассчитать еще распределение циркуляции $\Gamma(y)$ для заданного крыла и тем самым подъемную силу и индуцированное подъемной силой сопротивление. Обозначения, используемые в теории крыла Прандтля,

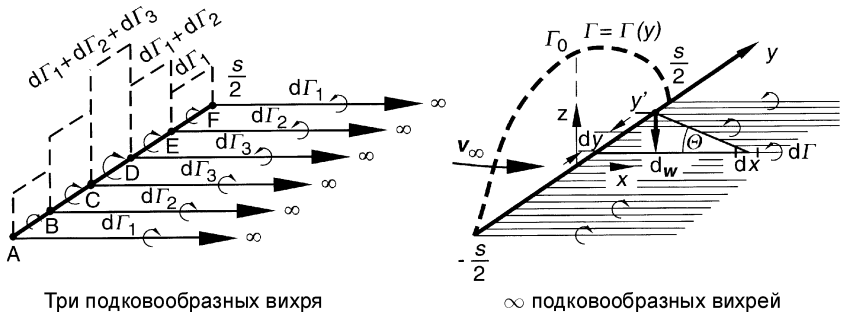


Рис. 6.24. Суперпозиция подковообразных вихрей вдоль линии подъемной силы

изображены на рисунке 6.25 в дополнение к рисунку 6.6. К геометрическому углу атаки α добавляется индуктивный (вызывающий подъемную силу) угол атаки α_i со скоростью обтекания $\boldsymbol{v}_\infty$. Из этого вытекает эффективный угол атаки α_{eff} между хордой профиля и локальным направлением обтеканием:

$$\alpha_{eff} - \alpha - \alpha_i. \tag{6.21}$$

Тем самым получается компонента локального вектора подъемной силы в направлении $\boldsymbol{v}_\infty$, которую называют индуктивным (вызванным подъемной силу) сопротивлением W_i. Если обозначить сечение профиля y', то для индуктивного угла атаки получается:

$$\alpha_i(y') = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{-w(y')}{\boldsymbol{v}_\infty}\right)}. \tag{6.22}$$

w, в общем, на один порядок меньше, чем $\boldsymbol{v}_\infty$, так что из (6.22) получается

$$\alpha_i(y') = -\frac{w(y')}{\boldsymbol{v}_\infty} \tag{6.23}$$

Из уравнения (6.20) получают отношение между индуктивным углом атаки α_i и распределением циркуляции $\Gamma(y)$:

$$\alpha_i(y') = \frac{1}{4\pi \boldsymbol{v}_\infty} \int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{\dfrac{d\Gamma}{dy}}{y' - y}\, dy. \tag{6.24}$$

В соответствии с рисунком 6.25 α_{eff} является углом атаки, который имеет место для рассмотренного локального профиля в месте y'. Так как направленная вниз вертикальная скорость варьируется по размаху крыла, эффективный угол атаки α_{eff} соответственно изменяется. Тем самым для коэффициента подъемной силы в сечении $y = y'$ получается

$$c_a = a'(\alpha_{eff}(y') - \alpha_{A=0}) = \\ = 2\pi(\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{A=0}). \tag{6.25}$$

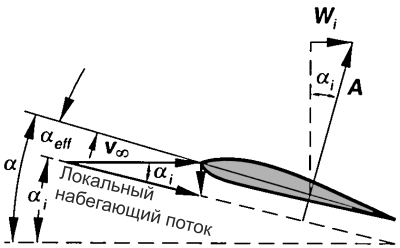


Рис. 6.25. Геометрический α, индуктивный α_i и эффективный α_{eff} углы атаки локального профиля крыла

При этом производная коэффициента подъемной силы была заменена значением 2π, причем угол $\alpha_{A=0}$ при подъемной силе $A = 0$ изменяется у крыла с закруткой в соответствии y'. Для крыла без закрутки $\alpha_{A=0}$ постоянно и тем самым является для заданного крыла известной величиной. С условием Кутта–Жуковского для локального профиля с длиной $l(y')$ получается подъемная сила:

$$A' = \frac{1}{2}\rho_\infty \boldsymbol{v}_\infty^2 l(y')c_a = \rho_\infty \boldsymbol{v}_\infty \Gamma(y'). \tag{6.26}$$

Тем самым для коэффициента подъемной силы получается:

$$c_a = \frac{2\Gamma(y')}{\boldsymbol{v}_\infty l(y')}. \tag{6.27}$$

Для эффективного угла атаки с (6.25) получается:

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y')}{\pi \boldsymbol{v}_\infty l(y')} + \alpha_{A=0}. \tag{6.28}$$

С $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ и уравнением (6.24) получается основное уравнение теории крыла Прандтля:

$$\alpha(y') = \frac{\Gamma(y)'}{\pi \boldsymbol{v}_\infty l(y')} + \alpha_{A=0}(y') + \frac{1}{4\pi \boldsymbol{v}_\infty} \int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dy}}{y' - y}\, dy. \tag{6.29}$$

Это интегродифференциальное уравнение применяется при условии, что геометрический угол атаки равен сумме эффективного угла атаки и индуктивного угла атаки. Единственное неизвестное — распределение циркуляции Γ. Все другие величины $\alpha, l, \boldsymbol{v}_\infty$ и $\alpha_{A=0}$ при заданном крыле известны. Решение уравнения (6.29) дает $\Gamma = \Gamma(y')$, причем y' варьируется по размаху крыла от $y = -s/2$ до $y = s/2$. Тем самым с условием Кутта–Жуковского получают индуцированную подъемную силу:

$$A'(y') = \rho_\infty \boldsymbol{v}_\infty \Gamma(y'), \tag{6.30}$$

и общую подъемную силу:

$$A = \rho_\infty \boldsymbol{v}_\infty \int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y)\, dy. \tag{6.31}$$

С уравнением (6.2) получается коэффициент подъемной силы:

$$c_a = \frac{A}{\frac{1}{2}\rho_\infty \boldsymbol{v}_\infty^2 S} = \frac{2}{\boldsymbol{v}_\infty S} \int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y)\, dy \tag{6.32}$$

с площадью крыла S.

Интегрирование вдоль крыла дает индуктивное (вызванное подъемной силой) сопротивление:

$$W_i = \rho_\infty \boldsymbol{v}_\infty \int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y)\alpha_i(y)\, dy. \tag{6.33}$$

Для коэффициента сопротивления получается:

$$c_{w_i} = \frac{W_i}{\frac{1}{2}\rho_\infty \boldsymbol{v}_\infty^2 S} = \frac{2}{\boldsymbol{v}_\infty S} \int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y)\alpha_i(y)\, dy. \tag{6.34}$$

Теория крыла Прандтля дает тем самым все аэродинамические свойства заданного крыла. Способы решения уравнения (6.29), как, например, метод элементарной нити вихря (Й. Д. Андерсон мл., 1991) подробно рассматриваются в цитируемой литературе по аэродинамике, так, что здесь не стоит на этом останавливаться.

Различные формы дозвуковых крыльев представлены на рисунке 6.26. Крыло с эллиптической формой поверхности ведет к минимальному индуктивному сопротивлению. Так как эллиптические крылья трудны в изготовлении, на практике предпочитается крыло, которое приближенно осуществляет эллиптическое распределение подъемной силы.

Важный результат теории крыла — это то, что индуктивное сопротивление ведет себя обратно пропорционально размаху крыла s. Чтобы при проекте крыла удержать индуктивное сопротивление по возможности небольшим, нужно размах крыла s выбирать максимально большим. Это экспериментально подтвердил Л. Прандтль в 1915 на прямоугольных крыльях с отношением сторон s/l от 1 до 7. Результаты обобщены на рисунке 6.27. При этом коэффициенты подъемной силы и сопротивления градуировались на прямоугольном крыле с отношением сторон $s/l = 5$.

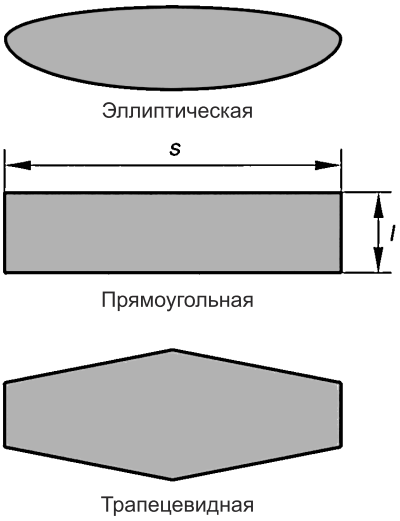


Рис. 6.26. Различные формы плоских крыльев

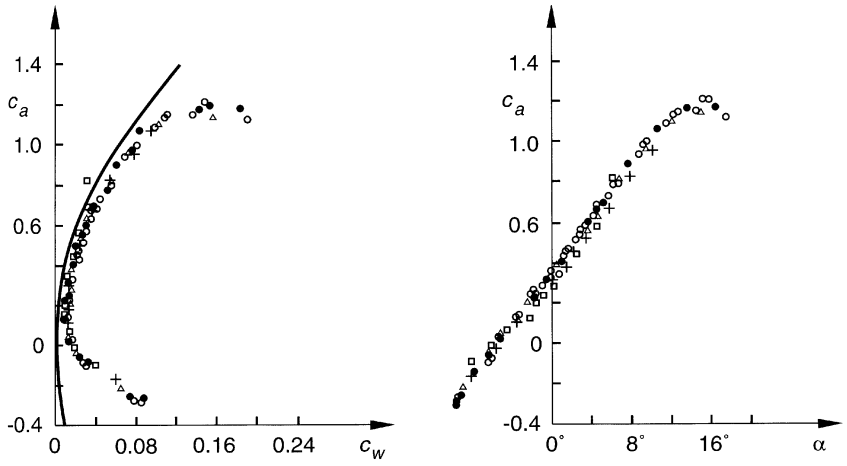


Рис. 6.27. Поляра и коэффициент подъемной силы прямоугольных крыльев с отношением сторон $s/l =$ от 1 до 7, Л. Прандтль 1915

Расчет крыла

Распространение теории крыла на крыло конечной толщины и способы расчета, например, распределения давления описаны среди прочего в книгах по аэродинамике Й. Д. Андерсоном мл. в 1991 году и Д. Кюхеманном в 1987. Рис. 6.28 показывает типичное распределение давления на плоскости дозвуковых крыльев. Почти эллиптическое распределение размаха крыльев соответствует ранее обсужденному положению дел. Сильное ускорение потока вниз по течению от передней кромки крыла ведет на верхней и нижней сторонах к различным пикам давления, которые в конце концов вызывают подъемную силу крыла. Для стреловидного дозвукового крыла, которое рассматривается в главе 6.2.1, распределение давления по размаху крыла значительно изменяется. Пики давления больше выражены на кромках крыльев, что для проекта крыла нежелательно.

До сих пор рассматривалась исключительно теория крыла без трения. Из уравнения (6.6) известно, что общее сопротивление c_w и подъемная сила c_a содержит наряду с частью давления и индуктивной частью c_d и c_i, составляющую часть, связанную с трением c_f. Рисунок 6.29 дает представление

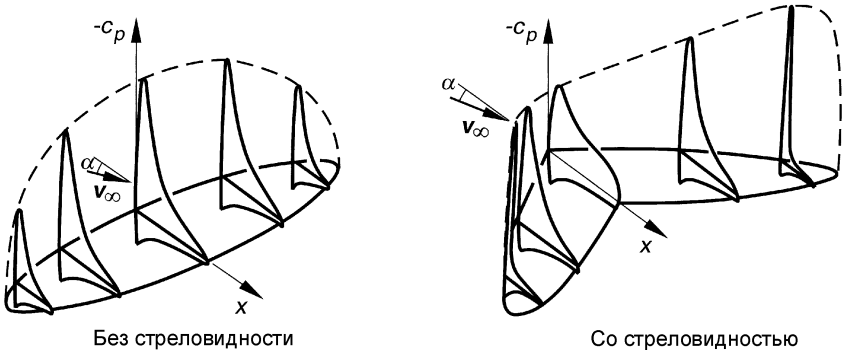


Рис. 6.28. Распределение давления на крыле большого удлинения, Д. Кюхеманн 1978

о соответствующих частях вдоль размаха крыльев стреловидного дозвукового крыла при числе Рейнольдса $Re_l = 1{,}7 \cdot 10^6$ и заданном коэффициенте подъемной силы $c_a = 0{,}56$.

После того как были разработаны способы решения уравнений Навье-Стокса (5.65) для ламинарного потока крыла и уравнения Рейнольдса (5.95) для турбулентного потока, долю давления и трения потока крыла рассчитывают совместно прямым численным решением основных аэродинамических уравнений. Пример трансзвукового расчета крыла представлен на рисунке 6.30. Поле потока подразделяется на дискретные элементы объема, в которых приближенно решаются дискретизированные основные уравнения соответствующими численными алгоритмами. Способы решения подробно рассматриваются в цитируемых учебниках по численной аэродинамике. Сначала необходимо установить переходную линию, на которой осуществляется переход от ламинарного к турбулентному течению в пограничном слое. Критерии перехода описываются в главе 7.3.2. Для расчета турбулентных потоков пограничного слоя выбирается алгебраическая модель турбулентости – модель Болдуина и Ломакса (1978) , которая позволяет рассчитать аэродинамические параметры с точностью лучшей, чем 1%.

Распределение давления на рис. 6.30 показывает, что на основе выбранной геометрии профиля ламинарный участок сохраняется до области взаимодействия скачка с пограничным слоем. Это достигается за счет непрерывного ускорения потока и, тем самым, непрерывного падениея давления на верхней и нижней стороне крыла. В области ускоренного течения по-

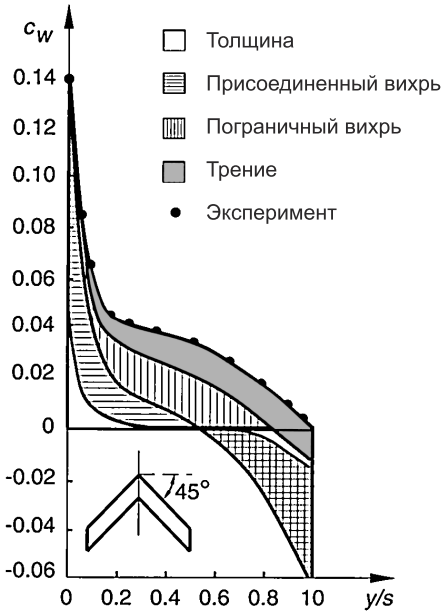


Рис. 6.29. Части сопротивления по размаху крыла стреловидной формы дозвукового крыла, $Re_l = 1{,}7 \cdot 10^6$, Д. Кюхеманн 1978

граничного слоя начало волн Толлмина–Шлихтинга и тем самым переход к турбулентному потоку пограничного слоя сдвигается вниз по течению (см. главу 7.3.2). Вытянутая область сверхзвука завершается слабым скачком уплотнения на крыле, который проявляется как уплотнение поля изобар. Дополнительно к распределению давления в сегментах профиля на рис. 6.30 показаны изобары на поверхности крыла, из которой можно получить распределение нагрузки на крыле.

6.1.4. Аэродинамические испытания

В этом параграфе мы остановимся не на имеющихся сейчас разнообразных аэродинамических трубах и методах измерения, а обратим внимание на аэродинамическую трубу конструкции Прандтля. Трансзвуковые, сверхзвуковые, гиперзвуковые аэродинамические трубы, а также относящаяся сюда

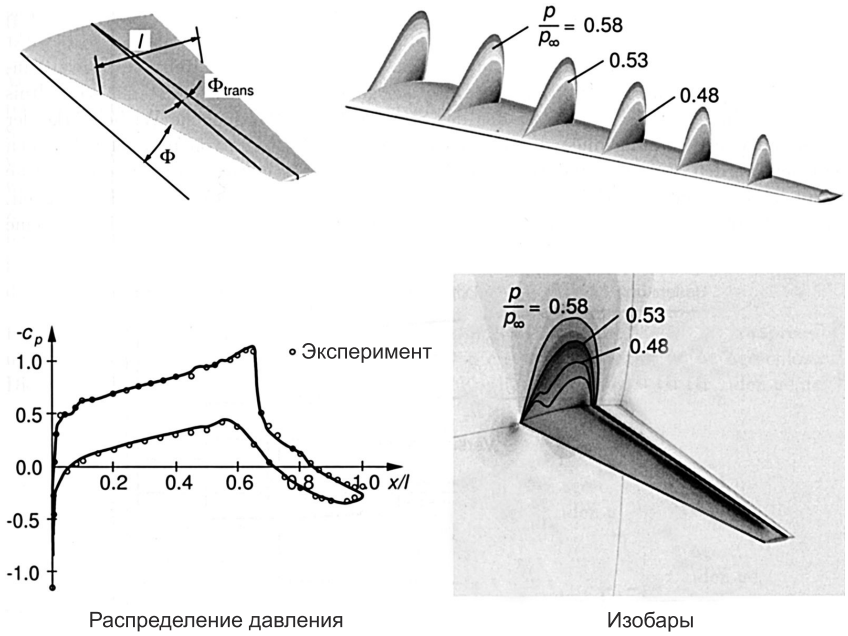


Рис. 6.30. Изобары в сегментах профиля и на поверхности стреловидного трансзвукового крыла, $M_\infty = 0.78$, $Re_l = 26.6 \cdot 10^6$, угол атаки $\alpha = 2^\circ$ и угол профиля $\Phi = 20^\circ$

измерительная техника рассматриваются в цитируемых книгах. Аэродинамическая труба конструкции Прандтля или Геттингера относится к трубам замкнутого цикла с открытым испытательным участком, на котором измеряемая модель крыла или самолета ставится на весы. На рис. 6.31 представлен эскиз аэродинамического канала Прандтля. Воздух подается вентилятором в постоянно расширяющийся канал, а затем в сопло диаметром 2 м с газоструйными рулями. Ускоренный воздух попадает на открытый измерительный участок, оттуда во всасывающий раструб, замедляется в следующем непосредственно за ним диффузоре и потом отводится обратно к вентилятору. Аэродинамическая труба была спроектирована на скорость потока 40 м/с, которая достигалась самолетами в то время. Успокоение воздуха перед соплом осуществлялось выпрямителем и фильтрами.

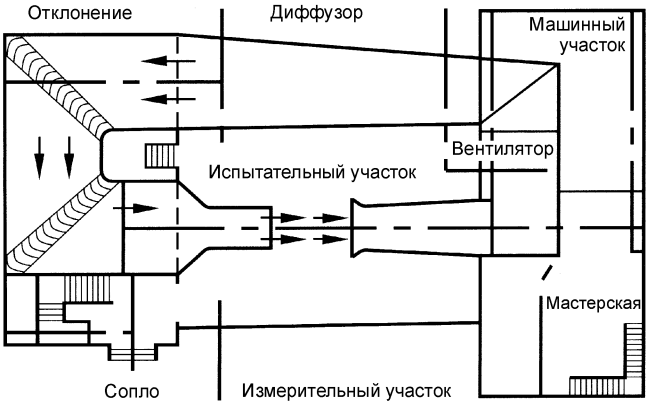


Рис. 6.31. Дозвуковая аэродинамическая труба конструкции Прандтля (Л. Прандтль 1915 г.)

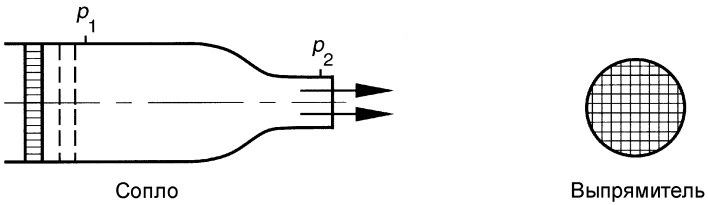


Рис. 6.32. Сопло с выпрямителем и фильтрами

Они изображены на рисунке 6.32. Чтобы достичь однородного потока воздуха на участке измерения с равномерной скоростью в поперечном сечении, необходимо подходящим образом выбрать сужение канала. Перепад давления $p_1 - p_2$ вызывает у каждой частицы воздуха одинаковый рост энергии движения. Относительные колебания выравниваются в большой степени благодаря сужению сопла. Если соотношение скоростей $1 : 5$, то соотношение динамического давления $1 : 25$. Любая завихренность в потоке должна уменьшаться благодаря выпрямителю, то есть системе параллельных каналов. Масса воздуха, вращающаяся вокруг оси, параллельной направлению потока, получает при сужении своего поперечного сечения на $1/n$-кратную угловую скорость. Так как диаметр поперек линии обтека-

ния уменьшается в отношении $1/\sqrt{n}$, получается увеличение поперечной скорости (rw) в отношении $\sqrt{n}$, в то время как продольная скорость увеличивается в соотношении n. Вращение вокруг оси поперек линии обтекания, напротив, дает уменьшение угловой скорости w пропорционально уменьшению поперечного размера r, а именно в $1/\sqrt{n}$ раз. Здесь скорость возмущения (rw) уменьшается в $1/\sqrt{n}$ раз. Для выравнивания продольных колебаний скорости дополнительно устанавливаются проволочные фильтры.

Наряду с этими локальными колебаниями скорости по причине турбулентных потоков появляются также пульсации скорости. Позади выпрямителя располагают, по возможности, равные тонкие фильтры, которые поглощают появляющуюся турбулентность. По причине сужения сопла турбулентность из-за подобных процессов снижается, как и при выравнивании пространственных колебаний скорости. При этом продольная компонента скорости колебания $\sqrt{\overline{u'^2}}$ существенно сильнее уменьшается, чем поперечные компоненты $\sqrt{\overline{v'^2}}$ и $\sqrt{\overline{w'^2}}$, так, что непосредственно за соплом имеется анизотропная турбулентность, которая вниз по течению опять становится изотропной. При этом следует заметить, что поглощающие фильтры сами снова вносят турбулентность в поток, которая вниз по течению затухает. Она может уменьшиться тем, что между последним фильтром и соплом будет предусмотрен участок успокоения потока.

6.2. Трансзвуковая аэродинамика

Транспортные самолеты с реактивным двигателем летают в трансзвуковой зоне до звукового числа Маха. Типичная огибающая полета транспортного самолета показана на рисунке 6.33. При наборе высоты скорость полета $\boldsymbol{v}_\infty$ ограничивается пределом прочности самолета, причем минимальная скорость не может быть ниже так называемой границы закритического режима полета. На больших высотах скорость самолета определяется заданным (конструктивным) числом Маха $M_\infty = 0{,}8$. Ниже 11 км высоты скорость звука изменяется, что при постоянном числе Маха ведет к более высоким скоростям полета. Выше 11 км высоты скорость звука постоянна. Потолок высоты полета ограничивается параметрами герметичности кабины.

При трансзвуковых дозвуковых числах Маха $M_\infty = 0.8$ поток сжимаемый и область сверхзвука на крыле завершается скачком уплотнения.

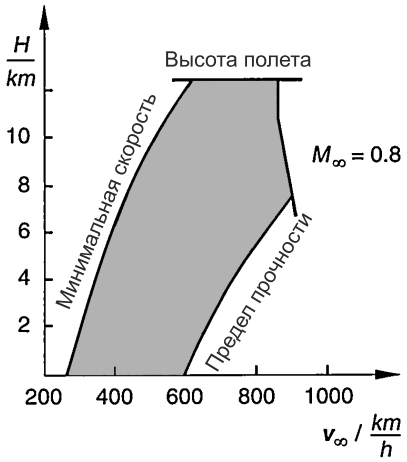


Рис. 6.33. Огибающая полета транспортного самолета

Крылья транспортных самолетов по причинам, названным в главе 6.1.2 имеют стреловидную форму.

Это ведет к уменьшению локального профильного числа Маха и тем самым к уменьшению общего сопротивления c_w (рис. 6.15). Влияние стреловидности крыла было уже известно в 1939 году, как это подтверждает рисунок 6.35. В соответствии со стреловидностью крыла устанавливается пограничный слой крыла, что также влияет на ламинарно- турбулентный переход пограничного слоя.

Процессы трансзвукового обтекания крыла нелинейные. Так, например, линейный рост коэффициента подъемной силы c_a с углом атаки α при дозвуковом обтекании в уравнении (6.14) при трансзвуковом обтекании ослабляется из-за нелинейного процесса. Гидродинамическую потенциальную теорию тоже невозможно больше применять для нелинейного потока, так что для расчета трансзвукового обтекания крыла должны использоваться численные способы решения уравнений Навье – Стокса и Рейнольдса.

Скачок уплотнения, связанный с взаимовлиянием пограничного слоя и скачка на крыле, изменяет поле течения по отношению к дозвуковому потоку таким образом, что коэффициент подъемной силы больше нельзя вычислять без учета влияния трения. Рисунок 6.34 показывает сравнение полученных из расчетов картин обтекания профиля без трения и с учетом

трения при трансзвуковом числе Маха $M_\infty = 0.82$. Распределение давления, вычисленное по гидродинамической теории, не имеет ничего общего с трансзвуковым распределением давления. На рисунке 6.35 изображена поляра крыла стреловидной формы в сравнении с полярами крыла не стреловидной формы для числа Маха $M_\infty = 0{,}9$.

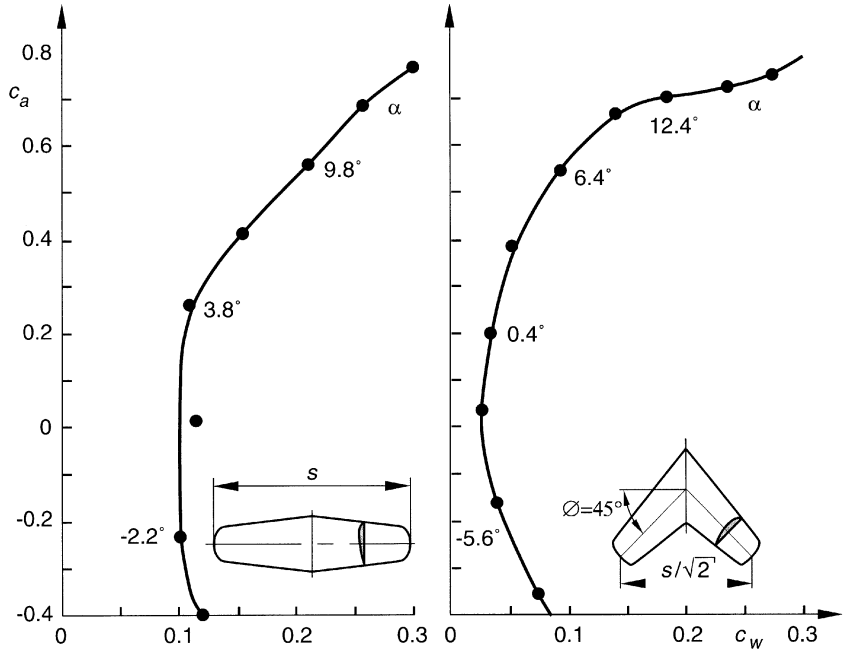


Рис. 6.35. Поляры крыла стреловидной и не стреловидной формы при трансзвуковом числе Маха $M_\infty = 0{,}9$ (Г. Людвиг, 1939 г.)

6.2.1. Крыло стреловидной формы

По причине стреловидности линии тока в пограничном слое крыла искривлены. Если использовать у границы пограничного слоя уравнение Бернулли перпендикулярно линии тока, получиться приблизительно:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{u_\delta^2}{R}, \tag{6.35}$$

с n — нормалью к линии обтекания, u_δ — скоростью на границе пограничного слоя и R — локальным радиусом кривизны линии тока. На стенке по причине условия прилипания $\boldsymbol{v} = 0$. Давление воздействует на пограничный слой так, что приближенно получается:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{z=\delta} = \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{z=0}.$$

Этот градиент давления перпендикулярно линии обтекания вызывает появление компоненты поперечного потока $v(z)$, которая изображена на рис. 6.36. Ламинарно-турбулентный переход в трехмерном пограничном слое определяется не только волнами Толмина–Шлихтинга (ТШ). Из-за наличия компоненты поперечного течения дополнительно появляется неустойчивость поперечного потока (ПП), которая рассматривается в главе 7.3.2. Искривление линий тока приводит к тому, что в передней зоне трансзвукового крыла необходимо считаться с переходом к турбулентному пограничному слою. Для вычисления потока на крыле необходимо соответственно определить линию перехода.

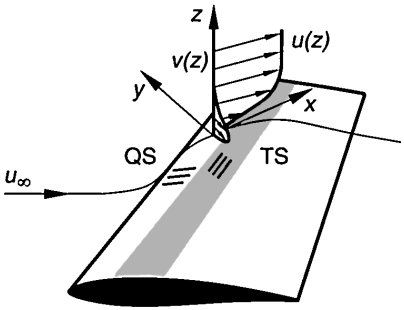


Рис. 6.36. Трехмерный профиль пограничного слоя стреловидного крыла, волны Толмина–Шлихтинга (ТШ) и неустойчивость поперечного потока (ПП)

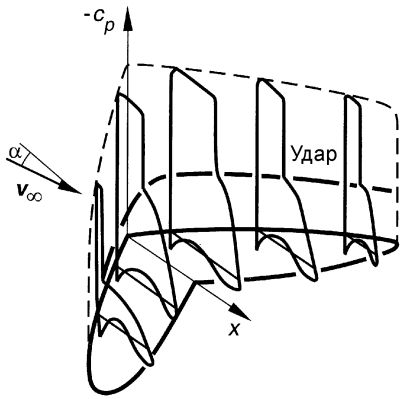


Рис. 6.37. Распределение давления на крыле стреловидной формы при трансзвуковом обтекании (Д. Кюхеманн 1978)

На крыле при числе Маха $M_\infty = 0.8$ возникает скачок уплотнения. Для обычного трансзвукового профиля на рис. 6.37 в дополнение к рис. 6.28

изображено распределение давления на стреловидном трансзвуковм крыле. На верхней стороне крыла появляется сильный скачок уплотнения, знакомый нам по рис. 6.8. От кончика крыла или от зоны крыла–фюзеляжа самолета распространяются дополнительно волны сжатия или скачки уплотнения, которые переводят трехмерное сверхзвуковое течение в передней зоне крыла в параллельное средней линии сверхзвуковое течение (рис. 6.38), которое переходит благодаря почти прямому скачку уплотнения на крыле в дозвуковое течение. Для распределения давления, показанного на рис. 6.37, следует ожидать ламинарно-турбулентного перехода в трехмерном пограничном слое крыла на нижней стороне на пике давления, а на верхней стороне в зоне взаимодействия скачка с пограничным слоем.

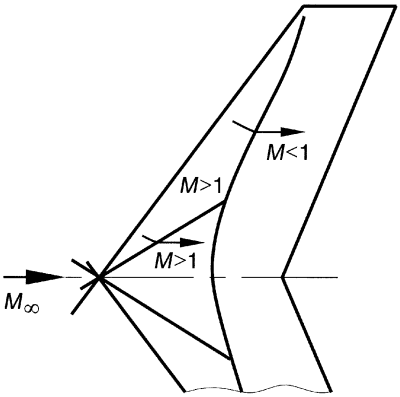


Рис. 6.38. Положение скачка на стреловидном крыле при трансзвуковом обтекании

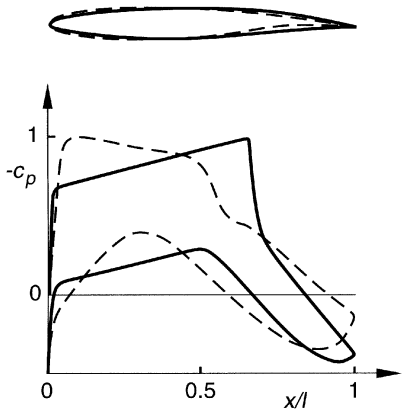


Рис. 6.39. Обычный суперкритический профиль и ламинарный профиль, $M_\infty = 0{,}75$, $c_a = 0{,}5$, $Re_l = 25 \cdot 10^6$

Для снижения высокого волнового сопротивления c_s, вызванного сильным скачком уплотнения, применяют сверхкритические профили крыла, приведенные на рис. 6.10. Форма передней зоны крыла выбирается таким образом, что сверхзвуковая область вытянута вниз по течению и в задней зоне крыла возникает ослабленный скачок уплотнения. Соответствующее этому распределение давления для числа Маха обтекания 0,75 показано штриховыми линиями на рис. 6.39.

Если хотят уменьшить сопротивление трения c_f крыла, необходи-

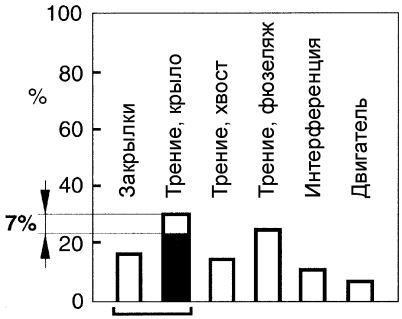


Рис. 6.40. Составные части сопротивления транспортного самолета

мо с помощью подходящего изменения формы сместить ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое крыла вниз по течению. Для этого нужно избегать пика разрежения на верхней стороне крыла и осуществить ускорение до скачка уплотнения. Такое распределение давления нанесено на рис. 6.39 сплошной линией. Оно ведет к меньшим радиусам носика профиля крыла в зоне передней кромки и более крутым подъемам давления в зоне задней кромки. Форма профиля выбирается таким образом, что начало волн Толмина–Шлихтинга (ТШ) перемещается вниз по течению в зону взаимодействия скачка с пограничным слоем. Стреловидность должна быть при этом уменьшена таким образом, чтобы в области передней кромки не появлялась неустойчивость поперечного течения.

Решение уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса (5.65 и 5.95) для такого ламинарного крыла трансзвукового числа Маха обтекания 0,78 изображено на рис. 6.30. Выбирается угол стреловидности $\Phi = 20°$, при котором неустойчивость поперечного потока в зоне передней кромки проявляется заметно меньше, чем возникновение волн Толлмиена–Шлихтинга. Ламинариый поток пограничного слоя сохраняется вплоть до области взаимовлияния скачка и пограничного слоя. При этом вытянутая сверхзвуковая область заканчивается на трансзвуковом крыле слабым скачком уплотнения, который заметен на рис. 6.30 по уплотнению поля изоб.

Составные части сопротивления транспортного самолета представлены на рисунке 6.40. Доля крыла составляет 46%. Благодаря ламинаризации выбранного крыла получают уменьшение сопротивления трения на 15%. Для самолета это означает потенциал экономии в 7%. Другие возможности

уменьшения сопротивления дают вакуумирование пограничного слоя крыла, воздействие на вязкий нижний слой турбулентного пограничного слоя крыла так называемыми ребрами, а также воздействие на зону взаимовлияния скачка и пограничного слоя выступом (впадиной) на крыле, которые рассматриваются в следующей главе.

6.2.2. Взаимодействие скачка с пограничным слоя

Взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем крыла ведет к увеличению толщины пограничного слоя уже перед скачком (рис. 6.41). Утолщение пограничного слоя вызывает возмущения течения перед скачком, которые могут привести к косому скачку уплотнения и тем самым к разветвлению скачка. Позади скачка пограничный слой снова нарастает, что по причине действия вытеснения приводит к постоянному ускорению потока. В зоне взаимовлияния уже перед скачком возрастает давление на поверхности крыла. Этот рост давления связан с уменьшением напряжения трения на стенке. Если речь идет о сильном скачке уплотнения, то напряжение трения на стенке отрицательно и пограничный слой отрывается. По причине ускорения за скачком, вызванного утолщением пограничного слоя и выравниванию благодаря турбулентному перемешиванию получается повторное присоединение области отрыва. В области отрыва давление на стенке крыла почти постоянное.

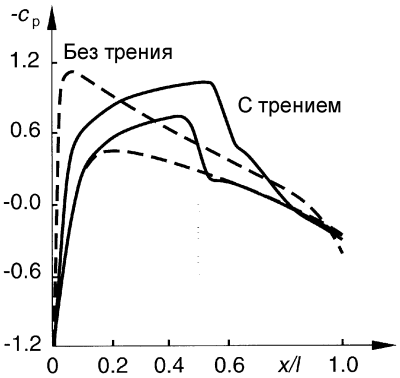


Рис. 6.34. Трансзвуковое обтекание без трения и обладающее трением, $M_\infty = 0{,}82$

Утолщение турбулентного пограничного слоя вызывает повышение общего сопротивления крыла. Чтобы уменьшить повышение сопротивления сначала стремятся к ослаблению интенсивности скачка и, тем самым, к уменьшению волнового сопротивления с помощью камеры выравнивания давления в крыле. Рис. 6.42 показывает принцип действия камеры. Пассивное выравнивание давления происходит благодаря пористости стенки камеры выравнивания, находящейся внизу в зоне скачка. Эта камера делает

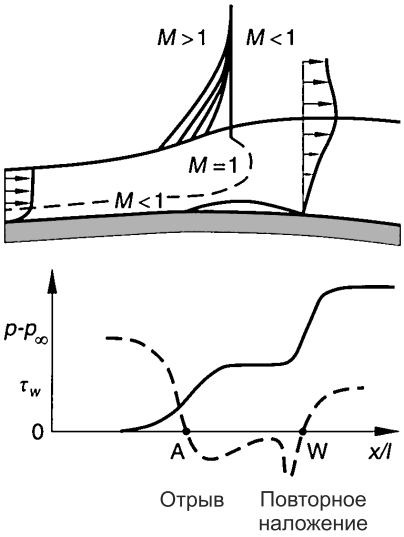


Рис. 6.41. Взаимодействие скачка и пограничного слоя, отрыв потока и распределение давления и напряжения трения на стенке

возможным частичное выравнивание давления в зоне взаимодействия скачка и пограничного слоя самоиндуцированным вентиляционным потоком. Вентиляция и вытеснение граничного слоя приводит к изменению структуры скачка уплотнения, и вместо сильного скачка уплотнения образуется ослабленный скачок уплотнения. Как следствие ослабления скачка уменьшается волновое сопротивление и сопротивление трения и предотвращается появление области отрыва вблизи стенки.

На рис. 6.42 сравнивается картина рассчитанных по уравнениями Рейнольдса изомах для пассивного трансзвукового профиля, с изомахами для профиля снабженного вентиляционной камерой выравнивания. Перед скачком появляется область предварительного сжатия, следствием которого является описанное разветвление скачка. Оно тем сильнее, чем выше выбранное давление в камере. Косой скачок уплотнения возникает в начале вентиляционной камеры. То, что скачок фиксируется у начала зоны воздействия, имеет дополнительный эффект. Благодаря разнице давления до и после разветвления скачка в вентиляционной камере устанавливается из-за

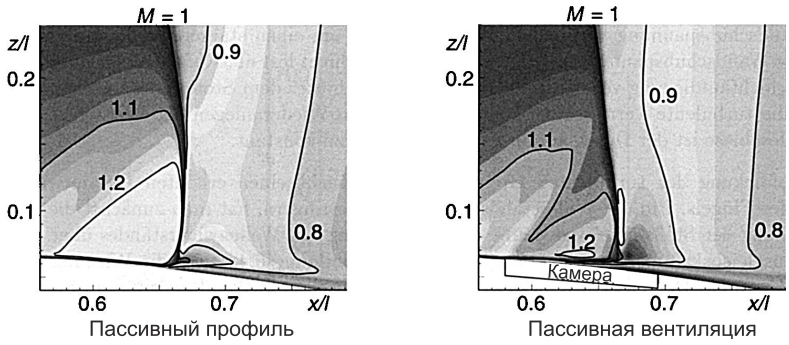


Рис. 6.42. Изомахи при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем и влияние камеры выравнивания, $M_\infty = 0{,}76$, $Re_l = 6 \cdot 10^6$, $\alpha = 2^\circ$

перфорации стенок вторичное течение. Следствием этого является то, что в передней зоне камеры выравнивания поток выдувается. Тем самым там соответственно увеличивается толщина вытеснения и степень турбулентности в пограничном слое. За косыми скачками течение разрежается, что уменьшает внизу по течению нарастание пограничного слоя.

Так как приращение энтропии и, тем самым, приращение волнового сопротивления пропорциональны третьей степени интенсивности скачка, то волновое сопротивление профиля с двумя косыми скачками уплотнения меньше, чем сопротивление профиля, на котором имеется один прямой скачек. Тем самым камера выравнивания давления вызывает желаемое уменьшение сопротивления. Другой способ уменьшения сопротивления — это направленное изменение контура в зоне скачка, которое технически проще выполнить на крыле, чем использовать камеру выравнивания. При этом благодаря незначительному расширению моделируется линия обтекания, как она реализуется при пассивной вентиляции посредством камеры выравнивания.

На рисунке 6.43 изображено конструктивное решение крыла рис. 6.30 с выступом. Снова получается разветвление скачка. Так как с выступом пограничный слой не возмущается дополнительным потоком из камеры выравнивания, степень турбулентности остается в зоне взаимовлияния меньше и пограничный слой утолщается не так сильно. Благодаря увеличению искривления выступа область последующего расширения вытягивается, что

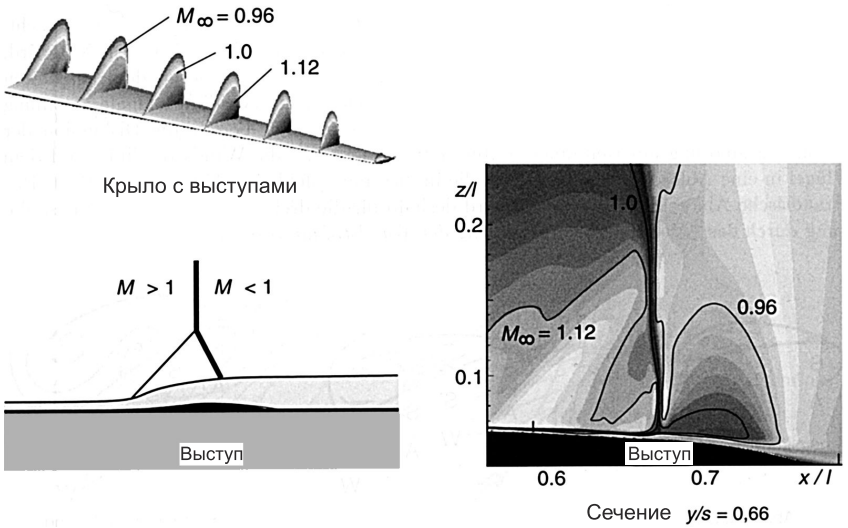


Рис. 6.43. Влияние выступа на крыле на изомахи и взаимодействие скачка с пограничным слоем, $M_\infty = 0.78$, $Re_l = 27 \cdot 10^6$, $\Phi = 20°$, $\alpha = 2°$

еще больше уменьшает тенденцию к отрыву. В совокупности получается уменьшение общего сопротивления на 8%, причем подъемная сила крыла дополнительно незначительно улучшается.

6.2.3. Отрыв потока

В главе 6.1.2 уже излагалось, что при увеличении угла атаки выше критического α_{krit} поток на крыле срывается (рис. 6.11). По причине увеличенного вытеснения это ведет к повышению сопротивления давления и трения при одновременном падении подъемной силы (рис. 6.13). С ростом угла атаки α срыв потока на крыле начинается с образования сначала стационарной области отрыва. Линия отрыва A и линия повторного присоединения W являются в соответствии с главой 3.3.1 полуседлом S' (рис. 6.44). С дальнейшим ростом угла атаки получается вторичный отрыв, который ведет к двум другим полуседлам. В передней части крыла срыв остается сначала стационарным. Но все же вниз по потоку может образоваться открытая отрывная область трехмерного нестационарное течения, что мо-

жет привести к бафтингу — вынужденным колебаниям конструкции крыла под действием нестационарных аэродинамических сил. На третьем изображении рис. 6.44 показаны все поверхности отрыва потока в поле потока. Поверхности отрыва вызывают появление вихревой пелены. Вторичный отрыв ведет у формированию второй вихревой дорожки, так как поток вблизи стенки не может разгоняться против градиента давления, который вызывается первичным срывом вихря.

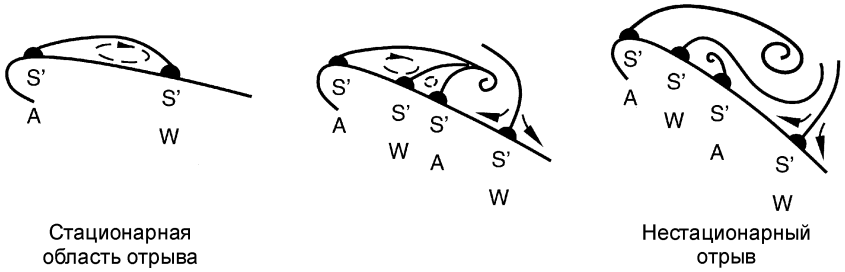


Рис. 6.44. Картина отрыва потока на крыле в зависимости от угла атаки

Ранее уже использовался критерий отрыва Прандтля, по которому касательное напряжение на стенке τ_w на линии отрыва или присоединения становится нулевым. Это связано с разветвлением линий обтекания у стенки, которое ведет к единственному полуседлу S'. Этот критерий отрыва относится к двухмерным потоком. Для трехмерного отрыва потока обсуждение отрыва потока на дельта-крыле (рис. 3.9) уже показало, что предельные линии тока на крыле сходятся в одну линию отрыва, которая ограничивает в поле потока поверхность отрыва. Критерий отрыва Прандтля $\tau_w = 0$ заменяется поэтому для трехмерного отрыва потока на критерий конвергенции (схождения) линий обтекания стенки. Рис. 6.45 показывает две возможности трехмерного отрыва. Первый рисунок показывает трехмерную область отрыва, а второй рисунок — это образование свободной вихревой поверхности. У области отрыва обратный поток в зоне отделен от главного потока трехмерным сдвиговым слоем. Этот слой сдвига склонен к появлению неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (глава 7.3.3), которая все же ничего не меняет в положении области отрыва. Свободная поверхность сдвига второго рисунка ведет к линии разветвления поверхности потока на стенке и поверхности отрыва, которая развертывается вниз по течению в соответ-

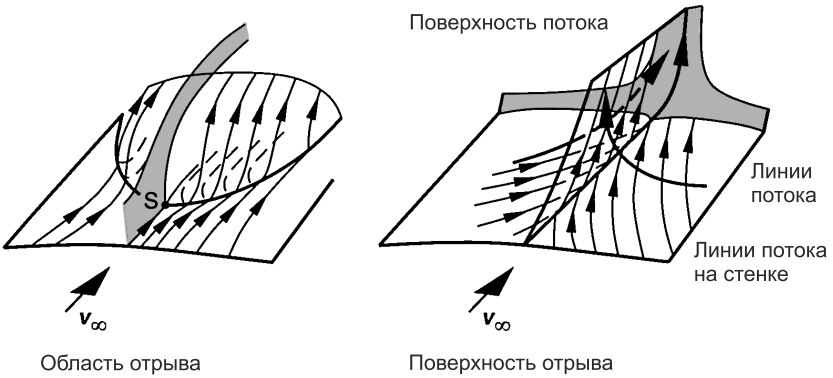


Рис. 6.45. Трехмерный отрыв потока

ствии с рисунком 6.44 и образует нестационарную вихревую дорожку. Для трехмерного отрыва нельзя применить критерий отрыва Прандтля $\tau_w = 0$, так что необходимо дальнейшее развитие теории. В цитируемой литературе описываются несколько трехмерных критериев отрыва, которые все же до сих пор не привели к созданию окончательной теории.

6.3. Сверхзвуковая аэродинамика

Аэродинамика сверхзвукового полета принципиально отличается от дозвуковой аэродинамике из-за наличия на вершине и кромках профиля скачков уплотнения, рассмотренных в главе 6.1.2. Для сверхзвукового полета необходимо выбирать форму крыла, которая по возможности создает небольшое волновое сопротивление и тем самым небольшую силу скачка. Волновое сопротивление может составлять до половины общего сопротивления. Косые скачки уплотнения головной и хвостовой волны тем слабее, чем больше выражена стреловидность крыла и чем острее передняя кромка крыла. Это ведет в сверхзвуке к дельта-крыльям, чья аэродинамика определяется наряду со скачками уплотнения отрывом у передней кромки и вытекающей из этого вихревой системой на крыле (рис. 6.46), что вызывает дополнительную подъемную силу, которая становится больше с ростом угла атаки.

На рис. 6.47 приводится отношение коэффициента подъемной силы к коэффициенту сопротивления c_a/c_w (аэродинамическое качество) в зави-

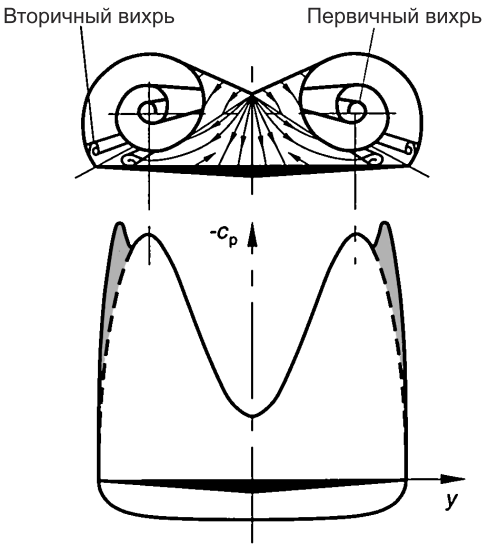


Рис. 6.46. Образование вихря и распределение давления в сегменте дельта крыла

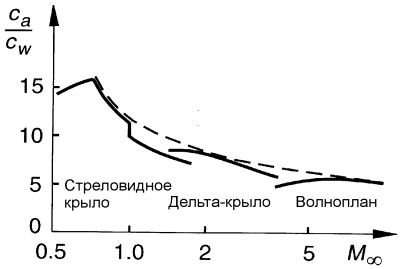


Рис. 6.47. Отношение коэффициента подъемной силы к коэффициенту сопротивления c_a/c_w в зависимости от числа Маха

симости от полетного числа Маха для трех форм самолета. Транспортный самолет с крыльями стреловидной формы в трансзвуковом дозвуке рассматривался в предыдущей главе. При числе Маха 0,7 получается $c_a/c_w = 16$. При числе Маха $M_\infty = 1$ отношение c_a/c_w понижается по причине растущего волнового сопротивления. Удлиненный сверхзвуковой самолет с дельта крылом достигает при числе Маха $M_\infty = 2$ значения c_a/c_w до 8.

6.3.1. Дельта-крыло

При сверхзвуковом обтекании дельта-крыла (рис. 6.46) следует различать два случая. Если (как это изображено на левой части рис. 6.48) линия Маха (смотри главу 4.3.1) находится перед кромкой крыла, то нормальная компонента скорости обтекания v_n меньше звуковой скорости a_∞. В этом случае говорят о дозвуковой передней кромке с $\alpha' > \Phi$ и $v_n < a_\infty$. Если, наоборот, линия Маха находится за кромкой крыла, то говорят о сверхзвуковой передней кромке с $\alpha' < \Phi$ и $v_n > a_\infty$. Имеется ли в наличии до звуковая или сверхзвуковая кромка, имеет значение не только для передней кромки, но и для задней кромки крыла. Если имеется дозвуковая задняя кромка, то можно применить условие схода потока Кутта и появляется выравнивание давления между нижней и верхней стороной крыла. Для сверхзвуковой задней кромки появляются косые скачки уплотнения, которые обеспечивают выравнивание давления в следе. Между нижней и верхней стороной крыла существует конечная разница давления. В соответствии с рисунком 6.48 вдоль глубины крыла образуется излом в распределении давления.

Для сверхзвукового обтекания без трения можно при условии слабых скачков уплотнения использовать как при дозвуковом потоке линеаризованное уравнение для потенциала (4.20):

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{6.36}$$

Поток проявляет себя снова линейно. В главе 6.1.2 уже использовалось правило Прандтля–Глауэрта и правило Аккерета в сверхзвуке. Для выведения этих правил подобия проводят преобразование уравнения для потенциала (6.36). Это преобразование должно быть такого рода, чтобы в преобразованном уравнении число Маха обтекания больше бы не входило явно. Для этого вводят следующее преобразование:

$$x' = x, \quad y' = C_1 y, \quad z' = C_1 z, \quad \Phi' = C_2 \Phi. \tag{6.37}$$

Фактор C_1 определяется таким образом, чтобы выпало число Маха. Отсюда получается $C_1 = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ для дозвуковых скоростей $M_\infty < 1$ и $C_1 = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ для сверхзвуковых скоростей $M_\infty > 1$. Преобразование уравнения потенциала дает для дозвукового потока:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} = 0 \tag{6.38}$$

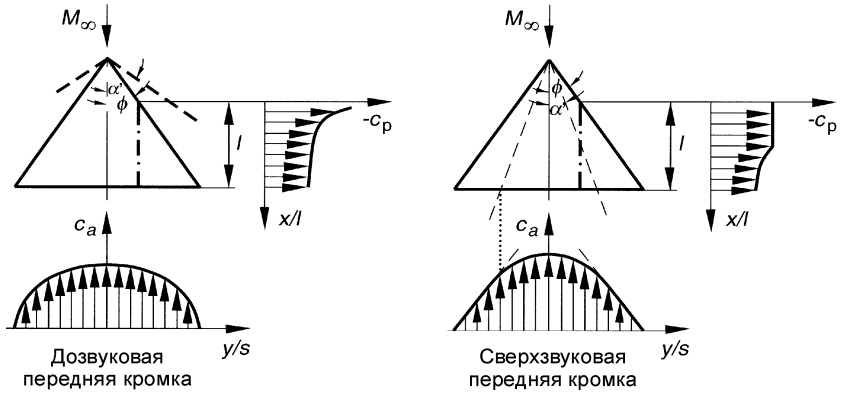


Рис. 6.48. Распределение давления по хорде крыла l и распределение подъемной силы вдоль размаха s дельта-крыла

и для сверхзвукового потока:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} = 0. \tag{6.39}$$

Преобразованное уравнение дозвукового потока идентично уравнению для потенциала несжимаемого течения. Преобразованное уравнение для сверхзвукового потока идентично линеаризованному уравнению потенциала (6.36) для числа Маха $M_\infty = \sqrt{2}$. Преобразование показывает, что расчет сверхзвуковых потоков для любых чисел Маха можно свести к вычислениям обтекания при числе Маха $M_\infty = \sqrt{2}$ некоторого трансформированного крыла. Преобразование (6.37) называется правилом подобия Прандтля–Глауэрта–Аккерета теории крыла.

Для заданного дельта-крыла трансформированное крыло получают, уменьшая или увеличивая его размеры перпендикулярно направлению обтекания в соответствии с фактором C_1 по соотношениям (6.37). На рис. 6.49 показана трансформация заданного дельта крыла для различных чисел Маха. При этом рассчитывались обтекание трансформированных крыльев для дозвуковых чисел Маха $M_\infty < 1$ несжимаемым потокам $M_\infty = 0$ и для сверхзвуковых чисел Маха $M_\infty > 1$ — потоком при числе Маха $M_\infty = \sqrt{2}$.

Правило Прандтля–Глауэрта–Аккерета можно применить к обтеканию сегмента профиля под углом атаки. Трансформированное отношение тол-

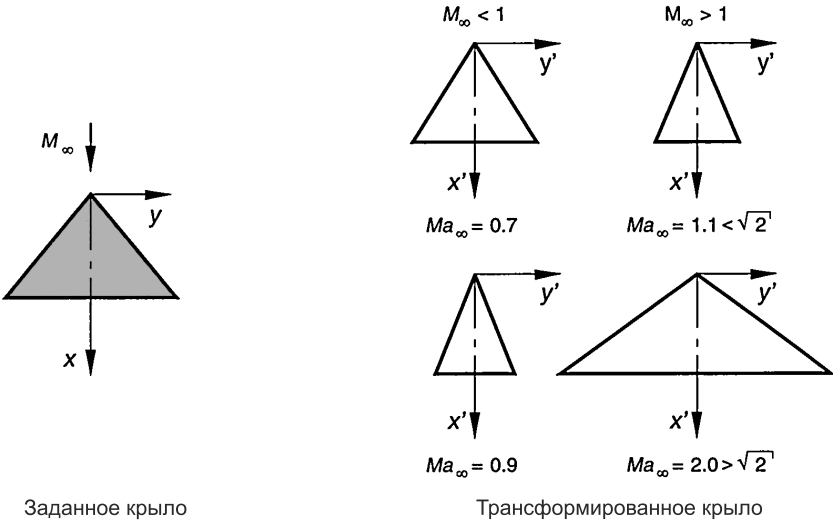


Рис. 6.49. Применение правила Прандтля–Глауэрта–Аккерета для дельта-крыла

щины d'/l' и трансформированный угол атаки α' рассчитывается из:

$$\frac{d'}{l'} = \frac{d}{l}\sqrt{|1 - M_\infty^2|}, \quad \alpha' = \alpha\sqrt{|1 - M_\infty^2|}. \tag{6.40}$$

Для $M_\infty < \sqrt{2}$ трансформированное крыло имеет меньшую толщину, а также меньший угол атаки, чем заданное крыло. Для $M_\infty > \sqrt{2}$ получается большая толщина и больший угол атаки.

Трансформация распределения давления в соответствии с (6.37) дает:

$$c_p = -2\frac{u}{u_\infty} = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad c_p' = -2\frac{u'}{u_\infty} = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'}, \tag{6.41}$$

причем скорость обтекания u_∞ для заданного и трансформированного крыла одинакова. С силу реобразования (6.37) получим:

$$c_p = C_2 c_p'. \tag{6.42}$$

Фактор преобразования C_2 определяется из аналогии линий обтекания обо-

их крыльев. Из $w = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$ и $w' = \dfrac{\partial \Phi'}{\partial z'}$ получается:

$$C_1^2 C_2 = 1$$

и с $C_1 = \sqrt{|1 - M_\infty^2|}$ получают:

$$C_2 = \frac{1}{|1 - M_\infty^2|}.$$

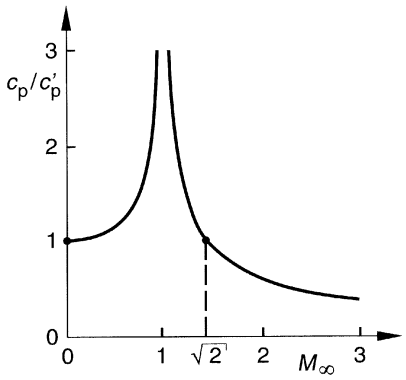


Рис. 6.50. Преобразование коэффициентов давления

Из этого следует распределение давления:

$$c_p = \frac{c_p'}{|1 - M_\infty^2|}. \tag{6.43}$$

Если провести преобразование таким образом, чтобы искажались только размеры в направлении y (горизонтальная проекция), в то время когда размеры в направлении z оставались неизменными, то преобразование в (6.40) аннулируется. Тогда получают коэффициент давления

$$c_p = \frac{c_p'}{\sqrt{|1 - M_\infty^2|}}. \tag{6.44}$$

Эта зависимость, которая уже использовалась в главе 6.1.2 , изображена на рис. 6.50.

Дельта крыло, выполненное для сверхзвука, должно иметь также хорошие качества при малых скоростях при взлете и посадке. Для этого вихревая система на дельта крыле, рассмотренная в главе 3.3.2 (рис. 3.9 и 6.46) должна быть стабильна во всем диапазоне чисел Маха, чтобы гарантировать непрерывную подъемную силу. Это требует дозвуковой передней кромки дельта крыла, например, при полетном числе Маха $M_\infty = 2$. Угол среловидности крыла выбирается так, чтобы получался в приближении конический поток (рис. 6.51), который вызывает по возможности меньшее волновое сопротивление. Угол атаки дельта крыла ограничивается наступлением нестационарного срыва потока или разрушением вихря. Этот предельный угол достигается примерно при $\alpha = 40°$, так что по сравнению с дозвуковым крылом стабильная вихревая система появляется в большом диапазоне угла атаки. Стабильная вихревая система рис. 6.5.1 существует как в до звуке, так и в сверхзвуке, пока имеет место дозвуковая передняя кромка. Это относится к соотношению размаха крыла к длине $s/l \approx 0{,}5$.

Рис. 6.52 показывает отношение подъемной силы к сопротивлению конфигурации крыло–фюзеляж при числе Маха $M_\infty = 2$ и заданным углом атаки. Максимум c_a/c_w составляет для этого примера 7.4 при коэффициенте подъемной силы $c_a = 0,15$. Для дозвукового полета при взлете и посадке $c_a/c_w = 11,6$ при одинаковом коэффициенте подъемной силы. В противоположность крылу стреловидной формы трансзвукового дозвукового полета, которому необходимы для поддержания подъемной силы при взлете и посадке закрылки, при дельта-крыле эта помощь для поддержания подъемной силы не нужна. Значения c_a/c_w у дельта-крыла по причине стабильной вихревой системы в дозвуковом полете выше, чем в сверхзвуковом полете.

На основе описанных принципов сверхзвукового полета был сконструирован сверхзвуковой самолет Конкорд для полетного числа Маха $M_\infty = 2$. Самолет имеет длину $l = 62$ м и размах крыльев $s = 26$ м (рис. 6.53). Это дает отношение $s/l = 0.42$. Тем самым приближенно реализуется описанный выше вытянутый конический поток вихревого шлейфа с конической головной волной в сверхзвуковом полете. Головная волна подогревает текущий газ, так что при сверхзвуковом полете достигается $128°C$ в точке торможения и $105°C$ на передней кромке крыла. Это ведет наряду с динамической нагрузкой к дополнительным термическим нагрузкам при сверхзвуковом полете.

Доли общего сопротивления c_w сверхзвукового самолета представлены

Рис. 6.51. Стационарный отрыв вихря на передней кромке дельта-крыла

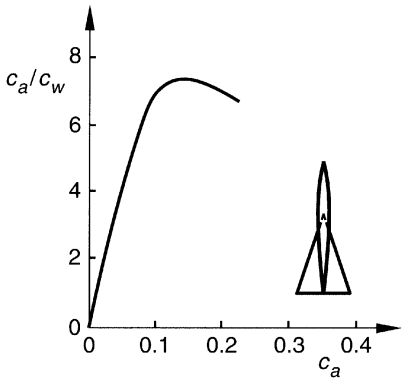


Рис. 6.52. Отношение коэффициента подъемной силы к коэффициенту сопротивления c_a/c_w для удлиненного сверхзвукового самолета с дельта-крылом

на рис. 6.54 в зависимости от полетного числа Маха. В дозвуковом полете доминирует сопротивление трения c_f, вызванное шлейфом вихря. При числе Маха $M_\infty = 2$ доминирует волновое сопротивление c_s и волновое сопротивление шлейфа вихря c_{si}.

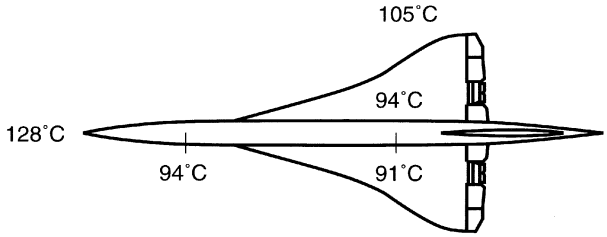


Рис. 6.53. Сверхзвуковой самолет Конкорд, $M_\infty = 2$

При числе Маха $M_\infty > 5$ говорят о гиперзвуковом полете, который определяется сильными скачками уплотнения головных волн. При возвращении, например, летательного аппарата с околоземной орбиты в земную атмосферу во время процесса торможения числа Маха при приземлении

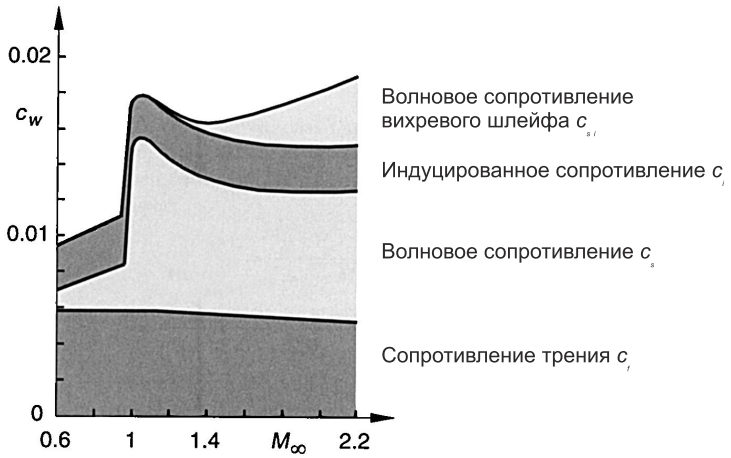


Рис. 6.54. Доли сопротивления c_w сверхзвукового самолета Конкорд в зависимости от числа Маха M_∞

изменяются в пределах от 25 до 0. При этом в высоких слоях атмосферы головная волна такой силы, что в точке торможения капсулы, входящей в плотные слои атмосферы достигается температура до 11000 К. Это значит, что нужно учитывать аэродинамику химически реагирующего воздуха, которая рассматривается в главе 10. Высокие тепловые нагрузки летательных аппаратов, проходящих сквозь плотные слои атмосферы, определяют использование поверхностей с максимально большими радиусами кривизны, для которых тепловую нагрузку можно уменьшить. Это приводит к тупоносым капсулам или закругленным формам самолетов, чью поверхность можно дополнительно снабдить тепловой защитой (рис. 6.55).

Если хотят использовать эти знания о космических полетах для гражданской авиации, чтобы, например, разработать гиперзвуковой самолет для дальних расстояний с числом Маха $M_\infty = 6$, то необходимо найти компромисс между закругленной формой носа для уменьшения тепловой нагрузкой и требованием острого угла для небольшого волнового сопротивления. Для гиперзвукового полета получаются удлиненные летательные аппараты с треугольными крыльями. Угол плоскостей выбирается сознательно таким образом, чтобы поверхности проходили вдоль линий обтекания и получалась основная поверхность дельта крыла. Если ориентировать поверхности верхней стороны вдоль косых скачков головной волны, то по-

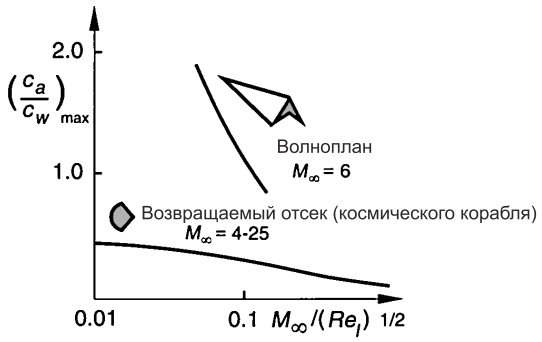


Рис. 6.55. Максимальные значения (c_a/c_w) при гиперзвуковом полете

лучается тело, обладающее подъемной силой со сверхзвуковой передней кромкой, которое не меняет поле потока. На верхней стороне устанавливается невозмущенное давление внешнего потока. Постоянное давление нижней стороны определяется сильным скачком уплотнения, который исходит с верхушек треугольных поверхностей (рис. 6.56). Конфигурацию такого гиперзвукового летательного аппарата называют волнолетом (волнопланом по Нонвейлеру (1963)).

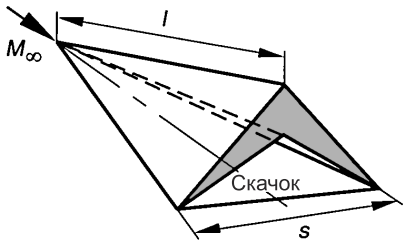


Рис. 6.56. Геометрия и положение скачка волнолета

Расчеты волнолета осуществляются аэродинамическими на основе основных уравнений косых скачков, которые были введены в главе 4.3.4. При этом исходят из заданного положения скачка, и из уравнениямй скачка определяют положение треугольных плоскостей в соответствии с заданными условиями.

Так как с экономической точки зрения невозможно реализовать необходимый аэродинамический компромисс между удлиненным летательным аппаратом при одновременно небольшой температуре его поверхности, до сих пор не разработан гиперзвуковой транспортный самолет.

7

Гидроаэродинамическая неустойчивость

7.1. Основы гидроаэродинамической неустойчивости

В этой главе рассматривается поведение потоков потоков, после того как они подвергаются возмущениям. Понятие устойчивости течения будет играть при этом центральную роль. Свойство устойчивости является критерием того, сохраняет ли поток свое состояние при воздействии возмущения или изменяет его. Аэродинамическая неустойчивость может инициировать переход к турбулентному режиму течения и, тем самым, является критерием временного и пространственного образования структуры переходного и турбулентного потоков. Понятие устойчивости течения в трубах и в пограничном слоя уже использовалось в главе 4.2.4. Линейная теория устойчивости позволяет при этом предсказать критические числа Рейнольдса, при которых начинается аэродинамическая неустойчивость.

7.1.1. Примеры гидроаэродинамической неустойчивости

Если рассмотреть, например, поднимающийся дым тлеющей сигареты в спокойном окружающем воздухе, то на рисунке 7.1 видно, что он вблизи сигареты движется сначала по гладкой прямой траектории. По достижении определенной высоты эти дымовые дорожки внезапно распадаются на явно неупорядоченную по времени и пространству нерегулярно колеблющуюся структуру. Поток, несущий в себе частицы дыма, перешел из ламинарного в турбулентное состояние.

Во многих аэродинамических проблемах ламинарно–турбулентный переход начинается с неустойчивости. Ламинарная форма потока при превышении критических параметров, например, числа Рейнольдса становится неустойчивой по отношению к малым возмущениям и не может сохраниться. Термическая ячеистая конвекция под влиянием силы тяжести в подогреваемом снизу горизонтальном слое служила в вводной главе 1 (рис. 1.3)

примером, насколько аэродинамическая неустойчивость определяет структуру турбулентного потока.

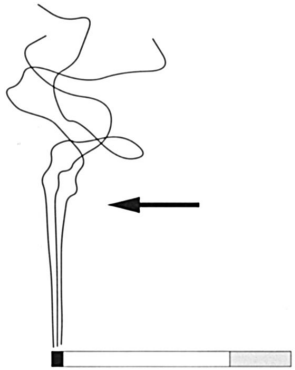


Рис. 7.1. Ламинарно–турбулентный переход вследствие неустойчивости в конвективном потоке над тлеющей сигаретой

Неустойчивость Релея–Бенара наблюдается также во время процесса охлаждения жидких масс магмы. Поверхность охлаждается, и в магме образуется неустойчивый температурный слой. В зоне пограничного слоя по причине силы тяжести устанавливается структурированный в шестиугольных ячейках конвективный поток магмы, которая после застывания образует типичные базальтовые колонны (рис. 7.2). Детальное рассмотрение конвекции Релея–Бенара приводится в 7.2.1.

Градиент концентрации и связанные с ним различия в плотности могут быть причиной конвективного течения. Точно так же как при конвекции Бенара на свободных поверхностях здесь возникают шестиугольные ячейки потока. Такие примерно ситуации возникают при высыхании соли. Испарение на поверхности воды приводит к повышению солевой концентрации с соответствующим повышением плотности. Тяжелый неустойчивый слой раствора лежит над слоем более легкого. Возникающий при превышении критической разницы концентрации конвективный поток собирает вблизи дна, где он течет в направлении центров ячеек, песок и частицы пыли. Эти частицы затем поднимаются конвективным потоком в центр верхней части ячейки и в соответствии с картиной течения, изображенной на рис. 1.3, распределяются по ее краям. В конце концов, они здесь по причине конвективного движения опускаются на дно, где и осаждаются. Так возникают показанные на рис. 7.3 структуры на дне высохших соляных озер. Ячеистая конвекция, вызванная переменностью концентраций рассматривается в 7.2.2.

Гидродинамическая неустойчивость с ячеистыми структурами появляется также в астрономических масштабах. На рис. 7.4 представлены фотографии поверхности Солнца, гранулированная структура которой обязана неустойчивости Бенара. Температура вблизи поверхности Солнца убывает с радиусом, так что возникает неустойчивое расслоение (стратификация) по плотности. Турбулентные конвективные ячейки имеют диаметр примерно

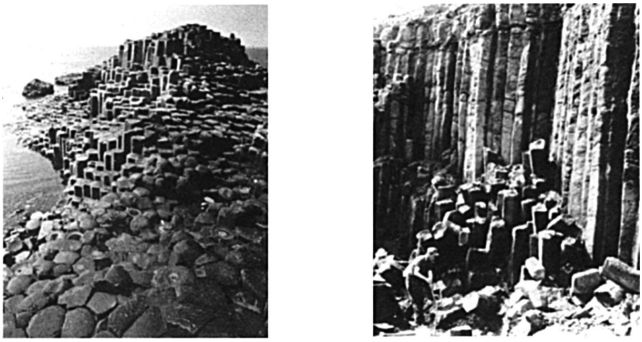
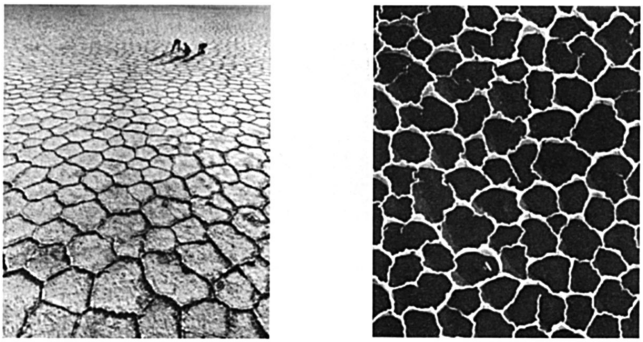


Рис. 7.2. Базальтовые колонны, вызванные ячеистой конвекцией на фронтах затвердевания



Соляное озеро Содовое озеро

Рис. 7.3. Ячеистая конвекция как следствие градиента концентрации

в 1000 км и продолжительность жизни в несколько минут. В окрестностях солнечных пятен конвективные ячейки ориентируются вдоль сильных магнитных полей и представляются как продолговатые валки.

Очень похожее на термическую ячеистую конвекцию явление мы наблюдаем в заполненном жидкостью кольцевом столбике, образованном из двух коаксиальных цилиндров, если при неподвижном внешнем цилиндре внутренний цилиндр вращается с частотой, превышающей критическое чис-

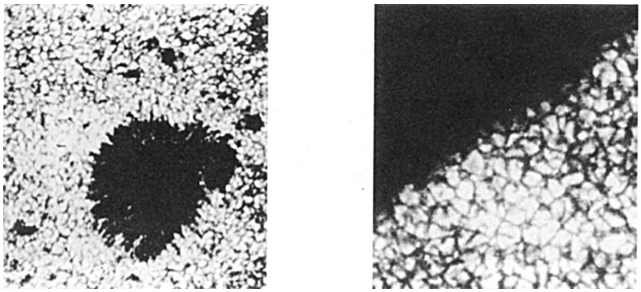


Рис. 7.4. Ячеистая конвекция (гранулы) на поверхности Солнца

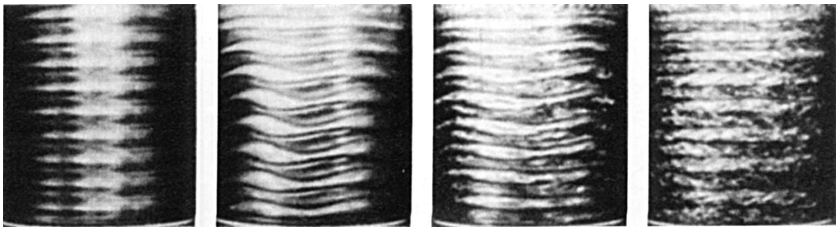


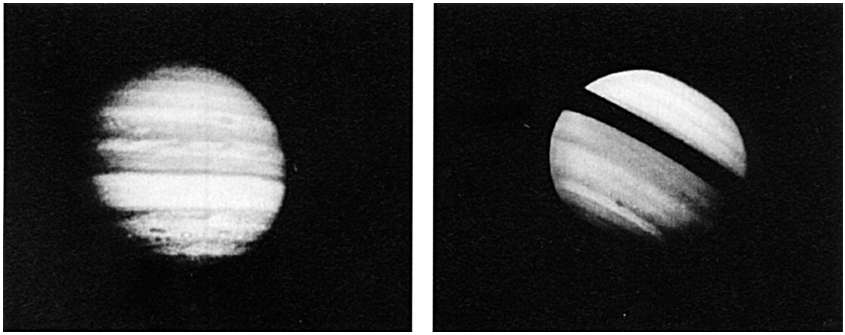
Рис. 7.5. Вихрь Тейлора как следствие центробежной силы

ло оборотов. В этом слоистом течении центробежная сила действует так, что лежащие внутри слои жидкости стремятся вытесниться наружу. В соответствии с рис. 7.5 при любом небольшом возмущении слоев образуются торообразные структуры, которые называются по имени их первооткрывателя вихрями Тейлора (7.2.4). При превышении другого критического числа оборотов внутреннего цилиндра вихри Тейлора в свою очередь становятся неустойчивыми по отношению к волновым возмущениям, идущим по окружности. Эта зависящая от времени неустойчивость приводит к периодическим колебаниям вихрей Тейлора. При дальнейшем повышении числа оборотов в цилиндрическом столбике происходит переход к турбулентному режиму течения, причем структура первоначальной неустойчивости сохраняется.

Неустойчивости тейлоровского типа наблюдаются также в атмосфере планет таких как Сатурн или Юпитер (рис. 7.6). Поверхность в окрестностях экватора делится на две конвекционные ячейки высокого и низкого

давления. Они являются полосами в противоположном от струйного течения направлении, на слоях сдвига которых образуются объемные вихри. Скорость ветра составляет 500 км/час. На больших широтах по причине внутреннего нагрева возникают овальные антициклонические вихри аналогично ураганам в земной атмосфере. Они действуют для потоке в атмосфере Юпитера как препятствия, следствием которых в кильватере вновь проявляется периодическое образование вихря. Эти так называемые красные пятна имеют протяженность до 22000 км и на удивление стабильны.

Описанные до сих пор примеры аэродинамических неустойчивостей относятся к неустойчивости слоев (глава 7.2). О неустойчивости сдвигового потока (глава 7.3) говорят, если в сдвиговом потоке амплитуда локального возмущения вниз по потоку возрастает и начинается ламинарно-турбулентный переход. В качестве неустойчивости сдвигового потока в 4.2 рассматриваются вихревая дорожка Кармана и волны Толмина–Шлихтинга в пограничных слоях.



Сатурн Юпитер

Рис. 7.6. Неустойчивости в атмосферах планет

Вихревая дорожка Кармана возникает при превышении критического числа Рейнольдса как следствие неустойчивости сдвига в следе за обтекаемыми телами. Это ведет к появлению периодически срывающихся вихрей (7.3.3). На рис. 7.7 представлена полученная в эксперименте фотография неустойчивого течения в следе за поперечно обтекаемым цилиндром. Вышедшая из терпящего крушение судна нефть делает видимым поток воды с подветренной стороны, который также образует вихревую дорожку. Со-

ответствующую периодическую вихревую дорожку наблюдают и в земной атмосфере в следе островов. Визуализация трансзвукового обтекания лопатки турбины делает понятным типичное периодическое расположение вихрей дорожки Кармана в следе.

В пограничных слоях ламинарно-турбулентный переход начинается волнами Толмина–Шлихтинга, которые развиваются в пространстве вниз по течению. Через несколько промежуточных состояний в переходной зоне достигается описанное в 4.6.2 состояние развитой турбулентности. При превышении второго критического числа Рейнольдса поначалу ровные волны Толмина-Шлихтинга становятся неустойчивыми по отношению к поперечным волновым возмущениям. Они образуют вниз по потока так называемые лямбда-структуры (рис. 7.8) с локальными слоями сдвига в пограничном слое (глава 7.3.4). Лишь распад этих слоев сдвига ведет к развитому турбулентному потоку пограничного слоя.

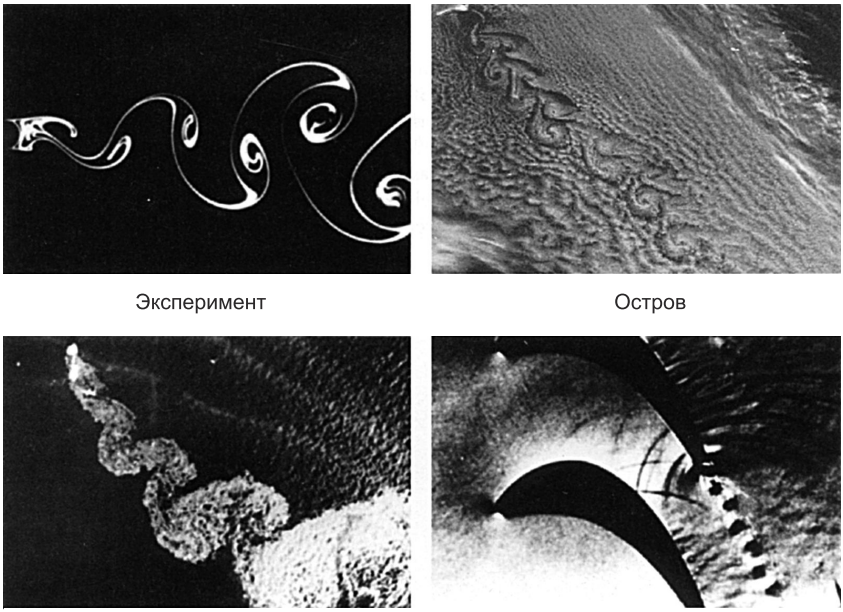


Рис. 7.7. Вихревые дорожки Кармана в следе за телами

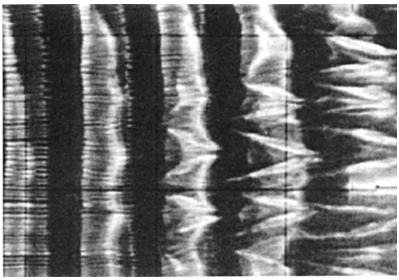


Рис. 7.8. Лямбда-структуры в переходной зоне пограничного слоя потока на пластине, Сарик 1994.

В трехмерных пограничных слоях, таких, например, какие встречаются на стреловидном крыле, наряду с переходом Толмина–Шлихтинга поперечный поток на крыле может привести к дальнейшей неустойчивости. Эта неустойчивость поперечного потока, которая появляется вниз по течению вдоль крыла, видна на рисунке 7.9. Она образуется вдоль компоненты поперечного потока трехмерного пограничного слоя. Бегущие волны и стационарный вихревой рисунок, вниз по течению тем же самым механизмом перехода Толмина–Шлихтинга распадается и переходит в пограничный слой.

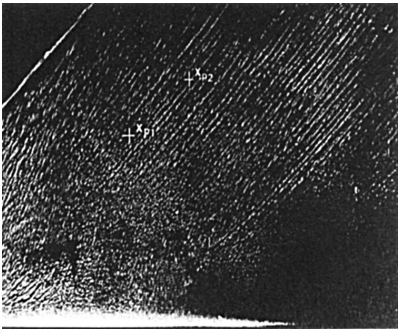


Рис. 7.9. Распад неустойчивости поперечного потока в трехмерном пограничном слое.

На практике неустойчивость пограничных слоев не будет начинаться правильными гармоническими волнами, а в большей мере вызывается локальными возмущениями, например, шероховатостями поверхности. Ее теоретическое рассмотрение требует расширения анализа устойчивости гармонических волн, введенной в 4.2.4. Теория устойчивости локальных возмущения покажет в 7.1.3 и 7.3.2, что неустойчивость вдоль характерных направлений распространения в пограничных слоях растет и после завершения процесса перехода приводит к турбулентным клиньям. Схематически на рис. 7.10 показано вызванные соответствующими локальными возмущениями образование переходных и турбулентных клиньев.

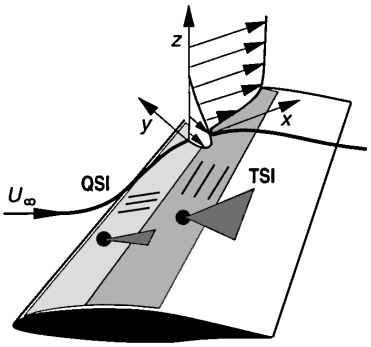


Рис. 7.10. Локальные неустойчивости поперечного потока (QSI) и Толмина–Шлихтинга TSI в трехмерном пограничном слое крыла стреловидной формы

7.1.2. Определение устойчивости

Теоретическая механика дает, пожалуй, наглядную иллюстрацию к понятию устойчивости. На рис. 7.11 изображено поведение шара на различных по форме поверхностях в поле тяжести. При вогнутой поверхности положение шара устойчиво. Шар после отклонения от состояния покоя под воздействием силы тяжести возвращается обратно. Если поверхность горизонтальна, то положение шара индифферентно (безразлично), так как шар не реагирует на изменение положения. В противоположность этому, на выпуклой поверхности шар даже при малейшем отклонении под воздействием малых возмущений выходит из позиции покоя. Положение неустойчиво.

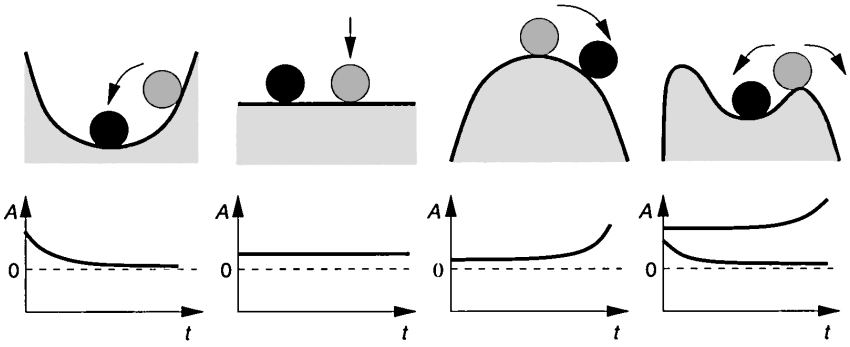


Рис. 7.11. К понятию неустойчивости в аэродинамике

Изображенная в правой части рисунка 7.11 ситуация, напротив, показывает, что свойство устойчивости может зависеть от силы возмущения. Изображенный случай поэтому называется условно устойчивым или локально стабильным.

В противоположность к теоретической механике понятие неустойчивости в механике сплошной среды должно определяться по отношению к временному и пространственному развитию возмущений. На рис. 7.12 показан стационарный ламинарный конвективный поток у вертикальной подогреваемой пластины. Поле возмущений представляется периодической волной возмущения w' небольшой амплитуды:

$$w'(x,z,t) = \hat{w}(x)\exp(iaz - iwt). \tag{7.1}$$

При заданной длине волны $\lambda = 2\pi/a$ ламинарное исходное состояние называют неустойчивым по времени относительно этой длины волны, если поток обеспечивает увеличение по времени волновой амплитуды $(\mathrm{Im}(w(a)) > 0)$. Если волна возмущения во времени затухает $(\mathrm{Im}(w(a)) < 0)$, то ламинарный исходный поток называют устойчивым во времени относительно данной длины волны. Нейтральным по времени или индифферентным считается пограничный случай с постоянной по времени амплитудой возмущений. Но вместо временного развития возмущения можно определить понятия устойчивости относительно чисто пространственного (w реальное, a комплексное) или, более общо, пространственно-временного (w, a комплексное) развития возмущений. В последнем случае исследуют распределение по так называемым абсолютным и конвективным неустойчивостям.

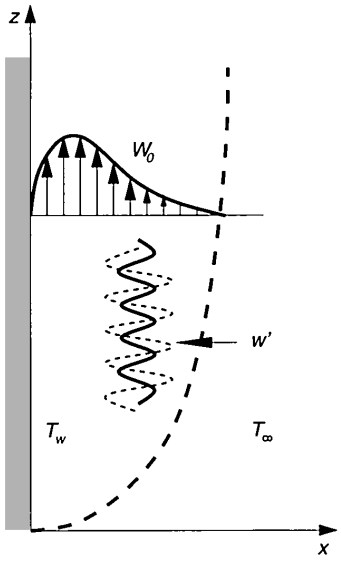


Рис. 7.12. К понятию неустойчивости в аэродинамике. Термическая конвекция на вертикальной стенки с $T_w > T_\infty$

Конвективная неустойчивость имеет место, если выделившаяся во времени энергия возмущения потоком уносится вниз по течению. Если, напротив, возмущение остается на месте, то говорят об абсолютной неустойчивости.

При математическом определении устойчивости исходят из стационарного состояния потока $\boldsymbol{U}_0 = (x, y, z)$, в котором распределение плотности ρ_0, распределение температуры T_0 и трех компонентов вектора скорости (u_0, v_0, w_0) полностью определено в каждой пространственной точке (x, y, z). $\boldsymbol{U}_0 = (\rho_0, u_0, v_0, w_0, T_0)$ удовлетворяет газодинамическим уравнениям сохранения механики сплошной среды для массы, импульса и энергии (гл. 5). Здесь возникает вопрос, существуют ли другие решения уравнений сохранения, а именно иные состояния равновесия системы. Чтобы суметь ответить на этот вопрос, состояние потока $\boldsymbol{U}_0$ выводят из положения равновесия небольшим возмущением $\boldsymbol{u}'(x, y, z, t)$. Это отклонение должно быть физически возможно, т.е. вновь появившееся возмущенное состояние $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ в момент времени $t = 0$ должно удовлетворять граничным условиям проблемы возмущения.

Получается математическое выражение (4.67), введенное в 4.2.4:

$$\boldsymbol{u}(x,y,z,t) = \boldsymbol{U}_0(x,y,z) + \boldsymbol{u}'(x,y,z,t). \tag{7.2}$$

Величина возмущения вводится с

$$|\boldsymbol{u}'| = \int\limits_V |\boldsymbol{u}(x,y,z)^2|\, dV, \tag{7.3}$$

которое отображает меру отклонения возмущенного потока $\boldsymbol{u}$ от основного потока $\boldsymbol{U}_0$ во всем поле потока. $|\boldsymbol{u}'|$ называется также в последующем энергией возмущения в поле потока.

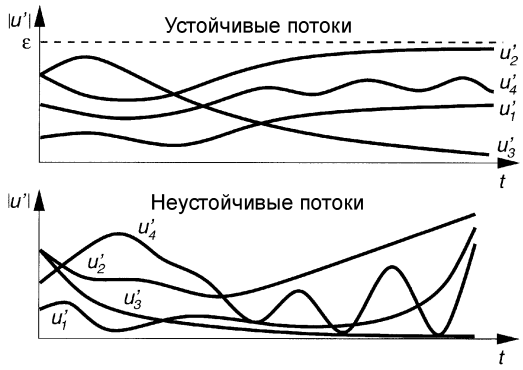


Рис. 7.13. К определению устойчивости

Основной поток устойчив, пока величина возмущения для любого времени $t \geqslant 0$ остается меньшей, чем заданное число ε:

$$|\boldsymbol{u}'|_t < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant 0 \tag{7.4}$$

для всех первоначальных потоков $\boldsymbol{u}'(x,y,z,t=0)$, энергия возмущения которых меньше, чем константа. В ином случае основной поток неустойчив. Принципиальная диаграмма рис. 7.13 объясняет на примерах, как можно подразделить по выше названному определению потоки на устойчивые и неустойчивые с помощью временного поведения энергии внесенного возмущения. Для этого на основной поток $\boldsymbol{U}_0$ накладываются различные начальные возмущения, например, $\boldsymbol{u}'_1(t=0)$, $\boldsymbol{u}'_2(t=0)$, $\boldsymbol{u}'_3(t=0)$, $\boldsymbol{u}'_4(t=0)$.

Следует указать на то, что среди бесконечного множества возмущений также и при неустойчивом потоке могут возбуждаться возмущения, которые медленно затухают, как, например, для возмущения $\boldsymbol{u}'_3(t=0)$. Как правило, возмущения $\boldsymbol{U}_0$ исследуются на так называемую асимптотическую устойчивость, которая имеется тогда, когда любое возмущение медленно затухает:

$$\lim_{t\to\infty} |\boldsymbol{u}'(t)| = 0. \tag{7.5}$$

В этом случае возмущенная система асимптотически по времени снова принимает свое первоначальное состояние $\boldsymbol{U}_0$. Этот случай изображен на рис. 7.14.

7.1.3. Локальные возмущения

В данном определении устойчивости потока пока ничего не сказано о пространственно-временном распространении параметров неустойчивых потоков. Для пояснения проблематики сравним два неустойчивых основных потока $\boldsymbol{U}_0$, которые имеют качественно совершенно различное поведение после введения в них возмущений. В качестве таких потоков возмем течение в следе за цилиндром и пограничный слой на пластинке. При идеализированном предположении о полном отсутствии возмущений при сверхкритическом числе Рейнольдса мог бы существлвать позади обтекаемого тела кильватерный поток, такой, что вопреки ситуации по рисунку 7.17 в нем бы не возникало вихревой дорожки Кармана. Точно также при невозмущенном обтекании тонкой пластины даже при сверхкритическом числе Рейнольдса имелся бы хоть и неустойчивый, но ламинарный поток.

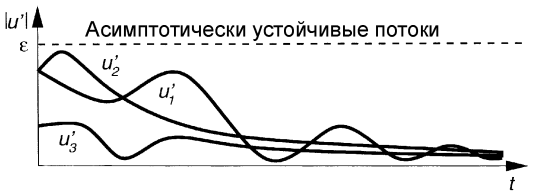


Рис. 7.14. Поведение возмущений при асимптотически устойчивом потоке

Если в пример с потоком за цилиндром (рис. 7.15) в момент времени t_0 на короткий срок внести локальное возмущение в область стационарно-

го течения в следе за телом, то образуется на длительное время вихревая дорожка Кармана. Если же возмущение будет внесено в неустойчивый пограничный слой пластины, то его влияние будет качественно совершенно отлично. Величина возмущения хотя и возрастает здесь, но в соответствии с ситуацией, приведенной на рисунке, это возмущение сносится вниз по течению, и таким образом навсегда покидает место своего ввода. Таким образом, неустойчивость в следе за телом ведет к самовозбудимым колебаниям системы в постоянной области пространства, в то время когда в потоке пограничного слоя возмущения не остаются на постоянном месте и исчезают со временем. Энергия возмущения могла бы сохраняться в постоянном месте только тогда, когда вверху по течению непрерывно привносилась бы извне энергия возмущения.

Чтобы сделать заключение относительно пространственного поведения возмущений, необходимо очевидно ввести меру для локальной величины возмущений. Для этого уменьшают зону интегрировании V, по которой по уравнению (7.2) вычисляется величина возмущения $\boldsymbol{u}'$. Это уменьшение проводят до тех пор, пока зона интегрирования не уменьшится до бесконечно малой величины dV. В соответствии с (7.3) тогда получается:

$$d|\boldsymbol{u}'| = |\boldsymbol{u}'|^2 dV.$$

Если поделить на элемент объема dV, то в конце концов формально получится плотность энергии возмущения A

$$A^2(x, y, z, t) = \frac{d|\boldsymbol{u}'|}{dV} = |\boldsymbol{u}'|^2, \tag{7.6}$$

которая далее будет определяться как мера величины возмущения в точке x, y, z в момент времени t. Если в первоначально невозмущенном неустойчивом потоке плотность энергии возмущения A в месте первоначального локального возбуждения возмущения асимптотически по времени затухает, этот поток называется конвективно неустойчивым. В противном случае поток называется абсолютно неустойчивым. Изображенный на рис. 7.15 поток в следе за телом абсолютно неустойчив, в то время как пограничный слой пластины проявляет конвективно неустойчивое поведение.

7.2. Неустойчивость слоев

После того как в главе 5.5 были выведены дифференциальные уравнения возмущений для сжимаемых потоков (5.123)–(5.125), для несжимаемых

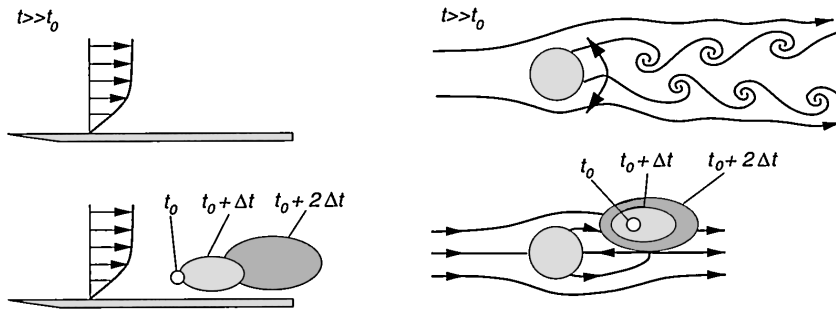


Рис. 7.15. Распространение неустойчивых возмущений при конвективной и абсолютной неустойчивости

потоков (5.128)–(5.129), а также уравнения Буссинеска (5.132)–(5.134), мы приведем в этой главе примеры неустойчивости слоев. Сюда относятся описанные в вводной главе термическая и обусловленная диффузией ячеистая конвекция и неустойчивость Тейлора, а также родственная ей неустойчивость Гертлера, которая появляется в пограничных слоях с вогнутыми стенками. В качестве первой проблемы устойчивости подробно рассматривается конвекция Релея–Бенара со всеми шагами анализа устойчивости.

7.2.1. Конвекция Релея–Бенара

Термическая неустойчивость конвекции Релея–Бенара наблюдается в горизонтальном подогреваемом снизу слое жидкости под воздействием силы тяжести. Пусть слой по горизонтали бесконечно вытянут и имеет высоту h. Его нижняя сторона подогревается до температуры T_1 и его верхняя сторона удерживается при температуре $T_2 < T_1$ (рис. 7.16). При превышении критической разницы $\Delta T = (T_1 - T_2)$ в горизонтальном слое жидкости образуются прямолинейные ячейки с поперечным конвективным движением (блоки, катушки). Продольные оси этих ячеек, в которых происходят стационарные конвективные поперечных течения, лежат горизонтально и образуют периодическую последовательность. Описанный процесс называется термической ячеистой конвекцией или циркуляцией.

Вследствие дополнительных процессов обмена по сравнению со случаем обычной теплопроводности следствием конвекции является значи-

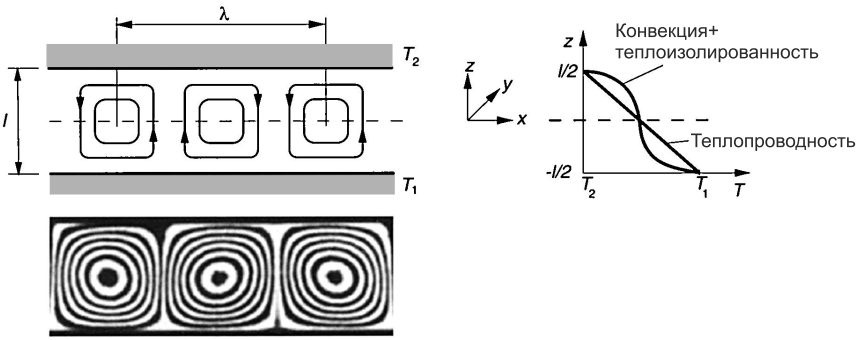


Рис. 7.16. Термическая ячеистая конвекция

тельный рост теплового потока $\dot{q}$. Это ведет к разветвлению кривых на диаграмме 7.17, в которой число Нуссельта $Nu = (\dot{q}_{\text{проводимость}} + \dot{q}_{\text{конвекция}})/\dot{q}_{\text{проводимость}}$ представлено как безразмерный поток тепла в зависимости от числа Релея $Ra = \alpha \Delta T g l^3/(\nu k)$. Термический коэффициент расширения объема α, кинематическая вязкость ν и коэффициент температуропроводности k являются составными частями этой безразмерной характеристики в задачах конвекции. Диаграмма показывает, что до критического числа Релея $Ra_{krit} = 1708$ число Нуссельта имеет постоянное значение $Nu = 1$. Очевидно, что здесь в наличии имеется лишь чистая теплопроводность. При превышении этого критического числа Релея безразмерный тепловой поток разветвляется и показывает сильную зависимость от числа Релея и числа Прандтля $Pr = \nu/k$ среды. Это внезапно начинающееся явление очевидно имеет отношение к качественному изменению системы. Первоначальное состояние (чистая теплопроводность, спокойная среда) не может сохраняться дальше. Оно становится неустойчивым и меняется на новое состояние (теплопроводность + конвекция, подвижная среда). При этом критическое число Рейнольдса очевидно независимо от среды, так как точка разветвления $(Nu, Ra_{krit}) = (1, 1708)$ независима от числа Прандтля Pr.

Термическая ячеистая конвекция играет во многих технических проблемах важную роль. С одной стороны инженер будет стремиться так конструировать воздушную термоизоляцию (например, термопан-окна), чтобы термическая конвекция не реализовывалась. С другой стороны, для теплообменника требует по возможности усилить процессы конвекции.

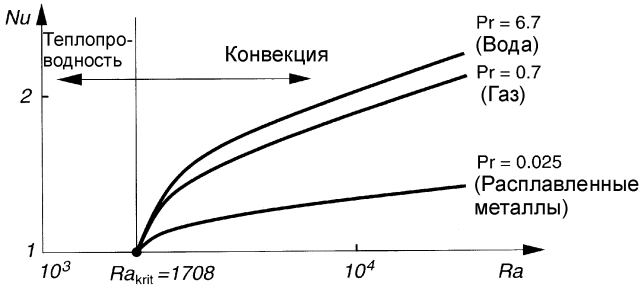


Рис. 7.17. Диаграмма разветвления безразмерного теплового потока Nu по числу Релея Ra

Причину неустойчивости следует кратко пояснить. Частица жидкости из нижнего слоя z_1 обладает из-за повышенной температуры меньшей плотностью, чем частица из более высокого слоя $z_2 > z_1$. Такое расположение называют неустойчивым расслоением. Если частица при z_1 перемещается в выше лежащий слой, то она в новом окружении более плотного потока испытывает подъемную силу, которая ее ускоряет дальше вверх. Этой тенденции противостоят силы трения и теплопроводность, которая пытается выровнять расширяющуюся разницу температур и тем самым разницу в плотности частиц.

Пусть рассмотренный элемент жидкости имеет размер порядка величины d (рис. 7.18) Элемент движется со скоростью возмущения $\boldsymbol{v}$ от $z = z_0$ на вышележащий слой $z_0 + d$. Это происходит за период времени $\Delta t = d/\boldsymbol{v}$. При этом из-за разницы плотности $\Delta\rho \sim \rho_m\alpha_m\Delta T$ на элемент действует подъемная сила $A = \Delta\rho_m g V_k \sim \rho_m\alpha_m\Delta T g d^3$. В то же время при малой скорости возмущения возникает сопротивление по Стоксу $W \sim \mu d^2\boldsymbol{v}/d = \mu d^2/\Delta t$. Решающим является то, насколько за период времени Δt теплопроводность обеспечит выравнивание разницы температуры между элементом жидкости и новым окружением. Разница во внутренней энергии $E_k \sim \rho c_v \Delta T d^3$ вследствие теплопроводности $\dot{q} \sim \lambda\Delta T/d$ через площадь поперечного сечения d^2 отдается в окружающую среду. Временной масштаб для этого процесса — это $\delta t = E_k/\dot{q}d^2 \sim d^2/k$ и он может применяться в полученных выше соотношениях.

Условием для возникновения неустойчивости очевидно является доминирование подъемной силы над сопротивлением:

$$A \geqslant W \Leftrightarrow \rho\alpha\Delta T g d^3 \geqslant \mu d^2 \frac{k}{d^2} C.$$

Или при $d = l$

$$\frac{\alpha \Delta T g l^3}{k\nu} = Ra \geqslant C = Ra_{krit}. \tag{7.7}$$

Очевидно, что число Релея проявляется здесь как отношение подъемной силы к силе трения.

Анализ устойчивости

Основные уравнения термической ячеистой конвекции (5.81) при условии приближения Буссинеска были представлены в главе 5.4.3. При математическом представлении возмущения (5.118) получаются дифференциальные уравнения возмущений (5.123)–(5.125). Основное состояние $\boldsymbol{U}_0, \rho_0, T_0$, чью устойчивость необходимо исследовать, можно принять как состояние покоя $\boldsymbol{U}_0 = 0$. Уравнение энергии (5.125) будет иметь вид:

$$\Delta T_0 = 0. \tag{7.8}$$

Оно представляет собой стационарную задачу теплопроводности. Для состояния покоя необходимо, чтобы градиент температуры был параллелен вектору $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$. Для конвекции Релея–Бенара краевые условия имеют вид:

$$T_0(x, y, z = -\frac{1}{2}) = T_1, \quad T_0(x, y, z = \frac{1}{2}) = T_2. \tag{7.9}$$

Основное состояние зависит только от вертикального направления z, поэтому:

$$\frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0, \quad T_0(z) = C_1 z + C_0. \tag{7.10}$$

Константы (C_1, C_2) определяются из граничного условия (7.9) $C_1 = -1$, $C_0 = (T_1 + T_2 - 2T_m)/\Delta T$, где $T_m = (T_1 + T_2)/2$. Для основного состояния, когда имеет место только теплопроводность, получим:

$$T_0 = -z. \tag{7.11}$$

Уравнения импульса (5.124) дают:

$$0 = -\frac{dp_0}{dz} + RaT_0,$$

что при использовании (7.11) определяет давление

$$p_0 = -\frac{1}{2} Raz^2 + p_\infty, \tag{7.12}$$

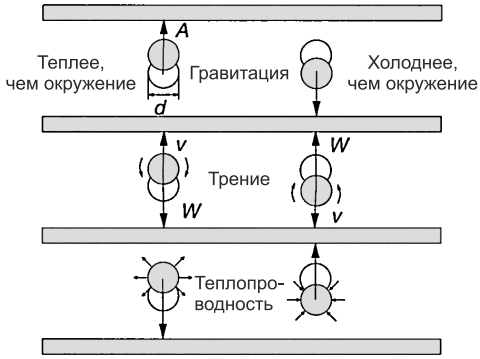


Рис. 7.18. К физической интерпретации термической ячеистой конвекции

где p_∞ — давление окружающей среды . Определенное выше распределение температуры и тем самым также вся общая задача теплопроводности является очевидно независимой от p_∞. Не уровень давления p_∞ влияет на проблему устойчивости, а исключительно его градиент.

При формулировке граничных условиях для величин возмущения скорости различают два вида ограничений. На свободных поверхностях (водная поверхность) $z = \pm l/2$ в качестве кинематического условия принимают условие непротекания (отсутствия нормальной компоненты скорости)

$$w'(x, y, \pm 1/2) = 0, \tag{7.13}$$

что справедливо, если деформацией поверхности по причине небольших возмущений можно пренебречь. На твердых поверхностях действительно условие прилипания:

$$\boldsymbol{u}'(x, y, \pm\frac{1}{2}) = 0. \tag{7.14}$$

Для возмущений температуры различают изотермические (5.69) и адиабатические ограничения (5.70). Если горизонтальное ограничение обладает большой теплопроводностью, то оно ведет себя изотермически и температурные возмущения исчезают:

$$T'(x, y, \pm\frac{1}{2}) = 0. \tag{7.15}$$

При адиабатических ограничениях рассматривается задан постоянный тепловой поток. Изменения $\dot{q}' = -\lambda \partial T'/\partial z$ этого потока из-за температурных

возмущений равны нулю, если способность среды проводить тепло очень мала.

Локальные изменения в температуре среды, имеющие место наряду с заданным потоком тепла, малы и их влиянием на основное решение обычно пренебрегают. Это приводит к условию для возмущения температуры:

$$\frac{\partial T'}{\partial z}(x, y, z_r) = 0 \tag{7.16}$$

Дифференциальные уравнения для возмущений (5.123)–(5.125) дополненные соответствующими граничными условиями приводят к задаче на собственные значения, которая дает возможность вычисления критического числа Релея Ra_{krit} и волнового числа a_{krit} периодических ячеистых структур конвекции Релея–Бенара. Если входящие в дифференциальные уравнения переменные представить в виде вектора возмущений $\boldsymbol{u}' = (u', v', w', p', T')$, то его математическое представление:

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'_x(x, y, z, \omega) \exp(-i\omega t) \tag{7.17}$$

позволяет разделить зависимость решения от от времени и пространственных координат. Если затем исключить u', v', p' (см., например, Г. Эртель, Й. Делфс, 1996), то система дифференциальных уравнений представится в виде:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\Delta^2 & -Ra(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \\ -1 & -\Delta \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} \frac{1}{Pr}\Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} w' \\ T' \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.18}$$

Исключение w' приводит для $\boldsymbol{u}' = T'$ к задаче на собственные значения вида:

$$\left\{ \left[-\Delta^3 + Ra(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \right] - i\omega \left[\left(1 + \frac{1}{Pr}\Delta^2 \right) \right] + \omega^2 \left[\frac{1}{Pr}\Delta \right] \right\} T'_x = 0 \tag{7.19}$$

В эту задачу для T'_x собственное значение ω входит квадратично.

Для бесконечного вытянутого слоя проблема устойчивости периодической ячеистой конвекции Релея–Бенара допускает следующее математическое выражение с разделением переменных:

$$(u', v', w', p', T')(x, y, z) = F(x, y)(\hat{u}(z, \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{T}(z))) \tag{7.20}$$

Следует обратить внимание, что это выражение невозможно при боковом ограничении области (например, стенками резервуара), так как в этом случае на боковых стенках явно должны быть поставлены граничные условия, нарушающие эту зависимость. Подстановка выражения (7.20) в стационарное уравнение энергии (5.125) дает прежде всего взаимосвязь функции $F(x,y)$ со произвольно выбираемым параметром разделения переменных a^2:

$$\frac{\frac{d^2\hat{T}}{dz^2}+\hat{w}}{\hat{T}} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{F} = a^2 = \text{const}. \tag{7.21}$$

Тогда в дифференциальном уравнении для T' (7.19) появляется a^2 в соединении с условием, что $\omega = 0$ (стационарное состояние):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-a^2\right)^3 \hat{T}(z) + Raa^2\hat{T}(z) = 0. \tag{7.22}$$

С соответствующими граничными условиями тем самым снова определена задача на собственные значения, в которой теперь при заданном a число Релея Ra выступает как собственное значение. Задача на собственные значения (7.22) описывает начало термической ячеистой конвекции потока. Для любого заданного волнового числа a определяется относящееся к нему число Релея $Ra(a)$. Для пространственно периодической ячеистой структуры $F(x,y)$ принять в виде:

$$F(x,y) = \exp(ia_x x + ia_y y) \tag{7.23}$$

с

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2. \tag{7.24}$$

Выражение (7.23) представляет собой для действительных чисел a_x, a_y пространственно периодическую плоскую волну с волновыми числами $a_x = 2\pi/\lambda_x$ и $a_y = 2\pi/\lambda_y$ (рис. 7.19). Понятно, что выбор волнового числа a_x (или a_y) подчиняется только ограничению $a_x^2 \leqslant a^2$ (или $a_y^2 \leqslant a^2$). Соответственно другое волновое число следует из (7.24). Параметр a очевидно имеет значение характерного волнового числа. Проблема устойчивости определяется только длиной волны $\lambda = 2\pi/a$ относящейся к ней волны возмущения, но не ориентацией ее волновой нормали $\varphi = 1/\operatorname{tg}(a_y/a_x)$ на (x,y)-уровне.

Из-за отсутствия определенного задачей направления его можно без ограничений общности рационально выбрать, например, $a_x \in [0, a/\sqrt{2}]$.

(x, y) — структура решения тоже независима от частного решения $\hat{T}(z)$, которое определяется из (7.22). Если, например, определить из задачи на собственные значения (7.22) критическое волновое число a_{krit}, то имеется бесконечное множество возможностей составить его с помощью (7.24) из отдельных волновых чисел.

Так, одномерные (например, $a_x = 0, a_y = a$) цилиндрические структуры так же возможны, как и двухмерные ячеистые структуры с горизонтальной проекцией шестиугольной формы. Пример дает рисунок (7.20), на который нанесена функция $f(x, y) = \cos(ay) + \cos(\sqrt{3}/2ax + 1/2ay) + \cos(\sqrt{3}/2ax - 1/2ay)$ с $a = 2\pi$.

Какая из возможных структур образуется, зависит по линейной теории единственно от начальных условий. В действительности оказывается все же, что, например, если конвективный слой имеет ограничение вида свободной поверхности, то при различных начальных возмущениях предпочитаются шестиугольные ячейки, в то время как при ограничении вида твердой поверхности наблюдаются цилиндрические структуры.

Диаграмма устойчивости

В этом параграфе обсуждаются три решения задачи на собственные значения (7.22) для различных граничных условий (7.13)–(7.16).

Для случая двух свободных изотермических ограничений решение этой задачи можно представить в замкнутой форме.

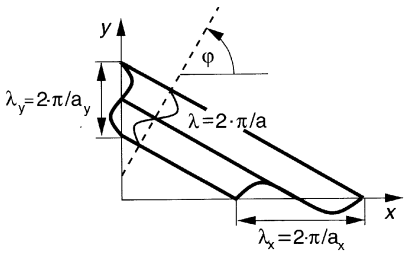


Рис. 7.19. К интерпретации параметра разделения задачи a в качестве волновых чисел

Граничные условия имеют вид:

$$\hat{T}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0, \quad \frac{d^2\hat{T}}{dz^2}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0, \quad \frac{d^4\hat{T}}{dz^4}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0 \qquad (7.25)$$

Каждая функция из системы симметричных относительно середины слоя функций $\hat{T}^g(z) = \cos((2n+1)\pi z)$ удовлетворяет граничным условиям. То же самое относится к асимметричным функциям $\hat{T}^u(z) = \sin(2n\pi z)$. Если подставить $\hat{T}^g$ в задачу на собственные значения, то получается собственное решение:

$$Ra(a) = \frac{((2n+1)^2\pi^2 + a^2)^3}{a^2}. \tag{7.26}$$

Тем самым определяется искомое соотношение между числом Релея Ra и волновым числом a на кривой нейтральной устойчивости $Ra(a)$. При внимательном рассмотрении (7.26) бросается в глаза, что имеется бесконечное множество таких нейтральных кривых, так как порядковое число n может задаваться любым. Легко понять, что для всех a имеются самые низкие (и тем самым основные) числа Релея для основной моды $n = 0$. Критическое число Релея Ra_{krit} получают из условия минимума функции $Ra(a^2)$:

$$Ra_{krit} = \frac{27}{4}\pi^4 = 658, \quad a_{krit} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.22 \tag{7.27}$$

Если подставить в задачу асимметричную собственную функцию $\hat{T}^u$, то можно установить, что ниже всех лежащая $Ra(a)$- кривая находится намного выше кривой для симметичной собственной функции. Для асимметичных функций критическим числом Релея $Ra_{krit} = 108\pi^4 \simeq 10520$ при $a = \sqrt{2}\pi \simeq 4.44$. Отсюда понятно, что асимметричное решение физически несущественно, так как в каждом случае симметричное собственное решение раньше становится неустойчивым. Кривые нейтральной устойчивости нижайшего порядка при симметричном и асимметричном собственном решении имеют вид, показанный на рисунке 7.21.

При критическом числе Релея устанавливаются продолговатые конвекционные цилиндры (валы, катушки, ролики, валки) или шестиугольные ячейки, появление которых в метеорологии рассматривается в главе 11.

Граничные условия термической ячеистой конвекции при двух постоянных изотермических ограничениях имеют вид:

$$\hat{T}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0, \quad \frac{d^2\hat{T}}{dz^2}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2\right)\frac{\hat{T}}{dz}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0 \tag{7.28}$$

Задача на собственные значения приводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению шестого порядка по z с постоянными

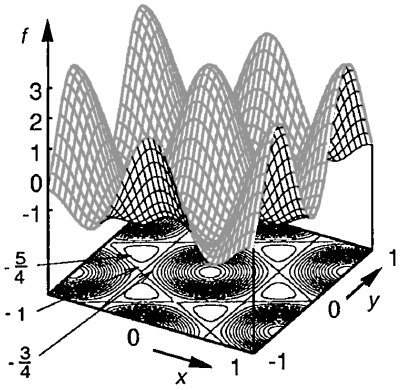


Рис. 7.20. Возникновение шестиугольных ячеистых структур (горизонтали) благодаря наложению трех собственных решений

коэффициентами (7.22). Оно с помощью подстановки $e^{\lambda z}$ оно сводится к характеристическому уравнению

$$(\lambda^2 - a^2)^3 + Raa^2 = 0. \tag{7.29}$$

Постоянные C_i общего решения $\hat{T}(z) = \sum_{i=1}^{6} C_i e^{\lambda_i z}$ должны обеспечивать выполнение шести однородных граничных условий (7.28). Нетривиальные решения $\hat{T}(z) \neq 0$ могут существовать только тогда, когда будет равен нулю детерминанта соответствующей 6×6 матрицы. Это условие ведет к искомому отношению между числом Релея Ra и волновым числом a, которое разрешается численным способом.

Кривые нейтральной устойчивости при $\omega_i = 0$ приведены на диаграмме устойчивости рис. 7.21. Области отрицательных значений $\omega_i < 0$ приводит затуханию по времени возмущений. Основное состояние теплопроводности остается устойчивым. Области положительного значения $\omega_i > 0$ ведут к неустойчивости. На кривой нейтральной устойчивости находится минимальное число Релея Ra_{krit}, ниже которого возмущения любой длины волны затухают. Эту границу рассчитывают как минимум функции $Ra(a)$, что дает

$$Ra_{krit} = 1708, \quad a_{krit} = 3{,}12 \tag{7.30}$$

Собственные решения — это продолговатые конвекционные цилиндры (валы), которые уже были показаны в вводной главе на рис. 1.3. Решение для

асимметричных собственных функций $f_i^u(z)$ тоже изображено на рисунке 7.21. Критическое число Релея здесь примерно в 10 раз выше чем в случае симметричных функций возмущения $Ra_{krit} \simeq 17610, a_{krit} \simeq 5{,}37$.

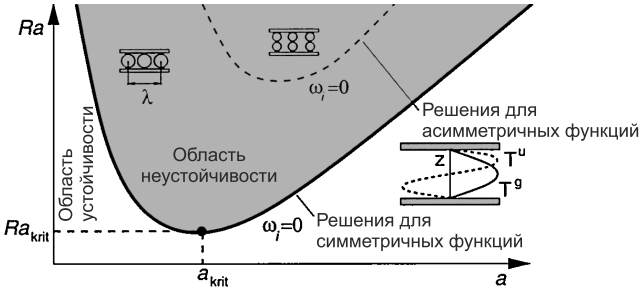


Рис. 7.21. Кривая нейтральной устойчивости ячеистой конвекции Релея – Бенара

Асимметричные возмущения только тогда достигают условия нейтральной устойчивости, когда симметричные возмущения уже неустойчивы.

Для случая когда одна граница слоя представляет свободную поверхность, а другая стенку с постоянным изотермическим ограничением, следует соблюдать условие (7.25) при $z = 1/2$, а при $z = -1/2$, напротив, — (7.28). Эту задачу можно свести к рассмотренной выше задаче при двух постоянных ограничениях. Так как асимметричная функция возмущений обращается в ноль со всеми своими симметричными производными при $z = 0$, асимметричное собственное решение как раз при $z = 0$ и удовлетворяет условиям свободной изотермической границы. Таким образом, можно отбросить верхнюю половину $0 < z \leqslant 1/2$ решения проблемы Релея–Бенара с двумя жесткими ограничениями. Число Релея Ra и безразмерное волновое число a должны вновь образованы для слоя с наполовину уменьшенной толщиной l. Для этого уменьшают в два раза разницу температуры ΔT и в определении числа Релея из l вычитают $l/2$: $Ra(\Delta T/2, l/2) = 2^{-4}Ra$. Так как волновое число a с помощью умножения на l было сделано безразмерным, его нужно уменьшить наполовину $a(l/2) = 1/2a$. Тем самым получается:

$$Ra_{krit} = \frac{17610}{2^4} = 1101, \quad a_{krit} = \frac{5.37}{2} = 2{,}68. \tag{7.31}$$

При критическом числе Релея наблюдают шестиугольные конвективные ячейки. Примеры показаны на рисунках 1.2, 7.2 и 7.4.

Влияние границ резервуара

В ранее обсуждаемых проблемах устойчивости основной поток лишь в одном направлении (z) был неоднородным. Только по этой координате требовалось явно задать граничные условия. В направлениях однородного распределения параметров можно было использовать математические выражения для решения волнового вида без явных граничных условий, что приводило к обыкновенным однородным дифференциальным уравнениям. Но если рассматривать неустойчивость Релея–Бенара в резервуарах с конечными поперечными размерами, то необходимо явно задать граничные условия у всех стенок, из-за чего использование заданных волновых форм для возмущений больше не будет допустимо. Численное решение задачи на собственные значения (7.19) для $\omega_i = 0$ в этом случае становится трудоемким.

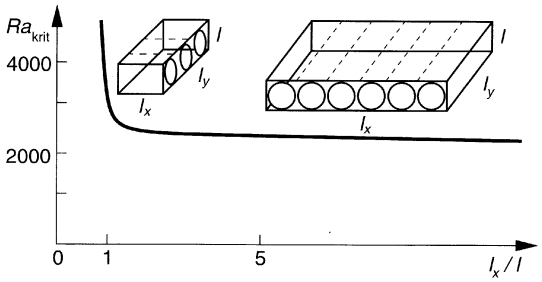


Рис. 7.22. Критические числа Релея прямоугольного резервуара с соотношением сторон $l_y/l = 4$

Результаты численного решения такой задачи на собственные значения показывают, что ограничения, выставленные на вертикальных стенках действуют на начало ячеистой конвекции стабилизирующе, так как условие прилипания вводит дополнительное трение. Это становится понятным из рис. 7.22 на котором приведена зависимость критического числа Релея от отношения длины резервуара l_x к высоте резервуара l. При заданном отношении $l_y/l = 4$ критическое число Релея для l_x/l стремится к значению 1815. Из диаграммы затем становится понятным, что асимптотическое значение критическое число Релея уже принимает при относительно низких значениях отношения l_x/l. При уменьшении длины резервуара l_x/l до очень небольших значений критическое число Релея сильно возрастает. В этом

случае сила трения вследствие условия прилипания по бокам резервуара воздействует на все поле потока и даже может полностью препятствовать образованию конвективных валов. В основном продольные оси конвективных цилиндрических ячеек ориентированы параллельно самым коротким сторонам резервуара. Поле потока в принципе трехмерно. Влияние боковых ограничений проявляется до глубины примерно в одну характерную длину l в поле потока. Внутри области параметры течения можно рассчитать так же, как для неограниченной области. Это приведет к неожиданному результату, что и внутри резервуара округлой формы также образуются асимптотично по времени именно цилиндрические структуры, а не, как предполагалось ранее, концентрические кольцевые ячейки.

Вторичные неустойчивости

До сих пор рассматривалось развитие термической ячеистой конвекции. Для сверхкритических чисел Релея независимо от начальных и граничных условий образуется множество разветвленных решений. Появляются стационарные трехмерные, а также зависимые от времени колебательные ячеистые структуры вплоть до турбулентной ячеистой конвекции.

Теория этих вторичных неустойчивостей описана среди прочего Г. Эртелем, Й.Делфсом (1996). При этом исходят из того, что при критическом числе Релея основное состояние $\boldsymbol{U}_0$ сменяется неустойчивой стационарной ячеистой конвекцией, которая теперь обозначается $\boldsymbol{U}_1$ и воспринимается как новое основное состояние. По аналогии с проведенным ранее анализом устойчивости на периодическое основное состояние $\boldsymbol{U}_1$ накладывается небольшое возмущение основного потока $\varepsilon \boldsymbol{u}''$. Это ведет к математическому выражению для возмущенного состояния:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_1 + \varepsilon \boldsymbol{u}'' \tag{7.32}$$

и к дифференциальным уравнениям возмущения для вторичных неустойчивостей $\boldsymbol{u}''$.

Теоретические и экспериментальные результаты, достигнутые, в особенности, Буссе (1979) обобщены на рис. 7.23 и 7.24. Обширные вариации параметров показали, что при заданных числах Релея и Прандтля и той же самой длине волны λ ячеек Бенара могут существовать различные неустойчивые вторичные собственные формы $\boldsymbol{u}''$. Формы появления вторичных неустойчивостей различны в зависимости от комбинаций $Pr, Ra, a = 2\pi/\lambda$. В диапазоне очень малых чисел Прандтля конвективные цилиндры (валы)

становятся неустойчивыми, например, по отношению к нестационарным колебательным формам возмущения os. Этому есть подходящее объяснение. Локальное ускорение $\partial \boldsymbol{u}/\partial t$ в лежащих в основе этой задачи уравнениях Буссинеска (5.81) делится на число Прандтля. Чем меньше число Прандтля, тем сильнее влияние нестационарных членов.

Состояния, при которых начинается колебательная неустойчивость конвективных цилиндров, изображены, среди прочего, на рис. 7.23, который отвечает случаю бесконечного слоя с постоянными горизонтальными ограничениями (стенками). Здесь показана трехмерная область в (a, Pr, Ra)-пространстве, для которой затухают по времени все вторичные возмущения. Конвективные цилиндры, характеризуемые параметрами внутри этой области устойчивости являются устойчивыми к небольшим возмущениям. Для наглядного представления Формы этой области приведены пять ее сечений, отвечающих постоянным значениям числа Прандтля.

В зависимости от того, где заканчивается область устойчивости, конвективные цилиндры становятся неустойчивыми по отношению к различным формам возмущения. Вся область неустойчивости касается линии $Ra = Ra_{krit}, a = a_{krit}, Pr$, которая представляет собой критическое состояние $Ra_{krit} = 1708, a_{krit} = 3.12$ первичной неустойчивости. Критическое число Релея Ra_{krit} не независит от числа Прандтля Pr. В сечении, отвечающем значению $Pr = 300$ на рис. 7.23 включена также и область неустойчивости, отвечающая первичному анализу устойчивости (рис. 7.21), это сделано чтобы показать, что изображенная область устойчивости для вторичных возмущений в нее включена. Диаграмма устойчивости не говорит о том, ведет ли появляющаяся вторичная неустойчивость в ходе развития потока к такому его состоянию, которое соответствует собственной форме этой неустойчивости. Она сообщает только, что конвективные цилиндры при при выходе за пределы критической площади, ограничивающей область устойчивости на диаграмме, становятся неустойчивыми по отношению к бесконечно малым возмущениям. Вторичный анализ неустойчивости дает также представление о том, какой пространственно временной характер имеют формы возмущения, пока они еще имеют бесконечно малую амплитуду.

При этом различают наряду с колебательными неустойчивостями os три типа зависимых от времени вторичных неустойчивости (рис. 7.24): зигзагообразную неустойчивость zz, косоварикозную (наклонно-расширенную) неустойчивость sv и поперечно скрученную (цилиндрическую) неустойчивость qr. Зигзагообразная неустойчивость появляется тогда, когда заданная длина волны конвекционных цилиндров слишком велика при соот-

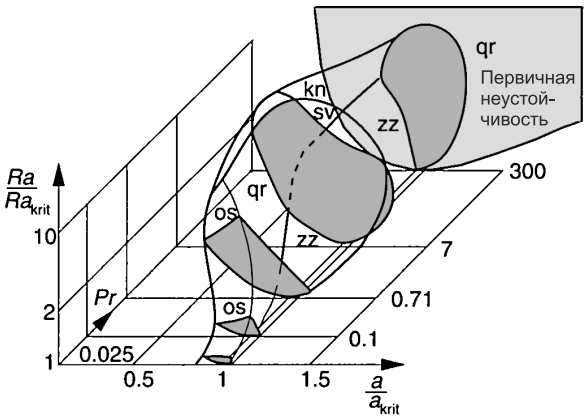


Рис. 7.23. Область устойчивости для конвективных цилиндров (валов) между двумя твердыми горизонтальными стенками. Вторичные собственные решения: os: колебательный, sv: косоварикозный (расширенный), zz: зигзагообразный, qr: поперечно скрученный, kn: узелковый, Ra_{krit}: критическое число Релея первичной неустойчивости

ветствующем числе Релея и получается уменьшение длины волны благодаря образованию зигзага. Косо-варикозная (расширенная) неустойчивость образует пространственно периодическую вариацию в обоих горизонтальных направлениях с периодическим перемещением скручиваний (цилиндров) от одного ряда к другому.

Поперечно скрученная неустойчивость ведет, в конце концов, к полному перемещению конвективных цилиндров с различными длинами волн, которые ориентированы друг к другу под прямым углом.

Для жидкостей с числами Прандтля больше 7 трехмерный поток при числах Релея больше чем $2 \cdot 10^4$ стационарен. Эту неустойчивость называют узелковой (бимодальной) неустойчивостью (четвертое изображение на рис. 7.24). В газах с числом Прандтля 0.71 конвективные цилиндры)начинают колебаться при числе Релея $1 \cdot 10^4$ и не наблюдается стационарных узелковых неустойчивостей. Дальнейший рост числа Релея ведет к росту амплитуды колебаний. Зависимая от времени структура конвективных ячеек становится все более нерегулярной, пока не осуществляется, наконец, переход к турбулентному конвективному течению. У жидких металлов с числами Прандтля порядка 10^{-2} область чисел Релея, отвечающих

стационарным конвективным потокам очень ограничена и турбулентный режим достигается уже при числе Релея 2500.

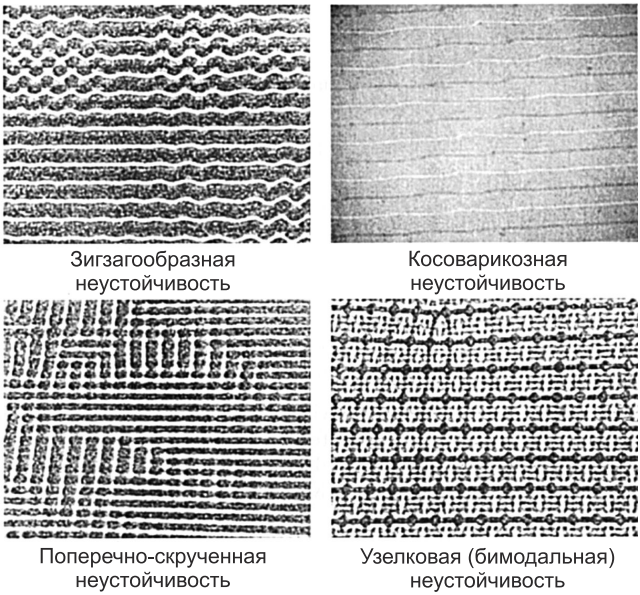


Рис. 7.24. Моментальные снимки зависимой от времени ячеистой конвекции, первоначальное состояние: конвективные валы заданной длины волны (Буссе 1979)

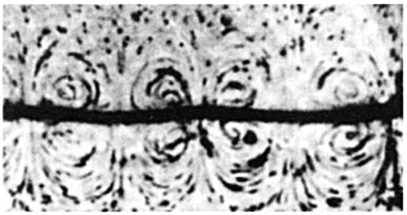


Рис. 7.25. Неустойчивость Марангони на пограничной поверхности жидкости

7.2.2. Конвекция Марангони

На свободной поверхности жидкости или на поверхности раздела между двумя несмешивающимися жидкостями действует поверхностное натя-

жение σ, которое в некоторых случаях может привести к конвективному потоку (рис. 7.25) — термокапиллярной конвекции. Ниже рассматривается температурная зависимость поверхностного натяжения $\sigma(T)$ горизонтального слоя жидкости. Градиент поверхностного натяжения вызывает на поверхности появление касательного напряжения, следствием которого будет конвективное течение. При условии линейного уравнения состояния

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0) \tag{7.33}$$

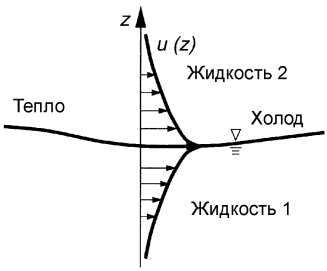


Рис. 7.26. Конвективное течение у поверхности раздела двух жидкостей

градиент поверхностного напряжения пропорционален γ. Обычно для жидкостей $\gamma = -\partial\sigma/dT > 0$, так что конвективное течение у поверхности устремляется из теплых в холодные зоны (рис. 7.26) Если градиент температуры направлен вдоль граничной поверхности раздела, то говорят о термокапиллярной конвекции. Если градиент температуры направлен как при конвекции Релея–Бенара вертикально, то конвективный поток называется конвекцией Марангони.

Оба случая встречаются в природе и технике самым разным образом. Так, например, рост ледяных кристаллов, форма сварочных швов, отрыв тонких жидкостных пленок, структура поверхностных пленок или структура фронтов пламени при горении жидкого топлива определяются неустойчивостями термокапиллярного конвективного потока. Структура базальтовых колонн или грануляция поверхности Солнца на рис. 7.2 имеют также причину в температурной зависимости поверхностного натяжения.

Анализ устойчивости

Если рассматривать, как при проблеме Релея–Бенара, бесконечный подогреваемый снизу горизонтальный слой жидкости высотой l со свободной поверхностью (рис. 7.27), в котором доминирует конвективный поток Марангони по отношению к обусловленной подъемной силой конвекции Релея–Бенара, то выполняется условие:

$$-\frac{d\sigma}{dt} > \alpha\rho g l^2 \tag{7.34}$$

Это условие выполняется, например, для силиконового масла при высоте слоя не более 3 мм. Пусть нижняя граница (стенка) $z = -1/2$ имеет постоянную температуру T_1 и свободная поверхность $z = +1/2$ — среднюю температуры T_2. При этом условии устанавливается такое же основное состояние теплопроводности как при проблеме Релея–Бенара (7.10):

$$T_0 = -z.$$

Если рассмотреть бесконечно малые потоки конвекции Марангони, то по причине наличия возмущенией величин на поверхности жидкости (P на рис. 7.27) появляются горизонтальные температурные градиенты. Тем самым, в силу температурной зависимости поверхностного напряжения σ, определяются граничные условия для возмущений. Вытекающие из этого тангенциальные силы $dT_x = (\partial\sigma/\partial x)dxdy$ или $dT_y = (\partial\sigma/\partial y)dxdy$ должны компенсироваться касательными силами $\tau_{xz}dxdy = \mu(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x)dxdy$ или $\tau_{yz}dxdy = \mu(\partial v/\partial z + \partial w/\partial y)dxdy$:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Из кинематического условия (7.13) следует $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$, и для безразмерных величин получают взаимосвязь параметров на поверхности жидкости:

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - Ma\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial z^*} - Ma\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0. \tag{7.35}$$

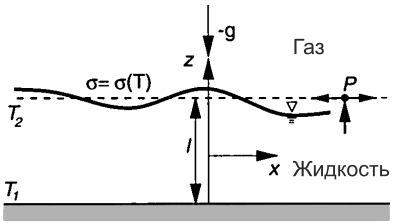


Рис. 7.27. Подогреваемый снизу горизонтальный слой жидкости со свободной поверхностью

Безразмерная характеристика

$$Ma = \frac{\frac{d\sigma}{dT}\Delta T l}{\rho_m \nu k} \tag{7.36}$$

называется числом Марангони. Если поверхностное натяжение не зависит от температуры, то $Ma = 0$, и поверхность жидкости свободна от касательного напряжения. Тогда действительно $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$, и неустойчивость Марангони переходит в неустойчивость Релея – Бенара.

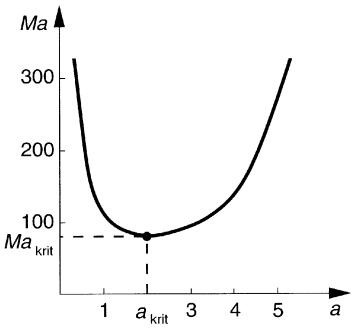


Рис. 7.28. Диаграмма устойчивости конвекции Марангони

Так как полученное для поверхности слоя соотношение (7.35) линейно, то оно остается неизменным после введения возмущения, так что для возмущений действительно:

$$\frac{\partial u'}{\partial z} - Ma\frac{\partial T'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} - Ma\frac{\partial T'}{\partial y} = 0. \tag{7.37}$$

Дифференциальные уравнения для возмущений остаются неизменными по отношению к проблеме Релея–Бенара. Неустойчивость Марангони вызывается, таким образом, исключительно граничными условиями (7.37).

При сделанных предпосылках линейный анализ устойчивости предыдущего параграфа дает диаграмму устойчивости (рис. 7.28) конвекции Марангони, пренебрегая конвекцией, обусловленной подъемной силой $Ra = 0$. Критическим числом Марангони Ma_{krit} считается 79,6 при критическом волновом числе $a_{krit} = 1{,}99$.

Появление неустойчивости Марангони можно наглядно объяснить. Поднимающаяся теплая среда производит на поверхности уменьшение поверхностного натяжения ($\sigma > 0$). Оно позволяет потоку протекать вдоль поверхности, причем он снова охлаждается в соответствии с меньшей температурой поверхности, пока он, наконец, снова не устремится вниз. Из-за этого возникает шестиугольная конвективная ячейка, которая соответствует собственному решению при критическом числе Марангони. Шестиугольные ячейки, рассмотренные при неустойчивости Релея–Бенара на свободной поверхности, вызываются эффектом Марангони. В обоих случаях среда

на поверхности течет в направлении падающей температуры. Измеренное первоначально Бенардом волновое число составляло 2,2, что близко к результату линейного анализа устойчивости конвекции Марангони.

Конвекция Марангони с потоком сдвига

При градиенте температуры, направленном горизонтально вдоль свободной поверхности жидкости или граничной поверхности раздела между двумя несмешивающимися жидкостями, температурная зависимость поверхностного или межфазного натяжения вызывает поток сдвига. Если предположить линейный профиль скорости

$$\boldsymbol{u}_0(z) = z,$$

связанный с температурным профилем

$$T_0(x, z) = -x + \frac{1}{6} Ma(1 - z^3)$$

в качестве основного состояния, то линейный анализ устойчивости дает диаграмму устойчивости рис. 7.29. Для сред с числом Прандтля больше чем 1,6 на граничной поверхности при сверхкритических числах Марангони устанавливаются конвективные скручивания (цилиндры), которые, в основном, вызываются вертикальным температурным градиентом. В зоне числа Прандтля $0.62 < Pr < 1.6$ вычисляют проходящие в потоке сдвига конвекционные скручивания. Для очень маленьких чисел Прандтля (жидкие металлы) получаются косо идущие нестационарные конвекционные скручивания, причиной которых является горизонтальный градиент температуры. У сред с маленькими числами Прандтля всегда доминируют члены инерции по отношению к трению.

Рис. 7.25 изображает стационарные конвекционные скручивания на пограничной поверхности жидкости.

7.2.3. Диффузионная конвекция

По аналогии с проблемой Релея–Бенара даже при постоянной температуре в смеси веществ градиент концентрации может отвечать за неустойчивое расслоение плотности. В солевом растворе, например, плотность увеличивается с концентрацией. Если вода со свободной поверхности солевого раствора (рис. 7.30) испаряется, то сохраняется высокая концентра-

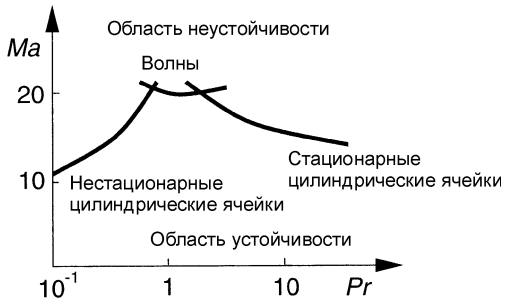


Рис. 7.29. Диаграмма устойчивости конвекции Марангоги с горизонтальным потоком сдвига

ция соли и возникает неустойчивое расслоение плотности (концентрационная стратификация). Оказывается, что рассмотрение конвективного потока, движимого разницей концентрации смеси из двух веществ, идентично анализу проблемы Релея–Бенара. Для этого необходимо только заменить характеристическую разницу температуры ΔT на разницу концентрации Δc, коэффициент теплового расширения $\alpha = \rho^{-1} d\rho/dT$ на коэффициент концентрационного изменения плотности $\beta = \rho^{-1} d\rho/dc$ и коэффициент температуропроводности k на коэффициент диффузии D. Соответственно, диффузионное число Релея $Ra_D = \beta_m \Delta c_m g l^3/(\nu D)$ заменяет число Релея Ra и число Шмидта $Sc = \nu/D$ — число Прандтля Pr, где g снова обозначает земное ускорение, l — толщину слоя жидкости и ν — кинематическую вязкость. Все результаты термической ячеистой конвекции тем самым сразу же становятся переносимыми на диффузионную конвекцию. Поэтому ниже рассматривается двойная диффузионная неустойчивость.

Простая диффузионная неустойчивость является тогда ее особым случаем. Феномены двойной диффузии — это процессы, при которых появляются одновременно два диффузионных воздействия, с одной стороны это диффузия массы, с другой — тепловая диффузия (теплопроводность). Рассматривается устойчивость двойной диффузионной системы, которая осуществляется наложением диффузии массы (например, водно-солевой раствор в океане) на теплопроводность. В зависимости ситуации, можно как благоприятствовать этим двум различным диффузионным процессам в их взаимодействии, так и стабилизировать течение.

Верхняя сторона слоя (см. рис. 7.30) удерживается при более высокой температуре T_2, чем температура дна T_1. Концентрация соли c_2 на верхней стороне также больше, чем у дна c_1. Под c подразумевается концентрация массы $c = \rho_s/\rho$ с парциальной плотностью соли ρ_s и общей плотностью раствора ρ. Слой жидкости с такой температурной и концентрационной стратификацией может быть как устойчив, так и неустойчив.

По аналогии с проблемой Релея–Бенара рассматривается элемент жидкости с характерным размером l, который вследствие малого возмущения поднимается с небольшой вертикальной скоростью w (рис. 7.31). У него в новом слое будет меньшая по сравнению с окружающей средой температура и меньшее содержание соли. Он поднимается со скоростью w и двигается вдоль температурного градиента $\Delta T/l$ в окружающем слое потока. Относящееся к нему изменение внутренней энергии в объеме l^3 частицы — это $\dot{E}_k = \rho_m c_v w(\Delta T/l)l^3$. Это изменение достигается за счет потока энергии через поверхность частицы l^2 вследствие теплопроводности $\dot{q} \sim \lambda \Delta T_w/l$. Эффективный градиент температуры ΔT_w был введен, чтобы показать, что во время этого процесса, как правило, эффективен не весь температурный перепад ΔT, выделенный из заданного распределения температуры. Если скорость подъема частицы w велика, то у частицы недостаточно времени, чтобы приспособится к новой температуре окружающей среды. Баланс $\dot{E}_k = \dot{q}l^2$ дает определение для эффективного градиента температуры $\Delta T_w = wl\Delta T/k$, с коэффициентом температуропроводности $k = \lambda/(\rho_m c_v)$. Если бы скорость частицы задавалась таким образом, чтобы как раз достигалось бы выравнивание температуры, то ΔT и ΔT_w не отличались бы друг от друга.

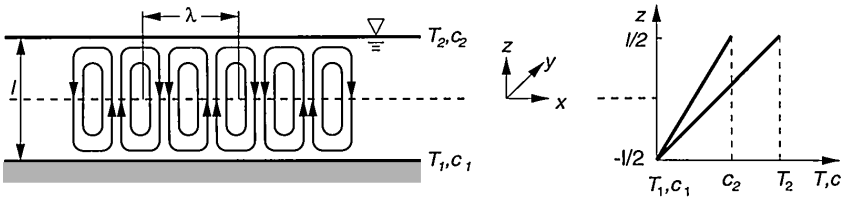


Рис. 7.30. Двойная диффузионная неустойчивость.

Относящаяся сюда термическая скорость диффузии w_T была бы тем самым $w_T = k/l$.

В то время частица под действием градиента концентрации $\Delta c/l$ обогащается солью. Изменение концентрации, которое сообщается ей во время подъема со скоростью w, — это, таким образом, $w\Delta c/l$. Это соответствует изменению массы $\dot{m} = \rho_m w(\Delta c/l)l^3$. Обогащение происходит в форме диффузионного потока $j = \rho_m D(\Delta c_w/l)l^2$, поступающего через поверхность частицы l^2. При этом D обозначает коэффициент диффузии. Снова вводится эффективная разница концентрации Δc_w, так как частица среды по причине своей скорости не имеет достаточно времени полностью выровнять явно выраженную разницу Δc. В силу баланса $\dot{m} = j$ получают эффективный градиент концентрации $\Delta c_w = wl\Delta c/D$. Если бы можно было задать скорость частицы таким образом, чтобы как раз достичь выравнивания концентрации, то Δc и Δc_w бы не отличались. Относящаяся сюда скорость диффузии w_D была бы тогда $w_D = D/l$.

Условие устойчивости определяют по аналогии с проблемой Релея–Бенара из сравнения подъемной силы A, действующей на элемент среды, с силой сопротивления W. Подъемная сила $A = A_T + A_D$ состоит из термически обусловленной доли A_T и диффузионно обусловленной доли A_D. Изменение плотности частицы жидкости, связанное с изменением температуры, оказывается $\Delta\rho_T \sim \rho_m\alpha_m\Delta T_w$. Вызванная этим доля в подъемной силе — это $A_T \sim \rho_m\alpha_m\Delta T_w g l^3$, со средним температурным коэффициентом расширения α_m. Диффузионно обусловленное изменение плотности — $\Delta\rho_D \sim \rho_m\beta_m\Delta c_w$ приводит к доле в подъемной силе $A_D \sim -\rho_m\beta_m\Delta c_w g l^3$. Через β_m обозначается средний коэффициент концентрационного изменения плотности. Отрицательный знак перед числом был введен, чтобы A_T и A_D указывали одинаковое направление, если Δc_w и ΔT_w имеют одинаковый знак. Движению частицы противодействует сила сопротивления W.

При медленном движении (малая скорость возмущения) действительно сила сопротивления может быть определена по Стоксу $W \sim \mu \cdot w \cdot l = \mu \cdot l^2/\Delta t$ (рис. 7.31). Условие для установления неустойчивости определяется очевидно преобладанием подъемной силы над сопротивлением:

$$A = A_T + A_D \geqslant W,$$
$$\rho_m \cdot \alpha_m \cdot \Delta T_w \cdot g \cdot l^3 - \rho_m \cdot \beta_m \cdot \Delta c_w \cdot g \cdot l^3 \geqslant \mu \cdot w \cdot d \cdot C.$$

Константа C обобщает все факторы пропорциональности, появляющиеся при производимых расчетах. С выведенными выше соотношениями для

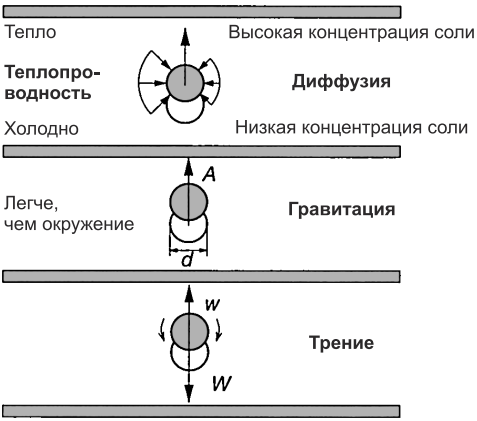


Рис. 7.31. К физическому пониманию двойной диффузионной неустойчивости

ΔT_w и Δc_w и делением на $\mu \cdot w \cdot l$ мы в конце получаем:

$$\underbrace{\frac{\alpha_m \cdot \Delta T \cdot g \cdot l^3}{k \cdot \nu}}_{Ra} - \underbrace{\frac{\boldsymbol{e}_m \cdot \Delta c \cdot g \cdot l^3}{D \cdot \nu}}_{Le \cdot Ra_D} \geqslant C. \tag{7.38}$$

В первом безразмерном слагаемом левой части неравенства узнается число Релея Ra. Второе безразмерное слагаемое записывается обычно как произведение диффузионного числа Релея $Ra_D = \beta_m \cdot \Delta c \cdot g \cdot l^3/(k \cdot \nu)$ и числа Льюиса $Le = k/D$. Число Льюиса — это отношение характеристической термической диффузионной скорости w_T и скорости диффузии вещества w_D. Отсюда получается $Le = w_T/w_D$.

Следует указать на то, что начало конвекции Релея–Бенара является частным специальным случаем полученного выше критерия устойчивости. Это следует из того, что без влияния диффузии $Ra_D = 0$ из (7.38) получается критерий устойчивости (7.7). Также следует заметить, что появляющаяся константа C, которая имеет значение величины критического показателя, просто может быть взята из анализа проблемы Релея–Бенара ($Ra_D = 0$), то есть $C = Ra_{krit}$. Поэтому на основе феноменологических соображений можно написать:

$$Ra - Le \cdot Ra_D \geqslant Ra_{krit}. \tag{7.39}$$

Отношение (7.39) представляет собой для $Ra - Le \cdot Ra_D = Ra_{krit}$ уравнение прямой на диаграмме $Ra(Ra_D)$. Эта критическая для неустойчивости прямая имеет наклон Le (см. рис. 7.32).

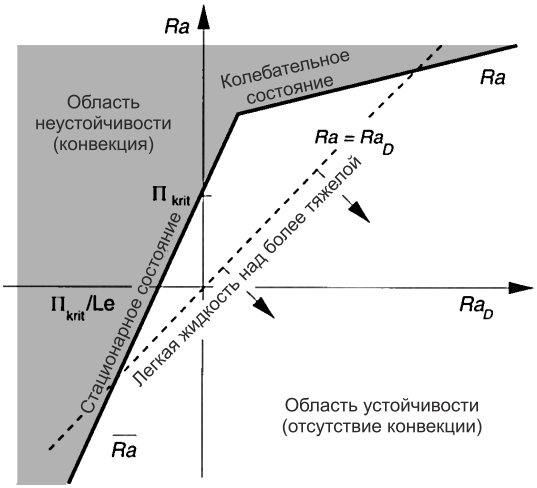


Рис. 7.32. Критические состояния свободно ограниченного слоя двухкомпонентной жидкости

Для положительного числа Ra имеется термически неустойчивое, а для отрицательного Ra_D — диффузионно неустойчивое расслоение (стратификация) плотности. Например, при жестко заданном $Ra_D < 0$ расслоение плотности уже при значениях $Ra < Ra_{krit}$ становится неустойчивым.

Следует обратить внимание также, что термически и диффузионно обусловленные градиенты плотности $\Delta\rho_T = \rho_m \cdot \alpha_m \cdot \Delta T$ и $\Delta\rho_D = \rho_m \cdot \beta_m \cdot \Delta c$ слоя для $Ra = Ra_D$ взаимно уничтожаются. Условие $Ra > Ra_D$ выражает, что более плотная среда находится над более легкой. По ту сторону точки, в которой пересекается критическая прямая по (7.39) с только что идентифицированной прямой $Ra = Ra_D$ (такая точка существует для $Le \neq 1$), неустойчивость возможна также при устойчивом расслоении плотности.

Хотя (7.39) является точным критерием устойчивости, нельзя не упомянуть, что в зоне очень больших положительных диффузионных чисел Релея Ra_D это уравнение больше не действует. Расслоение становится неустой-

чивым уже при меньших, чем предсказывается в (7.39) термических числах Релея Ra. За это ответственны сильные изменения плотности частицы, появляющиеся при относительно больших градиентах концентрации и температуры. Эти изменения плотности обеспечивают то, что сила инерции наряду с подъемной силой и силой трения влияет на равновесие. Наступающая тогда неустойчивость нестационарна и не имеет аналогии с проблемой Релея–Бенара. В качестве другого безразмерного показателя появляется тем самым число Прандтля $Pr = \nu/k$. До сих пор, как и в проблеме Релея–Бенара, инерционными силами, которыми правильно описывается начало стационарных неустойчивостей, пренебрегалось. Неустойчивость при влиянии инерционных сил проявляется в форме узких высоких конвективных ячеек, из-за чего они обычно называются пальчиковыми неусточивостями (ср. рис. 7.30).

Анализ устойчивости

Основные уравнения двойной диффузионной конвекции (существуют градиенты концентрации и температуры) представлены в главе 5.4.3 при условии аппроксимации Буссинеска (5.86). Дифференциальные уравнения для возмущений (5.135)–(5.138) приведены в главе 5.5.

Основное состояние двойной диффузионной конвективной неустойчивости $\boldsymbol{U}_0 = (c_0, \boldsymbol{u}_0, \rho_0, T_0)$ получается из уравнения неразрывности и энергии (5.86):

$$\boldsymbol{\Delta} c_0 = 0, \quad \boldsymbol{\Delta} T_0 = 0. \tag{7.40}$$

В состоянии покоя $\boldsymbol{u} = 0$ градиент температуры $\boldsymbol{\Delta} T_0$ может быть и не параллелен направлению силы тяжести $\boldsymbol{e}_z$. Если взять ротор уравнения импульса (5.86) и подставить $\boldsymbol{u} = 0$, то получим условие $(Ra \cdot \boldsymbol{\Delta} T_0 - Ra_D \cdot \boldsymbol{\Delta} c_0) \times \boldsymbol{e}_z = 0$. Требованию параллельности направлению силы тяжести теперь должен удовлетворять вектор, составленный из суммы векторов градиентов температуры и концентрации $(\boldsymbol{\Delta} T_0 - (Ra_D/Ra) \cdot \boldsymbol{\Delta} c_0) \| \boldsymbol{e}_z = 0$. Здесь следует интерпретировать $Ra_D/Ra = -\boldsymbol{\Delta}\rho_D/\boldsymbol{\Delta}\rho_T$ как отношение изменения плотности вследствие градиента температуры $\boldsymbol{\Delta}\rho_T = -\rho_m \cdot \alpha_m \cdot \boldsymbol{\Delta} T$ к изменению плотности вследствие градиента концентрации $\boldsymbol{\Delta}\rho_D = \rho_m \cdot \beta_m \cdot \boldsymbol{\Delta} c$. Для $\boldsymbol{\Delta}\rho_D/\boldsymbol{\Delta}\rho_T = 1$ плотность в любом месте одинакова, так как в этом случае обусловленные температурой и концентрацией изменения плотности компенсируются. Таким образом, случай индифферентного расслоения (стратификации) плотности определяется условием $Ra = Ra_D$.

Для слоя бесконечной длины по горизонтальным направлениям x и y основное состояние не зависит от x и y. Температура и концентрации у обеих горизонтальных стенок слоя жидкости являются, соответственно, постоянными и заданными:

$$T_0\left(x,y,z=-\frac{1}{2}\right)=T_1,\quad T_0\left(x,y,z=\frac{1}{2}\right)=T_2,$$
$$c_0\left(x,y,z=-\frac{1}{2}\right)=c_1,\quad T_0\left(x,y,z=\frac{1}{2}\right)=c_2.$$

Вдоль направлений x, y основное состояние зависит только от вертикального направления z. Из приведенных выше уравнений Лапласа получается для T_0 и c_0:

$$T_0(z)=C_1^T\cdot z+C_0^T,\quad c_0(z)=C_1^c\cdot z+C_0^c. \tag{7.41}$$

Константы (C_0^T,C_1^T), как и (C_0^c,C_1^c) следуют из приведенных граничных условий: $C_1^T=-1$, $C_0^T=(T_1+T_2-2\cdot T_m)\Delta T$ и $C_1^c=-1$, $C_0^c=(c_1+$ $+c_2-2\cdot c_m)\Delta c$. Здесь $T_m=1/2\cdot(T_1+T_2)$, как в проблеме Релея, и $c_m=$ $=1/2\cdot(c_1+c_2)$. При этих условиях получается основное решение:

$$T_0=c_0=-z. \tag{7.42}$$

Из первых двух уравнений импульса в проекции на оси (x,y) (5.81) получают $p_0=p_0(z)$. Уравнение импульса на ось z дает:

$$0=-\frac{dp_0}{dz}+(Ra\cdot T_0-Ra_D\cdot c_0)$$

или, учитывая (7.41), получим для давления:

$$p_0=-\frac{1}{2}\cdot(Ra-Ra_D)\cdot z^2+p_\infty. \tag{7.43}$$

При этом p_∞ — это давление окружающей среды. Полученные распределения температуры и концентрации и, тем самым, вся проблема теплопроводности-диффузии независима от p_∞. Не уровень давления p_0 влияет на проблему, а исключительно его градиент dp_0/dz.

Линейный анализ устойчивости снова дает диаграмму устойчивости (рис. 7.21). Процесс аналогичен проблеме Релея–Бенара, приведенной в

главе 7.2.1. Для горизонтального двухкомпонентного слоя, оганиченного твердыми стенками, может быть реализована пальчиковая неустойчивость, как стационарная, так и колебательная. Нейтральная кривая для стационарной двойной диффузионной неустойчивости вычисляется (см. Х. Эртеля, Й. Делфса 1996):

$$\bar{\Pi}(a) = Ra - Le \cdot Ra_D = \frac{(a^2+\pi^2)^3}{a^2}. \tag{7.44}$$

$\overline{\Pi}(a)$ описывает при этом ту же самую кривую, как и в проблеме Релея–Бенара $Ra(a)$ (рис. 7.22). Для нейтральной кривой колебательных пальчиковых неустойчивостей получается:

$$\widetilde{\Pi}(a) = \frac{Pr \cdot Le^2 \cdot Ra - Pr \cdot Le \cdot \dfrac{1+Pr \cdot Le}{1+Pr} \cdot Ra_D}{Pr \cdot Le^2 + Le \cdot (1+Pr) + 1} = \frac{(a^2+\pi^2)^3}{a^2}. \tag{7.45}$$

Показатель $\widetilde{\Pi}$ соответствует в колебательном случае показателю $\bar{\Pi}$ для стационарной неустойчивости. $\widetilde{\Pi}$ ведет себя так же, как $Ra(a)$ в проблеме Релея–Бенара. Тем самым для слоя жидкости со свободными стенками без температурных и концентрационных возмущений проблема двойной диффузии полностью сводится к более простой стационарной проблеме Релея–Бенара.

Минимум функции $\bar{\Pi}(a) = \widetilde{\Pi}(a)$ дает критические значения (ср. свободный слой жидкости в проблеме Релея–Бенара) $\Pi_{krit} = (27/4) \cdot \pi^4 = 658$ и критическое волновое число $a_{krit} = \pi/\sqrt{2} = 2.22$.

Тем самым определяются также и критические состояния слоя жидкости. Так как число Льюиса Le и число Прандтля Pr могут рассматриваться как постоянные, определяемые свойствами вещества, имеет смысл изобразить критические состояния на диаграмме чисел Релея $Ra(Ra_D)$. Из (7.44) получают уравнение:

$$\overline{Ra} = \Pi_{krit} + Le \cdot Ra_D, \tag{7.46}$$

а из (7.45):

$$\widetilde{Ra} = \Pi_{krit} \cdot (1 + \frac{1}{Le}) \cdot (1 + \frac{1}{Le \cdot Pr}) + \frac{\dfrac{1}{Le} + Pr}{1+Pr} \cdot Ra_D. \tag{7.47}$$

Обе прямые внесены в рисунок 7.32. Диаграмма показывает также, что границы устойчивости $\bar{Ra}$ и $\widetilde{Ra}$, как правило, пересекают биссектрису $Ra = Ra_D$, которая представляет собой левое ограничение зоны чисел Релея,

в которой имеется устойчивое расслоение плотности (более легкий поток над более тяжелым). Диаграмма показывает, что двойные диффузионные неустойчивость возможны также при устойчивом расслоении плотности. Даже если тяжелый поток находится над легким, состояние слоя жидкости может быть устойчивым.

7.2.4. Неустойчивость Тейлора

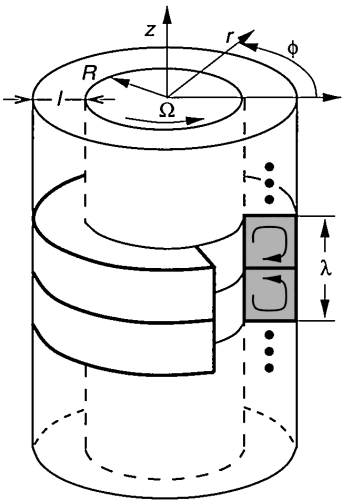


Рис. 7.33. Неустойчивость Тейлора–Куэтта

Гидродинамическая неустойчивость Тейлора течения в слое между двумя вращающимися соосными (коаксиальными) цилиндрами родственна неустойчивости Релея–Бенара. Схема течения изображена на рис. 7.33. Пусть внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью Ω, а внешний пребывает в покое. Кольцевой зазор пусть имеет ширину l. При очень малых скоростях Ω наблюдается слоистое течение жидкости в окружном направлении. При превышении критической частоты вращения Ω_{krit} становятся видны стационарные, торообразные цилиндрические структуры. Эти, периодически чередующиеся валки, представлены на рисунке 7.5. Частицы описывают винтовые траектории вокруг средней линии окружностей торов, и для соседних валков противоположно направлены. Речь идет при этом о так называемом вихре Тейлора.

Сначала следует обратить внимание на наглядное физическое обоснование этой неустойчивости. Для этого рассмотрим элемент слоя жидкости радиуса r_1. Если представить себе , что этот элемент при сохранении своего импульса вращения $r_1 \cdot u_\phi(r_1)$ из-за возмущения смещается в находящийся дальше снаружи слой $r = r_2$, то он обладает на новой траектории с радиусом r_2 новой окружной скоростью вращения $u_\phi(r_1) \cdot r_1/r_2$. Тем самым на радиально смещенную частицу действует центробежная сила $F_1(r_2) = (u_\phi(r_1) \cdot r_1/r_2)^2/r_2$. Если она выше, чем центробежная сила $F_2(r_2) = u_\phi^2(r_2)/r_2$, которая действует на невозмущенную частицу

слоя r_2, то существует превышение центробежной силы, которое движет смещенную частицу еще дальше наружу. При этом $F_1(r_2) > F_2(r_2)$ и $r_1 \cdot u_\phi(r_1) > r_2 \cdot u_\phi(r_2)$, т. е. вращательный импульс или циркуляция во внутреннем слое больше, чем в наружном, $\Gamma(r_1) > \Gamma(r_2)$. Такое расслоение неустойчиво.

Если рассмотреть нейтральный случай, в котором $\Gamma(r_1) = \Gamma(r_2) = C$, то будет выполнено $u_\phi(r) = C/r$. Это соответствует распределению скоростей в потенциальном вихре. Отсюда можно заключить, что распределение центробежной силы неустойчиво тогда, когда $u_\phi(r)$ быстрее падает с r, чем это бывает при потенциальном вихре. Это всегда имеет место при неподвижном внешнем цилиндре, так что здесь в принципе имеется неустойчивое расслоение. Эти соображения впервые были даны Релеем в 1916 году.

Чтобы не возникало таких неустойчивостей, вискозиметр Куэтта эксплуатируется таким образом, что вместо внутреннего вращается внешний цилиндр.

Для установления критических условий, которые характеризует начало зарождения вихря Тейлора, рассмотрим как и при проблеме Релея–Бенара (рис. 7.18), в дополнение к рассмотрению Релея, элемент среды в зазоре цилиндра (рис. 7.34). Этот элемент, имеющий вращательноую скорость $u_\phi = \Omega \cdot R$, радиально переносится из слоя R в наружно расположенный слой $R + l$. Он сохраняет свой вращательный импульс, итак $\Delta(R \cdot u_\phi) = 0$, таким образом выполняется $R \cdot \Delta u_\phi \sim u_\phi \cdot \Delta R = u_\phi \cdot l$. Разница центробежной силы $F \sim \rho \cdot \Delta(u_\phi^2/R) \cdot l^3$, движущая частицу наружу, на новом слое — это $F \sim \rho \cdot \Omega^2 \cdot l^4$. Ей противодействует вязкая радиальная сила сопротивления $W_r \sim \mu \cdot (u_r/d) \cdot l^2$. Радиальная скорость возмущения — это $u_r = l/\Delta t$. Основная временная шкала Δt получается из соображения, что поглощение кинетической энергии возмущения частицы $\Delta E_k = \rho \cdot \Delta(u_\phi^2) \cdot l^3$ вследствие обусловленной трением диссипации $\dot{F}_{diss} \sim W_\phi \cdot \Delta u_\phi \sim \mu \cdot (\Delta u_\phi/l) \cdot l^2 \cdot \Delta u_\phi$ (азимутальная сила сопротивления W_ϕ) требует времени: $\Delta t = \Delta E_k/\dot{E}_{diss} \sim l \cdot R/\nu$. Тем самым можно выразить силу сопротивления W_r как $W_r \sim \mu \cdot \nu \cdot l/R$.

Начало неустойчивости следует ожидать тогда, когда сила сопротивления не может больше компенсировать избыток центробежной силы:

$$F \geqslant W_r \Leftrightarrow \rho \cdot \Omega^2 \cdot l^4 \geqslant \mu \cdot \nu l/R \cdot C,$$

$$\frac{\Omega^2 \cdot R \cdot l^3}{\nu^2} = Ta^2 \geqslant C.$$

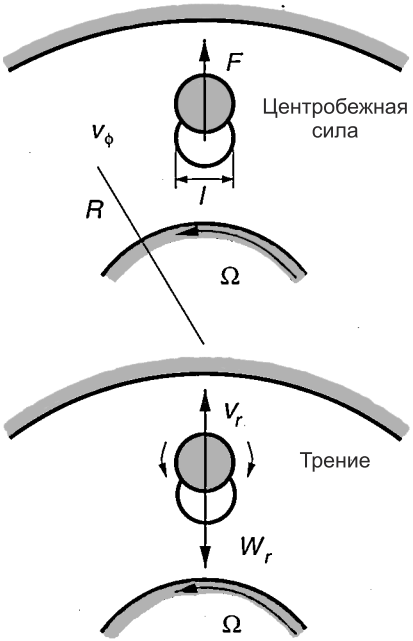


Рис. 7.34. К физической интерпретации числа Тейлора

Ta называют числом Тейлора. Квадрат числа Тейлора представляет отношение центробежной силы к силе трения.

Основные уравнения для формулирования проблемы устойчивости выводятся из уравнений неразрывности и уравнений Навье–Стокса для несжимаемых потоков (5.3), (5.20). Наиболее подходящими к проблеме Тейлора являются цилиндрические координаты. Ими описываются (5.3) и (5.20) в пренебрежении внешними силами:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{7.48}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\cdot\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\cdot\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2}{r} + u_z\cdot\frac{\partial u_r}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\cdot\Big(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\Big), \tag{7.49}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \cdot \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + u_z \cdot \frac{\partial u_\phi}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right), \tag{7.50}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \tag{7.51}$$

со скоростями u_r, u_ϕ и u_z в радиальном, азимутальном и осевом (аксиальном) направлении, а также давлением p.

Граничные условия заданы условием прилипания на стенках цилиндра:

$$\boldsymbol{u}(r = R) = (0, u_\phi = R \cdot \Omega, 0), \tag{7.52}$$

$$\boldsymbol{u}(r = R + l) = (0, 0, 0). \tag{7.53}$$

Ламинарное стационарное основное состояние $\boldsymbol{U}_0 = (\boldsymbol{u}_0, p_0)$ задано потоком Куэтта в зазоре цилиндра. При условии $u_{r0} = u_{z0} = 0$ уравнение неразрывности (7.48) запишется:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_{\phi 0}}{\partial \phi} = 0. \tag{7.54}$$

Отсюда можно заключить что окружная скорость вращения и все ее производные не зависят от ϕ.

Из уравнений Навье–Стокса для ϕ берут $\partial u_{\phi 0}/\partial z = 0$:

$$0 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \phi} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_{\phi 0}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_{\phi 0}}{\partial r} - \frac{u_{\phi 0}}{r^2} \right). \tag{7.55}$$

Так как трение из-за (7.54) не зависит от ϕ, то $\partial p_0/\partial \Phi = \mathrm{const}$ и из-за $p(\Phi) = p(\Phi + 2 \cdot \pi)$. Тогда имеет место $\partial p_0/\partial \Phi = 0$. Тем самым из (7.55) получают:

$$\frac{\partial^2 u_{\phi 0}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_{\phi 0}}{\partial r} - \frac{u_{\phi 0}}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (u_{\phi 0} \cdot r) \right] = 0. \tag{7.56}$$

Уравнение (7.56) дважды интегрируется по r, из-за чего появляются две константы C_1, C_2, подходящие к граничным условиям:

$$u_{\phi 0} = C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{1}{r}, \tag{7.57}$$

с

$$C_1 = -\frac{R^2}{l \cdot (2 \cdot R + l)} \cdot \Omega, \quad C_2 = \frac{R^2 \cdot (R+1)^2}{l \cdot (2 \cdot R + l)} \cdot \Omega.$$

Для малой ширины зазора ($l \ll R$) $u_\phi(r)$ идет место асимптотическая зависимость вместо линейного профиля Куэтта:

$$u_{\phi 0} = \Omega \cdot R \cdot \left(\frac{R + l - r}{l} \right). \tag{7.58}$$

Дифференциальные уравнения для возмущений получаются с математическим выражением $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{U}_0, p_0) + \varepsilon \cdot \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{u}', p')$. Неустойчивость начинается стационарными вращательно симметричными вихрями Тейлора, $\partial/\partial t = 0$ и $\partial/\partial \Phi = 0$. Тем самым получаются следующие дифференциальные уравнения для возмущений:

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0, \tag{7.59}$$

$$-\frac{2 \cdot u_{\phi 0}}{r} \cdot u'_\phi = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u'_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z^2} - \frac{u'_r}{r^2} \right), \tag{7.60}$$

$$\left(\frac{\partial u_{\phi 0}}{\partial r} + \frac{u_{\phi 0}}{r} \right) \cdot u'_r = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u'_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial z^2} - \frac{u'_\phi}{r^2} \right), \tag{7.61}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u'_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z^2} \right). \tag{7.62}$$

Получается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка и 3 дифференциальных уравнения с частными производными второго порядка в r и z для 4 неизвестных $\boldsymbol{u}$ и p'.

Из-за присутствия вторых производных трех компонент скорости в радиальном направлении r необходимо дать 6 граничных условий:

$$(\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u}')(r = R) = (0, \Omega, \cdot R, 0) \overset{(7.52)}{\Rightarrow} \boldsymbol{v}'(r = R) = (0, 0, 0), \tag{7.63}$$

$$(\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u}')(r = R + l) = (0, 0, 0) \overset{(7.53)}{\Rightarrow} \boldsymbol{v}'(r = R + l) = (0, 0, 0). \tag{7.64}$$

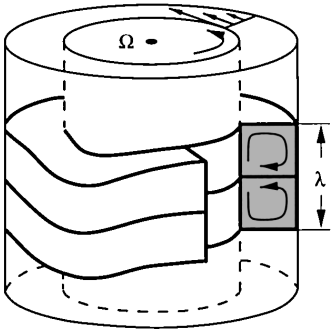


Рис. 7.35. Колебательная неустойчивость вихря Тейлора

Этим также определяется давление, кроме постоянной составляющей, от которой проблема не зависит. Проблема Тейлора для бесконечно вытянутого зазора цилиндра независима от осевого направления z, так что в этом направлении не нужно сформулировать граничные условия.

Задачу на собственные значения можно решить как аналитически, так и численным способом. Принцип действия здесь аналогичен проблеме Релея–Бенара. В качестве результата опять получают диаграмму устойчивости рис. 7.21. Нейтральная кривая задана собственными значениями Ta^2 в зависимости от волнового числа a. Для малых величин зазора, на основе математического отделения, можно вывести уравнение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2\right]^3 u_\Phi(x) + Ta^2 \cdot a^2 \cdot u_\Phi(x) = 0. \tag{7.65}$$

Оно идентично уравнению (7.22) для неустойчивости Релея–Бенара. Число Релея Ra заменяется квадратом числа Тейлора Ta^2, координаты z, x – на r и температура $\hat{T}$ — окружной скоростью вращения u_Φ. Для цилиндра с твердыми стенками вычисляются тем самым критические значения:

$$Ta_{krit}^2 = 1708, \quad a_{krit} = 3.12. \tag{7.66}$$

В соответствии с рис. 7.5 при повышении угловой скорости Ω при другом критическом числе Тейлора происходит переход к зависимым от времени колебательным вихрям Тейлора (вторичная неустойчивость, рис. 7.35), частота колебаний которых повышается с растущим числом Тейлора, пока,

в конце концов, не происходит переход к турбулентному потоку Куэтта. В противоположность к проблеме Релея–Бенара, а также и для больших чисел Тейлора, сохраняется длина волны первоначальной неустойчивости Тейлора. При проблеме Релея–Бенара она растет вместе с ростом числа Релея.

7.2.5. Неустойчивость Гертлера

Явление, очень похожее на неустойчивость Тейлора, наблюдается в пограничном слое вдоль вогнутых стенок. При превышении критической скорости в соответствии с рис. 7.36 образуются упорядоченные, противоположно вращающиеся вихри, чьи оси направлены параллельно стенке вниз по течению. Если заменить характерную окружную скорость вращения u_Φ у проблемы Тейлора на скорость на границе пограничного слоя U_∞, ширину зазора l на толщину пограничного слоя $\delta = \sqrt{\nu \cdot l_x / U_\infty}$, где l_x обозначает расстояние от передней кромки, и, таким образом, является безразмерным показателем, то число Гертлера, которое характеризует начало неустойчивости в пограничном слое, будет представлено как:

$$G\ddot{o} = \frac{U_\infty \cdot l}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{l}{R}}. \tag{7.67}$$

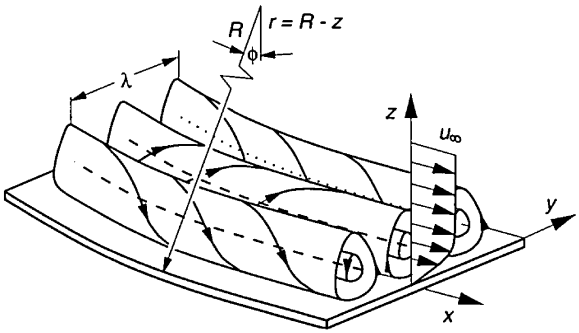


Рис. 7.36. Неустойчивость Гертлера у вогнутой стенки

При этом предполагается, что толщина пограничного слоя δ меньше, чем радиус кривизны R стенки и число Рейнольдса $Re_\delta = U_\infty \cdot \delta / \nu$ больше единицы. Тем самым можно пренебречь зависимостью длины волны

λ/δ от $\delta/R \ll 1$. Аналогично проблеме Тейлора в пограничном слое существует перепад импульса давления к стенке. Сравнение числа Тейлора $Ta = u_\Phi \cdot l/\nu \cdot \sqrt{l/R}$ с числом Гертлера (7.67) показывает сходство в построении обеих величин. Похожие соображения, как и при обсуждении числа Тейлора, ведут здесь к интерпретации квадрата числа Гертлера как отношения дестабилизирующей центробежной силы к стабилизирующей силе трения.

Анализ устойчивости осуществляется по аналогии с проблемой Тейлора. Так как по экспериментальным наблюдениям оси вихрей Гертлера параллельны x-направлению и относительно этого направления неизменны, то волновое число $a = 0$ и $b = 2 \cdot \pi/\lambda$.

Если нанести на $(G\ddot{o}, b)$-диаграмму для данных волновых чисел b соответственно минимальное значение числа Гертлера, то получится нейтральная кривая, которая была рассчитана для плоского течения в пограничном слоя Блазиуса (рис. 7.37).

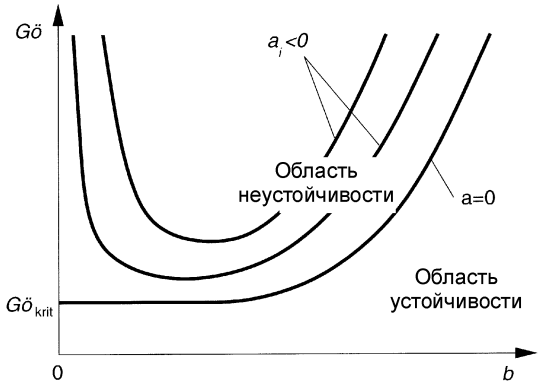


Рис. 7.37. Нейтральные кривые неустойчивости Гертлера

В результате анализа устойчивости бросается в глаза то, что нейтральная кривая не имеет минимума для конечных волновых чисел b. Минимальное число Гертлера достигается при волновом числе $b = 0$, т. е. для вихрей с бесконечно большой длиной волны. Этот результат физически не существенен. Однако число Гертлера для $b = 0$ рассматривается как критическое. Его значение составляет $G\ddot{o}_{krit} = 0.464$ для плоского потока пограничного слоя.

В действительности необходимо допустить пространственное расширение в направлении x вниз по течению, т. е. $a - i \cdot a_i, a_i < 0$. Для соответственно постоянно заданного a_i тогда получаются нейтральные кривые с локальным минимумом (в соответствии с диаграммой устойчивости 7.37), что указывает на то, что пространственное развитие должно учитываться в этой задаче на собственные значения. Но остается неопределенность выбираемой пространственной доли расширения a_i. П. Холл (1983) указал на то, что проблема Гертлера не может рассматриваться в форме локального анализа устойчивости. Изменением толщины пограничного слоя с x нельзя пренебречь.

7.3. Неустойчивость сдвигового потока

Описание ламинарно-турбулентного перехода в сдвиговых потоках нам уже знакомо из главы 4.2.4. Неустойчивость потока в трубе начинается появлением трехмерных возмущений при критическом числе Рейнольдса $Re_{D,krit} = 2300$. В плоском пограничном слое неустойчивость начинается двухмерными волнами Толмина–Шлихтинга при критическом числе Рейнольдса $Re_{x,krit} = 5 \cdot 10^5$ или $d = \sqrt{\nu x/U\delta}$, $Re_{d,krit} = 302$. Их волновые фронты показаны на рисунке 4.56. Вниз по течению возрастают амплитуды первичных возмущений, из-за чего поток становится в этой зоне неустойчивым по отношению к трехмерным вторичным возмущениям (2) (рис. 7.38) Вихревые линии принимают волновую форму. Дальше внизу по потоку вихревые трубки, изменяющиеся вместе с вихревыми линиями, вытягиваются и образуют лямбда-структуры (3). Следующий затем распад этих структур и нерегулярное в пространстве и во времени появление быстро растущих турбулентных пятен (4), заканчивают, в конце концов, процесс перехода в месте с координатой x_t, которую называют координатой конца перехода. После этого поток приходит в состояние полной турбулентности (5). В полностью развитой турбулентности также наблюдаются структуры, имеющие форму продольных полос с сильно уменьшенной компонентой скорости вблизи стенок.

Во время всего процесса перехода (1)–(4) происходит значительное изменение пограничного слоя, так как вследствие все более нарастающей амплитуды возмущений, особенно вертикальных колебаний, импульс внизу по течению распределяется по времени в пограничном слое более равномерно. Самая значительная интенсивность колебаний развивается сначала в непосредственной близости от поверхности, что ведет к тому, что среднее по

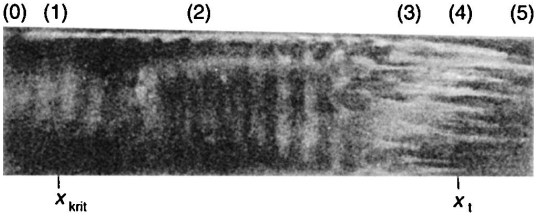


Рис. 7.38. Процесс перехода в пограничном слое вращающегося тела (Браун 1957)

времени касательное напряжение на стенке в зоне перехода принимает даже большее значение, чем в области образовавшейся турбулентности. Весьма существенным является то, что описанный переход происходит не в одном месте, а осуществляется на протяженном участке потока $x_{krit} < x < x_t$.

Неустойчивое первичное возмущение (1) ламинарного потока (0) постоянно изменяет поле потока вниз по течению от критической координаты x_{krit}. Выше этого места поток остается долгое время ламинарным. Если внести в точке $x > x_{krit}$ в пограничный слой локальное возмущение, то пакет волн возмущения распространится с характерной скоростью вниз по потоку и одновременно расширяется, в то же время его интенсивность возмущений вследствие неустойчивости возрастает. Если такой неустойчивый пакет волн при этом не влияет на первоначальное место возмущения, то говорят о конвективной неустойчивости (рис. 7.15, глава 7.1.3). Первичное возмущение пограничного слоя является таким образом конвективно неустойчивым. Поэтому турбулентность начинается не скачком, как, например, при неустойчивости Релея–Бенара или Тейлора, а развивается в нижней (по течению) протяженной переходной зоне. Наступление волн Толмина–Шлихтинга в двухмерном плоском пограничном слое описывалось в главе 4.2.4 как задача на собственные значения для уравнения Орра–Зоммерфельда (4.73). Диаграмму устойчивости, критическое число Рейнольдса Re_{krit} и волновое число a_{krit} для течения в пограничном слое Блазиуса показывает рис. 4.58. В следующем параграфе анализ устойчивости дополняется трехмерными потоками и рассматривается влияние неустойчивостей пограничного слоя.

7.3.1. Течение в пограничном слое

Как обычно, анализ устойчивости начинается с определения основного потока. В случае потока Тейлора–Куэтта и проблемы Релея–Бенара оно

является очень простым. Расчет ламинарного течения в качестве основного потока для расчета устойчивости в пограничном слое, например, профиля или крыла (см. главу 6.1.2) осуществляется решением уравнений Навье–Стокса с помощью численного способа. В большинстве случаев решаются только уравнения пограничного слоя (5.94).

К этому надо добавить принципиальную трудность при анализе устойчивости потоков пограничного слоя или слоя сдвига. Она связана с нарастанием толщины пограничного слоя δ в направлении x вниз по потоку или в направлении y по ширине потока. Хапактеристики потоков поэтому зависят не только от величины δ в нормальном направлении в пограничном слое или слое сдвига потока, но и от x и y. Тем самым наряду с z сейчас в качестве однородных направлений, появляются также x и y. Решение возникающей с ними проблемы устойчивости становится из-за этого более трудоемким.

Если же потоки пограничного слоя и слоя сдвига рассматриваются в зоне больших чисел Рейнольдса, то толщина пограничного слоя и слоя сдвига $\delta(x, y)$ обычно мало изменяется (например, в случае пластины $\delta \sim x/\sqrt{Re_x}$). Тем самым скорость потока зависит от x, y существенно слабее, чем от z.

Из экспериментальных результатов известно, что зависимость возмущений от параллельных направлений x, y в противоположность к основному решению, отнюдь не слаба. Для обезразмеривания все скорости возмущения относятся к U_∞, длины — к δ, а также давление возмущения к $\rho \cdot U_\infty^2$. Математическое выражение возмущения для несжимаемого пограничного слоя имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= U_\infty \cdot (u_0(\bar{x}, \bar{y}, z) + \varepsilon \cdot u'), \\ v &= U_\infty \cdot (v_0(\bar{x}, \bar{y}, z) + \varepsilon \cdot v'), \\ w &= U_\infty \cdot (\varepsilon \cdot w_0(\bar{x}, \bar{y}, z) + \varepsilon \cdot w'), \\ p &= \rho \cdot U_\infty^2 \cdot (p_0(\bar{x}, \bar{y}, z) + \varepsilon \cdot p'). \end{aligned} \tag{7.68}$$

Здесь ε, как обычно, является параметром возмущения, который выбирается для пограничного слоя $\varepsilon = 1/Re_\delta$. Проблема зависит от двух различных шкал длины (масштабов), а именно от длинной шкалы $\bar{d} = \delta/\varepsilon$ и намного более короткой шкалы δ. Так как эти шкалы очень сильно отстоят друг от друга, то напрашивается ввести эту физическую особенность в математический расчет и сформулировать общую зависимость решения от x или y в виде разделенных зависимостей как от переменных большой шкалы $\bar{x}$ или $\bar{y}$, так и от переменных малой шкалы $\widetilde{x}$ или $\widetilde{y}$. Такой подход часто используется в математической физике и называется методом многократных

шкал. Связь с исходной переменной x или y осуществляется следующим способом:

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= x, \qquad \bar{x} = \varepsilon \cdot x, \\ \widetilde{y} &= y, \qquad \bar{y} = \varepsilon \cdot y. \end{aligned} \tag{7.69}$$

Нужно иметь в виду, что все величины возмущения теперь являются функциями переменных обеих видов, таким образом, например, $u' = u'(t, x, y, z) = u'(t, \widetilde{x}, \bar{x}, \widetilde{y}, \bar{y}, z)$. Производные от x представятся тем самым в форме $\partial u'/\partial x = (\partial u'/\partial \widetilde{x}) \cdot d\widetilde{x}/dx + (\partial u'/\partial \bar{x}) \cdot d\bar{x}/dx = \partial u'/\partial \widetilde{x} + \varepsilon \cdot \partial u'/\partial \bar{x}$.

Таким образом получаются линеаризованные дифференциальные уравнения для возмущений:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \tag{7.70}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{du_0}{dz} \cdot w' + \frac{\partial p'}{\partial x} - \\ &- \frac{1}{Re_d} \cdot \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) = 0, \end{aligned} \tag{7.71}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v'}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{dv_0}{dz} \cdot w' + \frac{\partial p'}{\partial y} - \\ &- \frac{1}{Re_d} \cdot \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) = 0, \end{aligned} \tag{7.72}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{Re_d} \cdot \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) = 0, \tag{7.73}$$

Весьма существенно, что коэффициенты, например, $u_0(\bar{x}, \bar{y}, z)$ этой однородной линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными в переменных $t, \widetilde{x}, \widetilde{y}, z$ зависят только от переменных $\bar{x}, \bar{y}, z$, а не от переменных малой шкалы $\widetilde{x}, \widetilde{y}$. Понятно, что в (7.70)–(7.73) не появляется явных производных от $\bar{x}$ или $\bar{y}$. Таким образом, в рамках имеющейся аппроксимации решение системы дифференциальных уравнений только алгебраически, а не дифференциально зависит от переменных места $\bar{x}, \bar{y}$. В этой связи говорят о локальном анализе устойчивости. Потому что задают постоянное основное решение, касающееся координат $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ малой шкалы, для выбранного и фиксированного места $\bar{x}, \bar{y}$ и здесь локально проводят

анализ устойчивости. Кроме того, следует обратить внимание, что дифференциальные уравнения возмущения в $t, \widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ являются однородными.

У производной дифференциальных уравнений возмущения выделяется зависимость от нормальной компоненты w_0 основного потока. Это многократно применяемая манипуляция профилем скорости называется приемом параллельного потока. Его действительность для потоков плоского пограничного слоя была подтверждена Т. Гербертом и Ф. П. Бертолотти 1987.

Возмущения удовлетворяют граничным условиям у стенки $z = z_w$:

$$u'(x, y, z = z_w, t) = v'(x, y, z = z_w, t) = 0, \quad w'(x, y, z = z_w, t) = 0 \quad (7.74)$$

и, дополнительно, граничному условию дальнего поля, означающему, что возмущение исчезает на бесконечности:

$$v'(x, y, z \to \infty, t) = 0, \quad p'(x, y, z \to \infty, t) = 0, \quad (7.75)$$

которое представляет собой также граничное условие для свободного слоя сдвига или, например, течения в следе обтекаемого тела. Система дифференциальных уравнений для возмущений (7.70)–(7.73) является однородной в $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ и t. Можно выполнить операцию разделения переменных:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}'(\widetilde{x}, \widetilde{y}, z, t; \bar{x}, \bar{y}) \\ \widetilde{v}'(\widetilde{x}, \widetilde{y}, z, t; \bar{x}, \bar{y}) \\ \widetilde{w}'(\widetilde{x}, \widetilde{y}, z, t; \bar{x}, \bar{y}) \\ \widetilde{p}'(\widetilde{x}, \widetilde{y}, z, t; \bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = F_x(\widetilde{x}; \bar{x}, \bar{y}) \cdot F_y(\widetilde{y}; \bar{x}, \bar{y}) \cdot F_t(t; \bar{x}, \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}(z; \bar{x}, \bar{y}) \\ \hat{v}(z; \bar{x}, \bar{y}) \\ \hat{w}(z; \bar{x}, \bar{y}) \\ \hat{p}(z; \bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}, \quad (7.76)$$

так как граничные условия зависят только от z. Если подставить (7.76) в уравнение неразрывности (7.70), то последует:

$$\left(\frac{1}{F_x} \cdot \frac{dF_x}{d\widetilde{x}} \right) \cdot \hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz} + \left(\frac{1}{F_y} \cdot \frac{dF_y}{d\widetilde{y}} \right) \cdot \hat{v} = 0,$$

причем два правых слагаемых независимы от $\widetilde{x}$, и два левых слагаемых независимы от $\widetilde{y}$, так что выражения в скобках представляют собой относительно $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ константы. Таким же образом можно поступить с функцией F_t. Применение математической операции разделения переменных в уравнении импульса (7.73) дает:

$$\frac{1}{F_x} \cdot \frac{dF_x}{d\widetilde{x}} = i \cdot a(\bar{x}, \bar{y}), \quad \frac{1}{F_y} \cdot \frac{dF_y}{d\widetilde{y}} = i \cdot b(\bar{x}, \bar{y}), \quad \frac{1}{F_t} \cdot \frac{dF_t}{dt} = -i \cdot \omega(\bar{x}, \bar{y}),$$

где вводятся три параметра разделения a, b и ω, которые являются еще функциями переменных длинной шкалы. Из уравнений для F_x, F_y и F_t

следует:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}'(\widetilde{x},\widetilde{y},z,t) \\ \widetilde{v}'(\widetilde{x},\widetilde{y},z,t) \\ \widetilde{w}'(\widetilde{x},\widetilde{y},z,t) \\ \widetilde{p}'(\widetilde{x},\widetilde{y},z,t) \end{pmatrix} = \exp(i\cdot a\cdot\widetilde{x}+i\cdot b\cdot\widetilde{y}-i\cdot\omega\cdot t)\begin{pmatrix} \hat{u}(z) \\ \hat{v}(z) \\ \hat{w}(z) \\ \hat{p}(z) \end{pmatrix}, \tag{7.77}$$

причем зависимость функций от $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не обозначена. Показатель экспоненты $a(\bar{x},\bar{y})\cdot\widetilde{x}+b(\bar{x},\bar{y})\cdot\widetilde{y}-\omega(\bar{x},\bar{y})\cdot t$ называется фазой. Параметры разделения a, b и ω — это некоторые, как правило, комплексные числа.

Использование математического выражения волнового вида (7.77) в системе уравнений (7.70)–(7.73) дает:

$$a\cdot\hat{u}+b\cdot\hat{v}=i\cdot\frac{d\hat{w}}{dz}, \tag{7.78}$$

$$(a\cdot u_0+b\cdot v_0-\omega)\cdot\hat{u}-i\cdot\frac{du_0}{dz}\cdot\hat{w}=-a\cdot\hat{p}+\frac{i}{Re_d}\cdot\left(a^2+b^2-\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{u}, \tag{7.79}$$

$$(a\cdot u_0+b\cdot v_0-\omega)\cdot\hat{v}-i\cdot\frac{dv_0}{dz}\cdot\hat{w}=-b\cdot\hat{p}+\frac{i}{Re_d}\cdot\left(a^2+b^2-\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{v}, \tag{7.80}$$

$$(a\cdot u_0+b\cdot v_0-\omega)\cdot\hat{w}=i\cdot\frac{d\hat{p}}{dz}+\frac{i}{Re_d}\cdot\left(a^2+b^2-\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{w}. \tag{7.81}$$

С граничными условиями (7.74) и (7.75)

$$\hat{u}(z=z_w)=\hat{v}(z=z_w)=0,\quad \hat{w}(z=z_w)=0, \tag{7.82}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}(z\to\infty)=0,\quad \hat{p}(z\to\infty)=0 \tag{7.83}$$

тем самым сформулирована задача на собственные значения для волновой неустойчивости. Линейная однородная система дифференциальных уравнений содержит четыре параметра Re_d, a, b и ω. При этом число Рейнольдса задается как действительное число. Если не принимать во внимание тривиальное решение, то система уравнений разрешима только для определенных a, b и ω. Тем самым определяются взаимные отношения между этими тремя величинами, называемые дисперсионными отношениями:

$$D(a,b,\omega)=0. \tag{7.84}$$

У описанной задачи на собственные значения задаются две из трех величин a, b и ω, и отсутствующая рассчитывается из уравнений как собственное значение.

Анализ устойчивости исследует изменение амплитуды возмущений $|\boldsymbol{u}'|$ возмущения $\boldsymbol{u}'$, внесенного в поток $\boldsymbol{U}_0$. В соответствии с определением (глава 7.1.2) устойчивость устанавливают на основе характера изменения во времени амплитуд возмущения. В пограничных слоях и касательных потоках возмущения представляются как волны, которые идут вдоль параллельных течению направлений x и y:

$$\boldsymbol{u}'(x,y,z,t) = \boldsymbol{u}(z) \cdot \exp(i \cdot a \cdot x + i \cdot b \cdot y - i \cdot \omega \cdot t). \qquad (7.85)$$

Здесь символы тильда над x и y ради ясности были опущены. В духе введенного определения устойчивости задают собственную форму, которая представлена компонентами волновых чисел a и b и из задачи на собственные значения вычисляют относящееся сюда значение $\omega = \omega_r + i \cdot \omega_i$. Если задаются пространственно периодические волны (т. е. действительные $a = a_r$ и $b = b_r$, то говорят о временном анализе устойчивости. Так как система может развиваться только в положительном направлении времени, то внесенное волновое возмущение с заданными $a = a_r$ и $b = b_r$ становится по времени именно тогда неустойчивым, когда его амплитуда во времени растет, т. е. $\omega_i > 0$. ω_i — это показатель временного роста возмущения. Возмущение, для которого ω действительно, называется индифферентным или нейтральным возмущением. Также можно задать ω и рассчитать относящуюся сюда собственную форму (определяются a или b). О пространственном анализе устойчивости говорят тогда, когда задается $\omega = \omega_r$, как действительное значение (т. е. осуществляется рассмотрение всех возможных волн с данной частотой) и, например, вычисляется a при данном b. действительная часть a_r рассчитываемого числа a представляет собой тогда волновое число, а мнимая часть a_i — это показатель пространственного развития возмущения в направлении x. Однозначное определение пространственного развития получится тогда, когда сначала будет задано направление волнового возмущения. Оно представляется единичным вектором $\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_x \cdot \cos(\phi) + \boldsymbol{e}_y \cdot \sin(\phi)$ (рис. 7.39).

Определяют изменение амплитуды $|\boldsymbol{u}'| = |\hat{\boldsymbol{u}}| \cdot \exp(-a_i \cdot x - b_i \cdot y + \omega_i \cdot t)$ волны вдоль заданного направления ϕ к $d|\boldsymbol{u}'|/dx_\phi = \boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}|\boldsymbol{u}'|$ и находят $d|\boldsymbol{u}'|/dx + \phi = -(a_i \cdot \cos(\phi) + b_i \cdot \sin(\phi)) \cdot |\boldsymbol{u}'|$. Амплитуда возрастает вдоль $\boldsymbol{e}_\phi$, если $d|\boldsymbol{u}'|/dx_\phi$ положительно. Волна расшяется относительно направления ϕ, если выполнено условие

$$a_i \cdot \cos(\phi) + b_i \cdot \sin(\phi) < 0.$$

Величины a_i и b_i называются также пространственными долями расширения. Понятно, что необходимость предварительно задать направление ϕ представляет собой определенный произвол. Поэтому стоит проверить, движется ли волна с вектором фазовой скорости $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, 0) = \omega_r/(a_r^2 + b_r^2) \cdot (a_r, b_r, 0)$ в направлении растущей амплитуды. Для этого совмещают направление рассмотрения $\boldsymbol{e}_\phi$ с направлением движения волны $\boldsymbol{e}_{krit} = (a_r, b_r, 0) \cdot \mathrm{sgn}(\omega_r)/\sqrt{a_r^2 + b_r^2}\,\mathrm{sgn}(\omega_r) = \omega_r/|\omega_r|$ (ср. рис. 7.39). Периодическая во времени волна испытывает тогда вдоль ее направления движения увеличение амплитуды, если действительно

$$\omega_r \cdot (a_r \cdot a_i + b_r \cdot b_i) < 0.$$

Двухмерная волна $(b = 0)$ может называться пространственно расширенной, если для $\omega_r > 0$ мнимая часть $a_i < 0$. Какие волны действительно способствуют пространственному расширению возмущений, можно однозначно ответить только в рамках концепции анализа устойчивости локальных возмущений (глава 7.1.3) для конвективных неустойчивостей.

Из задачи на собственные значения можно определить либо a при заданном $b = b_r + i \cdot b_r$ и $\omega - \omega_r$, либо b при заданном $a = a_r + i \cdot a_r$ и $\omega = \omega_r$. Более наглядно будет, если вместо задания комплексного волнового число установить при пространственном анализе, например, направление расширения $\phi = 1/\,\mathrm{tg}(b_i/a_i)$. Это соответствует введению зависимости мнимых частей a_i и b_i от a и b.

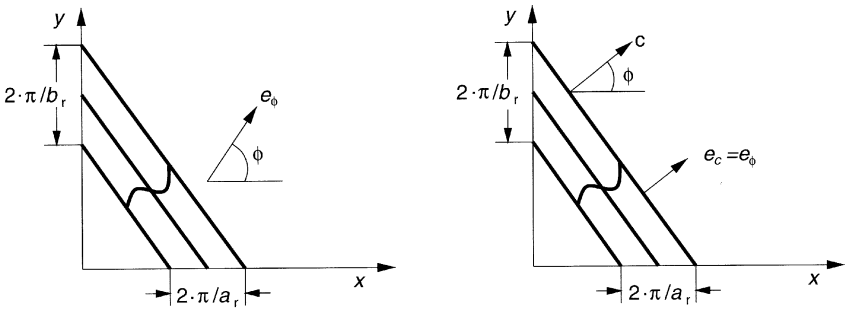


Рис. 7.39. К распространению волнового возмущения

Следует указать на то, что временной анализ устойчивости проводится намного проще, чем пространственный анализ устойчивости. В задачу на собственные значения (7.78)–(7.83) ω входит линейно, в то время как

a или b входят квадратично. Решение такой квадратичной задачи на собственные значения требует существенно больших вычислительных затрат, чем решение линейной. Поэтому ищутся возможности, чтобы пересчитать временные расширения в пространственные. Такое отношение было дано М. Гастлером (1962) для $b = 0$. Пересчет временного расширения ω_i пространственно периодической волны с заданным действительным волновым числом a_r и относящейся сюда частотой ω_r на временную периодическую волну (т. е. $\omega_i = 0$) с таким же волновым числом a_r и частотой ω_r осуществляется по:

$$a_i \approx -\frac{1}{\dfrac{\partial \omega_r}{\partial a_r}} \cdot \omega_i.$$

Пространственное расширение волны из временного расширения соответствующей волны получают с помощью групповой скорости $\partial\omega_r/\partial a_r$. Приведенное выше соотношение называется преобразованием Гастлера. Это преобразование действует только для небольших степеней расширения a_i, ω_i, так как оно основывается на разложении в ряд Тейлора дисперсионного соотношения $D(a, \omega) = 0$ в окрестности нейтрального состояния $a_i = 0$, $\omega_i = 0$.

Система дифференциальных уравнений для возмущений (7.76)–(7.81) имеет одно замечательное свойство. Она может быть, с помощью исключения переменных $\hat{u}, \hat{v}$ и $\hat{p}$, приведена к единственному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое представляет собой расширение уже известного уравнения Орра–Зоммерфельда (4.73) для косо проходящих волн. С помощью преобразования Сквайра

$$a_\varphi \cdot u_{0,\varphi} = a \cdot u_0 + b \cdot v_0, \quad a_\varphi^2 = a^2 + b^2,$$

которое представляет собой поворот координат в направлении распространения, получают уравнение Орра–Зоммерфельда:

$$\left[(a_\varphi \cdot u_{0,\varphi} - \omega) \cdot \left(\frac{d^2}{dz^2} - a_\varphi^2\right) - a_\varphi \cdot \frac{d^2 u_{0,\varphi}}{dz^2} + i \cdot \frac{1}{Re_d} \cdot \left(\frac{d^2}{dz^2} - a_\varphi^2\right)^2\right] \hat{w} = 0, \tag{7.86}$$

с граничными условиями для $\hat{w}$:

$$\hat{w} = 0, \quad \frac{d\hat{w}}{dz} = 0 \quad \text{для} \quad z = z_w, \tag{7.87}$$

$$\hat{w} = 0, \quad \frac{d\hat{w}}{dz} = 0 \quad \text{для} \quad z \to \infty. \tag{7.88}$$

Если в уравнении (7.86) a_φ заменить на a и $a_\varphi \cdot u_{0,\varphi}$ на $a \cdot u_0$, то это будет соответствовать двухмерному случаю (4.73). Диаграмма нейтральной устойчивости на рис. 7.40 дополнена типичной собственной функцией. Следует указать на то, что уровень амплитуды вертикальной компоненты

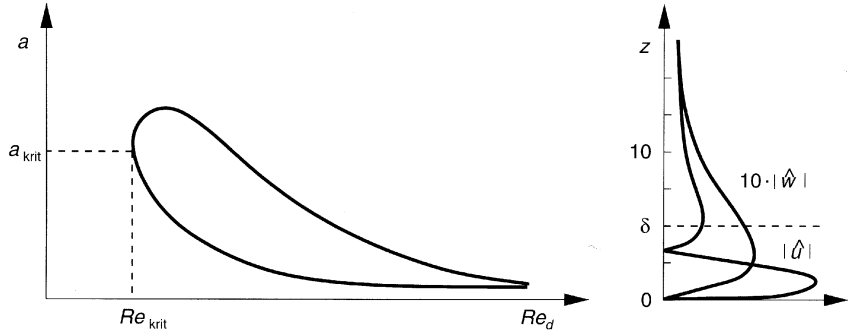


Рис. 7.40. Диаграмма устойчивости для действительных $a, b = 0$ для плоской поверхности (пластины) и собственные функции для $a = 0.16, b = 0, Re_d = 580$

$|\hat{w}|$ скорости возмущения представлен в десятикратном увеличении. Эта амплитуда мала по сравнению с амплитудой компоненты возмущения по течению потока. Самые большие амплитуды возмущений принимаются для $|\hat{u}|$ в непосредственной близости от стенки. Возмущения при достижении границы пограничного слоя $\hat{u}$ ни в коем случае не затухают. Они выходят далеко за пограничный слой. Резкий минимум от $|\hat{u}|$ при расстоянии от стенки в примерно 2/3 толщины пограничного слоя — это только следствие хода эволюции этой величины. Фактически функция δ проходит здесь через нуль, что связано со сменой фазы волны на $180°$.

7.3.2. Неустойчивость Толмина–Шлихтинга и поперечная неустойчивость

Обратимся снова к пограничному слою вблизи передней кромки стреловидного крыла, изображенному на рис. 7.10. Вниз по течению трехмерного пограничного слоя появляются волны Толмина–Шлихтинга, а по причине наличия компоненты поперечного потока — неустойчивость поперечного потока.

О том, какие волны обладают неустойчивостью поперечного потока, можно видеть на диаграмме волновых чисел (рис. 7.41), где представлены области неустойчивости для постоянного числа Рейнольдса.

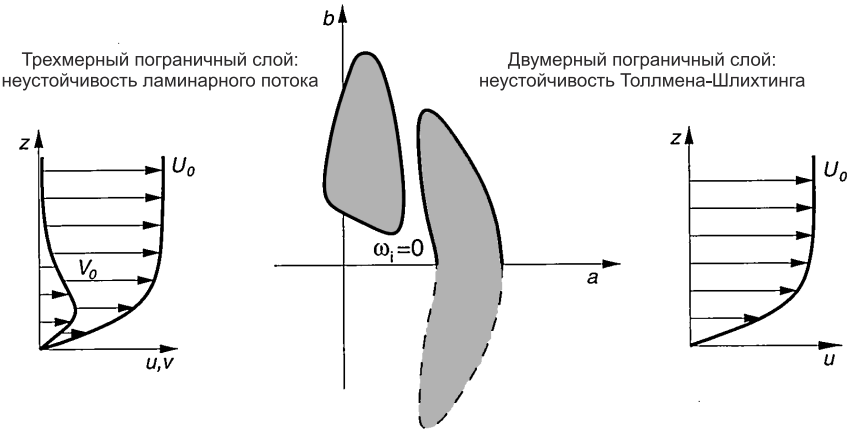


Рис. 7.41. Неустойчивые волны для пограничных слоев с компонентой и без компоненты поперечного потока $\boldsymbol{v}(z)$

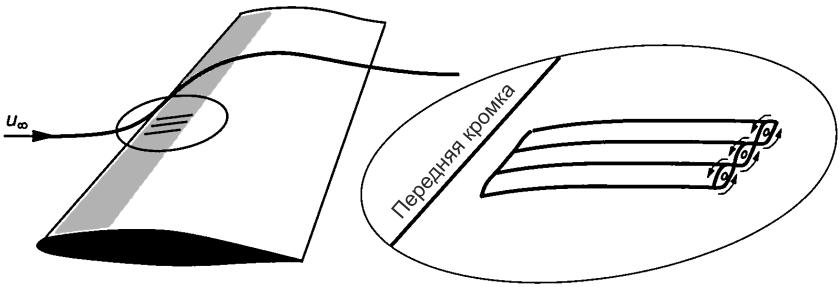


Рис. 7.42. Неустойчивый вихрь поперечного потока в трехмерном пограничном слое

Волны Толмина–Шлихтинга появляются внизу по течению только при превышении критического числа Рейнольдса. Следует обратить внимание, что число Рейнольдса в этой зоне очень мало, и в этом случае имеет-

ся сильное демпфирующее влияние трения. Для сравнения представлена также зона неустойчивости для двухмерного профиля скорости $u_0(z)$, как она появляется, например, в пограничном слое пластины. Типично, что в двухмерных пограничных слоях существуют волны неустойчивости с существенно большими углами своего распространения $\varphi = 1/\operatorname{tg}(b/a)$, чем в трехмерном пограничном слое. В силу своей характерной формы кривая нейтральной устойчивости $\omega_i = 0$ двухмерных пограничных слоев называется также Нирен-кривой.

Типичным для неустойчивостей поперечного потока является также появление стоячих вихрей возмущений. Так как частота циркуляции этих стоячих волн возмущения $\omega_r = 0$, они называются также нулевыми модами. Их волновые нормали стоят почти перпендикулярно направлению вниз по течению на границе пограничного слоя. В противоположность к продольным вихрям Гертлера они вращаются однонаправленно (рис. 7.42). Эти стоячие волны можно сделать в эксперименте видимыми, и они оставляют за собой, например, с помощью внесенного для визуализации в поток дыма, отчетливую структуру в направлении по ходу потока (см. рис. 7.9). Самые сильно расширенные волны возмущения все же, как правило, неустойчивы и проходят под большим углом φ, т. е. поперек направления по ходу потока x. Рис. 7.43 показывает линии обтекания стационарных вихрей поперечного потока, полученные из решения задачи на собственные значения (7.86)–(7.88) для заданного трехмерного пограничного слоя.

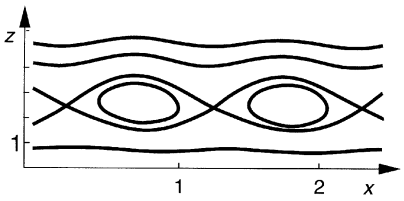


Рис. 7.43. Линии обтекания стационарных вихрей поперечного потока

Вторичные неустойчивости

До сих пор рассматривались первичные неустойчивости. Основное состояние $\boldsymbol{U}_0$ сменилось на неустойчивость, которую в соответствии с главой 7.2.1 обозначают $\boldsymbol{U}_1$. Для вторичной неустойчивости $\boldsymbol{U}_1$ — новое основ-

ное состояние, которое снова может стать неустойчивым по отношению к возмущениям. Отсюда получается математическое выражение возмущения для вторичных неустойчивостей (7.32) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_1 + \varepsilon \cdot \boldsymbol{u}''$. В плоском пограничном слое двухмерная волна Толмина–Шлихтинга сменяется трехмерными λ-структурами. Вихревые линии, которые в случае первичного возмущения еще были прямолинейными, преобразуются в волновую форму в широтном направлении y. Это искривление вихревых линий является причиной немедленно начинающейся вихрединамической индукции и самоиндукции, которая еще больше деформирует вихревые линии и при этом их вытягивает. В ходе этого процесса образуются характерные Λ-структуры (рис. 7.44). Вторичные неустойчивости уже упоминались в предыдущих параграфах. Так, стационарные вихри Тейлора на рис. 7.5 становятся неустойчивыми по отношению к возмущениям поперечных волн, проходящих в направлении периметра, которые приводят к колебаниям вихря. Также по рис. 7.24 становятся неустойчивыми по отношению к волновым возмущениям конвективные цилиндры Бенара. Все рассмотренные вторичные неустойчивости описываются одинаковыми математическими средствами, так называемым анализом Флоке.

Первый шаг вторичного анализа устойчивости состоит по аналогии с первичным анализом устойчивости в расчете исследуемого основного потока $\boldsymbol{U}_1(x, y, t)$. Чтобы стать доступным вторичному анализу устойчивости, $\boldsymbol{U}_1$ должно быть однородным относительно параллельного стенке пространственного направления периодичности $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_x \cdot \cos(\varphi) + \boldsymbol{e}_y \cdot \sin(\varphi) = \boldsymbol{e}_{\xi'}$ с координатой периодичности ξ' и относительно второго параллельного направления $\boldsymbol{e}_{\varphi+90^\circ} = -\boldsymbol{e}_x \cdot \sin(\varphi) + \boldsymbol{e}_y \cdot \cos(\varphi) = \boldsymbol{e}_\eta$ $\boldsymbol{U}(\xi', \eta, t) = \boldsymbol{U}(\xi' + \lambda, t)$. Основной поток должен описываться, кроме того, в какой-нибудь подходящей системе координат $\xi = \xi' - c \cdot t$ в качестве стационарного потока (рис. 7.45), т. е. $\boldsymbol{U}_1(\xi', t) = \boldsymbol{U}_1(\xi) = \boldsymbol{U}_1(\xi + \lambda)$.

Тем самым, такие основные потоки $\boldsymbol{U}_1(z) = \langle \boldsymbol{U}_1 \rangle(z) + \boldsymbol{U}_1^p(\xi, z)$, которые состоят из пространственно осредненного относительно ξ параллельного потока пограничного слоя $\langle \boldsymbol{U}_1(z) \rangle = 1/\lambda \cdot \int_\xi^{\xi+\lambda} \boldsymbol{U}_1(\xi, z) d\xi$ и пространственно периодической доли $\boldsymbol{U}_1^p(\xi, z)$, можно исследовать на вторичную неустойчивость. Эта периодическая доля не обладает пространственным средним значением, но имеет все же конечную амплитуду $A(z) = \sqrt{(1/\lambda \cdot \int_\xi^{\xi+\lambda} |\boldsymbol{U}_1^p(\xi, z)|^2 d\xi)}$, т. е. не предполагается, что A бесконечно мала. Основной поток дан в системе координат (x, y, z), в которой, как обычно, ось x указывает направление главного потока $\langle \boldsymbol{U}_1 \rangle(z)$ (для трех-

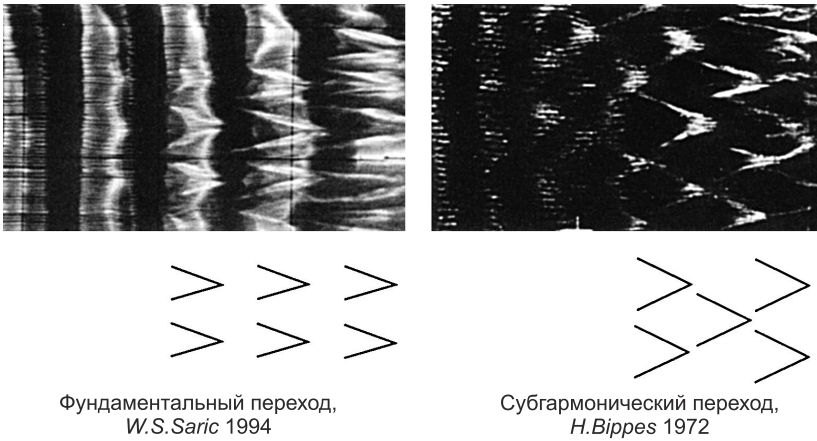


Рис. 7.44. Вторичные неустойчивости в переходных пограничных слоях на пластине

мерных пограничных слоев типичным является направление потока у границы пограничного слоя). Впоследствии выбирают систему координат, соответствующую периодическому направлению $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\xi$. Она получается из преобразования:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix}c\cdot t\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{c}\cdot t} \tag{7.89}$$

В системе координат (ξ, η, z) тем самым появляется $\boldsymbol{U}_1(x, y, z, t)$ в качестве стационарного потока $\boldsymbol{U}_1(\xi, z)$. В случае описания стационарных периодических конвективных цилиндров, которые образуются при проблеме Релея–Бенара в спокойном слое жидкости $\boldsymbol{U}_0(z) = 0$, имеет место, очевидно, $c = 0$. Вихри Тейлора в кольцевом зазоре между концентрическими цилиндрами также по своей природе стационарны, так что и здесь $c = 0$. В противоположность этому $c = (c_{TS}, 0, 0)$ в случае волнового возмущения в двухмерном пограничном слое c_{TS}, идущего вниз по течению с фазовой скоростью $\boldsymbol{U}_0(z)$. Такое волновое возмущение может возникнуть в процессе роста амплитуды волны Толмина–Шлихтинга (рис. 7.38). Хотя основной поток $\boldsymbol{U}_1$ здесь в действительности не периодичен (слабое нарастание толщины пограничного слоя вниз по потоку, слабое пространственное нарастание амплитуды волн возмущения), периодичность увеличивается.

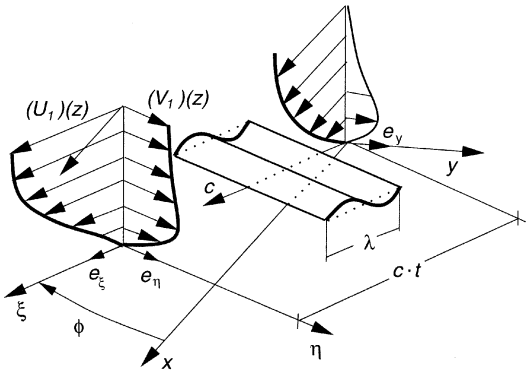


Рис. 7.45. Система координат для описания вторичной неустойчивости

Дифференциальные уравнения для возмущений вторичных неустойчивостей здесь специально не приводятся. Их можно найти, например, в Г. Эртель, Й. Делфтс 1996. Они не однородны по t и η.

Поэтому можно подставить для решения в этих направлениях математические выражения:

$$\mathrm{ibf}\, u'' = \mathrm{ibf}\, V(\xi, z) \cdot \exp(i \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t). \tag{7.90}$$

При этом $\beta = \beta_r$ должны задаваться как действительные числа. Тем самым устанавливается длина периода вычисляемого возмущения относительно η, т. е. перпендикулярно к волновой нормали первичной неустойчивости (рис. 7.46). Для значения $\beta = 0$ имеется особый случай двухмерной вторичной неустойчивости. Слияние вихря в свободном слое сдвига является тому примером (ср. 7.3.3). Константа $\sigma = \sigma_r + i \cdot \sigma_i$ в общем случае является комплексной. Действительная часть σ_r имеет по аналогии с анализом первичной устойчивости значение временной доли расширения.

Зависимость функции $\mathrm{ibf}\, V(\xi, z)$ от нормального направления z рассматривается по аналогии со всеми обсужденными проблемами первичной устойчивости численно.

Характерной чертой дифференциальных уравнений для возмущений вторичной неустойчивости является ξ-периодичность появляющихся коэффициентов. Длина периода — $\lambda = 2 \cdot \pi / a_\varphi$ с $a_\varphi = \sqrt{a_r^2 + b_r^2}$. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами могут

решаться подобно линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, с помощью общего математического выражения Флоке:

$$\mathrm{ibf}\, V(\xi, z) = \exp(i \cdot \alpha \cdot \xi) \cdot \widetilde{\mathrm{ibf}}\, V(\xi, z), \quad \widetilde{\mathrm{ibf}}\, V(\xi, z) = \widetilde{\mathrm{ibf}}\, V(\xi + \lambda, z). \quad (7.91)$$

Решение, как видно, состоит, из функции $\widetilde{\mathrm{ibf}}\, V(\xi, z)$ с тем же самым периодом, как и коэффициенты дифференциального уравнения, которую еще нужно определить, и множителя, имеющего математическое выражение $\exp(i \cdot \alpha \cdot \xi)$, в котором появляется в общем случае комплексная константа. Функцию $\widetilde{\mathrm{ibf}}\, V(\xi, z)$ разлагают в ряд Фурье и записывают возмущения:

$$\mathrm{ibf}\, u'' = \exp(i \cdot \alpha \cdot \xi + i \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ibf}}\, V_j(z) \cdot \exp(i \cdot j \cdot a_\varphi \cdot \xi). \quad (7.92)$$

Если подставить компоненты (u'', w'') из $\boldsymbol{u}''$ в систему дифференциальных уравнений для возмущений и сгруппировать по отдельным показательным слагаемым $\exp(i \cdot (j \cdot a_\varphi + \alpha) \cdot \xi)$, то возникнет система из бесконечного количества однородных обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной z для коэффициентов Фурье $\widetilde{\mathrm{ibf}} V_j(z)$.

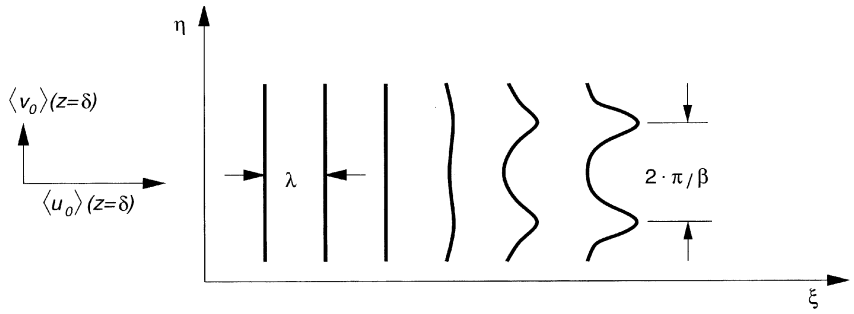


Рис. 7.46. К значению параметра β при описании вторичной неустойчивости пограничного слоя

Эта система уравнений имеет нетривиальные решения только для определенных комбинаций (α, β, σ), эти решения опять называются собственными функциями вторичной теории устойчивости.

Для конкретных вычислений этой проблемы собственного значения теории вторичной устойчивости ряд Фурье в (7.92) ограничивается конечным числом членов. Численные исследования показали, что для $\varphi = 0$ уже только два члена $j = 0, 1$ дают достаточно точные результаты. В случаях косо проходящих первичных волн, особенно волн поперечного потока, должны рассматриваться несколько мод. По аналогии с первичной теорией устойчивости здесь различают временной и пространственный анализ.

Временной расчет устойчивости проводят, определяя в качестве комплексного числа из проблемы собственного значения, как правило, действительно заданные α, β и σ. Действительная часть σ_r временного собственного значения σ имеет значение временной доли расширения. Основной поток $\boldsymbol{U}_1$ неустойчив по отношению к вторичным потокам, если задача на собственные значения анализа вторичной устойчивости дает значение $\sigma_r > 0$. Мнимая часть — это общая частота контура всех мод вторичной собственной функции $\boldsymbol{u}''$ в совместной подвижной системе (ξ, η, z). Для $\sigma_i = 0$ все моды возмущения вторичной собственной функции представляют собой относительно (ξ, η, z) стоячие волны. Они не двигаются тогда относительно первичной волны.

О пространственном анализе устойчивости говорят, если в неподвижной системе координат $(\xi + c \cdot t, \eta, z)$ не допускается временного расширения, а реализуется временной периодический процесс. В подвижной системе сюда подставляют σ_r не равное нулю, $\sigma_r = \alpha_i \cdot c$. Подставленная в неподвижной системе координат частота Ω появляется в подвижной системе координат в качестве $\sigma_i = \Omega - \alpha_r \cdot c$ и используется в таком виде в уравнениях.

Фундаментальные (основные) моды вторичной неустойчивости (рис. 7.44) описываются следующим математическим выражением ряда Фурье:

$$\boldsymbol{u}''_f = \exp(-\alpha_i \cdot \xi + i \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{V}}_j(z) \cdot \exp(i \cdot j \cdot a_\varphi \cdot \xi). \quad (7.93)$$

Типичным для этой формы неустойчивости является то, что возмущения обладают таким же периодом относительно ξ, как и основной поток.

Субгармонический переходный тип определяется математическим выражением:

$$\boldsymbol{u}''_s = \exp(-\alpha_i \cdot \xi + i \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{V}}_j(z) \cdot \exp(i \cdot (j + \frac{1}{2}) \cdot a_\varphi \cdot \xi). \quad (7.94)$$

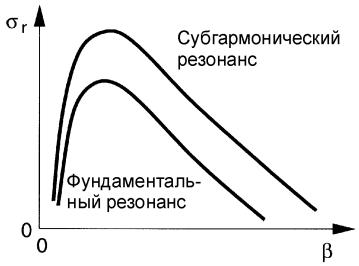


Рис. 7.47. Показатель расширения (усиления) при фундаментальном и субгармоническом резонансе двухмерного пограничного слоя

Эта вторичная неустойчивость обладает двойной длиной периода основного потока. Временной вторичный анализ собственного значения показывает, что самая большая доля расширения (степень усиления) и, тем самым, доминантное собственное решение появляется в обоих случаях для $\sigma_i = 0$. Общая система волн, представленная модами $\hat{\boldsymbol{V}}_j$ вторичной собственной функции, является стационарной относительно первичной волны Толмина–Шлихтинга конечной амплитуды. Вторичные моды включаются в движение первичной волны, благодаря чему они, очевидно, могут принимать большую часть энергии возмущения. Это состояние называют также фазосвязанным. Какие из собственных форм фактически развиваются в начале переходного процесса, сильно зависит от начального спектра возмущений. Для малых амплитуд $A \lesssim 2\%$ волны Толмина–Шлихтинга степени усиления субгармонических вторичных неустойчивостей являются самыми большими, а доли фундаментального типа — самыми маленькими (рис. 7.47). Соотношение меняется, как только возрастают амплитуды первичного возмущения $A \gtrsim 2\%$. Тогда по отношению к другим формам доминирует фундаментальный резонанс.

Типичные максимальные степени нарастания вторичных неустойчивостей даже при малых амплитудах $A \approx 1\%$ существенно больше чем соответствующие характеристики для первичной неустойчивости. Пока первичное возмущение рассматривается в качестве локально периодического с замороженной амплитудой A, так как A мало изменяется, в то же время вторичные моды испытывают сильное развитие. Решающей является величина первичной амплитуды, и в меньшей степени ее изменение.

Вторичная неустойчивость существует по рис. 7.48 для полосы волно-

вых чисел поперечной волны β, чей диапазон растет с увеличением первичной амплитуды A. Определенный с помощью β диапазон переходных структур возмущения ни в коем случае не является однозначно установленным, а может, в зависимости от возбуждения, получаться с большим разбросом. Бросается в глаза, что для слишком маленьких β степени нарастания вторичных возмущений для потока в плоском пограничном слое Блазиуса резко падают до нуля. Двухмерная вторичная неустойчивость, какой она бывает для свободного слоя сдвига при больших амплитудах первичного возмущения (вихревое слияние), здесь не наблюдается.

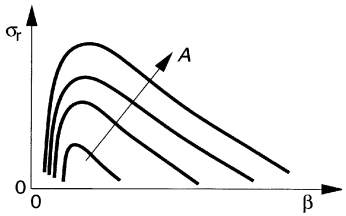


Рис. 7.48. Зависимость показателей усиления вторичного возмущения от первичной амплитуды

Фундаментальные моды (возмущения) по (7.93) в противоположность к другим модам содержат непериодическую часть. Эта часть волны независима от ξ и ее волновая нормаль расположена в направлении η-координаты. Это значит, что часть в направлении η представляет периодические продольные вихри. Эти вихри вращаются попарно в противоположных направлениях, что следует из симметрии поля возмущения $\boldsymbol{U}_1$ относительно ξ, z-уровня. Структура продольных вихрей называется также структурой «пик-впадина». На уровнях (плоскостях) $\eta = \eta_p$, на которых вихри индуцируют восходящую скорость, медленный, близкий к стенке поток переносится в высокие слои z с относительно большой средней скоростью. Тем самым имеет место сильный сдвиг, который благоприятствует развитию возмущения. Поэтому $\eta = \eta_p$ называется пик-плоскостью (уровнем). Плоскости, сдвинутые по отношению к пик-плоскости на половину ширины π/β при $\eta = \eta_v = \eta_p \pm \pi/\beta$, называются впадина-плоскостями, чтобы указать, что развитие возмущений здесь намного слабее, чем на пик-плоскости.

Вторичный анализ устойчивости в трехмерных пограничных слоях показывает, что в случае вихрей поперечного потока в пограничном слое выдвижного крыла степень усиления во времени временное вторичных возму-

щений σ_r имеет такой же порядок величины, как для первичной неустойчивости. Кроме того, утолщение пограничного слоя и искривление стенки сильно влияют на свойства устойчивости этого потока вблизи от передней кромки, так что соответствующие результаты имеют, главным образом, качественный характер. Рис. 7.49 показывает выборку мгновенных линии обтекания осциллирующей вторичной неустойчивости в направлении распространения волн поперечного потока. Оказывается, что вторичные волны возмущения имеют осцилляцию до первичного вихря поперечного потока и периодически ослабевают и усиливаются.

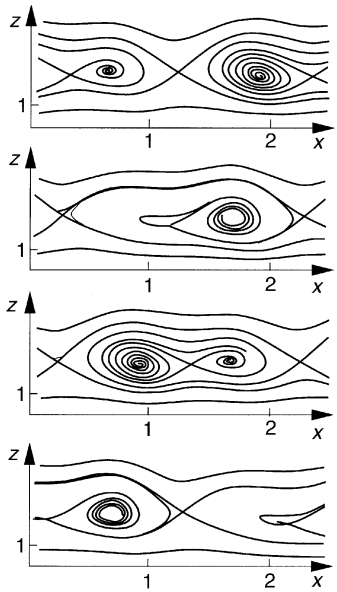


Рис. 7.49. Выборка картин мгновенных линий обтекания вторичных волн поперечного потока в разрезе вдоль направления распространения первичных волн возмущения и перпендикулярно стенке, Т.М. Фишер (1987)

Устойчивость непараллельных потоков пограничного слоя

До сих пор описывался локальный анализ устойчивости. При этом изменением пограничного слоя в направлении потока пренебрегалось. Такое представление основного потока (прием параллельного потока) была

оправдана применением метода множественных шкал (масштабов). В этом параграфе анализ устойчивости распространяется на непараллельные потоки. При этом следует заметить, что влияние изменения направления потока в параллельных слоях на развитие возмущения очень сильно зависит от вида возмущения. Решающим при влиянии изменения основного потока на возмущение является, очевидно, то, насколько сильно скажется это изменение на длину волны возмущения. Для этого рассматривают, например, течение Блазиуса на рис. 7.50, пограничный слой которого $\delta(x)$ утолщается в направлении потока x. При данной длине волны $\lambda = 2 \cdot \pi / \sqrt{a_r^2 + b_r^2}$ утолщение пограничного слоя будет иметь тем большее влияние на волну возмущения, чем больше угол косого хода $\varphi = 1/\operatorname{tg}(b_r/a_r)$ волны относительно x, так как отрезок длины волны $\lambda_x = 2 \cdot \pi / a_r = \lambda / \cos(\varphi)$ в направлении потока x сильно увеличивается с φ. В случае поперечно проходящих волн возмущения, т. е. $\varphi = 90^\circ$, прием параллельных потоков для локального анализа в пограничном слое представляет собой существенное вмешательство в фактические физические реальности.

Разработаны два принципиально разных подхода исследования устойчивости непараллельных потоков. Один из этих подходов представляет собой прямое дополнение локального анализа устойчивости аналитическими средствами. Он развивает ранее описанный метод множественных шкал и дает корректировочные выражения с учетом эффекта непараллельности исключительно в рассматриваемом месте.

Второй подход основан на параболизации основных уравнений (5.91) и производных от них дифференциальных уравнений для возмущений. Этот вариант имеет преимущество в том, что учитывается история развития возмущений вверху по течению от рассматриваемого места.

Оба подхода содержат в себе особый случай локального анализа полностью параллельных основных потоков. Анализ устойчивости показывает, что утолщение пограничного слоя имеет вообще дестабилизирующее влияние на волны возмущения. Это значит, что при данной частоте пространственное развитие возмущения с учетом непараллельности основного потока сильнее, чем в случае параллельного потока. Это относится, в особенности, к косо проходящим по отношению к направлению главного потока волнам, у которых компонента длины волн обладает в направлении потока большими значениями. Эффект проявляется особенно сильно у волн возмущения, волновые нормали которых идут перпендикулярно главному потоку в направлении y. На устойчивость поперечного потока непараллельность основного потока также имеет значительно усиливающее влияние.

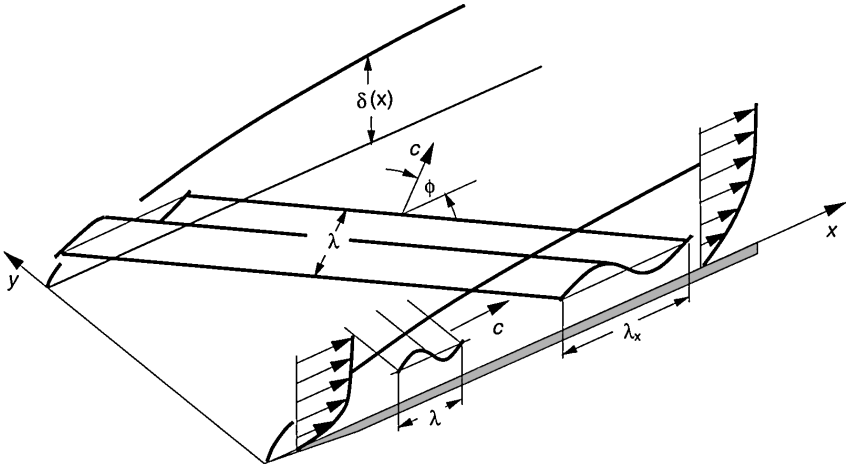


Рис. 7.50. Эффект утолщения при косо идущих волнах

степень роста неустойчивых волн возмущения в сжимаемых потоках пограничного слоя также существенно увеличивается, так как сжимаемые пограничные слои вследствие нагревания среды вблизи стенки сильнее утолщаются (утолщаются) из-за расширения объема, чем несжимаемые пограничные слои.

Можно показать, что эффекты кривизны стенок и изгиба волновых фронтов (схождение и расхождение волновых нормалей) часто так же сильно влияют на пространственную степень развития возмущения, как и непараллельность основного потока. Отчетливо наблюдается влияние кривизны на устойчивость поперечного потока вблизи от передней кромки стреловидного крыла, где имеется сильное выпуклое искривление стенки. Выпуклое искривление стенки стабилизирует такие волны возмущения и противодействует в этом случае усиливающей возмущения непараллельности основного потока. В духе единой теории необходимо учитывать одновременно оба эффекта.

Влияние сжимаемости

У потоков пограничного слоя с достаточно высоким числом Маха M_∞ появляются неустойчивости, которые имеют своей причиной исключительно сжимаемость потока. Эти неустойчивости называются также возмуще-

ниями второго порядка или Макк-возмущениями (макк-модами). Анализ устойчивости показывает, что в дополнение к двухмерным волнам Толмина–Шлихтинга в адиабатном плоском пограничном слое появляются макк-моды (возмущения), начиная с $M_\infty = 2.2$. На рис. 7.51 изображены изменения нейтральных кривых на диаграмме волновое число — число Рейнольдса при последовательном повышении числа Маха для адиабатного плоского пограничного слоя. Начиная с числа Маха примерно $M_\infty = 2.2$, дополнительно к двухмерным волнам Толмина–Шлихтинга появляются двухмерные моды (возмущения) Макка.

Расчеты Макка (1969) показали, что начиная с числа Маха $M_\infty \approx 4$ при данном числе Рейнольдса макк-мода (возмущение) представляет собой очень сильно развивающуюся неустойчивость. Следует заметить, что при дальнейшем повышении числа Маха возникают последовательные, все новые дополнительные моды Макка. Трение действует на моды Макка в принципе стабилизирующе. Поэтому их степени усиления ω_i растут с числом Рейнольдса. Моды Макка отличаются от волн Толмина–Шлихтинга, наряду со своей коротковолновостью, высокой частотой ω_r и фазовой скоростью c. Повышение числа Маха уменьшает степень усиления волны Толмина–Шлихтинга. В случае очень больших чисел Маха ($M_\infty > 5$) это проявляется также и для возмущений макк-мод.

Критическое число Рейнольдса Re_{krit} определяется для чисел Маха $M_\infty < 4.5$ волнами Толмина–Шлихтинга. При сверхзвуковых числах Маха соответствующее критическое возмущение является косо проходящей волной. В зоне высоких чисел Маха возмущения моды Макка устанавливают критическое число Рейнольдса. Оно снижается с растущим числом Маха независимо от того, определяется ли оно волнами Толмина–Шлихтинга или модами Макка. Тем самым можно установить, что при повышенных числах Маха возмущения уже становятся неустойчивыми при меньших критических числах Рейнольдса, но впоследствии нарастают слабее.

При трансзвуковых числах Маха моды Макка не появляются, и для различных температурных граничных условий вычисляются нейтральные кривые рис. 7.52 сжимаемого плоского пограничного слоя. Тепловой переход между стенкой и обтекающей средой имеет большое влияние на устойчивость (рис. 7.52).

Нейтральные кривые для различных значений отношений температуры стенки к температуре внешнего потока T_w/T_∞ показывают, что при таких числах Маха отток тепла из пограничного слоя $T_w < T_\infty$ сильно повышает границу устойчивости, в то время как приток тепла в пограничн-

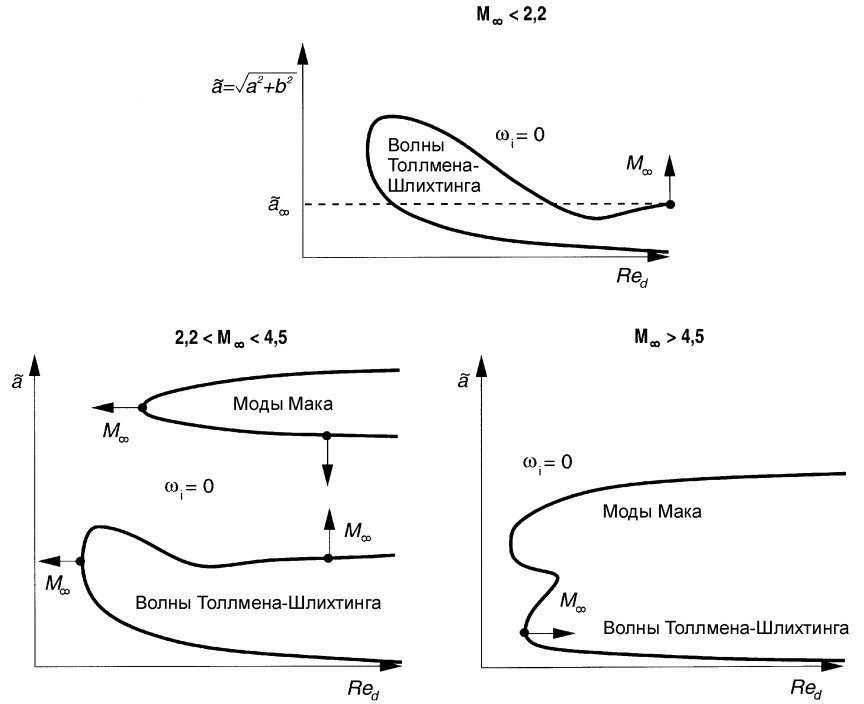


Рис. 7.51. Диаграмма устойчивости для сжимаемого плоского пограничного слоя, адиабатная стенка при различных числах Маха. Стрелки показывают движение нейтральных кривых при увеличении чисел Маха

ном слое $T_w > T_\infty$ сильно понижает границу устойчивости относительно двухмерных возмущений. Совершенно другие условия получаются для высоких чисел Маха, при которых охлаждение не вызывает стабилизации мод Макка.

Для несжимаемого пограничного слоя также проявляется дестабилизирующее воздействие теплоотвода от стенки $T_w > T_\infty$. Сжимаемый основной поток ведет себя подобным образом по сравнению с несжимаемой неустойчивостью. Поведение устойчивости при этом изменяется вследствие наличия точки изгиба основного профиля, находящейся под сильным влиянием тепловопередачи. В противоположность к основному возмущению, моды Макка не стабилизируются при условии $T_w < T_\infty$. Их развитие на-

ходится под влиянием расширения зоны с $M^2 = (U_{krit} - c_r)^2/a^2 > 1$. Легко понять, что охлаждение понижает локальную звуковую скорость и, тем самым, увеличивает M.

В дополнение к анализу устойчивости развивается и подход прямого моделирования переходного процесса, вплоть до турбулентного пограничного слоя с помощью численного решения полных уравнений Навье–Стокса (5.65). На рисунке (7.53) изображены результаты моделирования перехода к турбулентности волн Толмина–Шлихтинга и перехода вихря поперечного потока в трехмерном пограничном слое крыла при числе Маха $M_\infty = 0.62$ и числе Рейнольдса $Re_l = 26 \cdot 10^6$. изображены изоплоскости завихренности $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$. Процесс перехода волн Толмина–Шлихтинга начинается ровными идущими вниз по течению волнами. В соответствии с рис. 4.56 и рис. 7.38 происходит перенос трехмерных возмущений и образование лямбда-структур (основной тип перехода). Лямбда структуры — это зоны локального сдвига и с повышенной скоростью в наивысшей точке. Лямбда-структуры идут периодическими рядами в ширину и образуют несколько рядов периодически друг за другом.

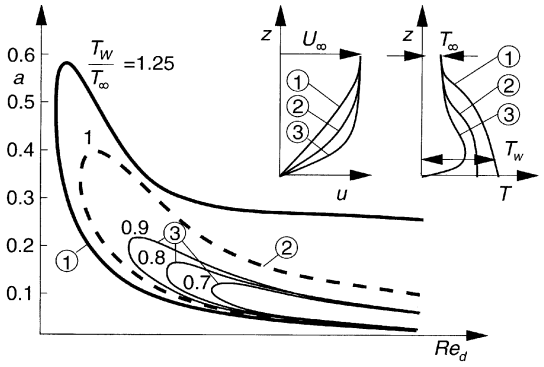


Рис. 7.52. Диаграмма устойчивости сжимаемого плоского пограничного слоя при трансзвуковом числе Маха $M_\infty = 0{,}7$

С возникновением лямбда–структур связано появление высоких свободных слоев сдвига. Это — находящиеся далеко от стенки зоны локальных максимумов касательного напряжения. В дальнейшем протекании перехода зоны значительного сдвига распадаются на все более мелкие структуры, из-за чего в конце концов достигается турбулентное конечное состояние.

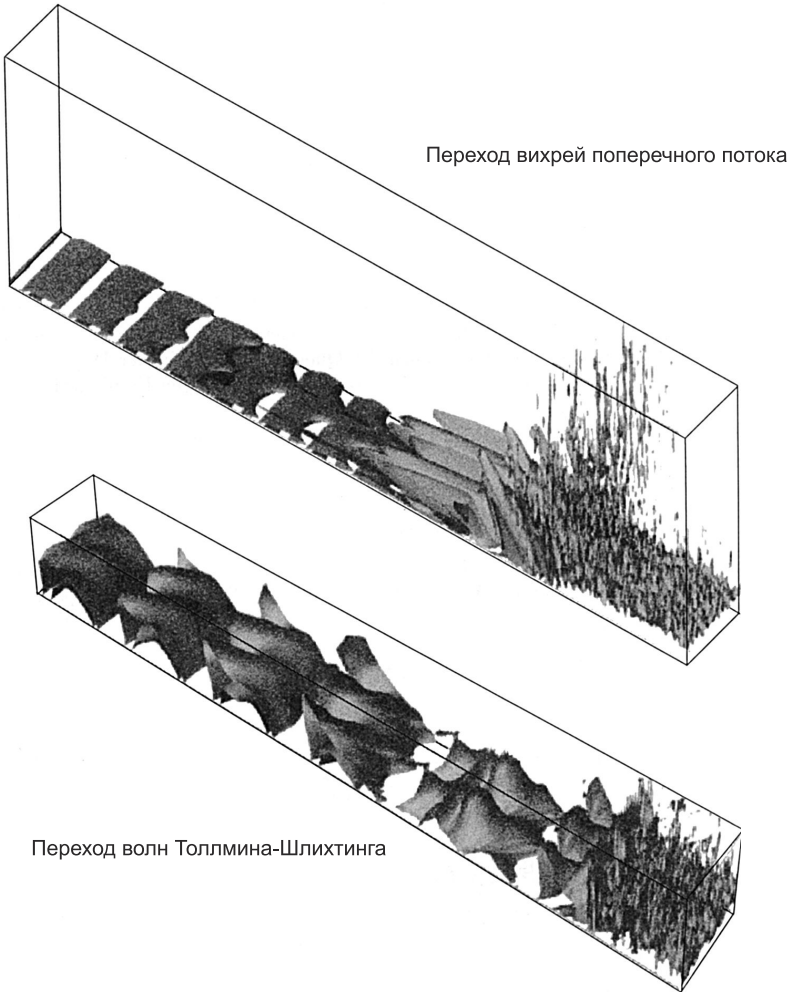


Рис. 7.53. Ламинарно-турбулентный переход в сжимаемом пограничном слое крыла, $M_\infty = 0.62, Re_l = 26 \cdot 10^6$

Распад слоев сдвига осуществляется на промежутке длины волны Толмина–Шлихтинга. Механизмы процесса перехода вихрей поперечного

потока похожи. Распознается также в соответствии с рис. 7.9 образование лямбда–структур, связанное с высокими значениями сдвига и колебаниями величин возмущения в наивысшей точке. В конечной стадии перехода образуются продольные вихри, которые на коротких расстояниях распадаются, и формируется турбулентный поток пограничного слоя.

Локальные возмущения

Анализ устойчивости локальных возмущений был введен в главе 7.1.3. Рис. 7.10 показывает принципиальную схему локальных неустойчивости Толмина–Шлихтинга и неустойчивости поперечного потока в трехмерном пограничном слое стреловидного трансзвукового крыла. Обе неустойчивости в пограничном слое конвективно неустойчивы.

В дальнейшем анализируется поведение трехмерных волновых пакетов в трехмерном сжимаемом пограничном слое. В противоположность к исследованиям двухмерных возмущений, волновое число поперечной волны b появляется также в дисперсионной функции $D(\omega, a, b)$, нулевые значения которой определяются как раз теми комбинациями параметров устойчивости, которые представляют решения задачи на собственные значения для комплексных (ω, a, b). Рассматривается изменение амплитуды пакета волн возмущения в системе, движущейся с групповой скоростью (U, V). Наблюдаемая тогда частота —

$$\omega' = \omega - a \cdot U - b \cdot V.$$

Как и в двухмерном случае, необходимо искать снова те волны, вектор групповой скорости которых $(\partial\Omega/\partial a, \partial\Omega/\partial b)$ является действительным. Комплексная функция частоты $\Omega(a, b)$ при этом определяется с помощью $D(\Omega(a, b), a, b) \equiv 0$.

Тогда относительное временное усиление возмущения ω_i' наносится не только как функция от $U = \partial\Omega/\partial a$, но и как функция групповой скорости (U, V). Линия, отвечающая условию $\omega_i' = 0$ представляет при этом особый интерес, так как она замыкает ту зону (U, V)-уровня, в которой $\omega_i' > 0$. Эта зона представляет поэтому те показатели роста возмущения, которые асимптотически по времени способствуют развитию группы волн. Рис. 7.54 справа содержит диаграмму с зонами относительного временного усиления возмущений на двух представленных позициях стреловидного крыла. Нижняя диаграмма рисунка показывает типичную кривую $\omega_i' = 0$, которая вычисляется для позиции вблизи от передней кромки стреловидного крыла,

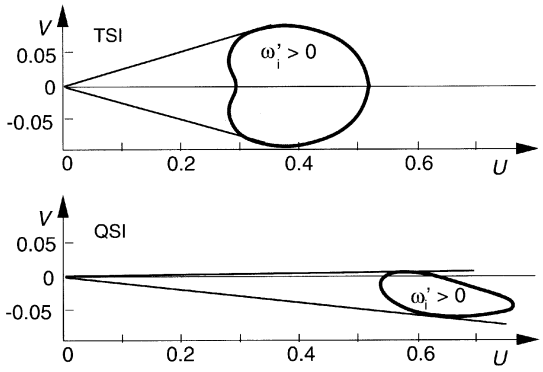


Рис. 7.54. Зоны относительного временного развития неустойчивостей Толмина–Шлихтинга TSI и поперечного потока QSI на уровне групповой скорости (U, V)

т. е. в зоне неустойчивости поперечного потока. Верхняя диаграмма показывает соответствующую кривую на позиции крыла дальше по течению потока, где имеются неустойчивости Толмина–Шлихтинга. Мы понимаем, что обе неустойчивости обладают конвективным характером, потому что в обоих случаях источник происхождения $(U, V) = (0, 0)$ не содержится в зоне $\omega_i' > 0$. Растущая энергия возмущения в обоих случаях транспортируется вниз по течению. Касательные к кривым $\omega_i' = 0$ определяют диапазон углов, внутри которого продолжительно сохраняются нарастающие возмущения.

В случае неустойчивостей поперечного потока диапазон углов очень узок и находится, в основном, ниже по течению. Следует обратить внимание, что относящиеся сюда неустойчивости представляют собой волны, которые проходят практически перпендикулярно (вертикально).

После того как было установлено, что неустойчивости поперечного потока имеют конвективную природу, и что они начинаются внизу (по течению) пространственно развивающегося процесса перехода, вычисляются соответствующие пространственные характеристики усиления пакета волн $(g_{\max} = [(\omega_i - a_i \cdot U - b_i \cdot V)/\sqrt{U^2 + V^2}]_{\max})$ для трансзвукового пограничного слоя стреловидного крыла. На рис. 7.55 представлены собственные значения, собственные функции и неустойчивые зоны возмущений пакета волн для угла стреловидности от $15°$ до $25°$. Предотвращение неустойчивости поперечного потока является существенным при разработке стре-

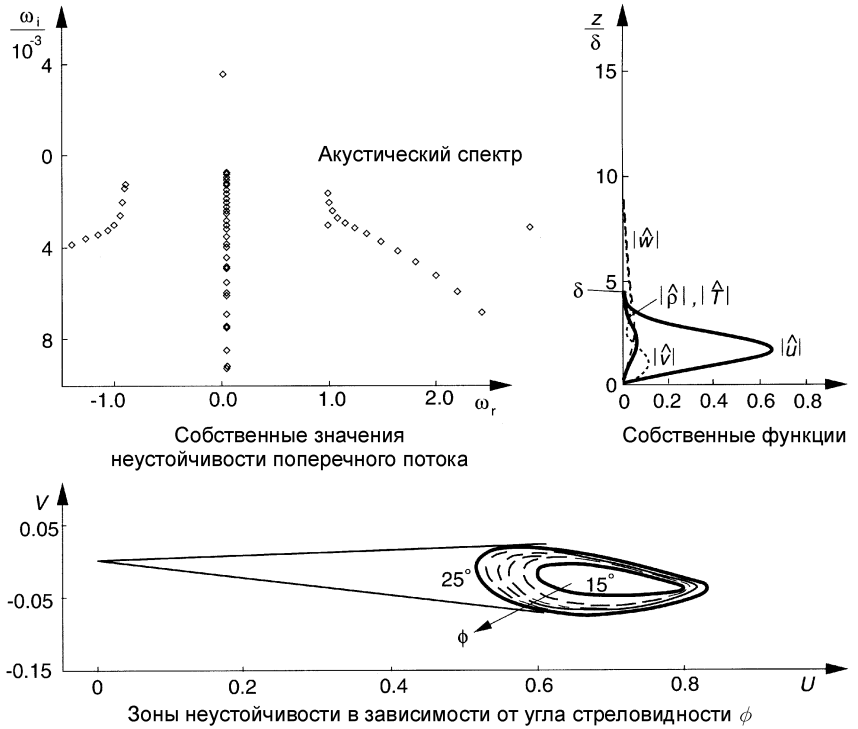


Рис. 7.55. Собственные значения, собственные функции и зоны неустойчивости поперечного потока в сжимаемом пограничном слое стреловидных крыльев, $M_\infty = 0.87$, $Re_l = 26 \cdot 10^7$

ловидного ламинарного крыла, так как вызываемый ею процесс перехода не желательным образом начинается уже в непосредственной близости от передней кромки. С помощью методов анализа устойчивости можно определить зону конструктивных параметров, внутри которой еще не нужны активные меры воздействия (существует естественный ламинарный бьеф). Одним из таких параметров является угол стреловидности. При обычно равномерном обтекании имеется критический диапазон угла стреловидности, внутри которого процесс перехода с доминирующей неусточивостью Толмена–Шлихтинга (TCI) сменятся на доминирующую неустойчивость по-

перечного потока (QSI) (рис. 7.56). Тем самым, на основе теоретического исследования неустойчивости находят естественную границу для угла стреловидности, который в соответствии с рис. 7.55 должен быть менее $15°$.

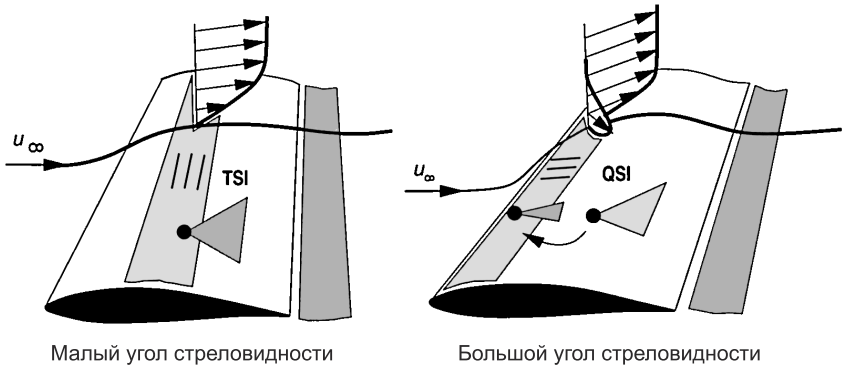


Рис. 7.56. Принципиальная схема областей неустойчивости Толмена–Шлихтинга и поперечного потока в зависимости от угла стреловидности

Предсказание перехода

Известный метод определения завершения зоны перехода в пограничных слоях, основывающийся на первичном анализе устойчивости, — это e^N-метод. Главное предположение e^N-метода состоит в большом упрощении, согласно которому процесс перехода завершается, как только отношение нарастающей, по сравнению с начальной, амплитуды возмущений $|\boldsymbol{u}'(x)|/|\boldsymbol{u}'(x_0)|$ достигает значения e^N. Число N определяется эмпирически.

Расчет хода амплитуды $|\boldsymbol{u}(x)|$ осуществляется с помощью пространственного анализа устойчивости, т. е. при заданной частоте ω_r в месте x вычисляется пространственная степень усиления возмущения $-a_i(x)$. Она определяется как относительное пространственное изменение амплитуды волны возмущения $\boldsymbol{u}'$, т. е. $-a_i = (1/|\boldsymbol{u}'|) \cdot \partial|\boldsymbol{u}'|/\partial x = \partial \ln|\boldsymbol{u}'|/\partial x$. Ход амплитуды тогда равен:

$$\ln \frac{|\boldsymbol{u}'(x)|}{|\boldsymbol{u}'(x_0)|} = \int\limits_{x_0}^{x} -a_i(\bar{x})\, d\bar{x}. \tag{7.95}$$

Расчет начинается в месте $x_{krit}(\omega)$, в котором волна становится неустойчивой при заданной частоте ω_r. Вычисленный ход наносится на в виде зависимости $\ln(|\boldsymbol{u}'(x)|/|\boldsymbol{u}'(x_0)|)$ на рис. 7.57. Это повторяется для различных частот, и строится огибающая всех кривых. Место x_{tr}, в котором огибающая достигает значения эмпирически определенного N-фактора, предполагается в качестве точки завершенного перехода.

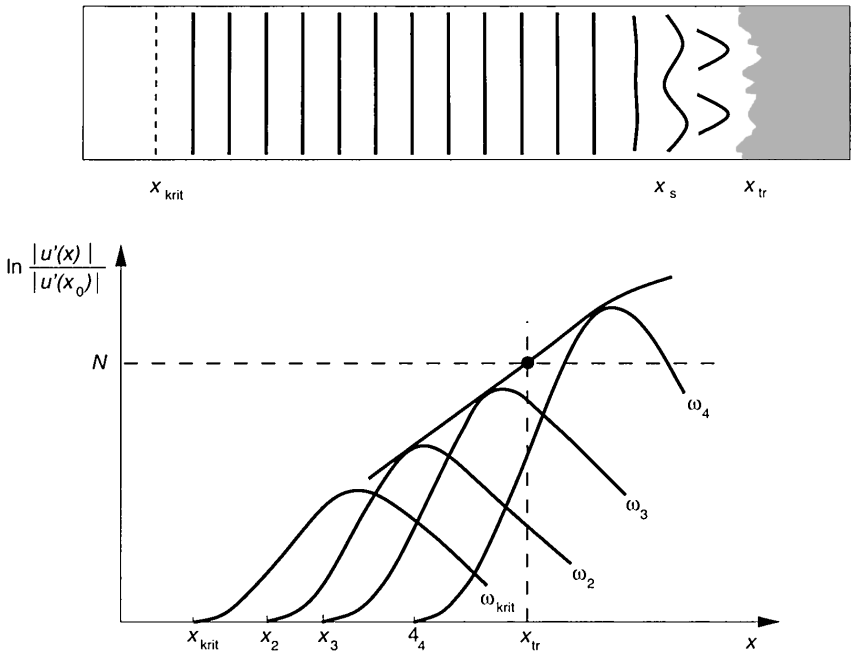


Рис. 7.57. Принципиальные наброски к e^N-методу

Для обтекания несжимаемым потоком нестреловидных крыльев в свободном полете действителен N- фактор примерно $N \approx 13.5$. Это показали обширные корреляции с экспериментами. N-фактор зависит от спектра возмущений обтекания. Так, исследования в аэродинамической трубе дают меньшие значения N-фактора, чем эксперименты в свободном полете, так как начальные возмущения здесь больше, и ламинарно-турбулентный переход, соответственно, происходит быстрее. Следует обратить внимание, что

эта разница между свободным полетом и экспериментом в аэродинамической трубе существует даже при соблюдении схожести чисел Рейнольдса и Маха между моделью и оригиналом.

Метод e^N дает приемлемую оценку для x_{tr}, пока процесс перехода начинается с малыми возмущениями. В таких случаях участок от места x_{krit} (рис. 7.57) первого появления первичной неустойчивости, до места начала вторичной неустойчивости $x_s - x_{krit}$ намного больше, чем «остальной отрезок» $x_{tr} - x_s$, т. е.

$$x_{\mathrm{tr}} - x_{\mathrm{krit}} \approx x_{\mathrm{tr}} - x_{\mathrm{krit}}.$$

Применение e^N-метода в абсолютно неустойчивых зонах возмущения в принципе невозможно, так как в таких случаях вообще состоится не пространственный процесс перехода, а развитие на фиксированном месте. Точно также переход, вызванный большими начальными возмущениями, не может быть описан с помощью e^N-метода, так как при этом вообще не появляется фаза первичной неустойчивости, на которой и основывается метод.

7.3.3. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца

Анализ устойчивости в слоях сдвига происходит аналогично анализу в пограничных слоях. В качестве основного профиля можно, например, применять $\boldsymbol{U}_0(z) = \mathrm{th}(z)$. В качестве граничных условий требуется, чтобы возмущения для больших $|z|$ затухали до нуля. Волновая неустойчивость свободного слоя сдвига называется неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца (рис. 4.10, 7.58).

Решение уравнения Орра–Зоммерфельда (4.73) ведет к диаграмме устойчивости рис. 7.59. Слой сдвига неустойчив для всех чисел Рейнольдса $Re_d = U_\infty \cdot d/\nu$. Начиная с $Re_d = 0$ с растущим числом Рейнольдса сначала очень быстро увеличивается интервал неустойчивых волновых чисел a, чтобы принять асимптотически свою максимальную величину для $Re_d \to \infty$. Временные степени усиления возмущений ω_i при постоянном волновом числе a с уменьшающимся числом Рейнольдса, т. е. с растущим влиянием трения, в принципе отпадают. В противоположность потоку пограничного слоя постоянно растет верхняя ветвь нейтральной кривой с увеличивающимся числом Рейнольдса. Трение у слоев сдвига противодействует неустойчивости.

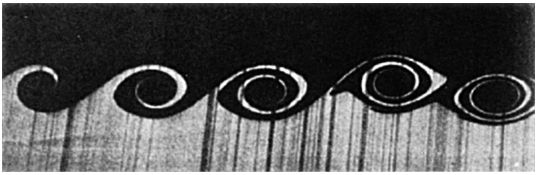


Рис. 7.58. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца (А. Рошко 1987)

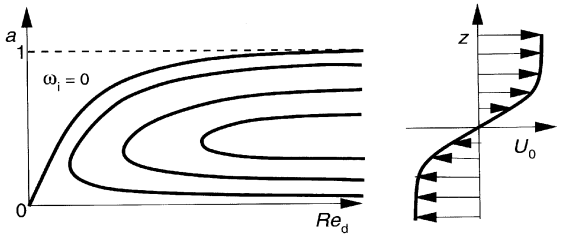


Рис. 7.59. Диаграмма устойчивости для слоя сдвига

Выше $a = 1$ не появляется неустойчивых волн возмущения. Для очень малых длин волн $\lambda = 2 \cdot \pi / a$ поток поэтому в принципе устойчив.

Вторичная неустойчивость ведет у слоя сдвига, среди прочего, к слиянию вихрей, при котором два следующих друг за другом вихря соединяются в один больший с примерно двойной от первоначальной длиной волны $2 \cdot \lambda$ (рис. 7.60). Неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на пограничных поверхностях многофазных потоках дополнительно рассматриваются в главе 9.5.

7.3.4. Течение в следе

Неустойчивость течения в следе за телом (кильватерного потока) ведет к вихревой дорожке Кармана, которая уже рассматривалась в главе 4.2.6. Рис. 4.68 показывает временной ход образования вихревой дорожки Кармана в следе за приведенным в движение цилиндром. Другие примеры вихревой дорожки Кармана показаны на рис. 7.7.

Течение в свободной струе может быть рассчитано как решение уравнений пограничного слоя $\boldsymbol{U}_0 = 1/\operatorname{ch}^2(z)$ (рис. 7.61).

Если вычесть $\boldsymbol{U}_0$ из 1, то получим модель течения в следе (модель кильватерного потока). Если заменить сначала в уравнении Орра–Зоммерфельда (4.73) профиль скорости $\boldsymbol{U}_0$ на $-\boldsymbol{U}_0$, то для отрицательного a получат-

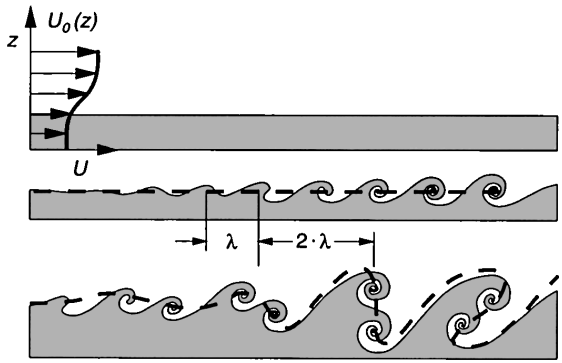


Рис. 7.60. Слияние вихря при неустойчивости Кельвина – Гельмгольца

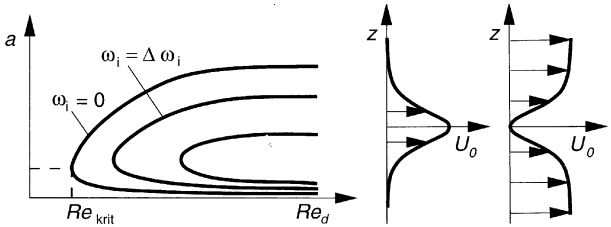


Рис. 7.61. Диаграмма устойчивости для течения в следе и свободной струи

ся такие же результаты, как с исходным профилем $\boldsymbol{U}_0(z)$. Сложение 1 с профилем скорости (при реальном a) ведет лишь к смещению частоты. Временная степень усиления возмущений остается при этом неизменной. Из этого заключают, что свободная струя и течение в следе с соответствующим профилем обладают одинаковой диаграммой устойчивости (a, Re_d). В противоположность слою сдвига, для течения в следе и свободной струи получается критическое число Рейнольдса $Re_{krit} = 4$. Здесь также имеет место стабилизирующее воздействие трения. Влияние числа Рейнольдса является существенным только для малых Re_d, порядка величины критического числа Рейнольдса. Так как $\boldsymbol{U}_0$ по z симметрично, уравнение Орра–Зоммерфельда также становится симметричным. Поэтому можно определить отдельно прямую и не прямую (косвенную) собственную функцию

(относительно $\hat{w}(z)$). Оба случая показаны на рис. 7.62 как ход амплитуды собственных функций $|\hat{u}|$, $|\hat{w}|$ и, соответственно, относящейся сюда формы колебаний. Прямое собственное решение соответствует образованию вихревой дорожки Кармана (диаграмма слева) и обладает существенно более высокими степенями усиления возмущений, чем непрямое, которое называется варикозным возмущением (модой). Прямое собственное решение, в соответствии с этим, неустойчиво уже при малых числах Рейнольдса и определяет критическое число Рейнольдса. Оба решения можно воспроизвести в эксперименте с соответствующими начальными возмущениями (рис. 7.63).

Рис. 7.62. Прямая (сильно неустойчивая) и непрямая (слабо неустойчивая) собственная функция $|\hat{w}|$, $|\hat{u}|$, $Re_d = 100$, $a = 0{,}45$

Рассмотренные выше результаты анализа устойчивости справедливы для локального профиля скорости в конвективно неустойчивой зоне кильватерного течения. Но из рисунка 7.15 известно, что кильватерный поток в определенной зоне позади обтекаемого тела является абсолютно неустойчивым. Тем самым собственная частота вихревой дорожки Кармана определяется резонансом в абсолютно неустойчивой зоне, а не, как предполагалось Карманом, неустойчивостью профиля течения в следе находящейся внизу (по течению) конвективно неустойчивой зоны. Это ведет к смещению частоты вихревой дорожки Кармана на 10%.

Чтобы уменьшить сопротивление давления тупоносых тел, можно использовать меры воздействия на поток в абсолютно неустойчивой зоне кильватерного течения, которые предупреждают неустойчивость в следе. В качестве примера таких мер, возможно для подавления образования ви-

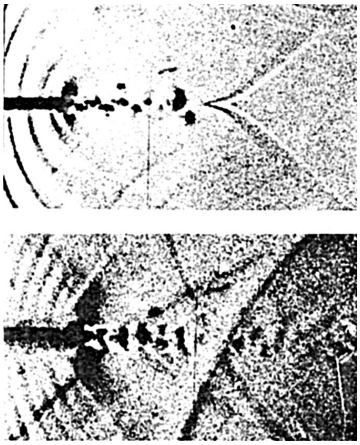


Рис. 7.63. Прямая и непрямая вихревая дорожка

хревой дорожки Кармана за поперечно обтекаемым цилиндром помещать в поле течения возмущающий цилиндр.

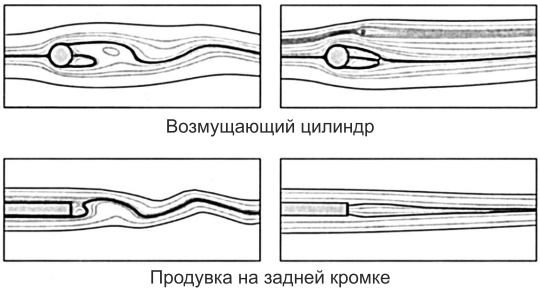


Рис. 7.64. Подавление вихревой дорожки Кармана в абсолютно неустойчивой зоне

Если внести, согласно рис. 7.64, в подходящее место ламинарного кильватерного течения за цилиндром, другой маленький, возмущающий поток цилиндр, то предотвращается возникновение вихревой дорожки Кармана и сопротивление уменьшается. Влияние этого цилиндра воздействует на все поле возмущения. Это справедливо только для таких положений воз-

мущающего цилиндра, которые находятся в абсолютно неустойчивой зоне (рис. 7.15) кильватерного течения основного цилиндра. Отсюда можно заключить, что можно предпринять эффективные, т. е. требующие малых энергетических затрат, меры воздействия, когда поток абсолютно неустойчив. Поэтому можно повлиять на абсолютно неустойчивое течение в следе тела с затупленной кормовой стороной, например, вдувом на задней кромке. Таким образом, можно предотвратить вихревую дорожку Кармана позади лопасти турбины на рис. 7.7.

Первый шаг в расчетах воздействия на поток должен состоять в исследовании осредненного поля потока в зоне абсолютной неустойчивости. Этот анализ выявляет нам те абсолютно неустойчивые зоны, внутри которых меры воздействия (например, механические, акустические, пьезоэлектрические активаторы, вакуумные сопла вдува и т. д.) имеют наибольшее влияние на все поле потока. Другой пример, в котором можно предотвратить с помощью вдува неустойчивые колебания потока вдоль пластины с конечной толщиной, показывает рис. 7.65.

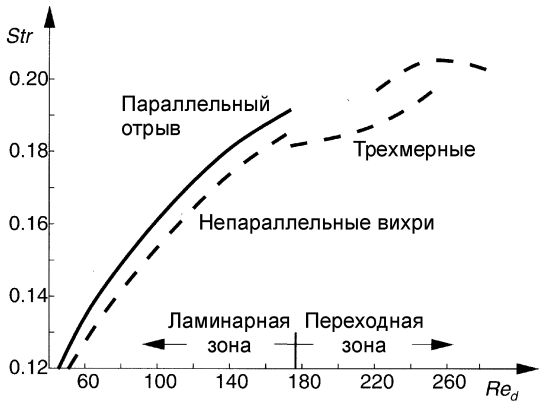


Рис. 7.65. Безразмерная частота срыва Str в зависимости от числа Рейнольдса Re_d

Распространение анализа эволюции пакета волн на непараллельные основные потоки, которое называется глобальным анализом устойчивости, особенно открыло возможности для вычисления конкретного влияния мер воздействия в абсолютно неустойчивых зонах. Вторичные неустойчивости кильватерного потока ведут в переходной зоне, по аналогии с пограничным

слоем, в зависимости от числа Рейндольдса к наложению трехмерных потоков. Безразмерная частота срыва $Sh = f \cdot d/U_\infty$ непрерывно возрастает вплоть до числа Рейнольдса 170 (рис. 7.65). Параллельная вихревая дорожка Кармана сопровождается в кильватерном течении косо идущими волнами.

При числе Рейнольдса 170 в переходной зоне на первичные завихрения в широтном направлении накладывается периодическая трехмерная волнистость, которая идет вслед за уменьшением частоты срыва (рис. 7.66). Длина волны в широтном направлении составляет $\lambda_y = 3 \cdot d$. Повторный рост частоты срыва следует при $Re_d \sim 230$ и ведет к длине волны малой шкалы $\lambda_y = 1 \cdot d$. Эти трехмерные переходы в переходной зоне сильно зависят от начальных возмущений, которые накладываются на обтекания и влияют на резонанс в абсолютно неустойчивой зоне.

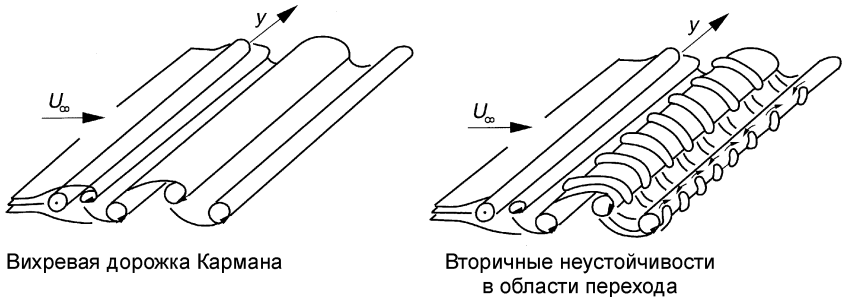


Рис. 7.66. Первичные и вторичные неустойчивости вихревой дорожки Кармана

8

Конвективная теплопередача и массоперенос

Данная глава происходит из одноименной главы первоначального издания книги. Здесь рассматривается теплопередача и массоперенос в условиях свободной и вынужденной конвекции.

Свободные конвективные потоки вызываются различиями в плотности потока, обусловленной градиентами температуры или концентрации. Их следствием является подъемная сила в поле тяжести, которая вызывает конвективные потоки. Примеры свободных конвективных потоков у разогретых цилиндров и пластин были показаны в вводной главе на рисунке 1.4. Проблема Релея – Бенара (глава 7.2.1) на рисунке 1.3 и диффузионная конвекция (глава 7.2.3) также являются примерами свободных конвективных потоков.

О вынужденных конвективных потоках говорят, если на поток действует дополнительно какая-нибудь внешняя сила, например, градиент давления. Примером тому являются обтекание нагретых или охлажденных трубопроводов, как это, например, используется в теплообменниках.

Процессы тепломассообмена проявляются, например, в океане или при многочисленных процессах химической технологии, таких как абсорбция (поглощение), адсорбция, экстракция, дистилляция. Если вода испаряется на поверхности океана, то остается высокая концентрация соли и возникает неустойчивое расслоение плотности, неустойчивость которой описывается в главе 7.2.3. Распространение веществ в растворителях или отделение веществ в центрифугах — это другие примеры. Примеры биологических процессов обмена веществ — это снабжение крови кислородом и прием (усвоение) питания телом.

8.1. Основы тепломассообмена

8.1.1. Свободная и вынужденная конвекция

Свободные конвективные потоки рассматриваются в главе 7.2 с точки зрения проблемы устойчивости. Так, при конвекции Релея – Бенара основным состоянием среды было состояние покоя, а перенос теплоты осуществлялся теплопроводностью. Это состояние заменяется при критическом числе Релея на термическую ячеистую конвекцию. Благодаря конвективному потоку в горизонтальном слое жидкости возникает восходящий поток теплоты. При диффузионной конвекции основное состояние — это покоящийся или движущийся горизонтально поток с профилем концентрации в поперечном направлении, который обусловлен диффузией и теплопроводностью. При критическом диффузионном числе Релея потоки теплоты и массы возрастают по причине появления свободного конвективного течения.

В качестве дополнительного примера и введения в главу о передаче тепла можно привести свободный конвективный поток на нагреваемой вертикальной пластине (рис. 1.4), который подробно рассматривается в главе 8.2.1. Рисунок 8.1 показывает профиль скорости и температуры в воздухе с числом Прандтля $Pr = 0.71$ для изотермической стенки. Пусть температура стенки T_w будет больше, чем температура окружающей среды T_∞. Тепло, передающееся от пластины в поток ведет к повышению температуры среды вблизи стенки и из-за температурной зависимости плотности — к изменению плотности. Если плотность с повышением температуры уменьшается, то вблизи стенки возникают подъемные силы и более теплый поток поднимается вдоль пластины. Влияние пластины ограничивается пограничным слоем стенки. Отношение толщины динамического пограничного слоя δ_T к толщине температурного пограничного слоя соотносится как $\sqrt{Pr}$. По мере развития пограничного слоя на вертикальной пластине при превышении критических условий происходит ламинарно–турбулентный переход.

Так как дополнительно следует принять во внимание передачу тепла, то переход к турбулентному пограничному слою начинается при критическом числе Релея. Вынужденные конвективные потоки наряду с подъемными силами дополнительно подвержены внешним силам. Примером тому является поток в трубе с передачей тепла главы 4.2.1, который подробно рассматривается в главе 8.3.1. Рисунок 8.2 показывает, что наряду с формированием параболического профиля скорости на входе ламинарно-

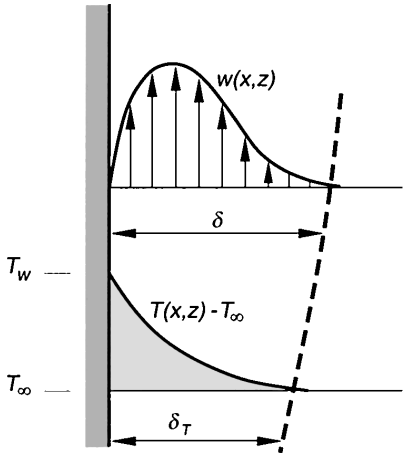


Рис. 8.1. Конвективный поток у подогреваемой вертикальной пластины

го потока в трубу, образуется и температурный профиль у изотермической стенки трубы.

В зоне входа распределения температуры и скорости зависят от радиальной координаты r и от x. Для вязкого потока с равномерным профилем на входе для длины входного участка, на котором происходит перестройка профиля, можно принять $l \approx 0.05 Re_D$. Отношение термической длины входного участка к вязкой опять зависит от числа Прандтля потока. У жидких металлов из-за $\delta_T \gg \delta$ можно пренебречь термическим перепадом по отношению к вязкому. У минеральных масел высокой вязкости из-за $\delta_T \ll \delta$ — наоборот.

8.1.2. Теплопроводность и конвекция

Передача энергии при температурных градиентах, которые действуют не параллельно полю тяжести, осуществляется благодаря теплопроводности и наложенному на нее конвективному переносу тепла. Критическое число Релея, определяющее наступление ячеистой конвекции, существует только у нагреваемых снизу горизонтальных слоев потока (глава 7.2.1). При этом в последующем пренебрегается тепловым излучением. Количество тепла, передаваемое стенке через единицу площади и в единицу времени, состав-

ляет:

$$q_w = h(T_m - T_w), \tag{8.1}$$

h называется коэффициентом теплоотдачи, здесь T_w — температура стенки и T_m средняя температура окружающей среды. У обтекаемого тела в качестве последней выбирают температуру невозмущенного потока T_∞. Безразмерная характеристика, которая определяет передачу тепла, это число Нуссельта:

$$Nu_l = \frac{q_w l}{\lambda(T_m - T_w)} = \frac{hl}{\lambda}. \tag{8.2}$$

Оно характеризует отношение потока тепла, обусловленного конвективной теплоотдачей, к потоку тепла, обусловленного теплопроводностью в покоящейся среде.

Так как для свободного конвективного течения изначально не существует заданной характерной скорости, необходимо найти вместо числа Рейнольдса другой показатель, характерный для конвективного потока. Выбирают число Грасгофа:

$$Gr_l = \frac{\alpha g(T_m - T_\infty)l^3}{\nu^2}. \tag{8.3}$$

Из сравнения с квадратом числа Рейнольдса $Re_l^2 = w^2 l^2/\nu^2$ для свободного конвективного потока определяется характерная скорость:

$$w = \sqrt{\alpha g(T_m - T_\infty)l}. \tag{8.4}$$

Из связи с числом Прандтля $Pr = c_p\mu/\lambda = \nu/k$ определяется число Релея, введенное в главе 7.2.1 для свободного конвективного потока:

$$Ra = Pr \cdot Gr \tag{8.5}$$

При предварительном задании потока тепла в стенку или от стенки используется следующая форма числа Грасгофа:

$$Gr_q = \frac{\alpha g q_w l^4}{\nu^2 \lambda}. \tag{8.6}$$

У нагреваемой вертикальной пластины по причине уплотнения температурного пограничного слоя тепловой поток q_w и коэффициент теплоотдачи h меняются в пропорции $l^{-1/4}$.

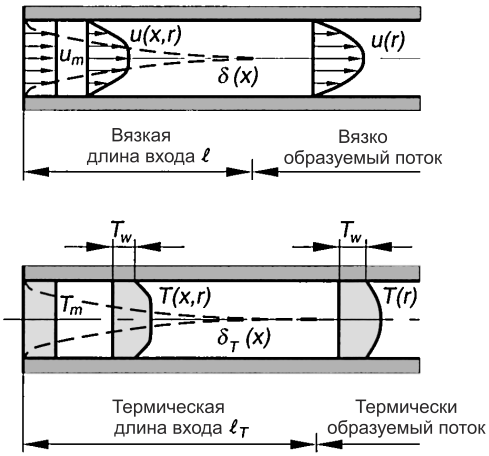


Рис. 8.2. Развитие профилей скорости и температуры потока в трубе

У вынужденного конвективного потока в качестве другого независимого показателя появляется число Эккерта:

$$Ec = \frac{w^2}{c_p(T_m - T_w)}. \tag{8.7}$$

При этом кинетическая энергия текущей среды соотносится с разностью энтальпий, выраженную через разность температур. Для данной проблемы передачи тепла, таким образом, следует определить трехпараметрическую зависимость

$$Nu = f(Re, Pr, Ec) \tag{8.8}$$

либо численным способом с помощью решения основных уравнений (глава 5.4), или экспериментально. При не слишком больших скоростях потока число Эккерта очень мало, так что отношение (8.8) упрощается до $Nu = f(Re, Pr)$.

Для свободного конвективного потока не задается характерной скорости, так что (8.8) можно заменить на

$$Nu = f(Gr, Pr). \tag{8.9}$$

Таким образом, число Грасгофа при свободной конвекции соответствует числу Рейнольдса вынужденного конвективного потока. В то время, когда

число Релея, число Эккерта и число Грасгофа зависят от геометрических, динамических и термодинамических параметров рассматриваемой задачи передачи тепла, число Прандтля является показателем физических свойств среды.

8.1.3. Диффузия и конвекция

Для конвективных потоков, вызванных процессами диффузии, появляются аналогичные передаче тепла закономерности. Их неустойчивость в горизонтальном слое уже вводилась в главе 7.2.3. Массопередача осуществляется вдоль самых больших градиентов концентрации. Термический коэффициент расширения $\alpha = (1/\rho)d\rho/dT$ заменяется здесь коэффициентом концентрационного расширения $\beta = (1/\rho)d\rho/dc$, а коэффициент температуропроводности k коэффициентом диффузии D. Соответственно для свободной диффузионной конвекции заменяют число Релея на диффузионное число Релея :

$$Ra_D = \frac{\beta g(c_m - c_\infty)l^3}{\nu D}, \tag{8.10}$$

с усредненной концентрацией массы c_m и характерной концентрацией c_∞. Число Прандтля заменяется числом Шмидта:

$$Sc = \frac{\nu}{D}. \tag{8.11}$$

Если соответственно тепловому потоку задать диффузионный поток у стенки $j_w = D\partial c_w/\partial n$ по нормали к стенке n, то при обусловленной диффузией свободной конвекции получится диффузионное число Грасгофа

$$Gr_D = \frac{\beta g j_w l^4}{\nu^2 D} \tag{8.12}$$

и число Нуссельта для массопередачи

$$Nu_D = \frac{j_w l}{D(c_m - c_w)}. \tag{8.13}$$

Для данной проблемы диффузии следует, таким образом, для свободного конвективного потока определить соотношение

$$Nu_D = f(Gr_D, Sc), \tag{8.14}$$

а для вынужденного конвективного потока

$$Nu_D = f(Re, Sc). \tag{8.15}$$

При этом возникает вопрос, как велико число Шмидта Sc по сравнению с температурным числом Прандтля. У газов число Шмидта, как и число Прандтля имеет величину порядка 1, так как k и D мало отличаются. Для диффузии водяного пара в воздухе значение $Sc \approx 0{,}2$ при средней температуре $8°C$. Диффузия CO_2 в воздухе дает при $0°C$ $Sc \approx 1{,}1$. Вследствие этого в газах при одинаковых числах Рейнольдса или Грасгофа получаются числа Нуссельта одинакового порядка величин для передачи тепла и веществ. В водных растворах наоборот числа Шмидта заметно больше чем числа Прандтля. Для диффузии макромолекул в водных растворах получаются числа Шмидта порядка величин 10^4, в то время как число Прандтля для воды составляет 7. Массообмен в водянистых растворах вследствие этого родственен теплообмену в вязких минеральных маслах.

8.2. Свободная конвекция

8.2.1. Конвекция у вертикальной пластины

Рисунок 8.1 показывает скоростные и температурные профили ламинарного конвективного потока у нагреваемой вертикальной пластины. Из уравнений Буссинеска (5.81) можно вывести с помощью оценки порядка величин двухмерные уравнения пограничного слоя. Введением новых независимых переменных

$$\begin{gathered} x^* = \frac{x}{l} Gr_z^{\frac{1}{4}}, \quad z^* = \frac{z}{l}, \\ u^* = \frac{u}{\sqrt{g\alpha l(T_m - T_\infty)}} Gr_z^{\frac{1}{4}}, \quad w^* = \frac{w}{\sqrt{g\alpha l(T_m - T_\infty)}}, \\ T^* = \frac{T - T_\infty}{T_m - T_\infty}, \end{gathered} \tag{8.16}$$

уравнения пограничного слоя становятся независимыми от числа Релея или Грасгофа. Получается система уравнений в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{8.17}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T, \tag{8.18}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{8.19}$$

Взаимосвязь уравнений энергии и импульса осуществляется через температуру в члене, выражающем подъемную силу. Распределение температуры в течении свободной конвекции связано вследствие этого с распределением скорости.

Каждый из профилей скорости и температуры является автомодельным, так что он может переводиться в профиль, отвечающей другой координате подходящим преобразованием координат. Для системы уравнений (8.17)–(8.19) получают два обыкновенных дифференциальных уравнения для скорости w и температуры T, которые решаются численным способом.

Вычисленные профили скорости и температуры для разных чисел Прандтля представлены на рисунке 8.3 для изотермического ограничения — постоянной температуре стенки T_w. Характерная скорость $w_0 = \sqrt{g\alpha l(T_m - T_\infty)}$ соответствует преобразованному уравнению (8.16). Для $Pr \leqslant 1$ толщина динамического пограничного слоя δ и толщина теплового пограничного слоя δ_T примерно одинаковой величины. Для $Pr \gg 1$ тепловой пограничный слой ограничивается ближним к стенке слоем. Тепловой поток в стенку определяется из:

$$q_w = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = -\lambda(T_w - T_\infty)\frac{C}{z^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{dT}{d\eta}\right)_w, \tag{8.20}$$

здесь введена безразмерная вертикальная координата

$$\eta = -\frac{x}{z}\left(\frac{Gr_z}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

и константа C. В уравнении используется локальное число Грасгофа

$$Gr_z = \frac{\alpha g(T_w - T_\infty)z^3}{\nu^2} \tag{8.21}$$

образованное по координате z.

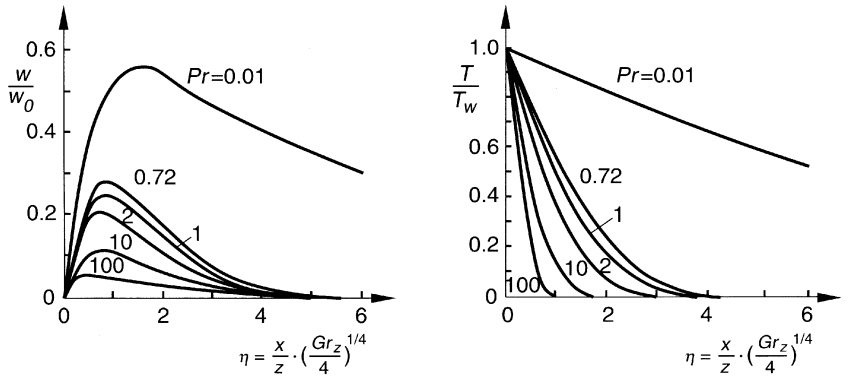


Рис. 8.3. Профили скорости и температуры у вертикальной нагреваемой пластины при постоянной температуре стенки T_w

Локальное число Нуссельта

$$Nu_z = \frac{hz}{\lambda} = -\left(\frac{Gr_z}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{dT}{d\eta}\right)_w \tag{8.22}$$

нанесено на рисунке 8.4 в зависимости от числа Прандтля. Численное решение можно аппроксимировать отношением

$$\frac{Nu_z}{(\frac{Gr_z}{4})^{\frac{1}{4}}} = \frac{0.676Pr^{\frac{1}{2}}}{(0.861+Pr)^{\frac{1}{4}}}. \tag{8.23}$$

Наряду с локальным числом Нуссельта интерес представляет и усредненное число Нуссельта:

$$\frac{Nu_l}{(\frac{Gr_l}{4})^{\frac{1}{4}}} = \frac{0.902Pr^{\frac{1}{2}}}{(0.861+Pr)^{\frac{1}{4}}} \tag{8.24}$$

Из решения для скорости определяется коэффициент трения:

$$c_f = 2\left(\frac{Gr_z}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{dw}{d\eta}\right)_w. \tag{8.25}$$

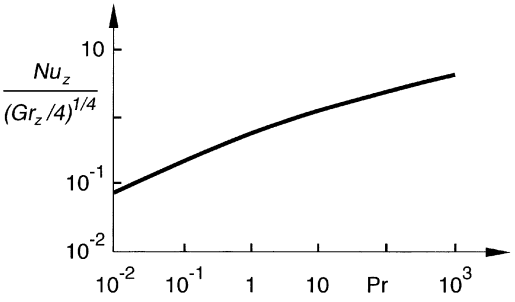


Рис. 8.4. Локальное число Нуссельта у вертикальной нагреваемой пластины при постоянной температуре стенки T_w

Если задать тепловой поток q_w вместо температуры T_w, то получится число Грасгофа (8.6). Система уравнений (8.17)–(8.19) остается неизменной и решается с граничным условием $(\partial T/\partial x) = q_w(z)/\lambda$ (теплопроводность в месте $x = 0$). Для толщины пограничного слоя δ получается $\delta \sim \nu^{2/5}$ по сравнению с $\delta \sim \sqrt{\nu}$ при заданной температуре стенки T_w.

Диапазон применения описанного выше ламинарного пограничного слоя с теплопередачей имеет ограничение $10^4 < Ra_l = Gr_l Pr < 10^8$. Для чисел Релея меньше 10^4 не подходит применяемая аппроксимация, а для чисел Релея больше 10^8 происходит переход к турбулентному режиму течения.

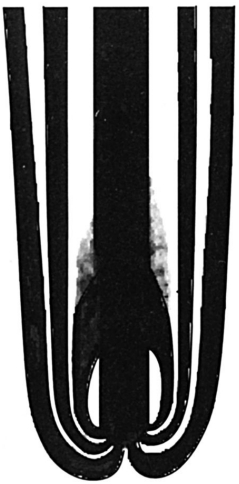


Рис. 8.5. Дифференциальная интерферограмма течения у вертикальной нагреваемой пластины, $Gr_z = 8 \cdot 10^6$

На основе линейной теорией устойчивости главы 7.2.1 рассчитывают с помощью полученных из решения системы уравнений (8.17)–(8.19) основных профилей критическое число Грасгофа Gr_{krit} равное $3 \cdot 10^6$ для воздуха с $Pr = 0{,}71$. Это указывает на то, что в эксперименте не проявляются волны возмущения малой амплитуды и только вверху течения наблюдается завершение процесса перехода. Рисунок 8.5 представляет дифференциальную интерферограмму в воздухе ламинарного конвективного потока на вертикальной пластине при

постоянной температуре стенки T_w для числа Грасгофа $8 \cdot 10^6$, которое в эксперименте постоянно. Интерференционные полосы приблизительно показывают линии одинаковых величин градиентов температуры.

Для зоны турбулентного свободного конвективного потока необходимо решить численным способом уравнения Рейнольдса (5.40)–(5.42) и уравнение энергии (5.63) с членом подъемной силы и аппроксимацией Буссинеска (5.81) в приближении пограничного слоя.

Система уравнений двухмерного турбулентного пограничного слоя в размерном виде имеет вид:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right) - \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} - \overline{\frac{\partial (u'w')}{\partial z}}, \tag{8.26}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\right) - \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial x}} - \overline{\frac{\partial (w'^2)}{\partial z}} + \alpha z(\bar{T} - T_\infty), \tag{8.27}$$

$$\bar{u}\overline{\frac{\partial T}{\partial x}} + \bar{w}\overline{\frac{\partial T}{\partial z}} = k\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}\right) - \overline{\frac{\partial u'T'}{\partial x}} - \overline{\frac{\partial (w'T')}{\partial z}}, \tag{8.28}$$

с пульсационными величинами u', w', T', введенными по Рейнольдсу.

Турбулентный профиль скорости на вертикальной нагреваемой пластине изображен на рисунке 8.6. Его можно разделить на три зоны. На достаточном удалении от стенки находится зона образовавшейся турбулентности. В непосредственной близости от стенки — введенная в главе 4.2.5 зона вязкого слоя. Между ними находится переходная зона, в которой скорость изменяется лишь незначительно.

В соответствии с математическим выражением Буссинеска рассчитывают турбулентное касательное напряжение

$$\tau_w = (\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{8.29}$$

и тепловой поток у стенки:

$$q_w = (\lambda + \lambda_t)\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{8.30}$$

Осредненный по времени температурный профиль в воздухе показан на рисунке 8.7. Для осредненного теплового потока получается корреляция

$$\overline{Nu}_z \sim (Pr \cdot Gr_z)^{\frac{1}{3}} \tag{8.31}$$

для больших значений $Pr \cdot Gr_z$.

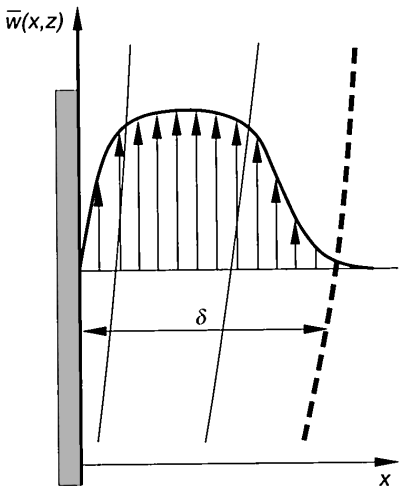


Рис. 8.6. Турбулентный профиль скорости у вертикальной нагретой пластины

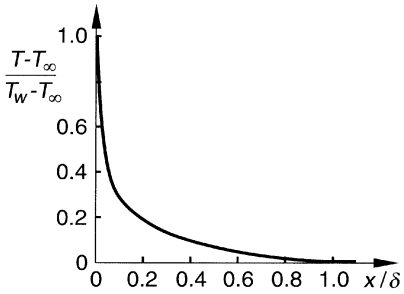


Рис. 8.7. Турбулентный температурный профиль у вертикальной нагретой пластины в воздухе $Pr = 0{,}71$ при заданной температуре стенки T_w

Обусловленное подъемной силой возникновение турбулентности вызывает явно более высокий перенос тепла. Это относится к потокам с большими числами Прандтля. Для сред с малыми числами Прандтля, таких как, например, воздух, возникновение турбулентности, обусловленным подъемной силой, можно в первом приближении пренебречь. Зависимость характеристик локальной теплоотдачи для воздуха и воды показана на рисунке 8.8.

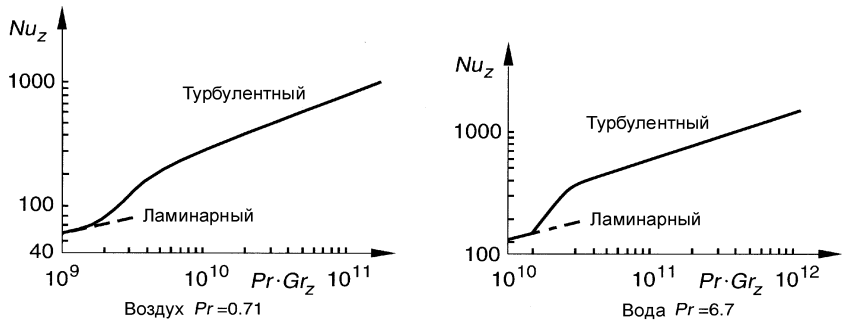


Рис. 8.8. Локальная теплоотдача на вертикальной нагретой стенки

На практике для оценки теплоотдачи на нагретой вертикальной пластине применяются аппроксимационные зависимости. Для определения осредненного теплового потока в интервале $0 < Pr \cdot Gr_z < 10^{12}$ используют:

$$\sqrt{\overline{Nu}_z} = 0.825 + \frac{0.387(Pr \cdot Gr_z)^{\frac{1}{6}}}{\left(1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{8}{27}}}. \qquad (8.32)$$

8.2.2. Конвекция у горизонтального цилиндра

Течение свободной конвекции около нагретого горизонтального цилиндра показано на рисунке 1.4. Система уравнений (8.17)–(8.19) опять ведет к подобным решениям для распределения скорости и температуры, так что можно использовать все выводы предыдущей главы.

Ламинарно–турбулентный переход осуществляется также при критическом числе Грасгофа 10^8.

Рисунок 8.9 показывает распределение локального числа Нуссельта Nu_θ по периметру горизонтального круглого цилиндра в воздухе при заданной температуре T_w. Nu_0 определяет теплоотдачу в критической точке. Интегрирование числа Нуссельта Nu_θ по периметру дает среднее число Нуссельта $\overline{Nu}Gr^{(-1/4)} = 0{,}372$. На рисунке 8.10 показана зависимость среднего числа Нуссельта от числа Релея $Ra = Pr \cdot Gr$. Для больших чисел

Грасгофа получается $\overline{Nu} \sim Ra^{(1/4)}$, причем зависимость от числа Прандтля для $Pr > 0.71$ невелика.

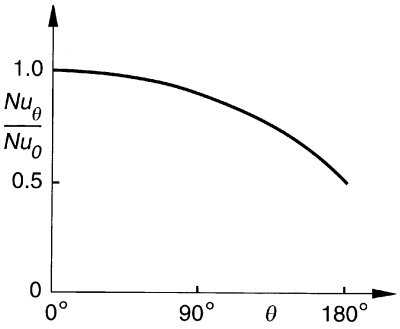


Рис. 8.9. Локальная теплоотдача по периметру горизонтального круглого цилиндра в воздухе $Pr = 0.71$ при заданной температуре стенки T_w

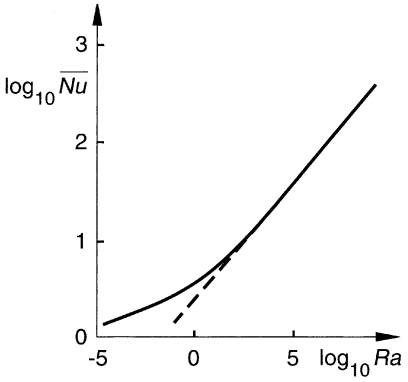


Рис. 8.10. Среднее число Нуссельта нагретого горизонтального цилиндра в воздухе $Pr = 0{,}71$ при заданной температуре T_w

8.3. Вынужденная конвекция

8.3.1. Поток в трубе

Для сформировавшегося потока в трубе (рис. 8.2) устанавливается параболический профиль скорости, рассмотренный в главе 4.2.1:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2, \tag{8.33}$$

с радиусом трубы R, максимальной скоростью $u_{\max} = \Delta p R^2/(4\mu l) = 2u_m$ и постоянным градиентом давления $\Delta p/l$. Образованный в результате теплообмена профиль температуры определяется из уравнения энергии:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}). \tag{8.34}$$

Средняя скорость u_m и средняя температура T_m вычисляются:

$$u_m = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^R 2\pi r u\, dr,$$

$$T_m = \frac{1}{u_m \pi R^2} \int_0^R 2\pi r u \, dr.$$

Для расчета профиля температуры рассматривают два случая условий теплообмена на стенке: при постоянном подводе тепла q_w и постоянной температуре стенки T_w.

Для случая постоянного теплового потока $q_w = h(T_w - T_m)$ при термически образованном потоке в трубе коэффициент теплообмена является постоянным:

$$h = \frac{q_w}{T_w - T_m} = \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial}{\partial(\frac{z}{R})} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \right)_w . \tag{8.35}$$

$T_w - T_m$ является постоянным. Отсюда вытекает:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} = \frac{dT_m}{dx}.$$

Использование в уравнении энергии (8.34) дает:

$$\frac{u}{k} \frac{dT_m}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{для} \quad q_w = \text{const}. \tag{8.36}$$

Случай постоянной плотности теплового потока может соответствовать различным техническим приложениям, таким как электрический нагрев, нагрев в результате ядерных реакций, различные случаи теплообменников.

Для температурного профиля в трубном потоке при заданной температуре стенки T_w действует:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \frac{dT_m}{dx}.$$

Тем самым для уравнения энергии (8.34) получается:

$$\frac{u}{k} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{для} \quad T_w = \text{const}. \tag{8.37}$$

Решения (8.36)–(8.37) представлены на рисунке 8.11. В случае $q_w = \text{const}$ разница температуры $(T_w - T_m) = \text{const}$. В случае $T_w = \text{const}$, с длиной

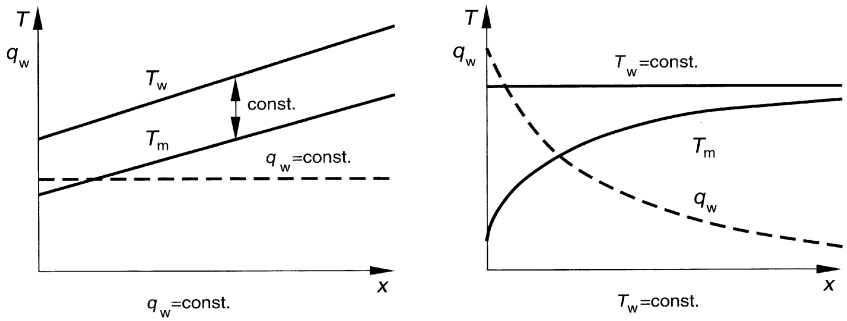


Рис. 8.11. Изменение средней T_m и температуры стенки T_w, а также теплового потока q_w в стенку трубы

трубы x $(T_w - T_m(x))$ уменьшается, так как $T_m(x)$ по причине притока энергии возрастает. Для $q_w = \text{const}$ получается число Нуссельта $Nu = 4{,}36$, а при $T_w = \text{const}$ значение $Nu = 3{,}66$.

Если рассматривать водной участок течения в трубе (рис. 8.2), то теплоотдача в нем будет определяться локальным числом Нуссельта вдоль трубы с диаметром $D = 2R$. Рисунок 8.12 показывает изменение Nu_x для $q_w = \text{const}$ и $T_w = \text{const}$ с граничными случаями гидродинамических и термически образованных потоков в трубе для воздуха с $Pr = 0{,}71$. Из рисунка видно, что длину участка температурной стабилизации на входе можно приближенно представить как

$$\frac{l_T}{D} \approx 0{,}05 Re_D Pr. \tag{8.38}$$

Для отношения длин участков тепловой и гидродинамической стабилизации действует $l_T/l \approx Pr$. Минеральные масла высокой вязкости имеют вследствие этого большие длины участков тепловой стабилизации на входе.

Коэффициент теплоотдачи в зоне входа больше, чем в зоне стабилизированного течения. Это понятно, так как пограничный слой в зоне входа нарастает и, вследствие этого падает локальная теплоотдача.

Для практического применения представляет интерес среднее число Нуссельта:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{l} \int_0^1 Nu_x \, dx. \tag{8.39}$$

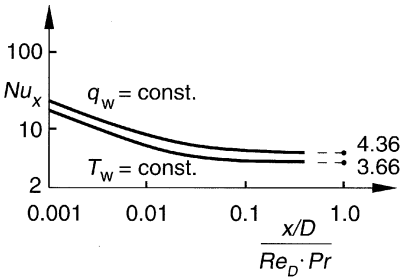


Рис. 8.12. Локальное число Нуссельта на участке входа потока в трубе

При сравнении с экспериментами при большом температурном перепаде наблюдаются отклонения от теории. Их причина в переменности параметров, предполагаемых прежде в качестве постоянных. При большой разности температуры вязкость и теплопроводность изменяются по радиусу трубы. Рисунок 8.13 показывает влияние изменения вязкости на профиль скорости. Для $\mu_w > \mu_m$ по причине роста вязкости вблизи стенок, при охлаждении жидкости или нагреве газа профиль скорости становиться более вытянутым. Для $\mu_w < \mu_m$ трение вблизи стенок для нагретых жидкостей или охлажденных газов меньше, так что профиль скорости наполняется. Соответствующие результаты получают и для труб с поперечным сечением, не имеющим форму окружности или изменяющимся. При этом теряется симметрия вращения и систему уравнений ламинарного несжимаемого потока (5.81) нужно решать численным способом.

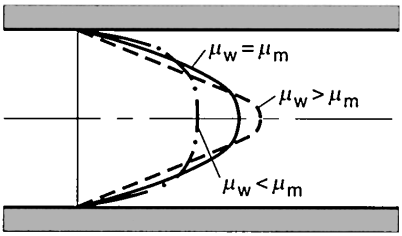


Рис. 8.13. Влияние изменения вязкости на параболический профиль скорости

Турбулентный поток в трубе без притока тепла был описан уже в главе 4.2.5. Передачу тепла можно определить численным способом при

решении уравнений Рейнольдса (5.40)–(5.42) и (5.63). Для осесимметричного потока в трубе с постоянным поперечным сечением действительны следующие упрощения. Для касательного напряжения $\tau(r)$ потока в трубе получается:

$$\tau(r) = \tau_w \frac{r}{R} = -\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \rho \overline{u'v'} = -(\mu + \rho\epsilon_\tau)\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \tag{8.40}$$

с $\tau_w = -(dp/dx)R/2$ и для потока тепла получается:

$$q(r) = \frac{2q_w}{u_m r R} \int_0^r \bar{u} r \, dr = \lambda \overline{\frac{\partial T}{\partial r}} - \rho c_p \overline{T'v'} = (\lambda + \rho c_p \epsilon_q)\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}, \tag{8.41}$$

с турбулентными коэффициентами обмена ϵ_τ и ϵ_q.

С упрощенным предположением о заданности теплового потока $q_w = \mathrm{const}$ на стенке трубы и пренебрежении конвективными членами в уравнении энергии (5.63) становится ненужной информация об усредненном по времени профиле скорости. Остается решить упрощенное уравнение энергии:

$$-(\lambda + \rho c_p \epsilon_q)\frac{d\bar{T}}{dr} = -\mu c_p \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_\tau}{\nu Pr_t} \right) \frac{d\bar{T}}{dr}. \tag{8.42}$$

С безразмерными переменными

$$z^+ = \frac{r u_\tau}{\nu} \quad T^+ = \frac{(T_w - \bar{T})\rho c_p u_\tau}{q_w}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{8.43}$$

и эмпирическими выражениями для Pr_t и ϵ_τ получается распределение температуры по сечению трубы (рис. 8.14) для случая заданного на стенке теплового потока $q_w = \mathrm{const}$. В логарифмической области усредненного по времени профиля скорости можно в первом приближении пренебречь молекулярным обменом по сравнению с турбулентным обменом.

Эта область с ростом числа Прандтля приближается к стенке трубы. Вязкий нижний слой становится тоньше. Тем самым повышается трение по отношению к теплопроводности и температурные профили становятся толще, вследствие этого растет передача тепла. Зависимость числа Нуссельта Nu от числа Рейнольдса Re_D и числа Прандтля Pr представлена на рисунке 8.15.

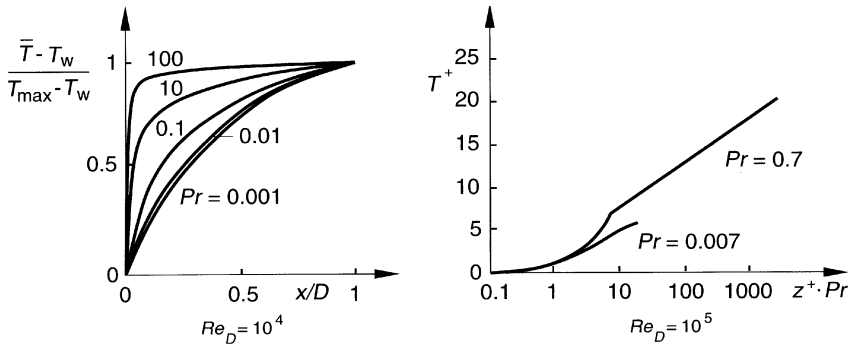


Рис. 8.14. Температурные профили турбулентного потока в трубе для $q_w = \text{const}$

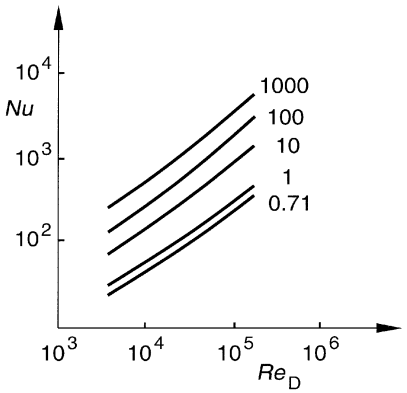


Рис. 8.15. Число Нуссельта турбулентного потока в трубе для $q_w = \text{const}$

В литературе имеется ряд эмпирических отношений для числа Нуссельта, которые применяются как для постоянного теплового потока q_w, так и для постоянной температуры стенки T_w. Пример такого отношения:

$$Nu = \frac{(Re_D - 1000)Pr\frac{\tau_w}{\rho u_m^2}}{1 + 12{,}7\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho u_m^2}}(Pr^{2/3} - 1)}(1 + (\frac{D}{l})^{2/3}), \qquad (8.44)$$

с $\tau_w = (dp/dx)R/2$.

8.3.2. Пограничный слой при вынужденной конвекции

При рассмотрении вынужденной конвекции в пограничном слое пластины в уравнении пограничного слоя свободного конвективного течения (8.18) нужно добавить градиент давления. Работа сил давления в уравнении энергии (8.19) не учитывается. Точно также в дальнейшем снова пренебрегается диссипацией, что приближенно выполняется для несжимаемых потоков. Отношение толщины теплового пограничного слоя потока к толщине динамического такое же как при свободной конвекции

$$\frac{\delta_\tau}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}. \tag{8.45}$$

Если конвективная передача тепла и теплопроводность величины одного порядка, то отсюда следует:

$$\frac{\delta_\tau}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x Pr}}. \tag{8.46}$$

Для различных чисел Прандтля получаются изображенные на рисунке 8.16 отношения. Жидкие металлы имеют для $Pr \ll 1$ очень хорошую теплопроводность при незначительной вязкости. Газы $Pr \approx 1$ обладают сравнительно небольшой вязкостью и теплопроводностью, в то время как минеральные масла с $Pr \geqslant 1$ плохо проводят тепло, но обладают более высокой вязкостью.

У жидких металлов пограничным слоем вязкого потока пренебрегают. Для вычисления температурного пограничного слоя можно приближенно определить профиль скорости на границе пограничного слоя $U_\delta(x)$. Для газовых потоков толщина теплового и динамического пограничного слоя потока величины одного порядка, поэтому необходимо решать полные уравнения пограничного слоя. Они пишутся соответственно (8.17)–(8.19) для вынужденной конвекции в несжимаемом течении:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{8.47}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{Re_l}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{8.48}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr \cdot Re_l}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \tag{8.49}$$

Для того, чтобы уравнения пограничного слоя были справедливы, необходимо дополнительно к $Re_l \gg 1$ потребовать и $Re_l Pr \gg 1$. Уравнения неразрывности и импульса (8.47) и (8.48) здесь отделились от уравнения энергии (8.49). Тем самым можно вычислить пограничный слой потока независимо от температурного пограничного слоя.

Для $Pr = 1$ можно точно решить уравнения пограничного слоя. К течению Блазиуса нужно присоединить решение уравнения энергии. Рисунок 8.17 представляет вычисленные профили температуры и скорости при заданной температуре стенки T_w.

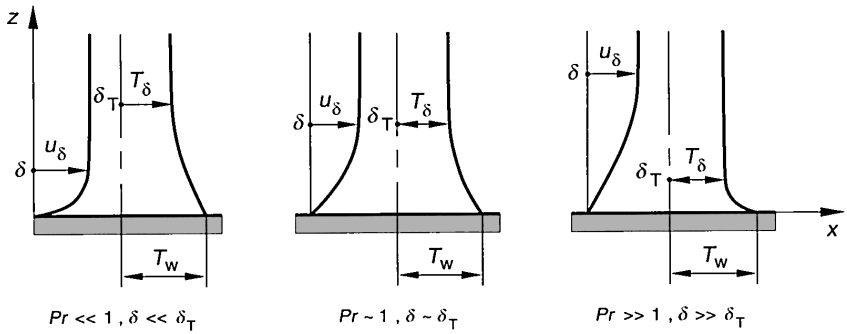


Рис. 8.16. Отношение толщины теплового к толщине динамического пограничного слоя δ_T, δ для различных чисел Прандтля.

Так как профили температуры и скорости идентичны, существует прямая пропорциональность между тепловым потоком и трением на стенке. Она называется аналогией Рейнольдса между обменом импульса и тепла

$$St = \frac{c_f}{2}, \tag{8.50}$$

с числом Стентона

$$St = \frac{q_w}{\rho c_p (T_w - T_\infty) u_\infty}$$

и коэффициентом трения $c_f = 2\tau_w/(\rho u_\infty^2)$. Для теплоотдачи следует точное решение:

$$St\sqrt{Re_x} = \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0{,}332. \tag{8.51}$$

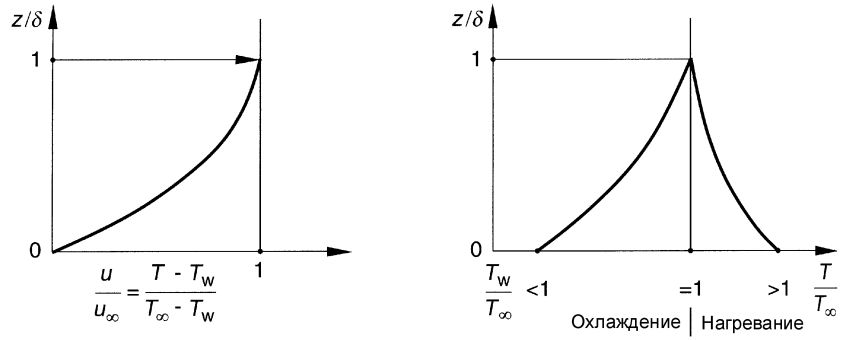


Рис. 8.17. Скоростной и температурный профили плоского пограничного слоя пластинки для $Pr = 1$ и заданной температуры стенки $T_w = \text{const}$.

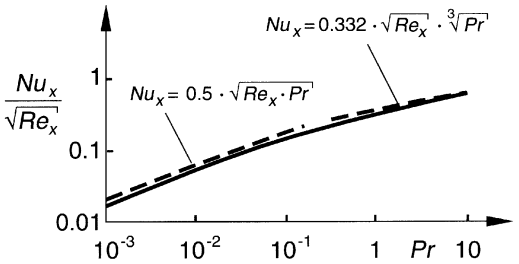


Рис. 8.18. Локальное число Нуссельта в зависимости от числа Прандтля для плоской пластины с постоянной температурой стенки T_w.

И для среднего числа Нуссельта:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}l}{R} = 0.664\sqrt{Re_l}. \tag{8.52}$$

Численные решения системы уравнений (8.47)–(8.49) показывают, что вопреки прежней оценке отношение толщин теплового и динамического пограничных слоев для $Pr > 1$ ведет себя пропорционально $Pr^{-1/3}$:

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{0.975}{Pr^{\frac{1}{3}}}. \tag{8.53}$$

Тем самым для локального числа Нуссельта следует:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0.332 Pr^{\frac{1}{3}}. \tag{8.54}$$

Для жидких металлов с $Pr \ll 1$ опять получается зависимость $\sqrt{Pr}$:

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{0.58}{\sqrt{Pr}} \tag{8.55}$$

и локальное число Нуссельта:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0.5\sqrt{Pr}. \tag{8.56}$$

Рисунок 8.18 обобщает результаты локальной теплоотдачи в зависимости от числа Прандтля.

Диссипация

При высоких скоростях потока диссипацией

$$\mathbf{\Phi} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \tag{8.57}$$

в двухмерном пограничном слое нельзя пренебречь.

Для случая теплоизолированной (адиабатной) стенки с $q_w = 0$ следует ожидать профиль температуры рисунка 8.19. Диссипация больше всего вблизи стенки. Вследствие этого температура T_{qw} у стенки имеет максимум, который называется температурой восстановления. На рисунке 8.20 показаны профили температуры для разных чисел Прандтля для адиабатной стенки. Благодаря диссипации температурные профили становятся толще. Ход адиабатной температуры стенки (фактор восстановления) показывает, что для $Pr > 1$ достигается температура T_{qw}, которая больше, чем температура заторможенного потока. Изменение можно аппромиксировать с помощью

$$\begin{aligned} \frac{c_p(T_{qw} - T_\infty)}{\frac{1}{2}u_\infty^2} &\approx \sqrt{Pr} \qquad 0{,}6 < Pr < 1{,}5, \\ &\approx 1{,}9 Pr^{\frac{1}{3}} \qquad Pr \gg 1. \end{aligned} \tag{8.58}$$

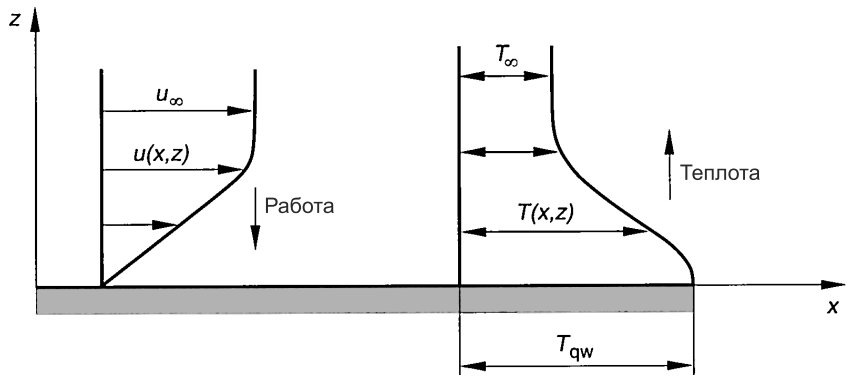


Рис. 8.19. Температурный профиль вследствие диссипации у адиабатной стенки

Для случая постоянной температуры стенки T_w при определении коэффициента теплоотдачи h температура T_∞ заменяется на T_{qw}. Тем самым с диссипацией действует отношение (8.54):

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0{,}332 Pr^{\frac{1}{3}}, \quad \text{для} \quad 0{,}6 < Pr < 10.$$

Сжимаемость

Так как в газах температура заторможенного потока растет в квадратичной пропорции с числом Маха, необходимо очень быстрых потоках учесть эффекты сжимаемости. Наряду с числом Маха дополнительно появляется число Эккерта,

$$Ec = \frac{u_\infty^2}{c_p(T_m - T_w)} \tag{8.59}$$

как мера для сжимаемости $Ec \sim M^2$.

В сжимаемом потоке также справедлива аналогия Рейнольдса (6.50) в форме:

$$St = \frac{c_f}{2Pr}. \tag{8.60}$$

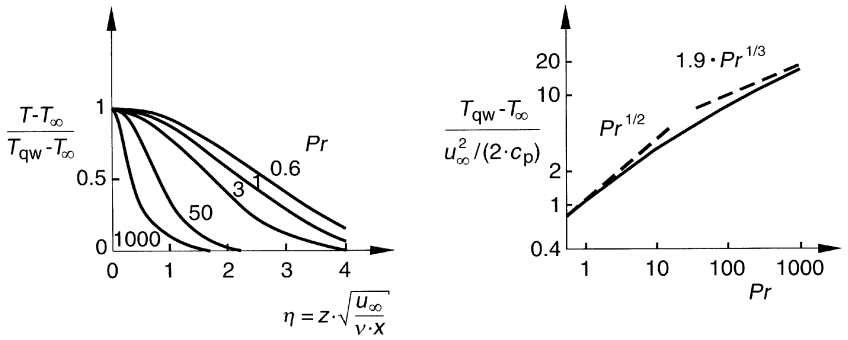


Рис. 8.20. Температурные профили и адиабатная температура стенки у плоской пластины для потока с постоянными свойствами

Для сжимаемого пограничного слоя действует связь между температурой и скоростью

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{T_w}{T_\infty} + \frac{T_\infty - T_w}{T_\infty}\frac{u}{u_\infty} + Pr\frac{\kappa-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right), \tag{8.61}$$

которая была найдена Крокко 1932 и Буземанном 1935. Влияние сжимаемости можно заметить в третьем слагаемом, а влияние теплового перехода во втором слагаемом соотношения (8.61).

Рисунок 8.21 показывает профили скорости и температуры адиабатной плоской пластины для $Pr = 1$. Толщина пограничного слоя растет с ростом числа Маха и профили скорости для больших чисел Маха имеют почти линейное поведение. При сильном охлаждении стенки толщина уменьшается и тем самым уменьшается действие вытеснения пограничного слоя и профили скорости становятся более наполненными. Нагрев стенки усиливает действие вытеснения сжимаемого плоского пограничного слоя.

Турбулентный поток пограничного слоя

Знания о турбулентном потоке в трубе можно перенести на течение в плоском пограничном слое. Исходной точкой являются уравнения пограничного слоя (8.47)–(8.49). Математическое выражение Рейнольдса дает осредненные по времени уравнения пограничного слоя, пренебрегая работой сил давления и диссипацией:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \tag{8.62}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z}, \tag{8.63}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = k\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} - \frac{\partial(\overline{w'T'})}{\partial z}, \tag{8.64}$$

с тепловым потоком Рейнольдса

$$q_t = \rho c_p \overline{w'T'}.$$

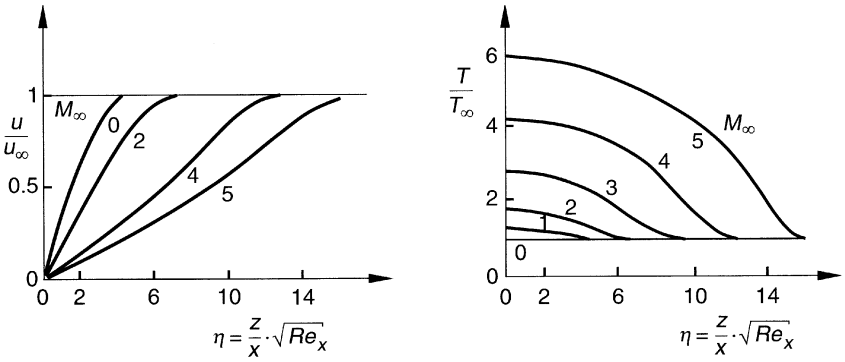


Рис. 8.21. Распределение скорости и температуры на теплоизолированной пластине для $Pr = 1$

Для $Pr = 1$ при плоском потоке пограничного слоя действительна аналогия Рейнольдса:

$$St = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = \frac{c_f}{2}. \tag{8.65}$$

По аналогии Прандтля поле потока подразделяется на вязкий подслой турбулентную зону. Тем самым получается:

$$St = \frac{\frac{c_f}{2}}{1 + 5\sqrt{\frac{c_f}{2}}(Pr - 1)}. \tag{8.66}$$

Для $Pr = 1$ аналогия Прандтля и аналогия Рейнольдса (8.65) идентичны.

Карман, следуя за соображениями Прандтля, разделяет пограничный слой на три зоны. Между вязким нижним слоем и зоной полной турбулентности он учитывает переходный слой $5 < z^+ < 30$, в котором молекулярные и турбулентные характеристики переноса одного порядка. Тем самым из аналогии Кармана получается

$$St = \frac{\frac{c_f}{2}}{1 + 5\sqrt{\frac{c_f}{2}}\left(Pr - 1 + \ln(\frac{5Pr+1}{6})\right)}, \tag{8.67}$$

которая опять для $Pr = 1$ переходит в аналогию Рейнольдса.

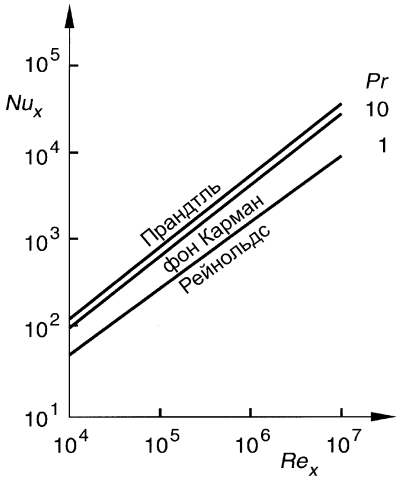


Рис. 8.22. Локальное число Нуссельта для турбулентного пограничного слоя пластины

Локальный коэффициент трения пластины при этом:

$$c_f = \text{const} \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}}. \tag{8.68}$$

Локальные числа Нуссельта для турбулентного пограничного слоя пластины изображены на рисунке 8.22. Для всех аналогий действует предпосылка, что турбулентное число Прандтля $Pr_t = 1$. Поэтому они не применимы для жидких металлов при $Pr \ll 1$.

При образовавшемся турбулентном потоке в трубе предполагалось, что в ядре течения отношение плотности теплового потока и касательного напряжения по поперечному сечению трубы приблизительно постоянно. При плоском потоке это тоже приблизительно выполняется. Безразмерными величинами $u^+ = \bar{u}/u_\tau$ и $T^+ = (T_w - \bar{T})\rho c_p u_\tau / q_w$, а также $z^+ = z u_\tau / \nu$ получаются температурные профили рисунка 8.23.

8.3.3. Обтекаемые тела

Самый простой случай обтекаемого тела с теплоотдачей — это поперечно обтекаемый цилиндр. В зоне больших чисел Рейнольдса теплоперенос происходит преимущественно в пограничном слое, так что можно перенести закономерности предыдущей главы на пограничный слой цилиндра.

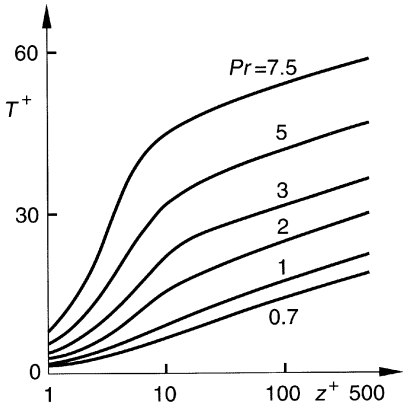


Рис. 8.23. Температурные профили турбулентного пограничного слоя пластины

По экспериментам Р. Гилперта 1933 можно разделить зависимость среднего числа Нуссельта для обтекания цилиндра воздухом при постоянной температуре его стенки T_w на различные интервалы числа Рейнольдса:

$$\begin{aligned} 40 < Re_D < 4000, \quad & \overline{Nu} = 0{,}615 Re_D^{0{,}466}, \\ 4000 < Re_D < 4 \cdot 10^4, \quad & \overline{Nu} = 0{,}174 Re_D^{0{,}618}, \\ 4 \cdot 10^4 < Re_D < 2{,}5 \cdot 10^5, \quad & \overline{Nu} = 0{,}0239 Re_D^{0{,}805}. \end{aligned} \tag{8.69}$$

Показатель степени растет от 0,46 до 0,8 при числе Рейнольдса больше $4 \cdot 10^4$. Это указывает на то, что с ростом числа Рейнольдса вихревая дорожка Кармана кильватерного потока все больше способствует увеличению теплоотдачи. Соотношения (8.69) действительны для турбулентного обтекания. Если степень турбулентности повысится на $2,5\%$, то среднее число Нуссельта повысится на 80%. Это объясняет то, что числа Нуссельта, измеренные в аэродинамической трубе, чаще всего лежат выше, чем дано в (8.69).

8.4. Тепломассообмен

Процессы тепло и массообмена возникают в пограничных слоях, если, например, в поток пограничного слоя добавляется охлаждающий газ. Продувка легким газом на стенке уменьшает теплоотдачу. Испарившиеся слои жидкости на стенке служат охлаждению. К обмену импульса и тепла дополнительно добавляется обмен вещества благодаря диффузии. Наряду с пограничными слоями скорости и температуры образуются пограничные слои концентрации.

Основные уравнения свободной конвекции тепло и массообмена (5.86) были введены в главе 5.4.3. Неустойчивости диффузионной конвекции с теплопереносом переходом рассматривались уже в главе 7.2.3.

8.4.1. Массообмен у пластины

Вынужденное конвективное течение на пластине с обменом вещества изображено на рисунке 8.24. К горячему потоку газа подводится холодный воздух с нормальной к стенке компонентой скорости $w(x)$. В этой главе рассматривается самый простой случай несжимаемого пограничного слоя инертной смеси из двух веществ. Охлаждающий газ 1 с концентрацией массы $c_1 = c$ проникает сквозь пористую поверхность в текущий газ 2 с концентрацией массы $c_2 = 1 - c$.

Рассмотренные прежде двумерные уравнения пограничного слоя с переносом тепла (8.47)–(8.49) дополняются уравнениями переноса массы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{8.70}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_l}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{8.71}$$

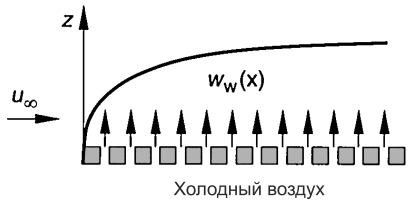


Рис. 8.24. Обмен вещества в пограничном слое пластины

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr \cdot Re_l}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \tag{8.72}$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + w\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{Le}\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \tag{8.73}$$

с числом Льюиса $Le = D/k = Pr/Sc$. При этом пренебрегается некоторыми эффектами переноса, такими как термодиффузия, которая, например, используется при разделении изотопов. Количественные свойства веществ смеси из двух веществ зависят не от температуры и давления, но и от концентрации. Эта зависимость все же невелика и ею пренебрегают, как и зависимостью от давления. В рамках аппроксимации Буссинеска в качестве базовых предполагаются значения свойств веществ при средней температуре T_m. В уравнении энергии (8.72) пренебрегалось членом диффузии энергии по сравнению с членом теплопроводности, что приближенно выполнимо для инертных смесей газов. Вследствие этого массообмен влияет на профиль скорости исключительно через граничные условия $w_w(x)$. Уравнение неразрывности (8.70) и уравнение импульса (8.71) остаются неизменными.

Система уравнений имеет для пограничного слоя пластины, например, граничные условия у стенки $w = w_w$, заданную температуру стенки T_w и концентрацию на стенке $c = c_w$. На внешней границе слоя $T = T_\infty$ и $c = c_\infty$. Рисунок 8.25 показывает рассчитанные профили температуры и концентрации при различных скоростях вдува для числа Прандтля и Шмидта 0,7. В случае отсоса на стенке с $w_w < 0$ профили становятся более наполненными.

Отсос (вакуумирование) используется на практике, чтобы препятствовать отрыву потока в пограничном слое с градиентом давления. Подача вещества благодаря вдуву делает профили более плоскими, что способствует отрыву потока. Профили имеют критическую точку — точку перегиба,

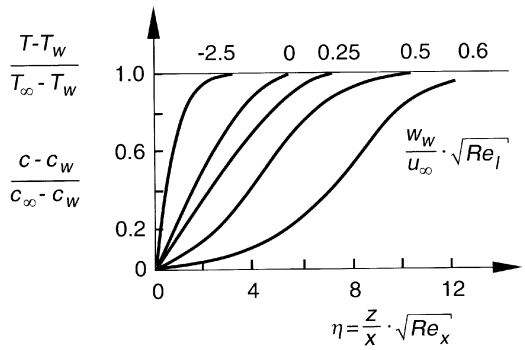


Рис. 8.25. Профили температуры и концентрации у ровной пластины с передачей (переносом) вещества, $Pr = Sc = 0.7$.

которая способствует развитию ламинарно–турбулентного перехода в пограничном слое.

Отношения толщины динамического пограничного слоя потока к толщине теплового пограничного слоя можно перенести также на течения с массопереносом. Выражение $\delta/\delta_T \approx Pr^{(1/3)}$ для $Pr \geqslant 1$ соответствует

$$\frac{\delta}{\delta_D} \approx Sc^{\frac{1}{3}} \quad Sc \geqslant 1. \tag{8.74}$$

Для диффузионного числа Нуссельта Nu_D действительно:

$$\frac{Nu_D}{\sqrt{Re_x}} = 0.332 Sc^{\frac{1}{3}} \quad Sc \geqslant 1, \tag{8.75}$$

пока скорость вдува очень незначительна. Для любых скоростей вдува константу в (8.75) необходимо соответственно найти.

Для турбулентного массопереноса уравнения Рейнольдса (8.62)–(8.64) пограничного слоя пластины дополняются уравнением:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = D\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{(w'c')}}{\partial z} \tag{8.76}$$

с потоком тепла Рейнольдса

$$j_z = \rho\overline{w'c'} = -\rho\epsilon_D \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$$

и турбулентной величиной обмена ϵ_D для переноса массы. Подобно молекулярным числам Прандтля и Шмидта определяется турбулентное число Прандтля и Шмидта:

$$Pr_t = \frac{\epsilon_\tau}{\epsilon_q} = \frac{\overline{u'w'}}{\overline{w'T'}} \frac{\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}}, \tag{8.77}$$

$$Sc_t = \frac{\epsilon_\tau}{\epsilon_D} = \frac{\overline{u'w'}}{\overline{w'c'}} \frac{\dfrac{\partial \bar{c}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}}. \tag{8.78}$$

Тем самым получается турбулентное число Льюиса:

$$Le_t = \frac{Sc_t}{Pr_t} = \frac{\epsilon_q}{\epsilon_D} = \frac{\overline{w'T'}}{\overline{w'c'}} \frac{\dfrac{\partial \bar{c}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial z}}. \tag{8.79}$$

В первом приближении можно принять для слоев сдвига $Le_t = 1$. Таким образом можно перенести все выражения турбулентного обмена импульса на турбулентный обмен вещества.

Ламинарный и турбулентный перенос массы дополняется в главе 10.

9

Многофазные течения

9.1. Основы многофазных течений

Многофазный поток — это самая часто встречающаяся форма потока в природе и технике. При этом можно понимать фазу в термодинамическом смысле как агрегатные состояния: твердое, жидкое и газообразное, которые могут одновременно появляться в системе с одним или несколькими компонентами. Дрейфующие с каплями дождя и градинами грозовые облака, пенящийся горный ручей, сошедшая снежно-пылевая лавина или облако вулканического пепла — это впечатляющие примеры многофазных потоков в природе.

В технологиях, применяемых в электростанциях, в химических технологиях многофазные потоки являются решающим средством для интенсификации тепло- и массообмена. Двухфазные потоки определяют процессы в парогенераторах, конденсаторах и охладительных башнях (градирнях) тепловых электростанций. Многофазные и многокомпонентные потоки используются при добыче, транспортировке и переработке нефти и газа. В процессах дистилляции и ректификации (очистки) химической промышленности эти виды потоков участвуют также решающим образом.

Значение процессов в потоках для окружающей среды и техники требует основательного физического понимания процессов переноса и взаимодействия в текущих многофазных и многокомпонентных смесях.

Общепринято, что микроструктура двухфазных потоков определяется нестационарными процессами хаотического характера. Поэтому, даже в большей мере, чем у турбулентных потоков можно применять для формального описания осредненные состояния и статистические методы, а также закономерности масштабирования, чтобы сделать количественные выводы об ожидаемых явлениях, таких как падение давления или распределение фаз.

Усложняющим для унифицированного математического и физического описания многофазных потоков являются очень разные формы и структуры потока, которые наблюдаются даже в самых простых геометриях, таких как трубы и каналы с постоянным поперечным сечением у газожидкостных потоков или потоков газа с твердыми частицами. При этом сила тяжести оказывает решающее воздействие. Наряду с этим важное значение имеют и другие силы, такие как электростатические силы. В качестве примера на рисунке 9.1 схематично представлены типичные постоянно наблюдаемые формы потоков для потоков газа — жидкости в горизонтальной трубе.

Математически многофазные потоки могут в принципе описываться двумя способами. С одной стороны можно понимать многофазный поток как совокупность непрерывных проникающих одна в другую фаз, причем каждая фаза в каждом месте присутствует в определенной доле. Это модельное представление полезно, если необходимо понять поведение многофазного потока. С другой стороны, можно описать движение в каждой фазе отдельно, причем взаимодействию между фазами на граничной поверхности придается особое значение. Это выражается при математической обработке в том, что движение граничных поверхностей детально вычисляется специальными математическими методами (подробно см. Shyy et al. 1996) Этот способ рассмотрения дает преимущества, если процесс определяется взаимодействием на промежуточной поверхности, например, массовыми потоками. На передний план здесь выходят маломасштабные эффекты.

В главе 5.4 и в последующих представлены основные уравнения двухфазных потоков и упрощенных моделей в смысле первого способа рассмотрения. Второй способ рассмотрения, который, к примеру, был представлен в главе 5.4.5 с помощью уравнения Релея–Плессета, в этой главе не используется.

9.1.1. Определения

С помощью определения среднего значения, введенного в главе 5.4.5 в дальнейшем устанавливаются некоторые основные характеристики и понятия многофазных течений.

Долей $\epsilon_k(x,t)$ фазы k в процессе потока называют долю канала потока в пространстве или времени, которая занята фазой k (газ или поток). Доля ϵ может определяться как локальная величина, осредненная по времени, длине хорды L, площади поперечного сечения канала A или объему канала ΔV. Соответственно доли времени, площади, объема фазы k определены

простым отношением

$$\epsilon_{k,t} = \frac{\Delta t_k}{\Delta t}, \quad \epsilon_{k,A} = \frac{A_k}{A}, \quad \epsilon_{k,V} = \frac{V_k}{\Delta V}, \tag{9.1}$$

причем Δt_k, A_k и V_k следует понимать как соответствующие средние значения функции плотности фаз $X(x,t)$. Площади и доли объема можно дополнительно осреднить по времени.

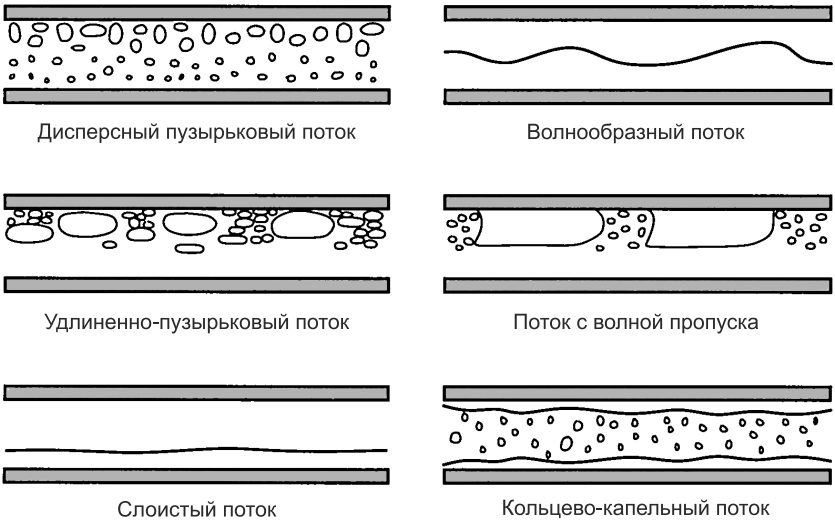


Рис. 9.1. Режимы течения в горизонтальной трубе

У скоростей фаз вводятся соответственно осредненные по времени локальные значения $\overline{U_k(x,t)}^k$, средние по поперечному сечению $\langle U_k(x,t)\rangle_{k,A}$ или пространственно средние значения $\langle U_k(x,t)\rangle_{k,A}$. Дальнейшее обсуждение ради простоты проводится для компоненты скорости.

Приведенной скоростью называется произведение из доли фазы ϵ_k и скорости фазы u_k и она определяется:

$$U_k = \epsilon_k \cdot u_k.$$

Тогда для ее средних значений получается

$$\overline{U_k}^k = \overline{\epsilon_k \cdot u_k}^k, \quad \langle U_k\rangle_{k,A} = \langle \epsilon_k \cdot u_k\rangle_{k,A}, \quad \langle U_k\rangle_{k,V} = \langle \epsilon_k \cdot u_k\rangle_{k,V}. \tag{9.2}$$

При этом можно интерпретировать среднюю по сечению скорость как среднюю плотность потока в объеме и представить в форме

$$\langle U_k \rangle = \frac{\dot{V}_k}{A}. \tag{9.3}$$

Здесь $\dot{V}_k$ — это поток объема фазы k. Приведенную скорость фазы k можно физически интерпретировать таким образом, как будто бы фаза k в канале течет одна. В том же месте затем определяется общая приведенная скорость с помощью отношения:

$$U_{tot} = \sum_k U_k, \tag{9.4}$$

которое используется здесь локально или в форме осреднения по поперечному сечению $\langle U_{tot} \rangle = \sum_k \langle U_k \rangle$. Природе образования средних значений свойственно, что между средними величинами $\langle U_k \rangle$, $\langle u_k \rangle$, $\langle \epsilon_k \rangle$ действует отношение

$$\langle U_k \rangle = \langle \epsilon_k \cdot u_k \rangle = C \cdot \langle \epsilon_k \rangle \cdot \langle u_k \rangle \tag{9.5}$$

с C как фактором корреляции. Тем самым можно представить осредненную по сечению фазовую скорость $\langle U_k \rangle$ через $\langle \epsilon_k \rangle$ и $\langle u_k \rangle$. Полезно ввести отношение скоростей фаз

$$S = \frac{\langle u_i \rangle}{\langle u_k \rangle} = \frac{\langle \epsilon_i \rangle \cdot \langle U_k \rangle}{\langle \epsilon_k \rangle \cdot \langle U_i \rangle} \cdot \frac{C_{0,i}}{C_{0,k}}. \tag{9.6}$$

Отношение часто называют скольжением (или проскальзыванием). Через определенные таким образом скорости и плотности ρ_k фаз выражаются плотности массового потока $\dot{m}_k$ и массовые потоки $\dot{M}_k$. Имеют место следующие соотношения:

$$\dot{m}_k = \rho_k \cdot \langle u_k \rangle, \quad \dot{M}_k = \rho_k \cdot \langle U_k \rangle \cdot A. \tag{9.7}$$

Для полного потока массы $\dot{M}$ из общего баланса массы следует $\dot{M} = \sum \dot{M}_k$.

Для характеристики многофазных потоков наряду с объемной долей ϵ_k используется также массовая доля χ как отношение потока массы фазы k к потоку общей массы:

$$\chi_k = \frac{\dot{M}_k}{\dot{M}}, \quad \dot{M} = \sum \dot{M}_k. \tag{9.8}$$

Для потоков газ–жидкость это отношение означает содержание пара. Оно определяется термодинамически для однокомпонентных двухфазных потоков, например, вода–водный пар с помощью энтальпии фаз (ср. с главой 9.5). Между величинами скоростей фаз, массовых потоков и плотностей существует функциональная зависимость. Для двухфазных потоков, газ–жидкость, можно дать эту зависимость в форме

$$\frac{\chi_G}{\chi_L} = \frac{\rho_G}{\rho_L} \cdot S \cdot \frac{\epsilon_G}{\epsilon_L}, \tag{9.9}$$

причем здесь для каждого вида осреднения и по причинам сохранения массы действительно $\chi_L = 1 - \chi_G$ и $\epsilon_L = 1 - \epsilon_G$. Из этого отношения ясно, что доля объема ϵ в общем зависит по (9.6) от скольжения, от отношения плотности и содержания пара двухфазного потока.

Так как двухфазные потоки имеют особое значение для различных приложений, для описания процессов переноса в них введены и другие понятия для скоростей. Скоростью дрейфа (сноса, диффузии) называют отклонение фактической скорости фазы от общей приведенной фазовой скорости $U = u_G + u_L$. Например, для газо-жидкостного потока она определяется:

$$u_{G,U} = (u_G - U), \quad u_{L,U} = (u_L - U). \tag{9.10}$$

Эти скорости дрейфа простым способом связаны с относительной скоростью $u_G - u_L$ движения обеих фаз. Действует соотношение

$$u_{G,L} = (1 - \epsilon_G) \cdot (u_G - u_L), \quad u_{L,U} = -\epsilon_G \cdot (u_G - u_L). \tag{9.11}$$

Это отношение справедливо для любого вида осреднения. Поэтому здесь в представлении отказываются от введения особых символов для обозначения вида осреднения. По аналогии с приведенными скоростями U_k в некоторых моделях для описания двухфазных потоков вводятся также приведенные скорости дрейфа, названные потоками дрейфа. Их определение имеет вид:

$$U_{G,U} = \epsilon_G \cdot u_{G,U}, \quad U_{L,U} = (1 - \epsilon_G) \cdot u_{L,U}. \tag{9.12}$$

Другой характерный параметр для двухфазных потоков был введен Мартинелли 1949. Он является отношением потерь трения–давления для случая, когда газ и жидкость соответственно одни текут по трубопроводу. Если обозначить $(dp/dz)_L$ и $(dp/dz)_G$ соответственно потерю давления в потоках газа и жидкости, средних для всего поперечного сечения, тогда для

параметра Мартинелли действительно:

$$X^2 = \frac{(\frac{dp}{dz})_L}{(\frac{dp}{dz})_G}. \tag{9.13}$$

Этот параметр, среди прочего является мерой доли объема потока. Для $X^2 \gg 1$ двухфазный поток состоит преимущественно из жидкости, для $X^2 \ll 1$ — преимущественно из газа.

9.1.2. Режимы течения

Двухфазные потоки могут иметь различные режимы течения, обусловленные различным видом взаимовлияния пограничной поверхности при различных объемных потоках фаз. При большом различии плотности фаз сила тяжести имеет решающее влияние. Чтобы охарактеризовать влияние силы тяжести, представляется целесообразным, классифицировать режимы течения для горизонтальных и вертикальных потоков в трубе. Типичные образцы потоков изображены для обоих случаев на рисунке 9.1 и 9.2.

Представленные режимы течения появляются по очереди с ростом долей газа ϵ и ростом скорости. Не слишком резкий переход между различными режимами определяется турбулентностью потока фаз, долями объема и устойчивостью пограничных поверхностей.

9.1.3. Карты потоков

Для разграничения разных режимов течения друг от друга с помощью экспериментальных наблюдений были разработаны карты потоков. Сильно упрощенную картину состояний течения можно представить для определенной смеси, например, воздуха и с водой, с помощью карты режимов течения, построенной в зависимости обеих контрольных параметров — скоростей газа и жидкости. Такая карта была составлена из большого экспериментального банка данных 1974 Мэндхейма и др. Для ее построения осуществлялась вариация потоков жидкостных и газовых объемов на участке испытательной трубы. Рисунок 9.3 показывает карту потоков Мэндхейма.

Подобные карты были даны Говье и Азизом 1972 и Тейтелем 1980 для воздушно–водных потоков в вертикальных трубах.

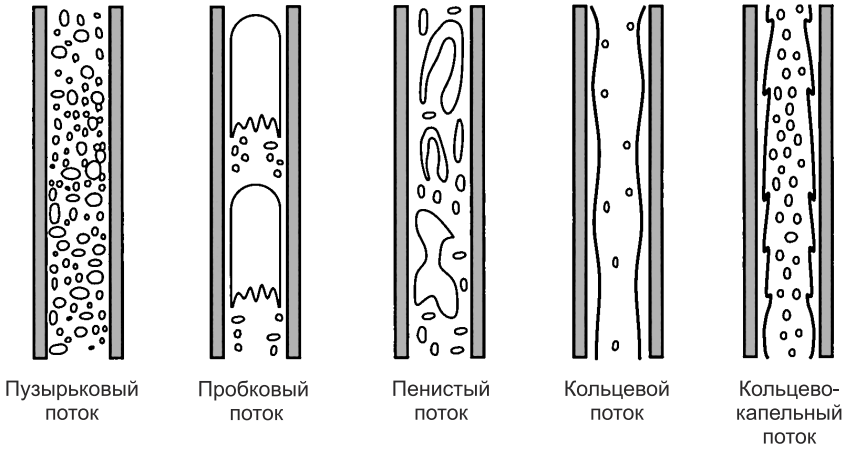


Рис. 9.2. Режимы течения в вертикальной трубе, с направленным вверх потоком

Границы между разными режимами потоков не резки и, частично имеют гистерезисный характер. У вертикальных потоков в трубе, к примеру, существенно влияют на переход между пробковым и пенистым потоком длина трубы и условия входа. Благодаря линейному увеличению приведенной скорости для смесей воздух — вода с параметрами свойств, которые учитывают плотность и поверхностное натяжение, Говье и Азиз 1972 и Мэндхэйм 1974 обобщили свои карты потоков на другие смеси газ–жидкость. Для этого они вводят отношение плотности между газом и воздухом ρ_G/ρ_{Luft}, жидкостью и водой ρ_L/ρ_{Wasser} и отношение поверхностного натяжения $\sigma/\sigma_{Luft/Wasser}$ для другого рода смесей и воздуха и воды. Они определяют:

$$Y = \left(\frac{\rho_L}{\rho_{Wasser}} \cdot \frac{\sigma_{Luft/Wasser}}{\sigma}\right)^{1/4}, \quad X = \left(\frac{\rho_G}{\rho_{luft}}\right)^{1/3} \cdot Y.$$

В качестве модифицированной приведенной скорости для другого рода смеси они подставляют $U_G^* = X \cdot U_{Luft}$ воздух и $U_L^* = Y \cdot U_{Wasser}$ вода.

Тейтель и Дуклер 1976 и Тейтель 1990 выводят карты режимов течения из чисто теоретических соображений. Они различают при этом три группы потоков, слоистые потоки гладкой или волнообразной формы, прерывистые потоки в форме потока с волной пропуска и пробкового потока и дисперсные потоки в форме пузырькового и капельно–кольцевого потока. Условие

для перехода от слоистого к прерывистому потоку они выводят из условия неустойчивости для солитона.

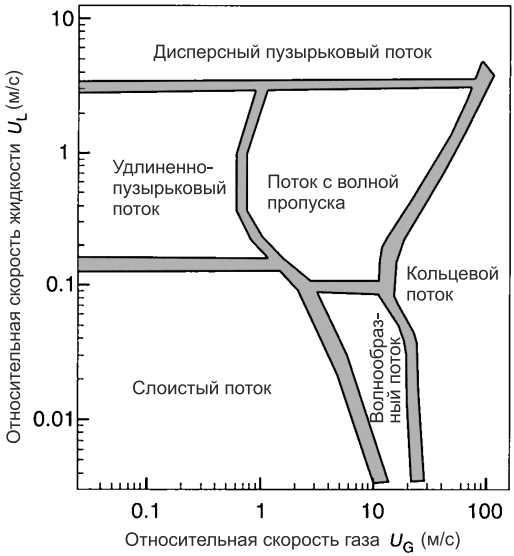


Рис. 9.3. Карта режимов течения по Мэндхэйму 1974 для горизонтального потока воздух–вода для испытательных данных; давление: 0,1 МПа, диаметр трубы: 2,5 см.

Пограничная кривая представлена модифицированным числом Фруда

$$F = \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G}} \cdot \frac{U_G}{\sqrt{D \cdot g \cdot \cos(\beta)}}$$

как функция параметра Мартинелли X. При этом β — это угол наклона трубы и D — диаметр. Переход от гладко слоистого к волнисто слоистому потоку определяется условием возникновения неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (глава 7.3.3). Его можно привести после нескольких упрощений к форме

$$K = \frac{U_G}{\sqrt{D \cdot g \cdot \cos(\beta)}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G}} \cdot \sqrt{\frac{U_L \cdot D}{\nu_L}} \gtrsim 20 \cdot \sqrt{\epsilon_L} \cdot \epsilon_G.$$

ν_L — это кинематическая вязкость жидкости. Для доли объема можно установить однозначную связь с параметром Мартинелли, так что пограничную кривую можно дать в форме $K(X)$.

Переход от кольцевого потока к прерывистому в не слишком сильно наклоненных трубах определяется минимально возможной долей жидкости в волне пропуска с проникшим в нее пузырем газа. Прерывистый поток с волной пропуска начинается по Тейтелю и Дуклеру для $\epsilon_L \gtrsim 0.24$. Это примерно соответствует значению $X \approx 1.6$ параметра Мартинелли. Состояние дисперсного пузырькового потока и прерывистого потока определяется турбулентным перемешиванием, силой тяжести, подъемом и слиянием пузырей. Интенсивность турбулентности в жидкой фазе определяется в основном падением давления в жидкой фазе. Тейтель и Дуклер вводят в качестве показателя отношение падения давления жидкой фазы и гидростатической подъемной силы пузырей в форме

$$T^2 = \left(\frac{dp}{dz}\right)_L \cdot \frac{1}{(\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot \cos(\beta)}$$

Переход между обеими зонами можно тогда отобразить как функцию T параметра Мартинелли X. Карта потоков по Тейтелю и Дуклеру после оценки функциональных зависимостей имеет форму, представленную на рисунке 9.4, причем каждая из пограничных кривых $K(X)$, $F(X)$ и $T(X)$ индивидуально соотносится с соответствующей ординатой.

Тейтель 1990 таким образом обобщил теорию границ зоны потоков, что можно классифицировать двухфазные потоки в трубах с любым углом наклона. Условия перехода при этом либо отображаются графически, либо могут быть определены точка за точкой с помощью вычислений.

Различные величины состояний и переменных двухфазного потока, а также их производные, такие, например, как градиент давления, доля объема, коэффициент теплоотдачи, существенно зависят от режима течения. Поэтому существует стремление разработать способы расчета для двухфазных потоков индивидуально для каждого характерного режима потока. Это сложная и обширная задача. Различные модели расчета можно тогда соединять друг с другом с помощью карт режимов течения или условий перехода, рассчитанных на ЭВМ, чтобы достаточно точно определить для технических систем, к примеру для парогенератора двухфазные состояния.

Относящиеся к этой проблеме расчеты двухфазных потоков до сегодняшнего дня не сделаны в удовлетворительной мере. Поэтому сегодня

еще для определенных, технически важных величин, таких как падение давления и тепловые потоки используется корреляция, которая была выведена на основе обширных экспериментальных данных. Эти закономерности двухфазных течений затрагиваются в следующих главах.

9.2. Модели потоков

Для разработки моделей часто бывает целесообразно подразделить двухфазные потоки по представлениям Тейтеля и Дуклера 1976 на три класса: а) сепарированные потоки, такие как слоистые, волнистые и кольцевые потоки, б) прерывистые или переходные потоки в форме удлиненных пузырьковых потоков, потоков с волной пропуска и пробковые (снарядные) потоки и в) дисперсные потоки, такие как пузырьковые, пенистые и капельные или туманные потоки. Для описания двухфазного потока преимущественно предпринимается механическое сложение величин состояния скорости, давления, и температуры в эйлеровской форме уравнения сохранения для массы, импульса и энергии. В обычном случае расчет осуществляется для каждой фазы по отдельности. Тогда для двухфазного потока говорят также о модели двух потоков. Это представление можно, в принципе, использовать и для описания потока с N течениями, это ведет к модели с N потоками. В общей форме это уже было представлено в главе 5.4. Здесь специально рассматривается одномерная форма двухжидкостной модели.

9.2.1. Одномерная двухжидкостная модель

Формальное представление одномерной двухжидкостной модели дано на примере расслоенного потока в трубе, как он уже был изображен на рисунке 9.1 в главе 9.1.2, но здесь он еще раз упрощенно повторяется на рисунке 9.5, чтобы объяснить некоторые специфические величины.

При выведении одномерных уравнений для двух жидкостей из общих основных уравнений для многофазных потоков делается несколько основополагающих предположений в связи с пространственным (здесь связанным с поперечным сечением) и временным осреднением.

а) При пространственном или временном осреднении производных величин состояния f и g обычно действительно $\langle f \cdot g \rangle = c \cdot \langle f \rangle \cdot \langle g \rangle$ или $\overline{f \cdot g^k} = c \cdot \overline{f^k} \cdot \overline{g^k}$. В самом простом представлении одномерной модели двух потоков полагается $c \equiv 1$.

б) Термодинамические уравнения состояния и основные уравнения для локальных величин справедливы для осредненных величин.

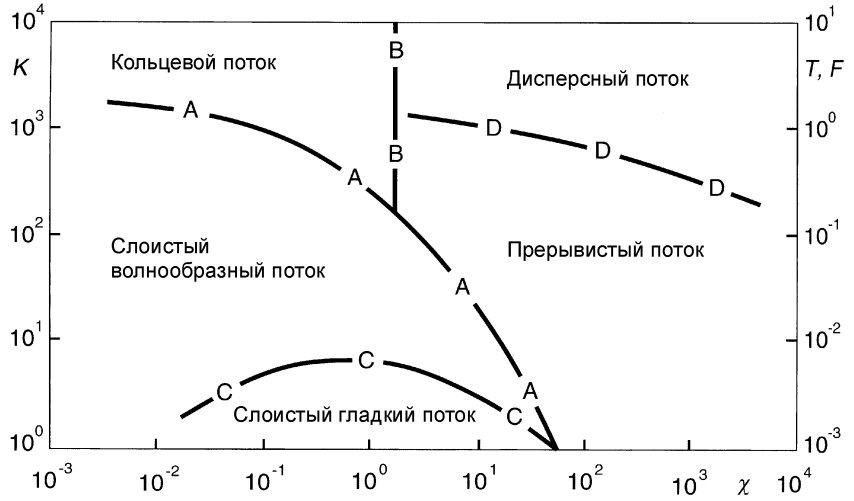


Рис. 9.4. Карта потоков в горизонтальной и слегка наклоненной трубе по Тейтелю и Дуклеру 1976 с показателями K, F и T как функция параметра Мартинелли X

в) Теплопроводностью и изменением касательного напряжения в направлении потока, а также мощностью диссипации сил трения в соответствующей фазе пренебрегается.

г) Предполагается локальное термодинамическое равновесие в каждой фазе. По отношению друг к другу фазы могут и не быть в термодинамическом равновесии.

д) В вертикальном двухфазном потоке давление по поперечному сечению трубы предполагается постоянным. Во многих случаях это приближенно справедливо также и для горизонтальных потоков.

е) Действием межфазных поверхностных напряжений можно на первом этапе пренебречь. Но оно часто учитывается при введении основных уравнений на завершающих этапах составления уравнений модели.

Для изображения одномерных уравнений баланса используются следующие обозначения для осредненных величин:

Переменные состояния:	u_G, u_L	Скорости
	p_G, p_L	Давления
	ρ_G, ρ_L	Плотности

	$\dot{m}_G = \rho_G \cdot u_G$	Плотность потока массы
	$\dot{m}_L = \rho_L \cdot u_L$	
	e_G, e_L	Удельная внутренняя энергия
	h_G, h_L	Удельная энтальпия
Основные переменные:	$\tau_{w,G}, \tau_{w,L}$	касательное напряжение на стенке
	$q_{w,G}, q_{w,L}$	Плотность теплового потока у стенки
	$\tau_{i,G}, \tau_{i,L}$	Касательные напряжения на пограничной поверхности фазы
	$q_{i,G}, q_{i,L}$	Плотность теплового потока на пограничной поверхности фазы
	Γ_G, Γ_L	Плотность массового источника на пограничной поверхности
	u_i	Скорость на пограничной поверхности фазы
	p_i	Давление на пограничной поверхности фаз
При фазовых переходах:	$M_G^{(\Gamma_G)}, M_L^{(\Gamma_L)}$	член источника импульса через обмен массы на пограничной поверхности фаз
	$L_{\tau,G}, L_{\tau,L}$	плотности источника мощности через касательные напряжения стенки на пограничной поверхности фазы
	$L_G^{(\Gamma_G)}, L_L^{(\Gamma_L)}$	плотности источника мощности через обмен массы на пограничной поверхности.

По причине локального равновесия действительны следующие отношения между основными переменными на пограничной поверхности:

$$\tau_{i,G} - \tau_{i,L} = 0,$$

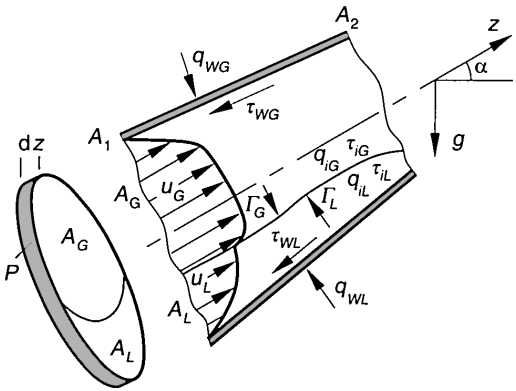


Рис. 9.5. Контрольный объем для сепарированного (расслоенного) двухфазного потока с обозначениями

$$q_{i,G} - q_{i,L} = 0,$$
$$M_G^{(\Gamma_G)} - M_L^{(\Gamma_L)} = 0,$$
$$L_G^{(\Gamma_G)} - L_L^{(\Gamma_L)} = 0.$$

Плотности источника импульса $M_G^{(\Gamma_G)}$ и $M_L^{(\Gamma_L)}$, а также плотности мощности можно и дальше обозначать по отдельности (см. Ishii 1975 и Delhaye et al 1981). Те части величин, которые основываются на обмене массы суммируются, как уже приводилось выше. Если все же поверхностные напряжения играют заметную роль, то в уравнениях равновесия появляются еще другие выражения, учитывающие поверхностное напряжение. Здесь эффекты поверхностного напряжения ради простоты не учитываются. Ввиду сделанных здесь предположений можно написать одномерные уравнения равновесия для модели двух потоков в следующей форме:

Масса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_G \cdot \epsilon \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_G \cdot \epsilon \cdot A) = \Gamma_G, \tag{9.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_L \cdot (1-\epsilon) \cdot A] + \frac{\partial}{\partial z}[\dot{m}_L \cdot (1-\epsilon) \cdot A] = \Gamma_L, \tag{9.15}$$

Импульс:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{m}_G \cdot \epsilon \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_G \cdot u_G \cdot \epsilon \cdot A) =$$

$$= -\epsilon \cdot A \cdot \frac{\partial}{\partial z} p_G - \tau_{w,G} \cdot P_G - \tau_{i,G} \cdot P_i - \epsilon \cdot A \cdot \rho_G \cdot g \cdot \sin(\alpha) + M_G^{(\Gamma_G)}, \tag{9.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{m}_L \cdot (1-\epsilon) \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_L \cdot (1-\epsilon) \cdot A \cdot u_L) = -(1-\epsilon) \cdot A \cdot \frac{\partial}{\partial z} p_L - \\ -\tau_{w,L} \cdot P_L - \tau_{i,L} \cdot P_i - (1-\epsilon) \cdot A \cdot \rho_L \cdot g \cdot \sin(\alpha) + M_L^{(\Gamma_L)}. \tag{9.17}$$

Здесь можно ввести предположение $p_L = p_G = p$.

Энергия:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_G \cdot E_G \cdot \epsilon \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\dot{m}_G \cdot (h_G + \frac{u_G^2}{2}) \cdot \epsilon \cdot A\right] = L_{\tau,G} + L_{g,G} + L_G^{(\Gamma_G)} + L_{q,G}. \tag{9.18}$$

Здесь $E_G = e_G + u_G^2/2$ — это полная энергии, h_G удельная энтальпия газа и в правой части уравнения приведены без специальных обозначений доли работы в единицу времени касательного напряжения, силы тяжести, обмена импульса через обмен массы между фазами и тепловых потоков. Соответственно для жидкой фазы получается:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_L \cdot E_L \cdot (1-\epsilon) \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\dot{m}_L \cdot (h_L + \frac{u_L^2}{2}) \cdot (1-\epsilon) \cdot A\right] = \\ = L_{\tau,L} + L_{g,L} + L_L^{(\Gamma_L)} + L_{q,L}. \tag{9.19}$$

Уравнения содержат для самого простого случая несжимаемого потока 6 переменных состояния u_G, u_L, e_G, e_L, p, ϵ. К этому присоединяется большое количество основных переменных, которые при детальном выведении уравнений импульса и энергии могут быть сокращены до следующих независимых переменных Γ, $(\tau_{w,G} \cdot P_G)$, $(\tau_{w,L} \cdot P_L)$, $(\tau_{i,G} \cdot P_G)$, $(q_{w,G} \cdot P_G)$, $(q_{w,L} \cdot P_L)$, $(q_{i,L} \cdot P_L)$ (ср. Yadigaroglou и Lahey 1976). Для основных переменных необходимо установить корреляции к величинам состояний на базе экспериментальных результатов или теоретических соображений, чтобы замкнуть уравнения равновесия и использовать их для решения проблем двухфазного потока. Корреляции модели для основных переменных необходимо при этом разработать соответственно для каждой из зон потока.

9.2.2. Смешанные модели

Модель двойного потока может быть упрощена, если по техническим основаниям интерес представляют только интегральные состояния двухфаз-

ного потока, такие как поток общей массы, общее падение давления и общая передача тепла. Тогда с помощью сложения соответственно двух уравнений равновесия для отдельных фаз получают три уравнения равновесия для общей массы, общего импульса и общей энергии смеси из двух фаз. Эти уравнения можно изобразить в форме, которая соответствует форме одномерных аэродинамических основных уравнений для сжимаемых сред, если ввести плотности смеси, касательное напряжение у стенки и тепловой поток у стенки в уравнение для смеси в качестве определяющих величин. Применяя общие определения из главы 9.1 и простые алгебраические преобразования, можно получить для двухфазной смеси следующие уравнения равновесия:

Масса:

$$\frac{\partial \rho_H}{\partial t} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{M}}{\partial z} = 0, \tag{9.20}$$

где

$$\rho_H = \epsilon \cdot \rho_G + (1 - \epsilon) \cdot \rho_L, \tag{9.21}$$

импульс:

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_I} \cdot \frac{\dot{M}^2}{A}\right) = -A \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \langle \tau_w \rangle \cdot P - A \cdot \rho_H \cdot g \cdot \sin(\alpha), \tag{9.22}$$

где

$$\frac{1}{\rho_I} = \frac{\chi^2}{\epsilon \cdot \rho_G} + \frac{(1-\chi)^2}{(1-\epsilon) \cdot \rho_L}, \quad \langle \tau_w \rangle = \tau_{w,G} \cdot P_G + \tau_{w,L} \cdot P_L, \tag{9.23}$$

энергия:

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\dot{M}\left(h + \frac{1}{\rho_E^2} \cdot \frac{\dot{M}^2}{2 \cdot A^2}\right)\right] = L_{\tau,w} + L_G + L_{q,w}, \tag{9.24}$$

с общей энтальпией $E = \rho_G \cdot E_G + \rho_L \cdot E_L$:

$$h = \chi \cdot h_G + (1 - \chi) \cdot h_L, \quad \frac{1}{\rho_E^2} = \frac{\chi^3}{\epsilon^2 \cdot \rho_G^2} + \frac{(1-\chi)^3}{(1-\epsilon)^2 \cdot \rho_L^2}. \tag{9.25}$$

Следует понять, что плотности отдельных фаз имеют разный удельный вес и, тем самым, разное влияние по сравнению с однофазными потоками. Можно использовать уравнения смеси для определения плотностей смеси, которые до сих пор применяются при оценке параметров двухфазного потока. Определения приведены ниже:

Определения плотности смеси, основанная на балансах смеси		
Масса:	$\rho_H = \epsilon \cdot \rho_H + (1-\epsilon) \cdot \rho_L$	гомогенная плотность
Импульс:	$\rho_I = \left(\frac{\chi^2}{\epsilon \cdot \rho_G} + \frac{(1-\chi)^2}{(1-\epsilon) \cdot \rho_L} \right)^{-1}$	плотность импульса
Энергия:	$\rho_E = \left(\frac{\chi^3}{\epsilon^2 \rho_G^2} + \frac{(1-\chi^3)}{(1-\epsilon)^2 \rho_L^2} \right)^{-2}$	плотность энергии.

Хотя модель смешанного потока благодаря сокращению числа уравнений стала проще, появляется новая проблема, то что доля объема ϵ с содержанием пара χ должна коррелироваться эмпирическим отношением, чтобы иметь возможность использовать упрощенную модель для решения рассматриваемой проблемы. Обычно ϵ с χ через отношение скорости $S = u_G/u_L$ объединяет фазы друг с другом (ср. уравнение 9.9). Поэтому для отношения скорости S пока также определяют эмпирические связи и вставляют $\epsilon(S, \chi)$ — в уравнения смеси.

Уравнения смеси по природе пригодны для прикладных расчетов, если имеются дисперсные режимы течения потоков, такие как пузырьковые и капельные потоки. Уравнения могут и дальше упрощаться, если предполагается механическое равновесие между фазами, т. е. если дисперсная фаза обладает такой же скоростью, как и, соответственно, гомогенная фаза. Упрощенную таким образом модель называют также гомогенной моделью потока. Она обладает из-за простоты особым значением и может с успехом применяться для двухфазных потоков с очень малой объемной долей дисперсной фазы. Предположив, что $S = 1$, можно получить однозначное отношение между ϵ и χ по уравнению (9.9). Оно гласит:

$$\epsilon_H = \frac{1}{1 + \frac{1-\chi}{\chi} \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L}}. \tag{9.26}$$

Индекс H указывает на гомогенную модель. Этим отношением сводятся все прочие определения плотности ρ_I и ρ_L после короткого алгебраического вычисления к выражению $\rho_H = \epsilon \cdot \rho_G + (1-\epsilon) \cdot \rho_L$ в балансе смеси, т. е. до $\rho_H = \rho_I = \rho_E$. Одномерная гомогенная модель потока представляется

поэтому уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_H + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial \dot{M}}{\partial z} = 0, \tag{9.27}$$

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_H}\cdot\frac{\dot{M}^2}{A}\right) = -A\cdot\frac{\partial p}{\partial z} - \bar{\tau}\cdot P - A\cdot\rho_H - g\cdot\sin(\alpha), \tag{9.28}$$

если фазы находятся в термодинамическом равновесии, а именно действует $T_G = T_L$. Гомогенная модель является самой простой из всех двухфазных моделей потоков. Ее можно расширить, применив к дисперсным потокам с процессами испарения и конденсации, не находящимся в термическом равновесии.

Механическое равновесие обычно не присуще дисперсным потокам с большей долей дисперсной фазы. Чтобы учесть такое состояние вещей и все же использовать для упрощения представление хорошего смешивания фаз, была разработана модель дрейфующего потока. В дальнейшем (ниже) она будет описана.

9.2.3. Модель дрейфа

Модель дрейфа была предложена Цубером и Финдли 1965 и основывается на основном представлении, что обе фазы хорошо между собой перемешаны, но при этом движутся относительно друг друга и, как правило, имеют различные термодинамические состояния. Область применения модели находится поэтому в первую очередь у дисперсных потоков, а именно пузырьковых, пенистых и капельных потоков. Но есть попытки расширить модель до пробковых и кольцевых потоков. Модель основывается на скорости смеси, зависящей от плотности:

$$u_M = \frac{\epsilon\cdot\rho_G\cdot u_G + (1-\epsilon)\cdot\rho_L\cdot u_L}{\epsilon\cdot\rho_G + (1-\epsilon)\cdot\rho_L} \tag{9.29}$$

и учитывает относительные скорости через так называемые скорости дрейфа, которые сначала локально вводятся следующим образом:

$$u_{G,U}^{(l)} = u_G^{(l)} - U^{(l)}, \tag{9.30}$$

$$u_{L,U}^{(l)} = u_L^{(l)} - U^{(l)}, \tag{9.31}$$

при этом $U^{(l)}$ — это локальная плотность потока всего объема, представленная приведенными локальными скоростями $U^{(l)} = u_G^{(l)} + u_L^{(l)}$. Из этих определений можно связать друг с другом благодаря осреднению по поперечному сечению средние значения доли объема $\langle\epsilon\rangle$, касательного потока всего объема $\langle U\rangle$ и еще не определенной средней скорости дрейфа. Это происходит через умножение отношения (9.30) на локальную долю объема ϵ и последующее осреднение по поперечному сечению. При этом следует обратить внимание, что как это приведено в главе 9.1, обычно действует $\langle\epsilon \cdot U\rangle = C_0 \cdot \langle\epsilon\rangle \cdot \langle U\rangle$. После некоторых алгебраических преобразований сначала получается соотношение:

$$\langle\epsilon \cdot u_{G,U}\rangle = \langle\epsilon \cdot U\rangle - C_0 \cdot \langle\epsilon\rangle \cdot \langle U\rangle \tag{9.32}$$

С определением $\bar{u}_{G,U} = \langle\epsilon \cdot U_{G,U}\rangle / \langle\epsilon\rangle$ в качестве дрейфовой и осредненной касательной скорости, зависящей от поперечного сечения, из уравнения (9.32) для доли газового объема, осредненной по поперечному сечению, получается

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{U_G}{C_0 \cdot U + \bar{u}_{G,U}}. \tag{9.33}$$

Для определения средней скорости дрейфа теперь вводятся величины, зависящие от объема $\bar{u}_{G,U}$ и $\bar{u}_G = \langle\epsilon \cdot u_G\rangle / \langle\epsilon\rangle$. Для представления в уравнениях равновесия используются соотношения

$$\bar{u}_{G,U} = \bar{u}_G - U, \quad \bar{u}_{L,U} = \bar{u}_L = U. \tag{9.34}$$

Для упрощения способа написания ниже снова опускаются символы осреднения «–». Дрейфовая скорость тем самым понимается как скорость фазы относительно плоскости, двигающейся со скоростью смеси U. С помощью отношения для скорости смеси $U = \epsilon \cdot u_G + (1 - \epsilon) \cdot u_L$ можно вывести отношение дрейфовой и относительной скоростей фаз друг к другу. Это будет:

$$u_{G,U} = (1 - \epsilon) \cdot (u_G - u_L), \quad u_{L,U} = \epsilon \cdot (u_G - u_L). \tag{9.35}$$

Из этого соотношения и определения (9.29) следует зависимость между u_G, u_M и $u_{g,U}$ в форме:

$$u_G = u_M + \frac{\rho_L}{\rho_H} \cdot u_{G,U}, \quad u_L = u_M - \frac{\rho_L}{\rho_H} \cdot \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \cdot u_{G,U}. \tag{9.36}$$

Соответствующие соотношения соединяют u_G и u_L с u_M и $u_{L,U}$. Если в уравнение равновесия для смесей вставить выражения (9.36) и если уравнение равновесия газовой фазы остается для описания фазового перехода, то после некоторых алгебраических преобразований получаются четыре уравнения равновесия величин состояния — средней скорости, u_M давления p, средней энтальпии h_M и объемной доли ϵ.

Уравнения имеют форму:

Для массы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_H + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\rho_H \cdot u_M \cdot A) = 0, \tag{9.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\cdot\rho_G) + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\epsilon\cdot A\cdot\rho_G\cdot u_M) + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\epsilon\cdot A\cdot\frac{\rho_G\cdot\rho_L}{\rho_H}\cdot u_{G,U}) = \frac{\Gamma_G}{A}, \tag{9.38}$$

Для импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_H\cdot u_M) + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(A\cdot\rho_H\cdot u_M^2) + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(A\cdot\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\cdot\frac{\rho_G\cdot\rho_L}{\rho_H}\cdot u_{G,U}^2) = \\ = \frac{\partial p}{\partial z} - \tau_w\cdot\frac{P}{A} - \rho_H\cdot g\cdot\sin(\alpha). \tag{9.39}$$

После некоторых других преобразований с помощью уравнений равновесия импульса отдельных фаз, для энергии следует:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_H\cdot u_M) + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(A\cdot\rho_H\cdot h_M\cdot u_M) = \\ = \frac{1}{A}\cdot(q_{w,G}\cdot P_G + q_{w,L}\cdot P_L) + \frac{\partial p}{\partial t} + u_M\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + u_{G,U}\cdot\frac{\rho_L-\rho_G}{\rho_H}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(A\cdot\frac{\epsilon\cdot\rho_L\cdot\rho_G}{\rho_H}\cdot u_{G,U}\cdot\Delta h_{LG}\right) + \frac{1}{A}\cdot L_{diss}. \tag{9.40}$$

Здесь h_M — это осредненная по плотности энтальпия. Она определена как:

$$h_M = \frac{\epsilon\cdot\rho_G\cdot h_G + (1-\epsilon)\cdot\rho_L\cdot h_L}{\epsilon\cdot\rho_G + (1-\epsilon)\cdot\rho_L}. \tag{9.41}$$

Δh_{LG} — это теплота испарения при фазовых переходах. Успешное применение простой модели дрейфа существенно зависит от того, можно ли для скорости дрейфа разработать основные замыкающие соотношения.

9.2.4. Пузыри и капли

Движение пузырей и капель в подвижной жидкости или газе является основным элементом моделирования двухфазных потоков и представления скорости дрейфа. По этому вопросу были проведены обширные исследования, которые подробно представлены в книге Клифта, Грейса и Вебера 1978. Эвристическое рассмотрение показывает, что относительная скорость пузырей и капель в непрерывном спектре зависит от вида взаимодействия между фазами, их взаимодействия с границами и от влияния сил поля, например, силы тяжести. Такое положение дел можно выразить следующей функциональной зависимостью:

$$u_\tau = u_G - u_L = f\left(\frac{\mu_G}{\mu_L}, \frac{\rho_G}{\rho_L}, \sigma, \epsilon, \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_L} \cdot g, \frac{D_B}{d}\right). \tag{9.42}$$

Здесь μ_G и μ_L — это вязкость газа и жидкости, ρ_G и ρ_L — их плотности, σ — поверхностное натяжение, g земное ускорение, D_B — диаметр пузыря или капли и d — представленный размер емкости (сосуда).

Нижеприведенные высказывания будут относиться к поведению пузырей. С определенными модификациями они применимы также для капель.

В квазистационарных дисперсных потоках часто можно пренебречь действием ускоряющих сил на отдельный пузырь. Равновесная скорость u_∞ отдельного пузыря в сплошной среде определяется тогда равновесием сил сопротивления и силы поля. В случае подъемной силы действительно:

$$u_\infty^2 = \frac{4 \cdot (\rho_L - \rho_G) \cdot g}{3 \cdot \rho_L} \cdot \frac{D_B}{c_w}. \tag{9.43}$$

Здесь c_w — это коэффициент сопротивления в определении $c_w = W/(0{,}5 \cdot \rho_G \cdot u_\infty^2 \cdot A)$ в качестве силы сопротивления и A в качестве площади поперечного сечения шара с объемом, эквивалентным объему пузыря. Эквивалентный радиус пузыря получается из отношения $D_B = 2 \cdot (3/(4 \cdot \pi) \cdot V_B)^{1/3}$ с V_B в качестве объема пузыря. Введение эквивалентного радиуса пузыря дает возможность рассматривать также деформированные пузыри и приписывать им коэффициент сопротивления из измерений на обтекаемом твердом шаре. Изменение формы пузырей под влиянием относительного движения может ведь быть таким большим, что сравнение с подвижным твердым шаром дает неверные результаты. Поэтому во многих экспериментах скорость подъема отдельного пузыря измерялась в поле

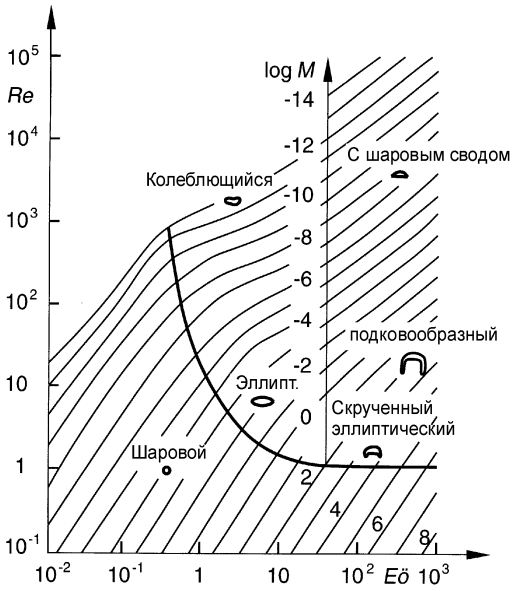


Рис. 9.6. Форма поднимающихся пузырей в жидкости, Клифт 1978.

тяжести, причем в особенности исследовалась в качестве дополнительного фактора форма пузыря. Клифт, Грейс и Вебер 1978 представили результаты, упорядоченные по безразмерному показателю. При этом они вводят следующие показатели пузырей:

$$Re_B = \frac{u_\infty \cdot D_B \cdot \rho_L}{\mu_L} \qquad \textit{число Рейнольдса,}$$

$$Eö_B = \frac{g \cdot (\rho_L - \rho_G) \cdot D_B^2}{\sigma} \qquad \textit{число Этвоса,}$$

$$Mo_B = \frac{g \cdot \mu_L^4 \cdot (\rho_L - \rho_G)}{\rho_L^2 \cdot \sigma^3} \qquad \textit{число Мортона.}$$

Здесь число Этвоса описывает взаимодействие между силами тяжести и капиллярными силами, в то время как число Мортона соединяет в определенной мере силы текучести, капиллярные, и тяжести. График представлен на рисунке 9.6. Он делает возможным определение равновесной скорости u_∞ в зависимости от всех других параметров влияния, встреча-

ющихся в показателях, и дает дополнительно заключение о форме пузыря. Для наглядности некоторые экспериментально наблюдаемые формы пузырей представлены на рисунке 9.7.

Влияние границ и соседних пузырей на равновесную скорость u_B отдельного пузыря часто моделируется с помощью степенного ряда по величинам влияния $\epsilon, 1-\epsilon, D_B/d$ в форме

$$u_B = u_\infty \left(1 + \alpha \cdot \frac{D_B}{d}\right)^m \cdot (1-\epsilon)^n \cdot \epsilon^p \tag{9.44}$$

(см. Коллинз 1967, Валлис 1969), причем параметры α, m, n и p определяются из экспериментов. Коллинз, например, корреллирует скорость подъема отдельного пузыря в вертикальной трубе с диаметром d:

$$u_B = u_\infty \left(1 + \alpha \cdot \frac{D_B}{d}\right)^{-1}$$

с $\alpha = 1.6$ для деформируемых пузырей газа и $\alpha = 2.4$ для шарообразных газовых пузырей.

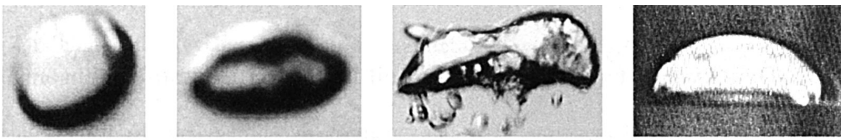


Рис. 9.7. Различные наблюдаемые формы пузырей в зависимости от объема пузыря и числа Рейнольдса (пузыря)

Валлис 1969 дает основное отношение для скорости дрейфа $u_{G,U}$ как функции равновесной скорости и доли объема газа в форме

$$u_{G,U} = u_\infty \cdot (1-\epsilon)^n.$$

Он устанавливает показатель n с помощью экспериментальных данных Пиблеса и Гарбера 1953 для различных форм пузырей и чисел Рейнольдса (пузырей). Ниже приведены примеры результатов его исследований скорости подъема для отдельных пузырей.

u_∞	n	Зона действенности	форма пузыря
$\frac{D_B^2 \cdot (\rho_L - \rho_G) \cdot g}{18 \cdot \mu_L}$	2	$Re_B < 2$	Неподвижный шаровой пузырь
$0{,}33 \cdot \frac{2\nu_L}{D_B} \cdot \left(\frac{g \cdot D_B^3}{8 \cdot \nu^2}\right)^{0{,}76}$	1,75	$2 < Re_B < 4{,}02 \cdot G_1^{-0{,}214}$	Шаровой пузырь с внутренним потоком
$1{,}18 \cdot \left(\frac{g \cdot \sigma}{\rho_L}\right)^{0{,}25}$	1,5	$3{,}10 \cdot G_1^{-0{,}25} < Re_B,\ 5{,}75 < G_2$	Колеблющийся (вибрирующий) эллиптический пузырь
$1{,}00 \cdot \sqrt{g \cdot D_B}$	$0<n<1$	$\sqrt{\frac{g \cdot \rho_L \cdot D_B^2}{\sigma}} > 4$	Пузырь с шаровым сводом (шапкой)

При этом для числа Галилея G_1 определяется как:

$$G_1 = \frac{g \cdot \mu_L^4}{\rho_L \cdot \sigma^3} \tag{9.45}$$

и для G_2:

$$G_2 = \frac{1}{16} \cdot G_1 \cdot Re_B^4 = \frac{g \cdot u_\infty^4 \cdot \rho_L^4 \cdot D_B^4}{16 \cdot \sigma^3}$$

Представлением скорости дрейфа для различных форм пузыря по Валлису 1969 модель дрейфа для дисперсных двухфазных потоков в основном замыкается.

Цубер и Финдли 1965 и Ishii 1977 попытались использовать модель дрейфа на других формах потока, таких как пробковый, кольцевой и турбулентный пенистый поток. В их работах находятся данные о важных основных параметрах.

9.3. Потери давления и объемная доля в компонентах гидравлики

Потери давления в двухфазных потоках имеют большое значение в технологии электростанций. Поэтому разрабатывались надежные эмпирические формулы для расчета потерь давления, подобно гидравлике однофазного потока, на основе измерений и простых представлений модели,

которые не делают различий между специфическими режимами потоков. Все же представление дисперсного потока с одной стороны, и представление двухфазного потока с другой стороны, привели к двум различным вариантам соотношений потерь давления.

Общее потери давления на участке трубы или линии (трубопровода) состоят обычно из потерь, обусловленных трением, ускорением и силой тяжести. В символическом виде это представляется:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{ges} = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{f} + \left(\frac{dp}{dz}\right)_{a} + \left(\frac{dp}{dz}\right)_{g}, \tag{9.46}$$

с обозначением f для давления, a — для ускорения и g — для гравитации. В то время когда на горизонтальном участке прямой трубы постоянного поперечного сечения действует только составляющая трения, в суженных или расширенных элементах, таких как клапаны или отводы (колена) часто преобладает составляющая ускорения, подобно однофазному потоку, но все же выраженная явно сильнее. Вначале рассмотрим падение давления на горизонтальном участке прямой трубы.

9.3.1. Потеря давления за счет трения в горизонтальных прямых трубах. Гомогенная модель

Если предположить постоянное поперечное сечение трубы и горизонтальное расположение трубы, то получится представление, как при однофазном потоке:

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_{f} = -\tau_w \cdot \frac{4}{d}, \quad \tau_w = \frac{1}{4} \cdot c_{f,2Ph} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{\rho_H} \tag{9.47}$$

с d в качестве гидравлического диаметра, $c_{f,2Ph}$ — в качестве коэффициента трения двухфазного потока и гомогенной плотностью ρ_H. Коэффициент трения понимается как функция определяемого числа Рейнольдса двухфазного потока. Часто известные соотношения для коэффициента трения переносятся из однофазного потока, например закон Стокса на ламинарный, а закон Блазиуса — на турбулентный поток. В зависимости от режима течения можно выбрать коэффициент трения. Для кольцевого-капельного потока выбирается значение для шероховатой стенки трубы $c_{f,2Ph} \simeq 0{,}02$. Если доля объема газа велика, то есть действительно $\epsilon \gg 1$ можно выбрать однофазное значение $c_f = c_{f,G}$ или, если действует $\epsilon \ll 1$, то следует выбрать

$c_f = c_{f,L}$, причем в числе Рейнольдса можно выбрать вязкость газа или жидкости. Часто опираясь на классическое явное отношение Прандтля, используется для однофазного, полностью турбулентного потока следующее соотношение:

$$\frac{1}{4} \cdot c_{f,2Ph} = 0.0014 + 0.125 \cdot Re_{2Ph}^{-0,32}. \tag{9.48}$$

Для оопределения числа Рейнольдса применяется общая плотность потока (массы) и общая вязкость. Простейшие соотношения для удельной вязкости — это:

$$\begin{aligned} \mu_{2Ph} &= \frac{U_G}{U} \cdot \mu_G + \frac{U_L}{U} \cdot \mu_L, \\ \mu_{2Ph} &= \chi \cdot \mu_G + (1 - \chi) \cdot \mu_L, \end{aligned} \tag{9.49}$$

Для конденсирующихся смесей, таких как вода и водный пар, для практических расчетов часто используется также так называемый двухфазный мультипликатор (множитель). Этот мультипликатор определяется как отношение между падением давления в реальном двухфазном потоке с массой потока $\dot{M}$ и падением давления конденсированного жидкого потока при одинаковом сечении трубы и одинаковой массе потока:

$$\Phi_{L0}^2 = \frac{(\frac{dp}{dz})_{2Ph}}{(\frac{dp}{dz})_{L0}}. \tag{9.50}$$

Индекс $L0$ указывает, что для сравнения выбирается падение давления чисто жидкого потока одинаковой, как в двухфазном потоке, массы. Задаются корреляции, которые, в основном, являются функцией газожидкостных свойств и содержания пара и, таким образом, имеют форму $\Phi_{L0}^2 = f(\mu_G/\mu_L, \rho_G/\rho_L, \chi)$. Идзинга и др. 1977 дают это соотношение в форме:

$$\Phi_{L0}^2 = \frac{\rho_L}{\rho_H} \cdot \left[1 + \chi \cdot \left(\frac{\rho_L - \rho_H}{\rho_G}\right)\right]. \tag{9.51}$$

Оно действительно для потоков с очень малой долей объема газа $\epsilon \ll 1$, для которых можно принять $\mu_{2Ph} = \mu_L$. Похожие соотношения получаются, если используются другие закономерности для вязкости смеси.

Модель расслоенного течения

Модель расслоенного (сепарированного) течения исходит из представления, что обе фазы текут в двух отдельных зонах трубы, как например, при

слоистом или кольцевом потоке, но что все же в обеих фазах имеется равновесие давления. Падение общего давления описывается тогда уравнением импульса для двухфазной смеси по уравнению (9.22). Для горизонтальной трубы постоянного поперечного сечения для стационарных потоков следует:

$$-\frac{dp}{dz} = \langle \tau_w \rangle \cdot \frac{P}{A} + \frac{\dot{M}}{A^2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{\chi^2}{\epsilon \cdot \rho_G} + \frac{(1-\chi)^2}{(1-\epsilon) \cdot \rho_L} \right). \tag{9.52}$$

Для случая, когда на границах трубы не подводится тепло, вдоль трубы не изменяются χ и ϵ. Тогда касательные напряжения на стенке находятся в равновесии с силой давления. Локхардт и Мартинелли 1947 вводят здесь двухфазные множители таким образом, что они представляют отношение падения давления в двухфазном потоке к падению давления газовой или жидкой фазы, которая течет по трубе в одиночку. Мультипликаторы по Локхарду и Мартинелли определяются следующим образом:

$$\Phi_G^2 = \frac{(\frac{dp}{dz})_{2Ph}}{(\frac{dp}{dz})_G}, \quad \Phi_L^2 = \frac{(\frac{dp}{dz})_{2Ph}}{(\frac{dp}{dz})_L}. \tag{9.53}$$

На основе этих данных авторы связывают эти мультипликаторы с параметром Мартинелли, т. е. с динамическим падением давления. Параметр Мартинелли уже определялся в главе 9.2.1 в уравнении (9.13). Его можно вычислить, если известны приведенная скорость двухфазного потока и его ламинарное или турбулентное состояние движения. Турбулентные состояния определяются при этом числом Рейнольдса газового или жидкого потока.

Для $Re_{G,L} > 2000$ предполагается турбулентное состояние, для $Re_{G,L} < 2000$- предполагается ламинарный поток. В соответствии с этим имеется четыре возможных формы параметра Мартинелли, в зависимости от того, протекают газовые и жидкие фазы ламинарно или турбулентно. Зависимость в классическом изображении по Локхарду и Мартинелли 1947 даны на рисунке 9.8. Аналитическое представление графов было дано Чизхольмом 1967. Он дает соотношения

$$\Phi_g^2 = 1 + C \cdot \chi + \chi^2, \quad \Phi_L^2 = 1 + \frac{C}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}, \tag{9.54}$$

причем параметр C принимает значения 20, 12, 10 и 5 для этих четырех случаев, и 20 определяет двукратно турбулентный, а 5 — двукратно ламинарный случай.

Соотношение потери давления Локхарта и Мартинелли ограничено экспериментальными данными по давлению в системе $(p < 0.4MPa)$ и диаметром трубы $d < 3 \cdot 10^{-2}$ м. Поэтому прикладные вычисления имеют относительно низкую ненадежности порядка до 40% и выше. Но все же соотношение отличается простотой и поэтому охотно используется для первых расчетных прикидок.

Мартинелли и Нельсон 1948 расширили корреляцию давления Локхарда и Мартинелли на потоки с более высоким, вплоть до критического, давлением в системе. Они представляют двухфазный мультипликатор в форме Φ_{L0}, касающейся однофазного жидкого потока (см. уравнение (9.50)) как функцию содержания пара χ. Это отношение хорошо себя зарекомендовало при вычислениях потерь давления в пароводяных потоках. Для более точных расчетов Чизхольмом 1973 и Фриделем 1979 были разработаны эмпирические корреляции потери давления, которые основываются на большей базе данных (20000 точек замеров) и учитывают другие специфические зависимости от плотности общей массы двухфазного потока (число Рейнольдса), поверхностного натяжения (число Вебера) и от силы тяжести (число Фруда). Они представляют собой комплексные функциональные взаимосвязи между безразмерными, охватывающими физические взаимосвязи показателями. К примеру здесь приводится корреляция Фриделя. Фридель выбирает для представления двухфазный мультипликатор формы (9.50) в зависимости от различных показателей.

Его корреляции дают:

$$\Phi_{L0}^2 = E + \frac{3.24 \cdot F \cdot H}{Fr^{0.045} \cdot We^{0.035}}, \tag{9.55}$$

с выражениями

$$E = (1-\chi)^2 + \chi^2 \cdot \frac{\rho_L}{\rho_G} \cdot \frac{c_{f,G0}}{c_{f.L0}},$$

$$F = \chi^{0.78} \cdot (1-\chi)^{0.24},$$

$$H = (\frac{\rho_L}{\rho_G})^{0.91} \cdot (\frac{\mu_G}{\mu_L})^{0.19} \cdot (1 - \frac{\mu_G}{\mu_L})^{0.7},$$

$$Fr = \frac{\dot{m}^2}{g \cdot D \cdot \rho_H^2}, \quad We = \frac{\dot{m}^2 \cdot D}{\rho_H \cdot \sigma}.$$

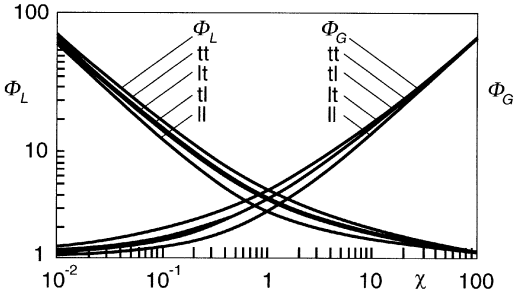


Рис. 9.8. Корреляции по Локхарду и Мартинелли 1947, tt обе фазы турбулентны, lt жидкость ламинарная, газ турбулентный, ll обе фазы ламинарны, tl жидкость турбулентна, газ ламинарен.

Для областей применения различных эмпирических отношений потери давления Валлей и др.1981 дают рекомендации на основе обширных сравнительных расчетов.

Корреляции для объемной доли

Такое же значение, как расчет падения давления, имеет количественная оценка объемной доли двухфазного потока. Независимо от возможности вычислить их по модели двух потоков, для этих величин раньше разрабатывались модели и корреляции на экспериментальной базе данных. В рамках модели дрейфа доля объема сводилась к коэффициенту корреляции C_0, скорости дрейфа $u_{G,U}$, и относительной скорости, уравнение (9.32), причем C_0 и $u_{G,U}$ устанавливаются в соответствии с режимом потока из экспериментов и физических закономерностей.

Локхард и Мартинелли 1947 разработали в связи с их измерениями падения давления, независимо от режимов потока, эмпирическую корреляцию для объемной доли.

Она изображена на рисунке 9.9 графически. Чизхольм 1967 дает для нее простое алгебраическое отношение для аппроксимирующей кривой измерительных данных в форме:

$$1 - \epsilon = \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + 20 \cdot + 1}}. \tag{9.56}$$

Премоли и др. 1970 вывел корреляцию (названную CISE Correlation) для ϵ,

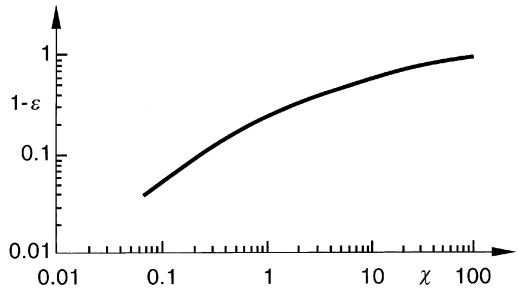


Рис. 9.9. Доля объема жидкости по Локхарду и Мартинелли 1947.

которая сводится к эмпирическому соотношению для отношения скорости $S = u_G/u_L$. По уравнению (9.9) ϵ можно представить в форме

$$\epsilon = \frac{1}{1 + S \cdot \frac{1-\chi}{\chi} \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L}}. \tag{9.57}$$

Премоли дает следующее эмпирическое отношение для отношения скорости:

$$S = 1 + E_1 \cdot \sqrt{\frac{Y}{1 + Y \cdot E_2} - Y \cdot E_2}, \tag{9.58}$$

с выражениями

$$Y = \frac{\dot{V}_G}{\dot{V}_L},$$

$$E_1 = 1.57 \cdot Re^{-0.19} (\frac{\rho_L}{\rho_G})^{0.22},$$

$$E_2 = 0.0273 \cdot We \cdot Re^{-0.15} (\frac{\rho_L}{\rho_G})^{-0.08},$$

$$Re = \frac{\dot{m} \cdot d}{\mu_L}, \quad We = \frac{\dot{m}^2 \cdot d}{\rho_L \cdot \sigma}.$$

Здесь $\dot{V}_G$ и $\dot{V}_L$ — это объемные потоки фаз. Корреляция разработана также независимо от режимов потока из большого количества точек измерений. Дополнительно здесь следует упомянуть, комплексное отношение Чексаль

и др. 1986, которое было разработано по представлениям модели дрейфа и может применяться на реверсивных двухфазных потоках. Здесь, из-за более сложной формы, мы откажемся от представления выражений.

9.3.2. Потери давления на ускорение

Потери давления на ускорение в расширениях и сужениях трубопровода, коленах трубы и отводах трубы появляются сильнее, по сравнению с однофазным потоком. Для целей расчета в аппаратостроении соотношения для потерь давления даны по аналогии с соответствующими соотношениями в однофазном потоке, пренебрегая трением на стенке. Так как при расширении поперечного сечения в принципе происходит замедление, при двухфазном потоке следует считаться с разделением (расслоением) фаз. Поэтому представляется возможным, использовать для расчетов изменения давления модель сепарированного потока в форме уравнений равновесия смеси. Из уравнений равновесия для двухфазной смеси сепаратной модели можно, пренебрегая трением на стенке, легко получить соотношение для восстановления давления в диффузоре Карно.

Для контрольного объема, изображенного на рисунке 9.10, по Роми 1958 получается выражение:

$$p_2 - p_1 = \dot{m}_1^2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{(\rho_I)_1} - \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{1}{(\rho_I)_2} \right), \tag{9.59}$$

где $(\rho_I)_{1,2}$ — определенная уравнением (9.23) плотность. Если перейти к однофазному потоку, т. е. выбрать $\chi = 0$ или $\chi = 1$, то определенная здесь плотность переходит в плотность однофазного потока; то же самое происходит с выражением для восстановления давления. Естественно, это выражение можно вычислить только тогда, когда можно связать друг с другом долю объема и содержание пара в интервале между 1 и 2. При низких давлениях в системе, если действует $p \ll p_{krit}$ и из-за испарения не наступает фазовых переходов, доля объема газа ϵ и содержание пара χ практически не изменяется (ср. Ричардсон 1958, Веласко 1975). В этом случае очевидна аналогия с однофазным потоком, так как справедливо $p_{I1} \equiv p_{I2}$. Наблюдения показывают, что вниз по течению равновесие двухфазного потока достигается лишь после относительно длинных участков пути, примерно 30–70 диаметров трубы. Такое положение дел требует при более точных расчетах зависимой от давления корреляции для изменения содержания пара (ср. Патрик и Свансон 1950). При парожидкостных потоках с фазовыми

переходами используются эмпирические связи между долей объема ϵ и содержанием пара χ (Вайсман и др. 1976).

При сужениях трубы появляется ускорение двухфазного потока, которое ведет к улучшенному смешиванию, поэтому здесь можно выполнить с хорошим приближением расчет потери давления по гомогенной модели потока. Так как для гомогенной модели действительна закономерность однофазного потока, с гомогенной плотностью в качестве единственного характерного признака, получается известное соотношение однофазного потока, которое может быть легко подтверждено с помощью схематического изображения структуры потока на рисунке 9.11. Это:

$$p_2 - p_1 = \frac{\dot{m}_2^2}{2 \cdot \rho_H} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_c} - 1 \right)^2 \right], \tag{9.60}$$

где $\sigma_c = A_c/A_2$ в качестве коэффициента сужения. При этом для σ_c используются значения однофазного потока по Ариеру 1913. Обе доли в квадратных скобках можно идентифицировать как обратимую и необратимую долю в потере давления.

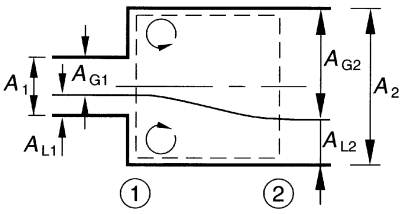


Рис. 9.10. Расслоенный (сепарированный) поток в диффузоре Карно

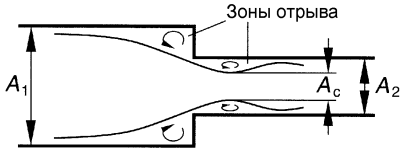


Рис. 9.11. Поток через сужение трубы

Коэффициент сужения отражает локальное сужение потока как следствие отрыва потока на кромке (см. рис. 9.11).

В колене трубы при более высоких скоростях на внутренней стороне, также появляется отрыв, который вызывает при двухфазных потоках расслоение, обусловленное центробежными силами. Эффект изображен на рисунке 9.12. Газовая фаза собирается на внутренней стороне, в то время как жидкость течет во внешней зоне колена. Дисперсные потоки становятся на время расслоенными потоками. Новое, соответствующее условиям впуска равновесие между фазами устанавливается только после 30–70 диаметров трубы. Это значит, что при расчетах в аппаратостроении можно лишь редко исходить из полностью стабилизированных потоков. Соотношения для падения давления в коленах трубы разрабатывались среди других также Чизхольмом 1967 на основе эмпирических двухфазных мультипликаторов.

Поведение двухфазных потоков в отводах трубы определяется в основном углом отвода и направлением отвода и положением по отношению к вектору гравитации. При несимметричной ориентации выпуска и отвода к впуску или к вектору гравитации происходит фазовое перераспределение, которое может привести в особых случаях к полной сепарации фаз. При этом газовая фаза из-за силы инерции следует по более искривленным путям. Эта тенденция может усиливаться или компенсироваться в зависимости от ориентации направления отвода к вектору гравитации. Этот феномен расслоения схематически представлен графиком рисунка 9.13 на примере колена с горизонтальным впуском и выпуском, но по-разному ориентированным отводом.

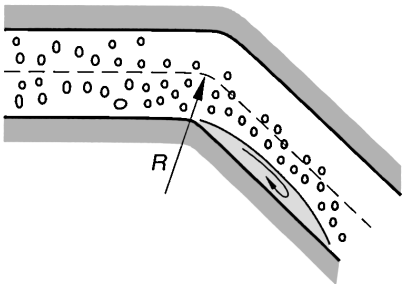


Рис. 9.12. Отрыв потока и сепарация фаз в коленах (изгибах) трубы

Перераспределение фаз определяется при этом отношением содержания пара χ_3 в отводе к содержанию пара на входе χ_1 через отношение

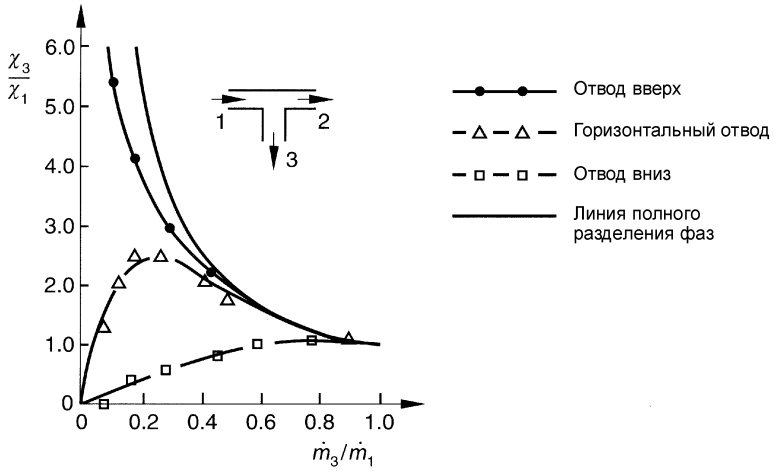


Рис. 9.13. Перераспределение фаз в T-образном отводе с различной ориентацией к вектору гравитации

плотности массы потока $\dot{m}_3/\dot{m}_1$, а именно для трех видов ориентации отвода к вектору гравитации: против, по направлению и перпендикулярно силе тяжести.

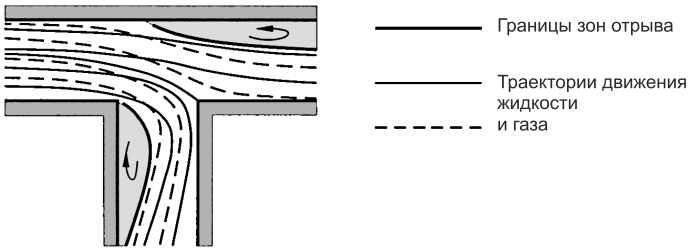


Рис. 9.14. Схематичное изображение перераспределения фаз в Т-образной детали. Представлено псевдолиниями потока и отмеченными зонами срыва

График показывает, что практически полная сепарация фаз наступает при вертикальном, направленном вверх отводе. При горизонтальном отводе

газовая фаза сильнее аккумулируется в отводе практически во всей зоне параметра $\dot{m}_3/\dot{m}_1$, а именно с максимумом при $\dot{m}_3/\dot{m}_1 \sim 0.25$. При отводе вниз сила тяжести воздействует так, что жидкость при малых массах потока в отводе следует за отводом. Лишь если доминируют инерционные силы более плотной фазы по сравнению с силой тяжести, это бывает при $\dot{m}_3/\dot{m}_1 \sim 0.6$, то содержание пара в отводе больше, чем на входе, т. е. газ аккумулируется в отводе. Изменение давления в разветвлении от входа до выхода аналогично изменению давления в диффузоре. От входа до отвода появляется ускорение потока, как при сужении поперечного сечения. Это находится в качественном соответствии с наблюдениями при однофазном потоке. В Т-образных отводах наблюдаются явно выраженные зоны отрыва, которые ведут к локальному сужению поперечного сечения активного двухфазного потока. На это указывает изображение рисунка 9.14. Часто по причине визуальных наблюдений вводится псевдоразделительная линия для маркировки проходящей мимо отводов и идущей в отводы массы потока. С этим предположением проводятся расчеты потери давления для каждой части потока по типу сепаратной или гомогенной модели двухфазного потока. При этом учитываются параметры адаптации в корреляции давления, установленные с помощью экспериментальных данных. В двухфазном потоке абсолютные изменения давления заметно больше. Пример такого поведения показан на рисунке 9.15. Другие подробности по двухфазным потокам в отводах трубы собраны Аззопарди и Хервью 1994.

9.4. Скорость распространения волн плотности и критические потоки массы

9.4.1. Волны плотности

При истечении двухфазной смеси из резервуара под давлением через узкое поперечное сечение при превышении определенной критической разницы давлений в резервуаре и окружающей среде $p_1 - p_0$, происходит ограничение потока массы. Дальнейшее понижение давления окружающей среды ведет к последующему небольшому увеличению потока массы. Аналогичный феномен можно наблюдать у сжимаемого потока. Сжимаемый поток в сопле Лаваля является классическим примером ограничения потока массы как следствие сжимаемого газа. Физическая причина этого явления в обоих случаях одна и та же. При привышении критической разницы

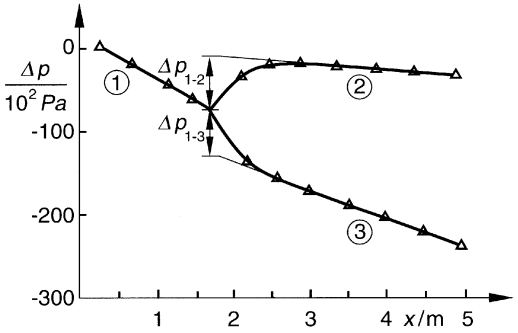


Рис. 9.15. Вариации давления в Т — образном отводе, 1 — впуск, 2 — выпуск, 3 — отвод. Отвод имеет горизонтальное направление. Действительны следующие контрольные измерительные величины: $p_1 = 0{,}6$ Па, $U_{L1} = 1{,}5$ м/с, $U_{G1} = 14{,}5$ м/с, $\dot{m}_3/\dot{m}_1 = 0{,}51$ воздушно-водный поток.

давлений можно обнаружить распространение волн давления и плотности в жидкости только в направлении вниз по течению, потому что скорость течения становится больше, чем скорость распространения небольших возмущений. Изменение состояния параметров течения не влияет на течение вверх по потоку. В случае сжимаемого потока при небольших возмущениях речь идет о звуковых волнах или волнах Маха, в двухфазном потоке имеются небольшие изменения объемной доли газовой фазы. В обоих случаях скорость распространения этих небольших возмущений можно выразить одинаковым термодинамическим изменением состояния, а именно изоэнтропным изменением плотности от давления. В приближении малых амплитуд волн скорость распространения волн выразится

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \tag{9.61}$$

В газодинамике так выражается скорость распространения звуковых волн.

В двухфазных потоках так выражается распространение потоков плотности во первых, как следствие изменения содержания пара, а во-вторых, как изменение плотности соответствующих фаз под давлением. Понятие звуковая скорость в связи распространения малых потоков жидкости в двухфазных течениях является поэтому неправильным.

Расчет критического расхода в сужении поперечного сечения происходит как в газовой динамике из балансовых уравнений состояния газа и жидких фаз. Исходными уравнениями являются уравнения для двухфазной смеси (9.20)–(9.25) или в упрощенной форме (9.27) и (9.28). Простое вычисление, как в газодинамике, показывает, что критический поток массы определяется через скорость распространения волн плотности в самом узком поперечном сечении потока в форме:

$$\dot{m}_{krit} = A^* \cdot a^* \cdot \rho^*, \tag{9.62}$$

где a определено в формуле (9.61), значком * обозначается самое узкое поперечное сечение, которое при определенных обстоятельствах из-за отрыва потока не совпадает с геометрическим узким поперечным сечением. Его точное определение может быть затруднено. Однако это соотношение указывает типичную проблему в двухфазном течении. Критическая масса потока зависит от определения плотности ρ_{2Ph}, которая имеет различную форму, в соответствии с моделью (гетерогенная или гомогенная модель).

Так как поток при вытекании и перетекании (через край) постоянно ускоряется, то чаще всего считается, что происходит хорошее смешивание фаз и для смеси характерно гомогенная плотность $\rho_H(\chi)$. Формально дифференцируя выражение для этой плотности при постоянной энтропии, и учитывая, что происходит адиабатическое изменение состояния в каждой фазе, но с переменой фаз на границах, получаем:

$$\left(\frac{1}{a^2_{2Ph}}\right)_H = \left(\frac{\partial \rho_H}{\partial p}\right)_s =$$
$$= \rho^2_H \cdot \left[\frac{1}{\rho^2_L \cdot a^2_L} + \chi \cdot \left(\frac{1}{\rho^2_G \cdot a^2_G} - \frac{1}{\rho^2_L \cdot a^2_L}\right) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s \cdot \left(\frac{1}{\rho_G} - \frac{1}{\rho_L}\right)\right]. \tag{9.63}$$

Индекс H означает, что полученный результат относится к гомогенной модели. Далее, звуковая скорость газа выражалась ${a^2}_G = (\partial p/\partial \rho_G)_s$, а звуковая скорость жидкости ${a^2}_L = (\partial p/\partial \rho_L)_s$. Кроме того предполагается, что звуковая скорость жидкости значительно больше, чем газа (${a^2}_L \gg {a^2}_G$). Это требует некоторых алгебраических преобразований с использованием определений в форме:

$$(a^2_{2Ph})_H = a^2_G \cdot \left(\chi + \frac{\rho_G}{\rho_L} \cdot (1-\chi)\right)^2 \cdot \left[\chi - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}_s \cdot a^2_G \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L} \cdot (\rho_L - \rho_G)\right)\right]^{-1} \tag{9.64}$$

Здесь ясно видно, что скорость распространения волн плотности зависит в основном от содержания пара и от изменения содержания пара при изоэнтропном термодинамическом равновесии. Во многих технических релевантных течениях при термодинамическом равновесии из-за понижения давления в узком месте поперечного сечения пар не образуется, потому что понижение давления происходит слишком быстро и оно очень маленькое.

Это значит, что время релаксации для испарения нужно значительно больше, чем для прохождения потока через узкое поперечное сечение. В этом случае речь идет о затрудненном термодинамическом равновесии или замороженном состоянии. Такое состояние выражается как $(\partial\chi/\partial p)_s = 0$.

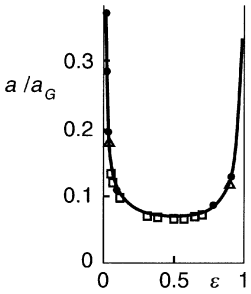


Рис. 9.16. Скорость волны небольших потоков в смеси воздух–вода при предположении гомогенности смеси в сравнении с экспериментами (Böckh 1975)

Если теперь в упрощенной формуле (9.64) заменить содержание пара χ на долю объема ϵ, то замороженная скорость волны плотности в гомогенном двухфазном потоке выразится:

$$(a^2_{2Ph})_H = a^2_G \cdot \frac{1}{\epsilon \cdot (\epsilon + \frac{\rho_L}{\rho_G} \cdot (1-\epsilon))} \approx a^2_G \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L} \cdot \frac{1}{\epsilon \cdot (1-\epsilon)}. \qquad (9.65)$$

Последнее справедливо при предположении, что $\rho_G/\rho_L \ll 1$. Следует заметить, что скорость волны плотности значительно меньше, чем звуковая скорость в газе и что минимальное значение для $\epsilon = 0,5$. Такое соотношение подтверждено экспериментами с потоками воздуха и воды. Рис. 9.16 показывает, что эксперименты прекрасно воспроизводят это соотношение при

невысоком давлении. Вызывает удивление низкая скорость волны по сравнению со звуковой скоростью газа. Ее минимальное значение — ниже 10% звуковой скорости газа. Это вызывается тем, что, согласно формуле (9.62), происходит ограничение потока массы в геометрически узких местах течений уже при низкой плотности двухфазных потоков массы. Технически это чрезвычайно важно в связи с истечением смеси газа и жидкости из резервуара под давлением.

Если за плотность двухфазной смеси принять плотность импульса (9.23), то получим после громоздкого процесса дифференцирования сложное выражение для выходного давления и для скорости волн плотности. Но оно зависит от обеих переменных состояния, плотности пара χ и объемной доли ϵ. Так как эти величины связаны друг с другом соотношением скоростей, то скорость распространения волн зависит не только от термодинамических изменений состояния, но и еще от величины $S = u_G/u_L$ и ее изменения от давления. Это выглядит так:

$$(a^2_{2Ph})_{Sep} = f\left(a_G, a_F, \chi, \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s, S, \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_s\right). \tag{9.66}$$

В производной $(\partial S/\partial p)_s$ выражается перенос импульса между фазами. Некоторые авторы пытались разработать связи моделей для $(\partial S/\partial p)_s$ в пузырьковых течениях, например Генри 1971. Но эти комплексные модели оказались несостоятельными. Вот почему популярные аналитические связи основываются на простой гомогенной модели.

9.4.2. Критические потоки массы

Аналитические модели для расчета критических потоков массы отличаются наличием термодинамического и механического равновесия между фазами или его отсутствием. Эксперименты показывают, что в процессе истечения локально не устанавливается ни термодинамическое, ни механическое равновесие. При испарении образуются разницы температур между фазами, которые не выравниваются благодаря отдаче тепла на граничных поверхностях во время короткого процесса перетекания.

Одновременно образуется разность скорости между фазами. Наглядно это можно изобразить на примере истечения из резервуара с низким содержанием пара $(\chi_0 < 0,05)$ через короткие и длинные патрубки $(L/D \leqslant 12)$.

Рис. 9.17 поясняет процесс. При истечении через короткие патрубки (рис. слева) не образуется термодинамического равновесия в отдельной сво-

бодной струе и это не вызывает парообразования в ядре свободной струи. Это ведет к резкому падению давления в сечении патрубка с последующим установлением давления в области свободной струи.

Длинные трубопроводы между резервуарами вызывают на определенном участке появление свободной струи и независимо от этого, на определенной длине релаксационного хода установления термодинамического равновесия со значительной долей пара.

Явное увеличение содержания пара в течении является следствием падения давления при действии трения и ускорения в двухфазной смеси. Это изображено на правой схеме рис. 9.17.

Обе изображенные ситуации можно описать смотря по обстоятельствам приближенно с помощью одномерного гомогенного двухфазного течения в термодинамически неполном или полном равновесии. Поскольку термодинамические эффекты влияют на процесс истечения в большей степени через испарение, то здесь нужно кратко пояснить термодинамические изменения состояния с помощью уравнения реального газа.

В диаграмме $p - (1/\rho)$ для реального газа и жидкостей (см.рис.9.18) двухфазная область жидкого состояния разграничивается так называемой линией кипения S, а парообразное состояние так называемой линией плавления t. Линии плавления и кипения соединяются в критической точке T_k, которая ограничивает двухфазную область слишком высоким давлением. Характер кривых изотерм явно представляет в двухфазной области минимум и максимум. Линия соединения всех минимумов называется спинодалью жидкости, а линия соединения всех максимумов — спинодалью пара.

При сбросе давления жидкость изменяет свое состояние, например, от точки A вдоль изотермы до линии кипения в точке B. Там она достигает значения давления насыщения p_{sat} и температуры T_{sat}. Если термодинамическое равновесие обеспечивается за счет медленных и небольших изменений состояния, то происходит испарение жидкой фазы при постоянном давлении, увеличении объема смеси, вплоть до достижения линии плавления (т. C). Соединительная прямая BC является изотермой равновесия в двухфазной области. Если же происходит значительное и быстрое уменьшение давления, то термодинамическое равновесие не может установиться на линии кипения, понижение давления следует за реальной изотермой в двухфазную область и при этом не происходит испарения. Это — изменение состояния при метастабильном или полностью термическом равновесии. Изотермическое разряжение жидкой фазы может происходить до т. B. Если оно осуществляется или почти осуществляется в реальной системе, то

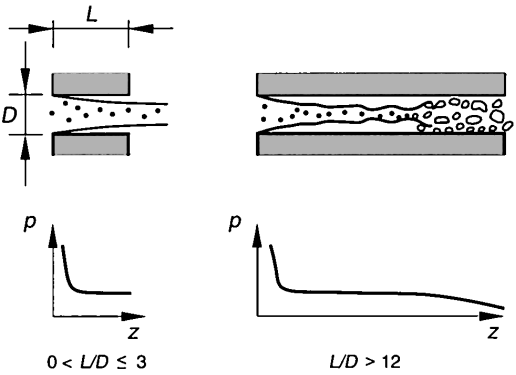


Рис. 9.17. Схематическое изображение истечения двухфазной смеси из резервуара под давлением, слева при частичном, а справа при полном термодинамическом равновесии

система скачкообразно при взрывном испарении переходит в состояние равновесия вдоль двухфазной изотермы, например, в т. E. Термодинамическое неравновесие на изотермах между линией кипения и спинодалью можно характеризовать сравнением с соответствующим состоянием равновесия на линии кипения. Жидкость перегревалась вследствие внезапного разряжения за короткий период времени $T - T_{sat}$. Перегревы типичны для процессов кипения в жидкостях с теплоподводом. Они необходимы для активизации кипения при образовании пузырьков пара. В процессах испарения, вызванных снятием давления или подводом тепла существует ряд сравнимых феноменов, описанных в специальной литературе (см., например, B/Collier и Thome 1994, Brennen 1995). Конечно, при неизотермическом разряжении с частичным испарением можно достичь каких-то других состояний неравновесия в области между линией кипения и спинодалью жидкости. Однако в действительности сложно контролировать такие состояния неравновесия или же выражать их физическими моделями.

Это является актуальной областью исследования. Поэтому дальше обсуждаются граничные случаи. Следует также напомнить, что при переходе от газообразной в жидкую фазу в области между линией плавления и спинодалью газа, а именно, при конденсации пара, могут появлятся подобные явления термического неравновесия, но для дальнейших выводов они не играют роли и поэтому далее не обсуждаются.

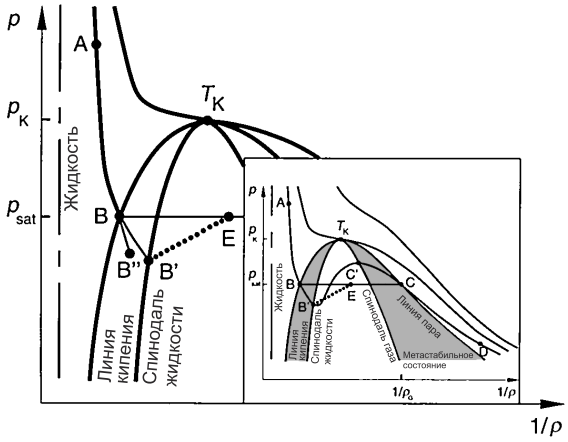


Рис. 9.18. Схематическое изображение диаграммы состояния реального газа, пунктиром изображено видимое изменение при неравновесности

Оба граничных случая полного и неполного равновесия выражаются через упрощение уравнений (9.64) для критического распространения скорости гомогенного двухфазного течения. Принимая во внимание, что для звуковых скоростей в фазе пара и жидкости справедливо ${a_G}^2 \ll {a_L}^2$, получаем для критической или максимальной плотности массы упрощенное выражение:

$$\dot{m}^*_{krit} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\chi}{\rho_G \cdot a_g^2} - \left(\frac{1}{\rho_G} - \frac{1}{\rho_L}\right) \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s\right)^*}} \tag{9.67}$$

Истечение при полностью заблокированном термическом равновесии выражается при этом через $(\partial\chi/\partial p)s = 0$. Полное термическое равновесие описывается общим соотношением (9.67).

Связь состояний в самом узком поперечном сечении потока с установившимися значениями в резервуаре и с критическим давлением происходит через уравнения состояния соответствующей смеси газа и жидкости (например, таблицы состояния водяного пара).

Сравнение с экспериментальными данными для коротких патрубков показывает, что потоки массы, рассчитанные по гомогенной модели равно-

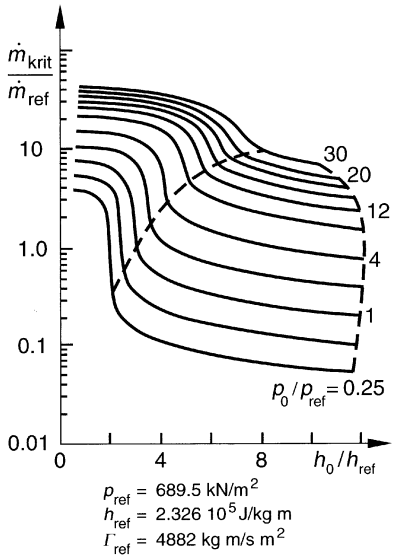


Рис. 9.19. Критические потоки массы по гомогенной модели равновесия (HGM) в зависимости от величин параметров покоя.

весия (HGM) явно идут вниз, в то время как значения, рассчитанные по неполной модели равновесия (GHGM) дают лучшие результаты.

Для систематического расчета максимальной плотности потока масс необходимо интегрирование итоговых уравнений для двухфазной смеси включая потери на трение от входа до выхода канала. Интегрирование уравнения импульсов для смеси по уравнению (9.22) с учетом механического равновесия $S = 1$ при условии, что $(\partial\dot{m}/\partial p)s = 0$ дает возможность изобразить плотность потока массы графически или в таблицах. Рис. 9.19 показывает графическое изображение критического потока массы в случае термодинамического и механического равновесия.

Если не предполагать наличия механического равновесия, то максимальную плотность потока можно определить через интегрирование импульсного или энергетического уравнения для смеси (9.22) и (9.24) при дополнительных условиях $(\partial\dot{m}/\partial S)_s = 0$.

Такое действие выявляет связи критического потока масс с заданными соотношениями скоростей, которые имеют для интегрированного уравнения

суммы импульсов значение $S = \sqrt{\rho_L/\rho_G}$, а при интегрировании уравнения суммы энергий значение $S = (\rho_L/\rho_G)^{1/3}$. Эти простые модели для критического двухфазного потока масс были сделаны сперва (Fauske d1963 и Moody 1965) и представлены в форме диаграмм.

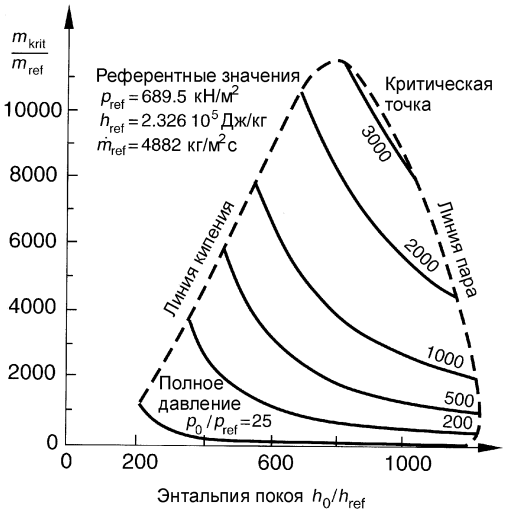


Рис. 9.20. Критические потоки массы по Moody 1965 г. в зависимости от величины параметров покоя

В качестве примера на рис. 9.20 показан график, рассчитанный по Moody. Сравнение с экспериментами показывает, что критические плотности потока, вычисленные по Moody 1965 из суммы энергий значительно выше значений, определенных экспериментально. Поэтому при анализе надежности модель Moody часто становится сходной с консервативной оценкой долей потерь давления.

Для наглядности рис. 9.21 показывает обсуждающиеся здесь модели в сравнении с данными экспериментов для коротких патрубков.

В итоге следует считать, что предположение по термодинамическому и механическому равновесию для количественного сравнения эксперимента и модели, сделанные на простых моделях, достаточно широко изучены.

Чтобы представить фактическое соотношение при истечении двухфазной смеси через сопла, заслонки или патрубки при сильной потере давления,

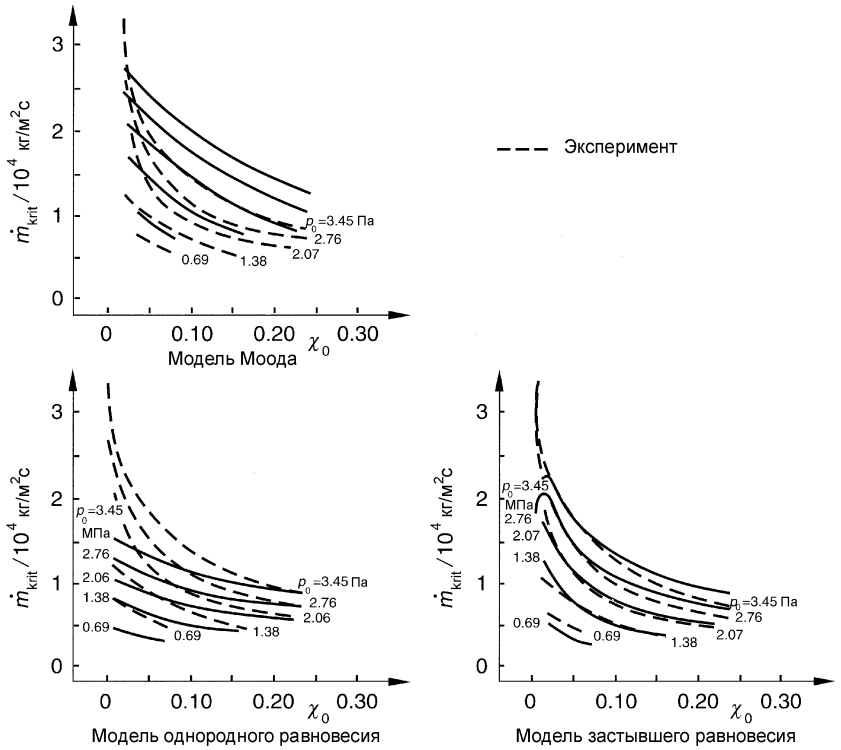


Рис. 9.21. Сравнение расчетов по моделям и экспериментальным данным по различным моделям.

нужно учитывать локальное и повременное отклонение от термодинамического равновесия и механического взаимодействия фаз.

Henry и Fauske разработали в 1971 году на основе отношения для модели равновесия (уравнение (9.67)) эмпирическую модель неравновесности, проверенную экспериментально. Они ввели в это отношение (уравнение) вместо содержания пара при равновесии χ_{eq} реальное содержание пара χ, которое нелинейно зависит от χ_{eq} и от соотношения скорости S. Им удалось найти функцию, которая вполне удовлетворительно объясняет экспериментальные данные в определенной области параметров. Причем следует

иметь в виду, что здесь речь идет о формальной подгонке формулы, т.е. о формальном согласовании формулы и экспериментальных данных.

Для более оправданного физического моделирования процессов неравновестности следует принципиально проинтегрировать полную систему стационарных одномерных основных уравнений (9.14)–(9.19) двухжидкостной модели вдоль направления истечения. Особенно при моделировании исходных членов, в уравнениях для масс следует обратить внимание на отклонения от термодинамического равновесия.

До сегодняшнего дня это не удавалось, так как эти отклонения, как и при очень сильных падениях давления, были очень большие. Можно даже наблюдать, что явления при сильной потере давления определяются сильнее с помощью влияния термодинамического неравновесия, чем через меняющуюся относительную скорость между фазами. Причем, наличие имеющихся в жидкости пузырей вскипания играет значительную роль.

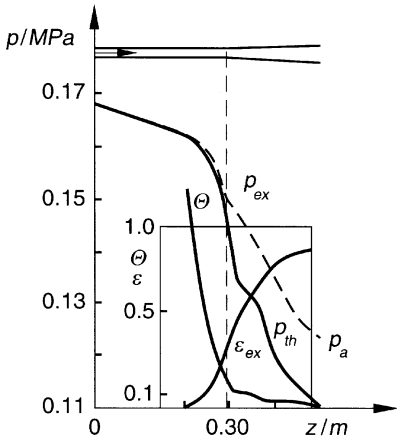


Рис. 9.22. Ход давления p и коэффициента релаксации Θ при протекании двухфазной смеси через узкое сопло при сверхкритичной разнице давления. Пример $\dot{m} = 6526$ кг/м^2/с, P_a=0,123 MPa

Для количественного определения термодинамического равновесия при фазовых переходах вначале было предложено Lemonnier и Bilicki 1994 эволюционное уравнение для содержания пара χ в сравнении с термодинамическим содержанием пара при равновесии как дополнение к итоговым

уравнениям и уравнению состояния для материальной системы. Такое соотношение включает нестационарную производную пара $d\chi/dt$ через параметр релаксации времени Θ линейно с помощью отклонения истинного содержания пара $\chi - \chi_{eq}$. Причем разница в содержании пара непосредственно зависит от перегрева жидкости. Эволюционное уравнение имеет форму:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\dot{m}_G}{\rho_g} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\chi - \chi_{eq}}{\Theta}. \tag{9.68}$$

Исходя из состояния покоя, общее одновременное интегрирование суммарных уравнений (9.14)–(9.19) и дифференциального уравнения релаксации (9.68) представляют далее фактические состояния в канале при падении давления. Вся трудность сейчас заключается в определении параметра релаксации Θ для определенного положения и определенной жидкости. В принципе Θ олицетворяет при этом физику реального гомогенного или гетерогенного процесса образования пара. В отсутствие общей закономерности для Θ Lemonnier и Bilicki в 1994 г. идут программным путем и вычисляют Θ одновременно с расчетом давления и потока масс вдоль пути интегрирования из данных замеров долей объема газа и температур перегрева жидкости. Причем они предполагают в своих уравнениях моделей наличие механического равновесия и наличие гомогенных условий течения. Они находят явно лучшее совпадение с измеренным давлением в узких соплах, чем в простых аналитических моделях (ср. для этого рис. 9.22). Причем математически рассчитанное определение Θ дает новый подход к пониманию основополагающих зависимостей неравновесных процессов. Независимо от особых требований при физическом создании моделей в численном интегрировании дифференциальных уравнений появляются трудности, которые связаны с их локальным поведением в узком поперечном сечении потока. Lemonnier и Bilicki 1994 дают по этому поводу подробные указания.

9.4.3. Кавитация

В течениях жидкости с высокой скоростью понижение давления при обтекании тел и углов может привести к локально ограниченному образованию пара и газа. Такое явление называется кавитацией. Речь идет при этом о локально ограниченном испарении с последующей конденсацией или о высвобождении растворенных газов в жидкости вследствие падения давления. Кавитация появляется в гидравлических струйных машинах, таких как насосы, турбины и другая гидравлика, вентили и форсунки впрыска дви-

гателей внутреннего сгорания. При этом можно наблюдать нежелательные побочные явления, такие как ухудшение работы, появление шума, механические колебания и локальный износ материала. Поэтому исключение кавитации и контроль за ней имеют большое значение для гидравлических машин и механизмов. Кавитационные процессы уже давно интенсивно изучались с целью поиска критерия начала и степени кавитации. Кавитация описана в обзорных статьях и книгах Knapp, Daily, Hammit 1970, Acosta и Parkin 1975, Arndt 1981, Brennen 1995, Lecoffe 1999.

Кавитация может возникать в однокомпонентном течении, если локальное статическое давление в течении снижается до уровня термодинамического давления насыщенного пара p_{sat} жидкости. Это необходимое условие для начала кавитации характеризуется безразмерным коэффициентом кавитации (или числом кавитации) σ в несжимаемом свободном от трения течении. Этот коэффициент определяется как:

$$\sigma = \frac{p - p_{sat}}{0.5 \cdot \rho \cdot u^2}, \tag{9.69}$$

где ρ — плотность, u — локальная скорость. При значении $\sigma \leqslant 0$ может начаться испарение жидкости. Однако «идеальное» критическое значение коэффициента кавитации $\sigma_i = 0$ вследствие механических и термодинамических эффектов должно корректироваться.

Относительные величины влияния для таких отклонений обсуждаются далее. Наблюдавшиеся формы явления кавитации также разнообразны как и режимы течения двухфазных потоков в трубах (см. главу 9.2). Они в высшей степени нестационарны. Они классифицируются по возрастающему содержанию пара как облачная-, пузырчатая-, слоистая- и суперкавитация. Группы пузырьков в микронной и субмикронной области, которые могут образовываться в сильно обрезанных пограничных слоях, называются облачной кавитацией. Расширяющиеся связанные друг с другом пузырьковые течения образуются в областях разрежения отделяющихся потоков сзади границы тел, на стороне разрежения установленных профилей или в областях отделения потоков. Тогда говорят о пузырьковой кавитации.

Образование взаимосвязанных паро-и-газопленок происходит в областях около профиля или границ тела вследствие объединения пузырей, если часть объема пара или газа превышает критическую величину $\epsilon \sim 0.5$. Такую форму называют слоистой кавитацией (или кавитацией слоев). Если тело при очень высоких скоростях движения и соответственно низких локальных давлениях по всей или большей части его контурной поверхности

окружает паровая пленка, то тогда говорят о суперкавитации. Такого рода экстремальные условия иногда образуются у судовых винтов скоростных катеров. На снимке (рис. 9.23) эти формы кавитации изображены в опытах Franc и Michel 1985 на профиле NACA в водном канале.

Исследования показали, что наряду с уже выведенным коэффициентом кавитации σ значительно влияют на кавитацию следующие качественные параметры: форма тела в качестве степени кривизны и угла наклона (заострения), а также свойства жидкости такие как вязкость, поверхностное натяжение, параметры уравнений реального газа, теплопроводность, тепловая мощность, латентное (скрытое) тепло, концентрация инородных веществ в жидкости в форме инородных газов или частиц.

Для установления и динамического поведения процесса кавитации кроме того важны термодинамические микропроцессы нуклеации — активации зарождения зародышей кавитационных ядер и степень турбулентности течения.

Влияние различных качественных параметров можно представить принципиально в форме безразмерных гидромеханических и термодинамических характеристик, таких как числа Рейнольдса, Вебера или Стефана. В турбостроении сперва пытаются установить по возможности простую взаимосвязь между коэффициентом кавитации и нормированной плотностью объема потока. В судостроении закономерности между коэффициентом кавитации, углом наклона, коэффициентом давления или коэффициентом сопротивления были выведены с помощью измерений. Но экспериментальные исследования показывают, что понимание таких связей зависит от качества экспериментальной жидкости. Причем качество жидкости характеризуется распределением концентрации как растворенных, так и нерастворенных инородных веществ, потому что они определяют границу жидкости без парообразования и тем самым начало кавитации. Снимок — рис. 9.23.

Поэтому в новейших исследованиях кавитации учитывается влияние качества воды с помощью определения количества газа или частиц твердого вещества, введенного в экспериментальную жидкость. Образованию пузырей газа и их формированию в группы могут способствовать когерентные структуры турбулентных течений. При этом небольшие интенсивные вихри создают необходимые колебания давления, которые локально вызывают ускоренный рост пузырей. Пузыри собираются предпочтительно в области крупных вихрей и образуют (своими группами) когерентные шлейфы пара. Это показано на рис.9.24 в форме кавитации на острие крыла. Этот эффект поясняет, почему это наступает при выявлении кавитации вну-

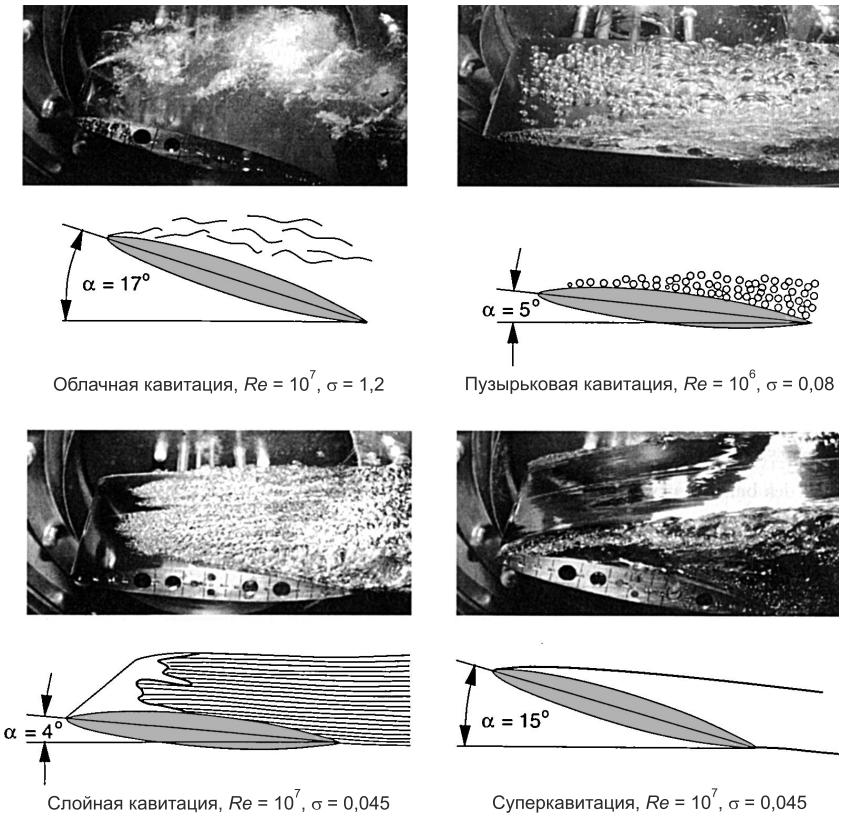


Рис. 9.23. Различные примеры кавитации на наклонном (заостренном) профиле типа NACA 16012 в водном канале по Franc и Michel 1985

три пристенных пограничных слоев и свободных срывных слоев и почему кавитация выявляется не только на границах области течений, как это показывают идеальные течения.

Неудовлетворительные результаты при описании кавитации с помощью простых характеристик течения привели в недавнем времени к физико-математическому моделированию двухфазных процессов. При этом применялись в основном такие же физические представления, как при вычисле-

нии критических потоков массы. Явления кавитации в большинстве случаев ограничены в области течения и требуют поэтому в каждом случае двух- или трехмерных (ступенчатых) расчетов, т.е. следует исходить из общих уравнений для двухфазных течений, представленныз в главе 5.4.5. При этом для упрощения часто предполагают модель гомогенного двухфазного течения.

Для расчета объемной части пара ϵ используется балансовое уравнение для фазы пара (9.14) с источниковым членом для испарения и конденсации. Представление этого члена является основным моментом такого моделирования. Его можно вычислить, предполагая распределение ядер из увеличения отдельных пузырей в области пониженного давления гомогенного двухфазного течения. Это можно сделать, применяя уравнение Рэлея–Плесса, гл. 5, (5.89) или другие подобные соотношения по динамике отдельных пузырей. Такой путь был предложен Chen и Heister 1994 и разработан Sauer и Schnerr 2000. На снимке 9.25 показан пример для расчета кавитации в канале сопла.

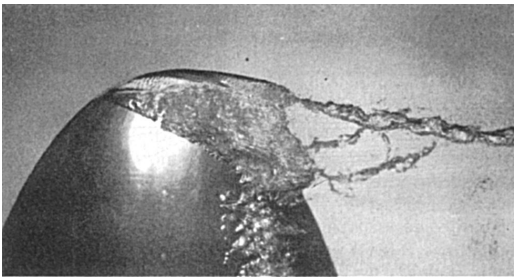


Рис. 9.24. Свободный шлейф (след) начинается от острия крыла, пар поступает из кавитационного слоя крыла (Arndt et. Al 1991)

Несмотря на заметный прогресс при математическом расчете процессов кавитации в каналах, нельзя все еще описать значительные влияния такие как механическое равновесие между фазами, эффект турбулентности в гомогенных фазах и термодинамическое неравновесие во время образования пузырей и конденсации в отсутствие эквивалентных физических моделей.

Наряду с этим подходом в настоящее время широко распространено моделирование образования кавитации в форме роста отдельных пузырей и их коллапса. Экспериментальные исследования (среди них исследования

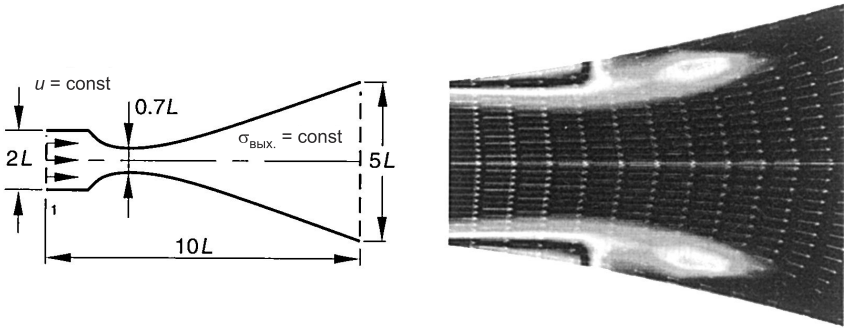
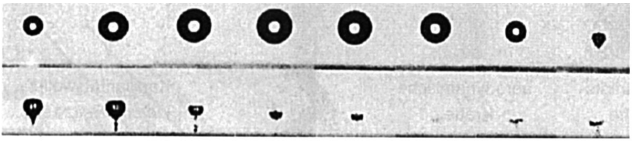
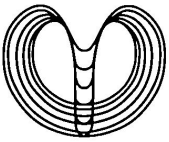


Рис. 9.25. Математически вычисленная зона кавитации в области сужения сопла по Sauer и Schnerr 2000

Lauterborn и Bolle 1975) показывают, что кавитационные пузыри вблизи стенок схлопываются несимметрично, а именно так, что образуется струя жидкости с высокой скоростью, которая направлена на стенку (рис. 9.26) и создает интенсивную волу под давления. Phillip и Lauterborn 1998 смогли экспериментально показать, что повреждения пристенного материала происходит из-за высокочастотных волн и высокой скорости. Впервые такой расчет сделали Plesset и Chapman 1971. Позднее их расчеты были дополнены Blake, Taib и Doherty 1986. Рис.9.26. показывает временную картину образования коллапса пузырей с помощью контурных линий.



Эксперимент



Рассчитанные контуры пузырей, *Blake et al*. 1986

Рис. 9.26. Коллапс пузырька пара вблизи твердой стены в фазе образования струи в направлении на стену, слева — эксперимент, справа — рассчитанные по Blake et.al. 1986 контуры пузырей

9.4.4. Аэрозольные течения

Дисперсные капельные течения с очень низкой долей жидкости часто называют аэрозольными течениями. Они имеют большое значение для формирования оптимальных горючих смесей в двигателях, газотурбинах и вспомогательных устройствах. Другими важными сферами применения являются — охлаждение термически нагретых поверхностей и областей путем испарения и газовые промыватели в различных устройствах. При изучении аэрозольных течений на первый план выходят два вопроса: производство капельных образований (стай, звеньев) и движение капель в потоке инертного газе. Оба аспекта недавно рассматривались обзорно в статьях и книгах, например Lin и Reitz 1998, Bolle и Moureau 1982, Growe et.al. 1998.

Поэтому здесь рассматривается только некоторые основные факты. Разделение жидкости на капли требует затрат энергии. При образовании капель она пропорциональна поверхностному натяжению и увеличению свободной поверхности. Необходимое уменьшение энергии происходит часто за счет перепадов давления в сопловых течениях, за счет центробежных сил в пленочных течениях у вращающихся винтов или за счет сил разрыва, которые возникают в жидких пленках и струях в различных газовых течениях. При образовании капель в соплах на величину капель влияют геометрия сопла, свойства жидкостей, вязкость, поверхностное натяжение и скорость течения. Зависимости можно выразить числами Вебера и Рейнольдса, которые следует образовывать с помощью характерного размера сопла d. Форма выходного соплового отверстия часто кольцеобразная, круглая или щелеобразная.

На выходе соответственно образуются сперва либо водные струи, либо тонкие конусообразные или плоские капельки жидкости, которые затем благодаря неустойчивости жидкости распадаются на капли. Если распад струи или капли жидкости вследствие сил инерции и поверхностного натяжения определяет капиллярные волны, то речь идет о распаде капель или волн жидкости. Если при высоких скоростях истечения турбулентные силы внутри струи жидкости и на границе определяют каплеобразование, то это означает распыление (рассеивание). Различные формы каплеобразования обозначаются в соответствующей литературе часто числом Рейнольдса и другими характеристиками, числом Онезорге $Oh = \mu_l/(\rho_L \cdot \sigma \cdot d)$ в карте состояний. Типичные состояния распада капель в свободной струе представлены на рис.9.27. На рис.9.28 изображена карта состояния для различных процессов каплеобразования.

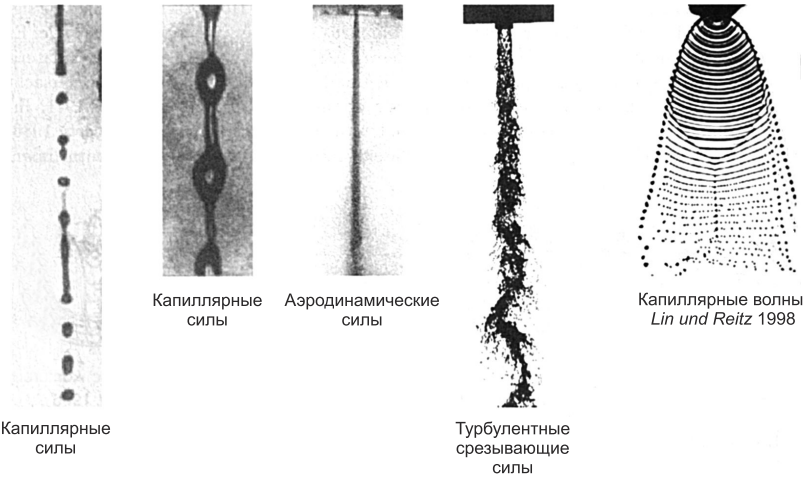


Рис. 9.27. Образование капель при распаде водной струи Zamelle на различные нестабильности

Для специфичного технического применения следует выбирать геометрию сопла и гидравлические характеристики, т. е. необходимые перепады давления, чтобы рассеивание происходило при желаемом среднем диаметре капли и требуемом пространственном угле. В качестве меры для диаметра капель используется в основном диаметр (Зауэта), который определен как соотношение всего объема капель ко всей поверхности. Развитие мелких рассеянных течений, начиная от фазы каплеобразования вплоть до полностью оформленных слабо концентрированных дисперсных капельных течений чрезвычайно комплексно и трудно поддается общему описанию.

Ключевым вопросом при этом является представление дальнейшего распада капель под действием сил до установления равновесной величины капель. Экспериментально наблюдались различные механизмы распада свободных текущих капель. Причем роль играют либо простые колебания капель, инерционная неустойчивость (Релея), волновая неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, либо чистая неустойчивость отрывных течений (см. главу 7.3). Рассмотренные явления распада систематизированы по увеличивающимся числам Вебера на рис. 9.29 по Pilch и Erdmann 1987.

Для численного описания полностью сформированных аэрозольных течений исходят из представления индивидуального распада капель в инерт-

ном газе. Поэтому учитывается относительное взаимодействие только между газом и каплями, а не между самими каплями.

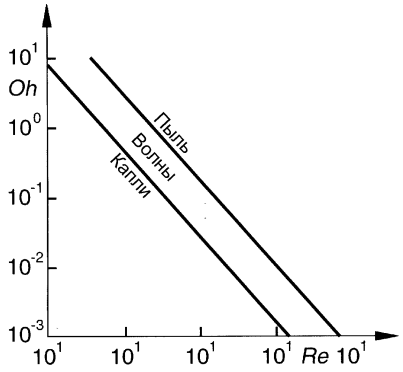


Рис. 9.28. Карта состояния распада капель, процесс по Онезорге

Качество взаимодействия определяется при этом так называемым числом Стокса St. Оно характеризует временную реакцию капли на изменение течения газа.

Поэтому оно определяется как соотношение времен $St = \tau_d/\tau_c$ (где d обозначает дисперсное, а индекс c сплошное) с помощью $\tau_d{=}\rho_d{\cdot}d^2/(18{\cdot}\mu_c)$), где d — диаметр капель и $\tau_c = D/U_c$. Здесь D — это характерная длина потока, U_c — характерная скорость непрерывной фазы. Очень малые числа Стокса (Stoks) означают почти безинерционное движение капель в газе, в то время как значения порядка 1 — взаимодействие фаз.

При построении модели газовое течение рассматривается как сплошная среда в представлении Эйлера, свободная от трения или турбулентной жидкости с дополнительными локально действующими силами и источниками и стокам масс из-за взаимодействия газ-капли. Капли двигаются, по описанию Лагранжа, вдоль криволинейных траекторий. Это происходит за счет таких сил, как сопротивление, подъемная сила и сила тяжести. Основной проблемой такого рода моделей является представление взаимодействия фаз через простые физические модели в алгебраической форме. Это — область активных исследований, особенно взаимодействия турбулентности и капельной дисперсии. Здесь следует сослаться на новую специальную литературу, например Growe, Sommerfeld и Tsuji 1998, Sirianano 1999. Гибридная модель Эйлера–Лагранжа представляет важную альтерна-

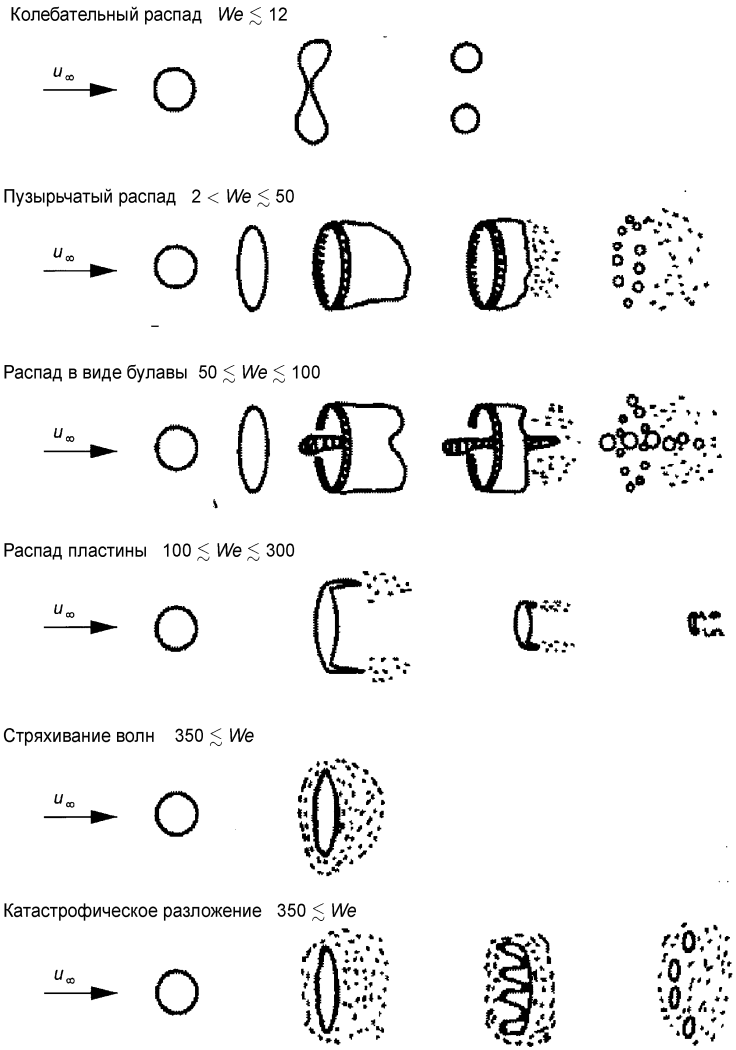


Рис. 9.29. Фигуры распада капель в отсечном течении по Pilch и Erdmann 1987

тиву в случае утонченных дисперсных двухфазных или двухкомпонентных течений ранее рассмотренным двухжидкостным моделям (см. главу 9.3).

9.5. Неустойчивость в двухфазных течениях

Двухфазные течения могут встречаться в трубах и каналах в различных режимах (сравн. главу 9.1). Каждый из таких режимов существует в определенной области контрольных параметров, таких как плотность потока масс, объемные доли. Между режимами при изменении контрольных параметров есть переходы, которые часто сопровождаются неустойчивостью течения на пограничных поверхностях фаз. При этом речь идет в основном о неустойчивости волн, вызванную действием относительной скорости между фазами, поверхностным натяжением и силами инерции. Они известны как неустойчивость Кельвина–Гельмгольца и Релея–Тейлора. Эти неустойчивости играют центральную роль также и при деформации и при распаде пузырей, капель, жидкостных ламелей и пленок жидкости. Рис. 9.30 поясняет ситуацию. Если газ и жидкость по гладкой пограничной поверхности движутся относительно друг друга со скоростью $u_G - u_L$, то маленькие волнообразные возмущения при определенной величине поверхностного натяжения и сил инерции, действующих извне на промежуточные поверхности, распространяются за какое-то время. Причем степень распространения возмущения зависит от длины волны. Возмущение с длиной волны λ_m, которая имеет наибольшую скорость развития, ведет к разрушению гладкой пограничной поверхности. Так, например, происходит распад струи жидкости и образование новой фазы в пространстве, которая выразится через характеристическую новую шкалу длин λ_m. Эта шкала определяет так же величину капель и пузырей после преобразования.

Рис. 9.30. Устойчивость границы между двумя жидкостями, скорость фаз u_1, u_2

Из линейного анализа устойчивости свободного от трения двухслойного неограниченного течения получается скорость возмущения c_i вида:

$$c_i = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (u_1 - u_2)^2 \cdot a^2}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\sigma \cdot a^2 - g \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot a}{\rho_1 + \rho_2}}. \qquad (9.70)$$

где u_1 и u_2 — скорости фаз, a — число волн, остальные величины имеют ранее выведенные значения. В качестве ускорения здесь введено ускорение силы тяжести. На его месте может появиться любое другое ускорение с соответствующим действием. Максимум степени развития возмущения можно определить как функцию числа волн из условия $\partial c_i/\partial a = 0$. В дальнейшем обсуждении вводится длина волны $\lambda = 2 \cdot \pi/a$. Если между фазами нет разницы в скорости и $u_1 - u_2 = 0$, то максимально развивающееся возмущение имеет длину волны:

$$\lambda = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot \sigma}{g \cdot (\rho_1 - \rho_2)}}, \tag{9.71}$$

причем предполагается, что более плотная жидкость ускоряется по направлению менее плотной. В другом случае возникают только незатухающие колебания. Тогда говорят о неустойчивости Рэлея–Тейлора. Длина нарастающих возмущений задается через исчезающее возбуждение c_i и составляет

$$\lambda_c = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{g \cdot (\rho_1 - \rho_2)}}. \tag{9.72}$$

Отсюда следует сделать вывод, что граничная поверхность устойчива относительно малых возмущений с малой длиной волны и не изменяется продолжительное время, потому что поверхностное натяжение напряжение удерживаетт силы инерции в равновесии. Для возмущений с большой длиной волны пограничная поверхность формируется продолжительное время. Наглядным примером такой неустойчивости пограничных поверхностей является явления, связанные с вытеканием жидкостей из резервуаров с достаточно маленькими отверстиями в дне или подъем газовых пузырей с размерами $d_B \leqslant \lambda_c$ в жидкости.

Если ускорение не играет никакой роли, наоборот появляются определённая разница в скоростях $u_1 - u_2$ и существуют напряжения на пограничных поверхностях, то рост возмущений (в направлении вниз) ограничится длиной пограничных волн

$$\lambda_c = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho_1 \cdot (u_1 - u_2)^2} \right). \tag{9.73}$$

Предположим, что здесь плотности фаз как у газа и жидкости при нормальных условиях весьма различны, т. е. $\rho_2 \ll \rho_1$. Возмущение с более сильным распространением имеют длину волны $\lambda_m = 1.5 \cdot \lambda_c$.

В двухфазных потоках следствием этой капиллярной неустойчивости является распад пограничных поверхностей, вызванный незатухающими капиллярными волнами, вызванными в свою очередь действием разрыва скоростей на пограничных поверхностях фаз, так распадаются, например, большие капли на мелкие составные части (капельки), если величина капели больше, чем длина пограничной волны λ_c. Эта неустойчивость пограничных поверхностей по отношению к движениям с разрывом скорости называется неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. Этим соотношением объясняется также известный критерий числа Вебера при распаде струй и капель жидкости. Оно означает, что распад движущихся объемов жидкости со свободными поверхностями наступает, если число Вебера, образованное характерной длиной L объёма превышает 1, и так

$$We_L = \frac{\rho_G \cdot (u_G - u_L)^2 \cdot L}{\sigma} > 1. \tag{9.74}$$

Обе представленные неустойчивости сильно влияют на образование пузырей и капель в двухфазных течениях и объясняют некоторые важные явления в процессах кипения и конденсации, например распад пузырей и пленок при кипении следует объяснять как неустойчивость Рэлея–Тейлора. Образование волнистых слоистых течений гомогенных капельных и пузырчатых потоков непосредственно связано с неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца, которую можно записать в форме критерия Вебера.

Объясненное здесь простое представление этих неустойчивостей можно упростить, учитывая другие величины влияния, такие как вязкость фаз и геометрические размеры ограничивающих резервуаров и каналов. Об этом можно подробно прочитать в публикациях Vih 1980 Chandrasekhar 1968.

Наряду с маломасштабными неустойчивостями граничных поверхностей, обладающими для распределения фаз важной функцией, есть и другие основные крупномасштабные механизмы неустойчивости, которые определяют временное поведение двухфазового потока (течения) в гидравлических системах с фазовыми переходами, а также с процессами кипения и конденсации. Так как такие неустойчивости могут привести к бесконтрольным механическим нагрузкам при ударе и давлении и далее к запуску термических напряжений в стенках каналов системы, то граница устойчивости таких процессов является практически проектным и производственным (эксплуатационным) критерием для таких систем. Причем речь идет, например, о химических реакторах, ядерных парообразователях (электростанциях), охлаждающих агрегатах — холодильниках.

Типичная двухфазная неустойчивость может появиться в системе, состоящей из двух резервуаров под давлением и двух включенных друг за другом гидравлических компонентов, а именно из центрифуги (центробежный насос) и трубопровода с постоянным подводом тепла. Такая система представлена на рис. 9.31.

Поведение устойчивости системы определяется различными зависимостями давление/поток насоса и испарительной трубы. В то время как нарастание давления в центробежном насосе монотонно-медленно уменьшается обычно с растущим потоком масс, падение давления двухфазного потока в трубе имеет типичное немонотонное, кубическое отношение в средней области потока. Немонотонное отношение обуславливается здесь в основном различными долями потерь давления и ускорения в двухфазном течении в трубе. Монотонные ветви кривых потерь давления определяются у низкоскоростных потоков с высокой долей пара, а у высокоскоростных потоков — высокой долей объема жидкости. В общем система может принимать три стационарных состояния в модели потока. Они выражены т. P, P', P'' на обеих кривых давление — масса (для центробежного насоса и испарительной трубы). Если исходить из небольшого изменения величин p или m в стационарных состояниях, то получим что состояния P' и P'' стабильны, тогда как изменение давления и массы потока вследствие изменения мощности насоса действует на изменение потерь давления в противоположном направлении. Это ведет к переходу в одно из обоих стабильных рабочих состояний P' или P''. Так как он получается в результате неустойчивости временного отношения вследствие простого перехода от неустойчивого в стационарное стабильное состояние, то в этой связи говорят о статически устойчивом или неустойчивом поведении системы. Первым исследовал такую неустойчивость Ledinegg в 1938 г., и она была названа его именем. От более точного моделирования отклонения устойчивости здесь пришлось отказаться и далее делать ссылки на соответствующую литературу (Vadigarodbou 1981, 1999).

Статическое поведение системы может превратиться в динамическое, т. е. в осцилляторное, если к компонентной цепи радиального насоса и трубы (по которой идет пар) добавить производящий давление агрегат (смотри на рис. 9.31 компонент, выполненный штриховой линией), который накопит (примет на себя) избыточную мощность при понижающемся давлении двухфазного потока в качестве компрессионной энергии и через какое-то время вернет обратно в систему. Такую систему следует представить в виде релаксационного колебания или как что-то среднее между тремя первоначально

статичными состояниями. Это для функционирования технической системы нежелательно. Такие производственные колебания устраняют благодаря встраиванию дросселя в форме заглушек (заслонок) или других приспособлений (наприме, сужений поперечного сечения).

Другая системная двухфазная неустойчивость, которая проявляется в форме интенсивно колеблющихся отклонений части газового объема, — это так называемая неустойчивость плотности волны. Ее часто можно встретить в системах с фазовыми переходами. Она основывается на обратной связи потока масс, долей парообразования или конденсации и падения давления на участках кипения или конденсации. Эту неустойчивость можно аналитически описать с помощью постоянного подвода и отвода тепла посредством одномерной двухжидкостной модели (уравнения (9.14)–(9.18) и классического линейного анализа (сравни гл. 7.1) (см. Vadigaroglou 1981). Можно отказаться от построения аналитической модели и представить механизм с помощью простой трубы для пара, которая находится между двумя резервуарами с постоянным давлением p_0 и p_1. На рис. 9.32 показана принципиальная картина модели (снимок).

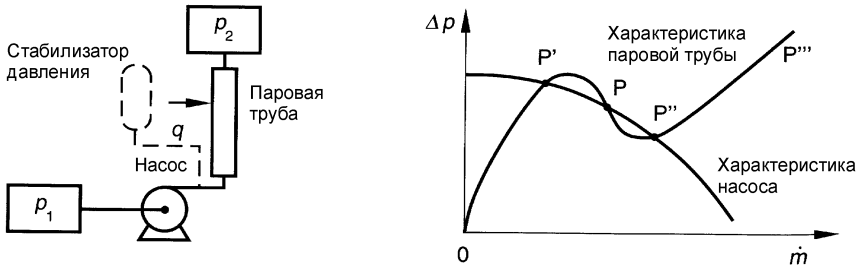


Рис. 9.31. Двухфазная система с возможной неустойчивостью. Слева: система течения; справа: характеристика давления — поток для радиального насоса и трубы для пара

Если паровую трубу установить на входе малого периодичного возмущения потока $\partial\dot{m}$, то значение температуры насыщения и граница начала испарения последует за этим колебанием, потому что колебания потока в области однофазных течений вызывают колебания энтальпии. Следствием изменений потока массы и участков пути однофазного течения в трубе являются колебания давления $\partial\Delta p_1$ в области однофазного течения. В двух-

фазной области кроме того действует возмущение энтальпии, в качестве возмущения объемной части пара, которое двигается по течению как волна плотности. Изменение содержание пара при взаимодействии с возмущениями потока приводит к усиленным возмущениям давления $\partial\Delta p_2$ в двухфазной области. Так как разница давлений проявляется в паротрубе системы, то необходимо выровнять $\partial\Delta p_1$ и $\partial\Delta p_2$ по отношению друг к другу. Это включает обратную связь между двух- или однофазными областями и ведет при соответствующем положении фаз возмущений к резонансному изменению малого возмущения на выходе. Как следствие этого — появление массовых колебаний расширяющейся области кипения и содержания пара на участке испарения. Этого следует избегать из-за повышенных термических нагрузок на стенку в технической системе. Поэтому очень важным при проектировании производителей пара является установление границ неустойчивости волн плотности. Склонность к нестабильности усиливается, если большинство каналов испарения включены параллельно.

Неустойчивость сходного вида наблюдается в кавитационных радиальных гидромашинах. При определенных условиях меняются локальные области кавитации в каналах лопастей в течении определенного времени от канала к каналу. Ситуация совершенно аналогична системе параллельных труб. В радиальной машине между входом и выходом лопасти существует разница давления, определенная числом оборотов.

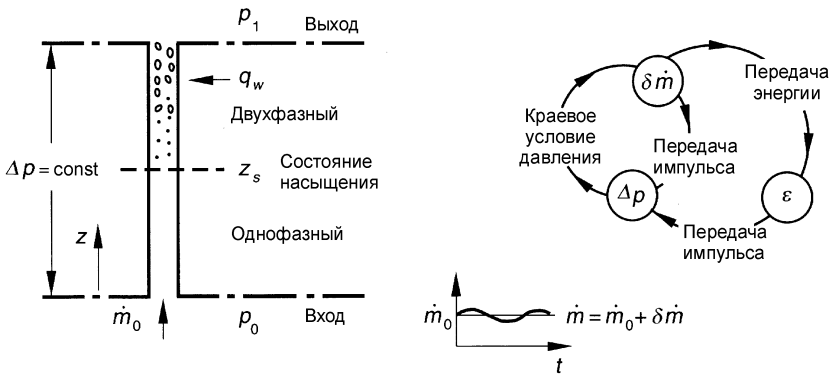


Рис. 9.32. Слева — принципиальная картина образования нестабильности волн плотности, справа — эффект обратной связи

Смена фаз в канале лопасти происходит, как изображено в главе 9.4.3, там, где термодинамическое давление не превышает давление при испарении, т. е. давление насыщенного пара жидкости. Небольшие возмущения потока массы в отдельном лопастном канале могут выключить подобный резонансный механизм обратной связи, как в трубах, и привести к недопустимым колебаниям и ухудшению характеристик мощности машины.

10

Течения с химическими реакциями

10.1. Основы реагирующих течений

Основной темой этой главы о химически реагирующих течениях является объяснение связи между химической реакцией и течением. Глава состоит из разделов, посвященных основам кинетики реакций, особенностям ламинарных и турбулентных течений химически реагирующих газов и гиперзвуковым течениям с реакциями. В этих классах реагирующих течений представлены типичные приложения, при изложении материала основное внимание уделяется представлению моделей, подкрепленных экспериментальными наблюдениями.

В центре внимания стоят специфичные аспекты гидромеханики течений с реакциями, такие как изменение плотности вследствие реакции и высвобождения тепла, особенности постановки проблемы кинетики реакции, применительно к задачам окисления углеводородных горючих, анализ механизма реакций и гетерогенные химические реакции.

Кроме описания этих вопросов во всех разделах главы даны ссылки, как можно промоделировать различные течения и представить эти модели уравнениями.

10.1.1. Закон действующих масс и порядок реакции

Под законом действующих масс общей химической реакции, записанной через отношение

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \ldots \xrightarrow{k} \mathrm{D} + \mathrm{E} + \mathrm{F} \ldots, \tag{10.1}$$

где A, B, C — различные вещества, участвующие в реакции, понимают зависимость скорости реакции от концентрации этих веществ. Под скоростью

реакции понимают скорость, с которой образуется или потребляется вещество, участвующее в реакции. Если рассмотреть, например, вещество A, то скорость реакции можно изобразить в форме

$$\frac{d[A]}{dt} = -k^{(f)}[A]^a[B]^b[C]^c \cdots \tag{10.2}$$

Здесь a, b, c — стехиометрические коэффициенты веществ A, B, C. Символ, заключенный в квадратные скобки, означает мольную концентрацию соответствующего вещества. $k^{(f)}$ — константа скорости химической реакции (удельная скорость). Полный кинетический порядок реакции представляет собой сумму показателей степени при концентрациях реагентов в уравнении скорости реакции.

Часто некоторые вещества бывают в избытке. В этом случае изменяются их концентрации незаметно. Если, например, во время реакции [B], [C] остаются приблизительно постоянными, то можно из удельной скорости и концентрации веществ в избытке вывести новый коэффициент скорости и тогда получим при $k = k^{(f)}[B]^b[C]^c \ldots$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^a. \tag{10.3}$$

По закону действующих масс можно интегрированием определить изменение концентрации вещества A.

Для реакции первого порядка $(a = 1)$ получается путем интегрирования из (10.3) закон первого порядка

$$\frac{[A]_t}{[A]_0} = -k(t - t_0), \tag{10.4}$$

где $[A]_0$, $[A]_1$ — это концентрации вещества A в моменты времени t_0 и t.

Соответствующим образом для реакции второго порядка $(a = 2)$ временной закон будет

$$\frac{1}{[A]_t} - \frac{1}{[A]_0} = k(t - t_0), \tag{10.5}$$

а для реакции третьего порядка $(a = 3)$

$$\frac{1}{[A]_t^2} - \frac{1}{[A]_0^2} = 2k(t - t_0). \tag{10.6}$$

Если временное изменение концентрации во время химической реакции определяется экспериментально, то отсюда можно получить порядок реакции. Логарифмическое изображение концентрации в зависимости от времени реакции первого порядка или изображение $1/[A]_t$ от времени реакции второго порядка дает линейную зависимость (рис. 10.1).

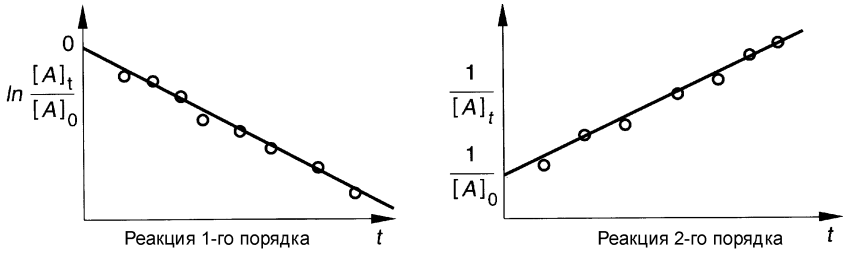


Рис. 10.1

10.1.2. Взаимосвязь прямых и обратных реакций

Для обратных реакций (10.1) аналогично (10.2) справедлив закон действующих масс

$$\frac{d[A]}{dt} = -k^{(r)}[D],^{d}\,[E]^{e}[F]^{f}\cdots . \tag{10.7}$$

При химическом равновесии прямая и обратная реакции протекают на микроскопическом уровне одинаково быстро (прямая реакция обозначается через f, а обратная реакция через r). Поэтому при химическом равновесии справедливо:

$$k^{(f)}[A]^{a}[B]^{b}[C]^{c}\cdots = k^{(r)}[D],^{d}\,[E]^{e}[F]^{f}\cdots \tag{10.8}$$

или

$$\frac{[D]^{d}[E]^{e}[F]^{f}\cdots}{[A]^{a}[B]^{b}[C]^{c}\cdots} = \frac{k^{(f)}}{k^{(r)}}. \tag{10.9}$$

Выражение в левой части соответствует константе равновесия K_c реакции, которую можно определить из термодинамических данных, так что для зависимости между коэффициентами скоростей обратимых реакций имеется

соотношение

$$K_c = \frac{k^{(f)}}{k^{(r)}} = \exp\left(-\frac{\Delta_R \bar{F}^0}{RT}\right). \tag{10.10}$$

10.1.3. Элементарные реакции и молекулярность реакции

Элементарной реакцией называется реакция, протекающая на молекулярном уровне точно так, как это выражено через ее основное уравнение. Происходящая при горении водорода реакция гидроксильного радикала (OH) с молекулярным водородом и является одной из таких элементарных реакций

$$\mathrm{OH} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{H_2O} + \mathrm{H}. \tag{10.11}$$

В результате движения молекул в газе сталкиваются гидроксильные радикалы с молекулами водорода. При инертных нереакционных столкновениях молекулы изменяют траекторию движения, а при реакционных столкновениях молекулы реагируют и образуют продукты $\mathrm{H_2O}$ и H. Реакция

$$2\mathrm{H_2} + \mathrm{O_2} \to 2\mathrm{H_2O} \tag{10.12}$$

не является элементарной, потому что при ее детальном исследовании замечено появление в качестве промежуточного продукта химических частиц H, O и OH, также обнаружены следы таких конечных продуктов, как $\mathrm{H_2O}$. В этом случае говорят о сложных или суммарных реакциях, иногда их называют брутто-реакциями. Эти суммарные реакции часто имеют очень сложные законы для скорости реакции вида (10.2) или еще сложнее. Порядки a, b, c являются в общем случае и не целыми числами, они могут также принимать отрицательные значения, зависят от времени и условий опыта, а экстрополяция в областях, в которых нет возможности опереться на измерения, вообще чрезвычайно ненадежна или даже бессмысленна. Реакционно-кинетическая интерпретация таких реакций с помощью закона действующих масс нормальным образом не возможна. Но сложные реакции во всех случаях в принципе можно разложить на множество элементарных реакций. Но это в большинстве случаев очень трудно и затратно. Образование воды (10.12) может описываться 38 элементарными реакциями (см., например, Warnatz et. al. 2001), которые в дальнейшем представлены в системе $\mathrm{H_2}$–$\mathrm{O_2}$ при $p = 1$ бар (см. таблицу).

Константы скорости даны в форме $K = AT^{\beta}\exp(-E/RT)$, $[M^*] = [\mathrm{H_2}]+6{,}5[\mathrm{H_2O}]+0{,}4[\mathrm{O_2}]+0{,}4[\mathrm{N_2}]$, а константа скорости обратной реакции рассчитывается по уравнению (10.10).

Реакция	A	β	E
	$[cm \cdot mol \cdot s]$	[–]	$[kJ/mol]$
H_2-O_2			
$O_2 + H = OH + O$	$2{,}0010^{14}$	0,00	70,30
$H_2 + O = OH + H$	$5{,}0610^{04}$	2,67	26,30
$H_2 + OH = H_2O + H$	$1{,}0010^{08}$	1,60	13,80
$OH + OH = H_2O + O$	$1{,}5010^{09}$	1,14	0,42
$H + H + M^* = H_2 + M^*$	$1{,}8010^{18}$	$-1{,}00$	0,00
$O + O + M^* = O_2 + M^*$	$2{,}9010^{17}$	$-1{,}00$	0,00
$H + OH + M^* = H_2O + M^*$	$2{,}2010^{22}$	$-2{,}00$	0,00
HO_2			
$H + O_2 + M^* = HO_2 + M^*$	$2{,}3010^{18}$	$-0{,}80$	0,00
$HO_2 + H = OH + OH$	$1{,}5010^{14}$	0,00	4,20
$HO_2 + H = H_2 + O_2$	$2{,}5010^{13}$	0,00	2,90
$HO_2 + H = H_2O + O$	$3{,}0010^{13}$	0,00	7,20
$HO_2 + O = OH + O_2$	$1{,}8010^{13}$	0,00	$-1{,}70$
$HO_2 + OH = H_2O + O_2$	$6{,}0010^{13}$	0,00	0,00
H_2O_2			
$HO_2 + HO_2 = H_2O_2 + O_2$	$2{,}5010^{11}$	0,00	$-5{,}20$
$OH + OH + M^* = H_2O_2 + M^*$	$3{,}2510^{22}$	$-2{,}00$	0,00
$H_2O_2 + H = H_2 + HO_2$	$1{,}7010^{12}$	0,00	15,7
$H_2O_2 + H = H_2O + OH$	$1{,}0010^{13}$	0,00	15,0
$H_2O_2 + O = OH + HO_2$	$2{,}8010^{13}$	0,00	26,8
$H_2O_2 + OH = H_2O + HO_2$	$5{,}4010^{12}$	0,00	4,20

Концепция использования элементарных реакций чрезвычайно выгодна. Порядок элементарных реакций при всех условиях (в частности, зависимо от времени и от каких-либо условий эксперимента) одинаков и легко определяем. Для этого рассмотрим молекулярность реакции, как число частиц, входящих в активированный реакционный комплекс (это переходное состояние молекул во время реакции). Есть только три значения молекулярности, важные для практики.

Мономолекулярные реакции описывают распад или превращение молекулы

$$\text{A} \rightarrow \text{продукт.} \tag{10.13}$$

Они подчиняются закону действующих масс первого порядка. При удвоении концентрации происходит и удвоение скорости реакции.

Бимолекулярные реакции — это один из наиболее часто встречающихся типов реакции. Они протекают согласно уравнению

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \text{продукт}. \tag{10.14}$$

Бимолекулярные реакции в соответствии с законом действующих масс имеют второй порядок по концентрации. Удвоение концентрации каждого отдельного компонента способствует, смотря по обстоятельствам, удвоению скорости реакции, удвоение концентрации каждого из компонентов приведет к тому, что скорость реакции возрастет в четыре раза.

Тримолекулярные реакции — это в большинстве своем реакции рекомбинации. Они в основном подчиняются закону третьего порядка

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} \rightarrow \text{продукт}. \tag{10.15}$$

В общем, для элементарных реакций имеется соответствие порядка реакции ее молекулярности. Отсюда можно вывести из закона действующих масс закономерности для скорости. Допустим, что уравнение элементарной реакции r выражается через

$$\sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(a)} A_s \overset{k_r}{\rightarrow} \sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(p)} A_s, \tag{10.16}$$

то для закона образования компонента в реакции r уравнение примет вид

$$\left(\frac{\partial c_i}{\partial t}\right)_{\mathrm{chem},r} = k_r(\nu_{ri}^{(p)} - \nu_{ri}^{(a)}) \prod_{s=1}^{S} c_s^{\nu_{rs}^{(a)}}, \tag{10.17}$$

где $\nu_{rs}^{(a)}$ и $\nu_{rs}^{(p)}$ — это стехиометрические коэффициенты для исходных материалов или продуктов, а c_s — концентрации s различных материалов s. Если рассмотреть, например, элементарную реакцию $\mathrm{H} + \mathrm{O}_2 \rightarrow \mathrm{OH} + \mathrm{O}$, то получим таким образом законы скоростей:

$$\frac{d[\mathrm{H}]}{dt} = -k[\mathrm{H}][\mathrm{O}_2], \quad \frac{d[\mathrm{O}_2]}{dt} = -k[\mathrm{H}][\mathrm{O}_2],$$
$$\frac{d[\mathrm{OH}]}{dt} = k[\mathrm{H}][\mathrm{O}_2], \quad \frac{d[\mathrm{O}]}{dt} = k[\mathrm{H}][\mathrm{O}_2].$$

Для элементарной реакции $\mathrm{OH} + \mathrm{OH} \to \mathrm{H_2O} + \mathrm{O}$ (или $2\mathrm{OH} \to \mathrm{H_2O} + \mathrm{O}$) окажется

$$\frac{d[\mathrm{OH}]}{dt} = -2k[\mathrm{OH}]^2, \quad \frac{d[\mathrm{H_2O}]}{dt} = k[\mathrm{OH}]^2, \quad \frac{d[\mathrm{O}]}{dt} = -k[\mathrm{OH}]^2.$$

Таким образом для элементарных реакций, всегда можно из закона действующих масс определить их скорость. Если механизм сложной реакции представлен через все возможные элементарные реакции системы, то он будет действительным для всех возможных условий, т. е для всех температур и *составов*. Для механизма, состоящего из R элементарных реакций, в которых участвуют S различных компонетов, выраженного формулами реакций,

$$\sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(a)} A_s \xrightarrow{k_r} \sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(p)} A_s, \quad r = 1, \ldots, R, \tag{10.18}$$

скорость образования компонента i выразится суммой скоростей, определенных действующими массами (10.17) в отдельных элементарных реакциях:

$$\left(\frac{\partial c_i}{\partial t}\right)_{\mathrm{chem}} = \sum_{r=1}^{R} k_r (\nu_{ri}^{(p)} - \nu_{ri}^{(a)}) \prod_{s=1}^{S} c_s^{\nu_{rs}^{(a)}}, \tag{10.19}$$

где $i = 1, \ldots, S$.

10.1.4. Зависимость констант скорости реакций от температуры

Принципиально важной и типической характеристикой химических реакций является очень сильная и нелинейная зависимость констант скорости реакций от температуры. По Аррениусу 1889 эту температурную зависимость можно выразить относительно простым способом через уравнение Аррениуса

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right). \tag{10.20}$$

При точных измерениях часто отмечают еще одну более слабую температурную зависимость предэкспоненциального множителя A (по сравнению с экспоненциальной зависимостью):

$$k = A' T^b \exp\left(-\frac{E'_a}{RT}\right). \tag{10.21}$$

Энергия активизации E'_a соответствует подъему энергии (порогу), который в течении реакции должен быть преодолен (см. рис. 10.2). Ее максимальное значение соответствует энергиям связи участвующим в реакции компонентов (например, энергия активации в реакциях диссоциации почти равна энергии связи рассматриваемого химического соединения), но может быть также значительно меньше (до 0), если одновременно с разрывом связи образуются новые соединения.

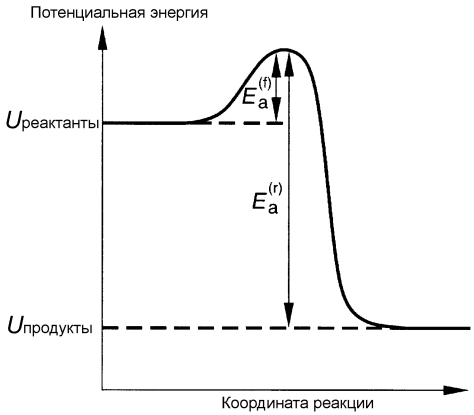


Рис. 10.2. Энергетическая диаграмма элементарной реакции. Отношение $E_a^f - E_a^{(r)} = U_{\text{продукты}} - U_{\text{реагенты}}$ есть следствие (результат) уравнения (10.10). Координата реакции — это путь минимальной потенциальной энергии между реагентами и продуктами по отношению к меняющимся межатомным расстояниям (см. Akkins 1990)

Рис. 10.3 показывает температурную зависимость некоторых элементарных реакций (реакции атома галогена с молекулярным водородом). По оси ординат отложен логарифм констант скорости реакций k, а по оси абсцисс величина, обратная температуре.

Согласно (10.20) получается линейная зависимость $\log(k) = \log(A) - \text{const}[T]$. В температурной зависимости предэкспоненциального фактора может быть скрыта случайная измерительная ошибка.

При весьма малой энергии активации или очень высоких температурах экспоненциальный член в (10.20) приближается к 1. Тогда скорость реак-

ции определяется только предэкспоненциальным фактором A или $A'T^b$. Этот фактор имеет различные физические значения в моно-, би- и тримолекулярных реакциях.

В мономолекулярных реакциях обратное значение A соответствует средней продолжительности существования активной молекулы. В реакциях диссоциации эта продолжительность определяется частотой, с которой колеблются участвующие в образовании молекулы атомы. Предэкспоненциальный фактор выражается удвоенной частотой колебания рассматриваемого соединения. Из оценки частот колебаний в молекулах получим $A \approx 10^{14} - 10^{15}$ с$^{-1}$.

В бимолекулярных реакциях предэкспонентный множитель A соответствует числу столкновений, т. е. количеству соударений молекул за единицу времени, так что числом столкновений обусловлена верхняя граница скорости реакции при отсутствии порога активации или очень высокой температуре. Кинетическая теория газов дает числовые значения для A между 10^{13} и 10^{14} см^3/(моль·с).

В тримолекулярных реакциях во время бимолекулярного столкновения третий компонент должен встретить комплекс, который примет высвобождающуюся при реакции энергию. Если, например, два атома водорода столкнутся, то кратковременно образованная молекула водорода из-за очень большой энергии сейчас же бы снова распалась, если избыток энергии не будет унесен третьим партнером.

Так как очень трудно определить, когда же столкновения третьей молекулы можно будет считать достаточно одновременными, то числовые значения можно вычислить только приблизительно (они вообще плохо рассчитываются).

10.1.5. Зависимость констант скорости реакции от давления

Зависимость констант скорости реакции от давления при диссоциации и рекомбинации связывается здесь со сложными последовательностями реакций, которые рассматриваются как элементарные реакции. В простейшем случае соотношения могут быть представлены с помощью модели Линдемана 1922. Мономолекулярный распад молекулы возможен только в том случае, если молекула обладает достаточной для разрыва связи энергией. По этой причине необходимо, чтобы перед самим разрывом связи молекуле путем столкновения с другой частицей придали бы энергию, дающую толчок к возникновению внутренних колебаний. Таким образом «возбужденная»

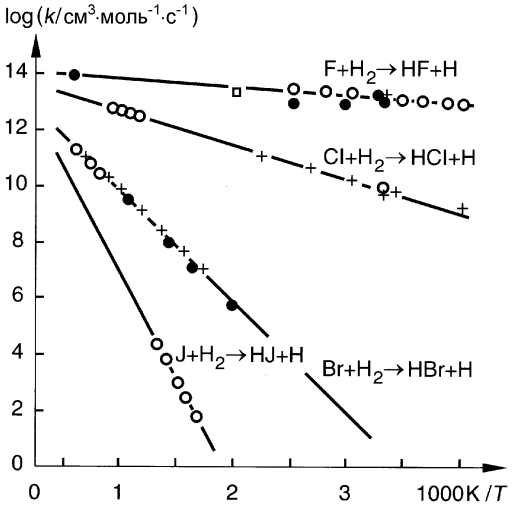


Рис. 10.3. Температурная зависимость $k = k(T)$ для реакций атомов галогена с H_2 (Homann et. al. 1970)

молекула может затем распадаться на продукты реакций:

$$\begin{gathered} A + M \overset{k_a}{\to} A^* + M, \\ A^* + M \overset{-k_a}{\to} A + M, \\ A^* \overset{k_u}{\to} \text{продукт}. \end{gathered} \tag{10.22}$$

Для этого механизма реакции согласно главе 10.1.3 уравнение скоростей будут

$$\frac{d[P]}{dt} = -k_u[A^*], \tag{10.23}$$

$$\frac{d[A^*]}{dt} = k_a[A][M] - k_{-a}[A^*][M] - k_u[A^*], \tag{10.24}$$

Предположим, что концентрация возбужденного промежуточного продукта $[A^*]$ квацистационарна,

$$\frac{d[A^*]}{dt} \approx 0, \tag{10.25}$$

тогда для концентрации активированной частицы A^* и образования продукта реакции P получим следующее уравнение:

$$[A^*] = \frac{k_a[A][M]}{k_{-a}[M] + k_u}, \tag{10.26}$$

$$\frac{d[P]}{dt} = \frac{k_u k_a[A][M]}{k_{-a}[M] + k_u}. \tag{10.27}$$

Существует два предельных случая, а именно реакции при очень низком и очень высоком давлении.

Для области низкого давления концентрация M очень низкая. При $k_{-a} \ll k_u$ отсюда следует закон второго порядка для скорости реакции:

$$\frac{d[P]}{dt} = k_a[A][M]. \tag{10.28}$$

Скорость реакции потому пропорциональна концентрации вещества A и партнера по столкновению M, так как при низком давлении активация молекулы идет медленно и тем самым является лимитирующей характеристикой скорости.

Для области высокого давления концентрация вещества M очень высока и при $k_{-a} \gg k_u$ получим в качестве упрощения закон скорости первого порядка:

$$\frac{d[P]}{dt} = \frac{k_u k_a}{k_{-a}}[A] = k_\infty[A]. \tag{10.29}$$

Скорость реакции здесь не зависит от концентрации партнера по столкновению, так как при высоком давлении происходят очень часто столкновения и поэтому не активация, а распад активной частицы A^* является определяющим фактором для скорости реакции.

Механизм Линдемана является простым примером тому, что порядки скорости реакции в сложной реакции зависят от соответствующих условий. Правда, механизм Линдемана сам является упрощенной моделью.

Точные результаты зависимости от давления мономолекулярных реакций можно получить с помощью теории мономолекулярных реакций (см., например, Robinson, Holbrook 1972, Homann 1975). Согласно этой теории учитывается, что в действительности существует не только активная частица A^*, но и после передачи энергии при активации образуются различные степени активации. Если закон скорости мономолекулярной реакции

записать $d[P]/dt = k[A]$, то константа скорости k будет зависеть от давления и температуры. Из этой теории мономолекулярных реакций получают так называемые кривые «насыщения–распада», которые показывают зависимость коэффициента скорости k от давления для различных температур. В большинстве случаев логарифм k строится в зависимости от логарифма p. Типичные кривые «насыщения–распада» представлены на рис. 10.4. При $p \to \infty$ k стремится к предельному значению k_∞, т. е. константа скорости становится независимой от давления (уравнение (10.29)). При низком давлении константа скорости k пропорциональна давлению (уравнение (10.28)), что дает линейную зависимость. Как видно из рис. 10.4, кривая «насыщения–распада» сильно зависит от температуры. Поэтому константы скорости мономолекулярных реакций представляют для разных значений давления очень часто различные температурные зависимости (см. рис. 10.5, Warnatz 1983).

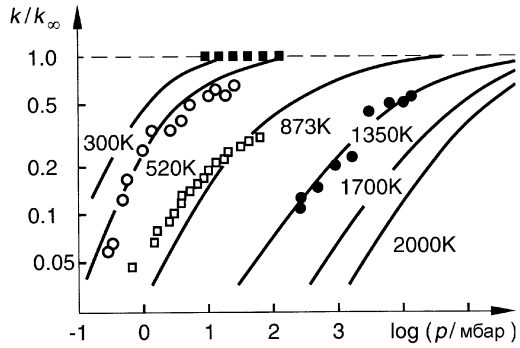


Рис. 10.4. Кривые «насыщения–падения» для мономолекулярного распада $C_2H_6 \to CH_3 + CH_3$

10.1.6. Свойства механизма реакций

Независимо от специфичности конкретной реакции механизмы реакций имеют некоторые общие характерные свойства. Знание этих свойств способствует пониманию особенностей химической реакции и может кроме того существенно упростить представление о механизме реакции. Особого внимания заслуживает квазистационарность и частичные равновесия в процессах горения, которые дальше подробно рассматриваются.

Квазистационарность

Рассмотрим простую последовательность реакций из двух стадий, которые и в следующих разделах будут применяться в качестве примера

$$S_1 \overset{k_{12}}{\to} S_2 \overset{k_{23}}{\to} S_3. \tag{10.30}$$

Уравнения кинетики для появляющихся веществ представятся как

$$\frac{d[S_1]}{dt} = -k_{12}[S_1], \tag{10.31}$$

$$\frac{d[S_2]}{dt} = k_{12}[S_1] - k_{23}[S_2], \tag{10.32}$$

$$\frac{d[S_3]}{dt} = k_{23}[S_2]. \tag{10.33}$$

Предположим, что S_2 весьма реакционноспособная и поэтому краткосуществующая частичка. Этому соответствует $k_{23} > k_{12}$. Рис. 10.6 показывает изменение концентрации при соотношении $k_{12}/k_{23} = 0.1$. Одновременно с образованием конечного продукта (S_3) изменяется концентрация исходного материала $[S_1]$. Так как $k_{23} \gg k_{12}$, то промежуточный продукт $[S_2]$ появляется только в очень малой концентрации. Как только он образуется в медленной первой стадии реакционной последовательности, он тут же исчезнет в результате очень быстрой следующей реакции. Так появляется квазистационарность промежуточного продукта.

Так как S_2 должна быть очень реакционной, то скорость расходования S_2 должна быть примерно равной скорости образования S_2 (предположение квазистационарности), и все это можно приблизительно записать как формулу

$$\frac{d[S_2]}{dt} = k_{12}[S_1] - k_{23}[S_2] \approx 0. \tag{10.34}$$

Изменение концентрации по времени S_1 можно определить проинтегрировав (10.31). Получим:

$$[S_1] = [S_1]_0 \exp(-k_{12}t). \tag{10.35}$$

Что касается скорости образования конечного продукта S_3, то уравнение (10.33) мало информативно, так как в законе скорости для S_3 появляется концентрация трудно определяемого промежуточного продукта S_2. При

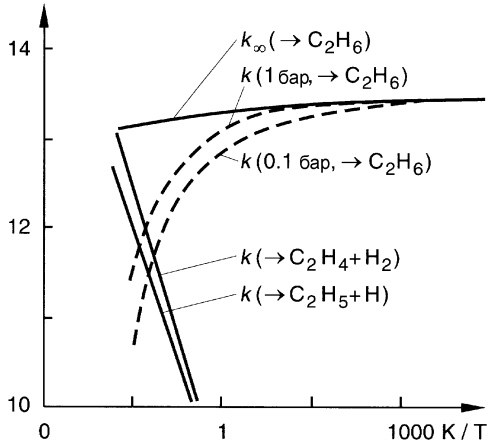


Рис. 10.5. Температурная зависимость констант скоростей для реакций в зависимости от давления для реакции $CH_3 + CH_3 \rightarrow$ продукты.

предположении о квазистационарности (10.34) получим просто преобразованную формулу

$$\frac{d[S_3]}{dt} = k_{12}[S_1]. \tag{10.36}$$

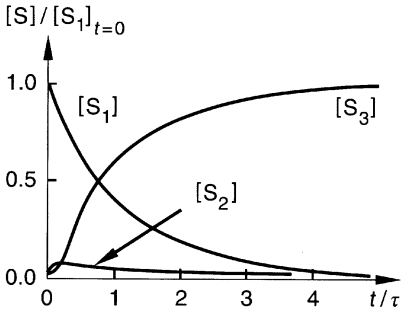


Рис. 10.6. Течение по времени реакции $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$; $\tau =$ $=$ характерное время продолжительности существования S_1 (время, за которое концентрация $[S_1]$ уменьшится до $[S_1]/e$)

Применяя уравнение (10.35) в этой формуле, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d[S_3]}{dt} = k_{12}[S_1]_0 \exp(-k_{12}t), \tag{10.37}$$

которое можно проинтегрировать, вследствие чего получается уравнение

$$[S_3] = [S_1]_0[1 - \exp(-k_{12}t)]. \tag{10.38}$$

Результаты данного вверху примера представлены на рис. 10.7. Сравнивая рис. 10.6 и 10.7, следует признать, что предположение о квазистационарности дает хорошее приближение процесса. Лишь в начальной стадии реакции наблюдаются небольшие отклонения.

Квазиравновесие

Здесь рассматривается механизм горения водорода, представленный в главе 10.1.3. Анализ экспериментов или моделирований показывает, что при высоких температурах ($T > 1800\,K$ при $p = 1$ бар) скорости прямых и обратных реакции настолько быстрые, что для реакций устанавливается так называемое частичное равновесие (квазиравновесие), при котором каждая отдельно взятая пара находится в равновесии.

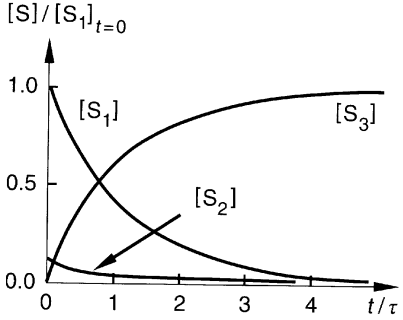


Рис. 10.7. Течение по времени реакции $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$ при квазистационарности $[S_2]$

Отсюда прямые и обратные реакции происходят очень быстро и, приравнивая скорости реакции получим

$$[\mathrm{H}] = \left(\frac{k_1^2 k_3 k_5 [\mathrm{O_2}][\mathrm{H_2}]^3}{k_2 k_4 k_6 [\mathrm{H_2O}]^2} \right)^{1/2}, \tag{10.39}$$

$$[\mathrm{O}] = \frac{k_1 k_3 k_5 [\mathrm{O_2}][\mathrm{H_2}]}{k_2 k_4 [\mathrm{H_2O}]}, \tag{10.40}$$

$$[\mathrm{OH}] = \left(\frac{k_3 k_5 [\mathrm{O_2}][\mathrm{H_2}]}{k_4 k_6} \right)^{1/2}. \tag{10.41}$$

Концентрацию (плохо измеряемых, потому что оценка затруднена) нестабильных частиц, которую трудно измерить, можно выразить через концентрацию стабильных частиц $\mathrm{H_2}, \mathrm{O_2}$ и $\mathrm{H_2O}$, которая легко измеряется.

На рис. 10.8 показаны, пространственные профили мольной доли атомов кислорода в пламени предварительно перемешанной стехиометрической смеси $\mathrm{C_3H_8}$ — воздух при $p = 1$ бар, $T_4 = 298K$, рассчитанные как с помощью полного механизма реакции,так и при предположении частичного и полного равновесия. Если при предположении полного равновесия при всех температурах получаются не удовлетворительные результаты, то при предположении частичного равновесия мольные концентрации атомов кислорода при достаточно высоких температурах хорошо согласуются. Следует заметить, что рассмотренная здесь концентрация атомов кислорода в реагирующей системе в значительной мере влияет на образование окислов азота.

Анализ чувствительности

Следующие из закона действующих масс уравнения кинетики для R реакций, в которых участвуют S компонеттов, можно записать в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. главу 10.1.3):

$$\frac{dc_i}{dt} - F_i(c_1, \ldots, c_s; k_1, \ldots, k_R), \quad c_i(t = t_0) = c_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, S). \tag{10.42}$$

где время t — это независимая переменная, концентрации c_i вещества i — зависимые переменные и k_Γ — это параметры системы. Через c_i^0 — обозначены начальные условия. Как параметры системы здесь рассматриваются только константы скорости химических реакций. Но совершенно аналогично при необходимости можно те же начальные условия, давления и т. д. определить в качестве параметров системы. Решение системы уравнений (10.42) зависит как от начальных условий, так и от параметров. Интерес представляет вопрос, как изменится решение (т. е. концентрации по времени t), если параметры системы, т. е. константы скоростей химических

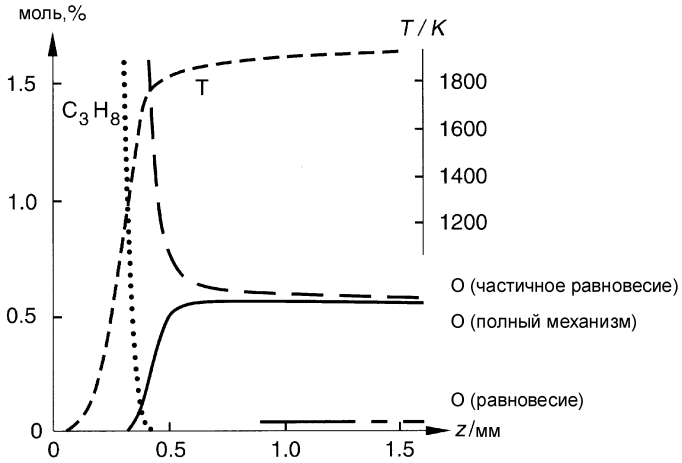


Рис. 10.8. Мольные доли O в смеси пламени C_3H_8 — воздух при $p = 1$ бар, $T_u = 298K$, рассчитанные с помощью механизма в предположении частичного и полного равновесия

реакций, изменятся. Ответ на этот вопрос дает как информация о стадиях реакции, определяемых по скорости, так и указания на то, как влияют неточности определения констант скорости реакции на общее протекание реакции (некоторые элементарные реакции, происходящие в течениях реагирующего газа, известны точно только по порядку величин).

Чувствительностью называют зависимость решения c_i от параметров k_r. Причем различают абсолютную и относительную чувствительность:

$$E_{i,r} = \frac{\partial c_i}{\partial k_r}, \quad E^{\mathrm{rel}}_{i,r} = \frac{k_r}{c_i}\frac{\partial c_i}{\partial k_r} = \frac{\partial \ln c_i}{\partial \ln k_r}. \tag{10.43}$$

Теперь снова рассмотрим простую последовательность реакции из двух стадий (10.30). Изменение во времени относительных коэффициентов чувствительности изображены вместе с концентрацией конечного продукта на рис. 10.9, здесь для $k_{12} = \tau^{-1}, k_{23} = 100\tau^{-1}$ (τ — это продолжительность см. 10.6).

Результаты анализа чувствительности таковы: при медленной (т. е. лимитируемой по скорости) реакции ($S_1 \overset{k_{12}}{\to} S_2$) имеет место высокая относительная чувствительность образования S_3, при быстрой реакции (течение

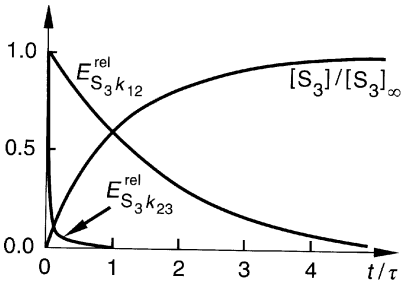


Рис. 10.9. Изменение во времени относительных коэффициентов чувствительности для реакции $S_1 \to S_2 \to S_3$.

реакции не сдержанное, без помех) ($S_2 \overset{k_{23}}{\to} S_3$) имеет место малая относительная чувствительность. Таким образом, анализ чувствительности может идентифицировать реакции, лимитируемые скоростью. Такой анализ поэтому является важным инструментом в понимании сложных механизмов реакции.

На рис. 10.10 в качестве примера представлен анализ чувствительности для скорости распространения пламени в предварительно перемешанных смесях CH_4 —воздух и C_2H_6 — воздух. Те элементарные реакции, которые не изображены на диаграмме, имеют крайне незначительную чувствительность. Известно, что только немногие из большинства элементарных реакций являются определяющими для чувствительности, кроме того для весьма разных систем (CH_4 и C_2H_6) проявляется одинаковая качественная картина, свидетельствующая, что в процессах горения независимо от используемого горючего некоторые элементарные реакции в системе $H_2 - O_2 - CO$ всегда являются лимитирующими скорость реакции.

10.2. Ламинарные реагирующие течения

10.2.1. Структура пламени

В дальнейшем для некоторых типичных случаев приводится сравнение экспериментальных (если они имеются) и расчетных данных о структуре ламинарных плоских фронтов пламени. В основе численного моделирования лежит детальный механизм.

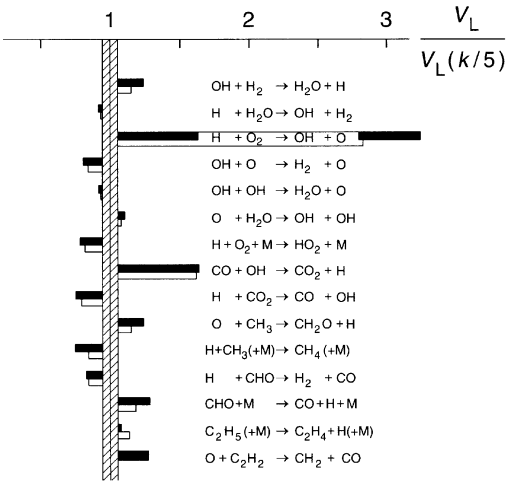


Рис. 10.10. Анализ чувствительности для скорости распространения пламени v_L в пламени предварительно перемешанных смесях CH_4 — воздух (черные прямоугольники) и C_2H_6 — воздух (белые прямоугольники), где $p = 1$ бар, $T_u = 298\,K$

Представим себе, что при условиях ($T > 1100$ K) начинается окисление алифатического углеводорода RH (как, например, октан C_8H_{18}, см. рис. 10.11) в результате присоединения H_2O или OH к соединению C–H с образованием радикала $R\bullet$.

$$\dot{\mathrm{H}}, \dot{\mathrm{O}}, \dot{\mathrm{O}}\mathrm{H} + \mathrm{RH} \rightarrow \mathrm{H_2}, \dot{\mathrm{O}}\mathrm{H}, \mathrm{H_2O} + \mathrm{R}\bullet \tag{10.44}$$

что затем ведет в результате термического распада к образованию алкана и меньшего радикала R'

$$\mathrm{R'} - \mathrm{CH_2} - \mathrm{H} - \mathrm{C} - \mathrm{R''} \rightarrow \bullet\mathrm{R'} + \mathrm{CH_2} = \mathrm{CHR''} \tag{10.45}$$

вплоть до образования относительно стабильных радикалов — метильного (CH_3) и этильного (C_2H_5), которые затем окисляются. Таким образом проблему окисления алкана можно объяснить относительно хорошо известным окислением метильного и этильного радикалов (см. рис. 10.12).

Радикалы CH_3 реагируют в основном с атомами O с образованием формальдегида (точный процесс окисления CH_3 с помощью OH еще полностью не объяснен). Затем образуется из-за отделения атома H радикал CHO.

CHO может термически распадаться на CO и H или атом H может отделиться от H или O_2.

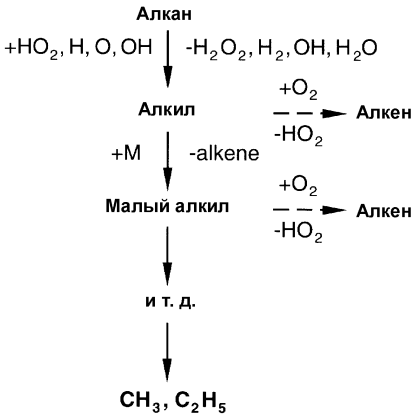


Рис. 10.11. Схема механизма реакции радикального пиролиза крупного алифатического углеводорода с образованием CH_3 и C_2H_5

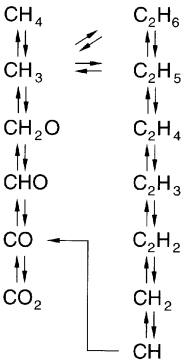


Рис. 10.12. Схема механизма окисления C_1 и C_2 углеводорода

Этот до сих пор считающийся простым процесс усложняется с помощью рекомбинации радикалов CH_3. В пламени стехиометрической смеси

CH_4— воздух таким механизмом потребляется около $30\%\,CH_3$ (если не рассматривается рекомбинация с H атомами). В горящем пламени увеличивается доля рекомбинации примерно до 80%. Окисление CH_3 и C_2H_5 является определяющей по скорости (т. е. медленной) стадией в этом механизме окисления (см. рис. 10.17 и 10.18) и поэтому является причиной подобия горения всех алканов и алкенов. С этим связан тот факт, что механизм реакции горения углеводорода имеет иерархическую структуру, как это показано на рис. 10.13 (Westbrook, Dryer 1981).

На рис. 10.14 в качестве примера показана структура пламени в предварительно перемешанной смеси пропан/кислорода (разбавленной аргоном) (Bockhorn et al 1990) с давлением $p = 100$ милибар. Для других углеводородов получены соответствующие результаты

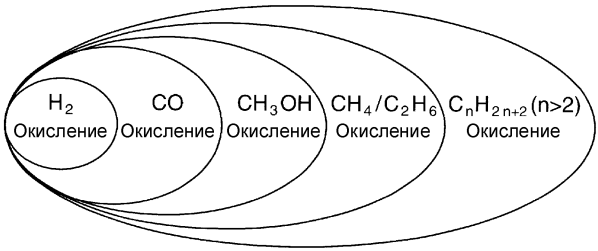


Рис. 10.13. Иерархическая структура механизма реакций, описывающего горение алифатичного углеводорода

Профили концентрации при это определяются с помощью масспектрометра (кроме OH, который определяется измерением абсорбции в ультрафиолетовом излучении), температура измеряется методом обращения линий Na–D.

Другим примером является пламя смеси ацетилен–кислород (Warnatz 1983) при условиях воспламенения. Здесь типичным является появление CO и H_2 в качестве стабильных конечных продуктов и кроме того образование высших углеводородов, которые находятся в соединении, например, с C_4H_2.

10.2.2. Скорость распространения пламени смеси

Зависимость скорости распространения пламени от давления и температуры в случае одношаговой реакции (Zeldovich, Frank-Kamenetskii 1938)

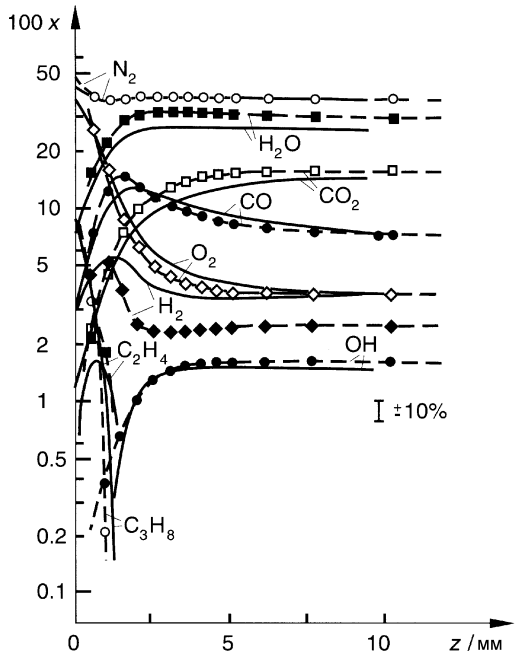


Рис. 10.14. Структура ламинарного пламени предварительно перемешанной смеси пропан/кислород (разбавленной аргоном) при $p = 100$ милибар (Bockhorn 1990)

выразится

$$v_L \approx p^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{E}{2RT_b}\right). \tag{10.46}$$

На рис. 10.15 показана зависимость скорости пламени от давления и температуры T_u для смесей метана и воздуха. В дополнении к этому рис. 10.16 показывает зависимость скорости пламени от состава для различных горючих.

На рис. 10.15 ясно видна слабость одношаговой модели (T_u обозначает при этом температуру несгоревшего газа). Для определяющейся по скорости стадии (см. следующую главу) подходят реакции 2 или 3 порядка и упрощенная модель тем самым предсказывает либо независимость от давления, либо даже положительную зависимость от давления. Численные

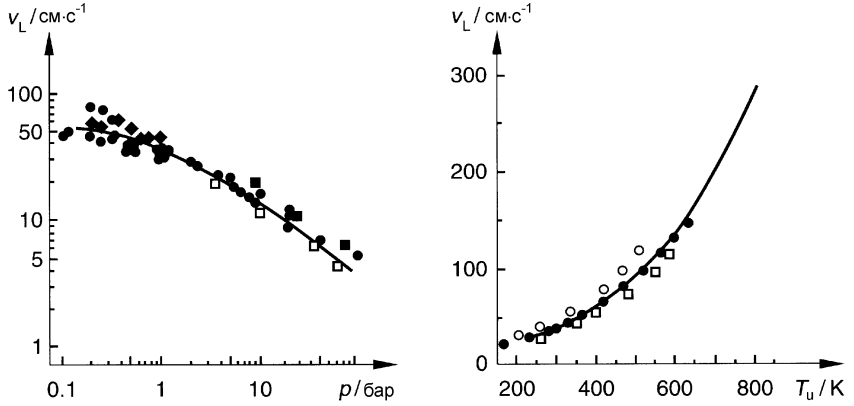


Рис. 10.15. Зависимость v_L от давления для $T_u = 298\,K$ (слева) и от температуры при $p = 1$ бар (справа) в стехиометрической смеси CH_4–воздух

результаты наоборот показывают значительную отрицательную степень в зависимости скорости горения от давления.

10.2.3. Анализ чувствительности

Анализ чувствительности (см. главу 10.1.6) дает для всех смесей воздуха и углеводорода по всем скоростям совершенно сходные результаты, (Nowak 1988 см. рис. 10.17 и 10.18). Кроме того результаты достаточно слабо зависят от рассмотренного эквивалентного соотношения. Особенно следует отметить малое число реакций с наличием заметной чувствительности.

Во всех случаях элементарная стадия $H + O_2 \rightarrow OH + O$ является лимитирующей по скорости как самая медленная реакция с разветвленной цепью, в то время как $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ показывает отрицательную чувствительность вследствие склонности к разрыву цепи, а $CO + OH \rightarrow CO_2 + H$ определяет выделение тепла и по этой причине точно также является лимитирующей.

При горении больших альфатических атомов углеводорода также окажется, что реакции $H + O_2 \rightarrow OH + O$, $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$, $CO + OH \rightarrow CO_2 + H$ являются лимитирующими, как это проиллюстрировано на рис. 10.19. На нем отчетливо видно, что специфические реакции с горючими материалами не выявляют существенной чувствительности.

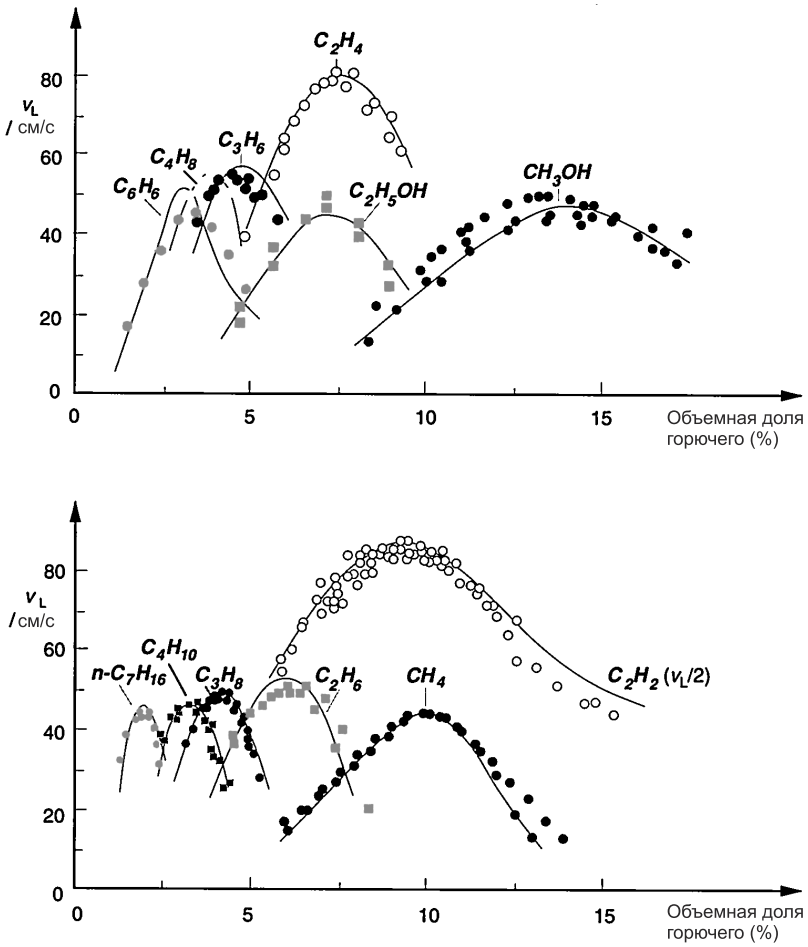


Рис. 10.16. Зависимость скорости распространения пламени (при $p = 1$ бар, $T_u = 298$ К) v_L от состава для различных горючих смесей

10.2.4. Диффузионное пламя с противотоком

При горении предварительно не перемешанной смеси речь идет о пламени, в котором горючее и окислитель смешиваются только в области горе-

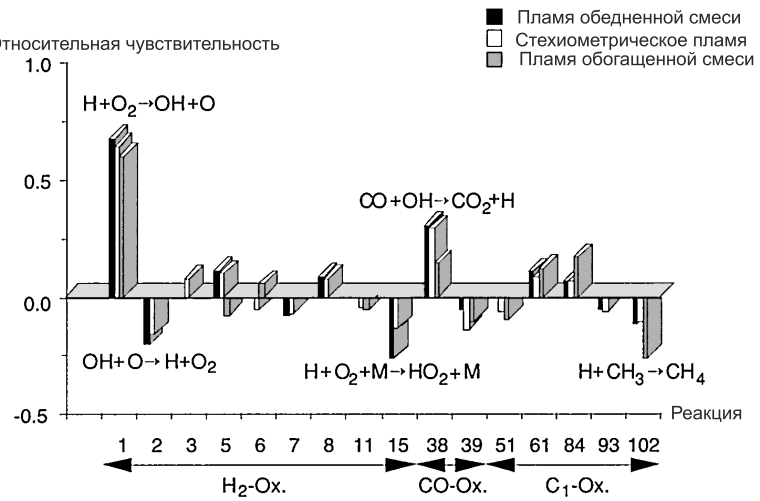


Рис. 10.17. Анализ чувствительности для скорости распространения ламинарного пламени в смеси воздуха и метана в отношении констант скорости элементарных реакций, участвующих в процессе

ния. На практике горючее и воздух подаются с помощью конвекции, а затем смешиваются в результате диффузного процесса.

В общем это представляется трехуровневой проблемой.

Глубокое понимание процессов распространения пламени в предварительно не перемешанной смеси дают эксперименты, в которых процессы рассматриваются, как пространственно одномерные. Примером такого простого устройства является горелка со встречными потоками (см. Du et al. 1989), в которой ламинарный поток горючего сталкивается с ламинарным противотоком окислителя (см. рис. 10.20.). Можно значительно упростить математическую трактовку, ограничась в рассмотрением процесса вдоль плоскости взаимодействия потоков (см. рис. 10.20). Используя приближение пограничного слоя Прандтля (т. е. пренебрегая диффузией в направлении, перпендикулярном к подаче, на рис. 10.20 в направление x), проблема сводится к одной пространственной координате, а, именно, расстоянию от точки торможения. Таким образом, можно исключить тангенциальные градиенты температуры и массовых концентраций, а также компоненты скорости v_x.

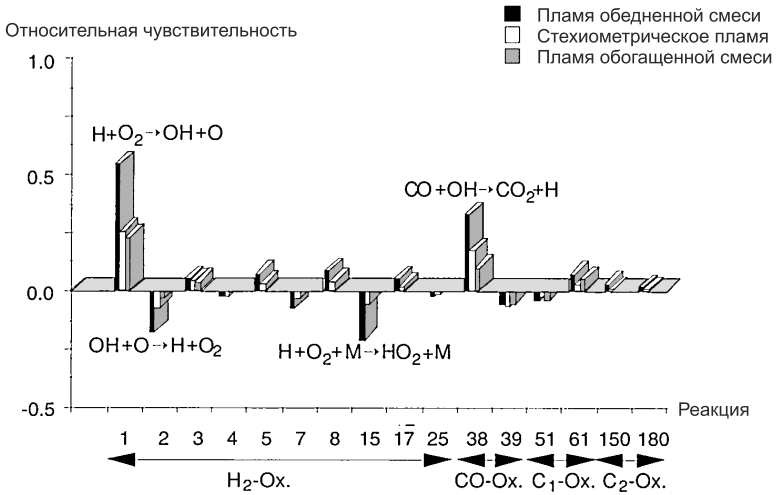


Рис. 10.18. Анализ чувствительности для скорости распространения ламинарного пламени в смеси воздуха и пропана

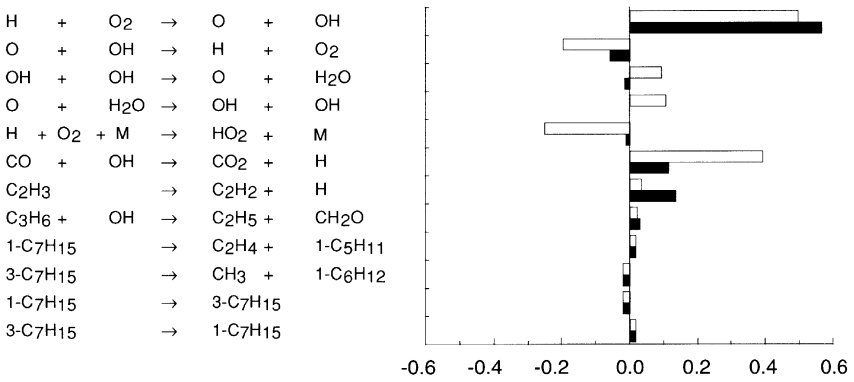


Рис. 10.19. Анализ чувствительности для скорости ламинарного n-пламени в стехиометрической смеси воздуха и гептана при $p = 1$ бар, $T_u = 298$ К

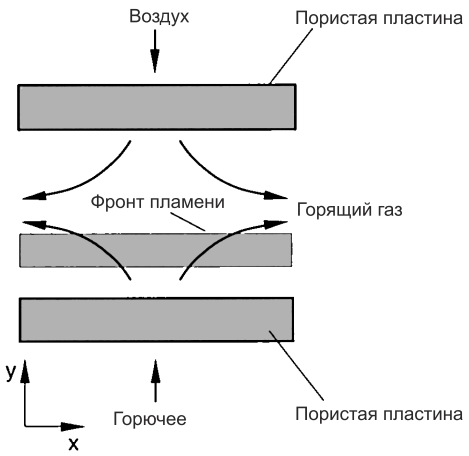


Рис. 10.20. Схематичное изображение пламени во встречных потоках горючего и воздуха

Если рассматривать решения только по оси y и по оси симметрии, проведенной через точку торможения, то получим систему уравнений, которая зависит только от времени t и пространственной координаты y в качестве независимой переменной. Градиент давления J является собственным значением задачи, т. е. при заданных граничных условиях J должен быть таким, чтобы решение существовало. Вследствие этого можно рассчитать профили температур, концентрации и скорости в ламинарном пламени предварительно неперемешанной смеси при противоточном ее течении и сравнить с экспериментальными результатами.

На рис. 10.21 показаны рассчитанные и полученные экспериментальным путем профили концентрации и температуры (с помощью спектроскопии CARS) в пламени предварительно не перемешанной смеси метана и воздуха при давлении $p = 1$ бар. Температура поступающего воздуха в эксперименте составляет 300 К.

Сравнение измеренных и рассчитанных профилей скоростей показано на рис. 10.22. Скорости определяются экспериментальным путем по следам частиц добавленного MgO. Форму профиля скорости можно объяснить просто: нереагирующее течение характеризуется монотонным переходом от скоростей на обоих концах в имеющейся здесь пограничный слой. Однако

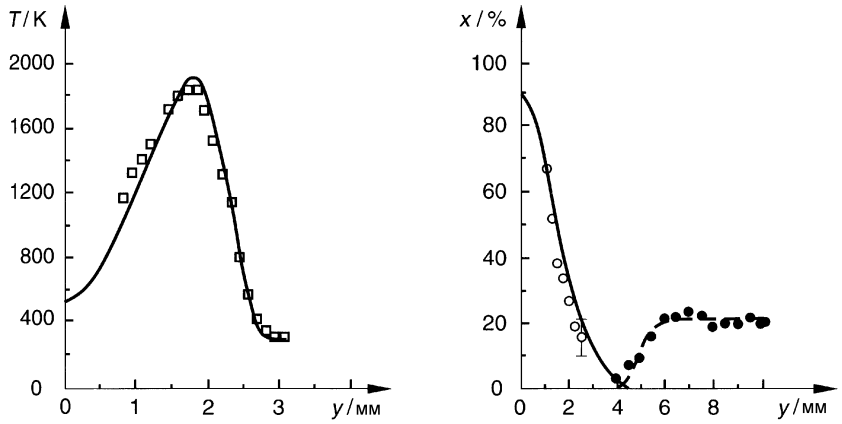


Рис. 10.21. Слева: рассчитанные и определенные экспериментально профили температур предварительно не перемешанной смеси метана и воздуха при давлении $p = 1$ бар, y — расстояние до горелки (Sick et al. 1991). Справа: рассчитанные и экспериментально определенные профили концентрации метана и кислорода в пламени предварительно не перемешанной смеси воздуха и метана при давлении $p = 1$ бар, y — расстояние до горелки (Dreier et al. 1987)

при горении происходит дополнительно значительное изменение плотности (обусловленное высокой температурой в сгоревшем газе), что вызывает в области фронта пламени (около $y = 3$ мм) отклонение от монотонного поведения.

10.2.5. Горение ламинарных струй предварительно не перемешанной смеси

При точном описании этого типа пламени требуется по меньшей мере неодномерное трактование, а именно, двухмерное. Этот тип горения очень важен, потому что он широко распространен (горелка Бунзена). Из сопла в воздух вытекает горючее. Вследствие диффузии воздух и горючее смешиваются и загораются в зоне реакции.

Структура такого несмешанного пламени горелки Бунзена представлена на рис. 10.23 и 10.24 на примерах. Результаты были получены решением системы двумерных уравнений сохранения. Диаметр сопла, подводящего горючее составляет в этом примере 1,26 см, высота пламени — 30 см.

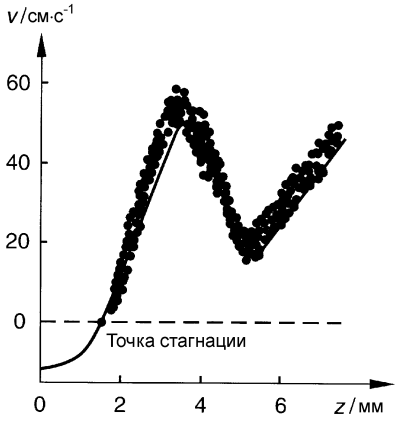


Рис. 10.22. Рассчитанные (линия) и экспериментально полученные (точки) профили скоростей в пламени предварительно не перемешанной смеси метана и воздуха, y обозначает расстояние до горелки

10.2.6. Пламя предварительно не перемешанной смеси с быстропротекающими химическими реакциями

В случае бесконечно быстрых химических реакций можно дать приближение в форме одношаговой реакции горючего и окислителя с образованием продуктов реакции

$$\mathrm{F} + \mathrm{Ox} \rightarrow \mathrm{P}. \tag{10.47}$$

Это соответствует положению «что смешалось — то сгорело» предложенному в 30-е годы H. Rummel (см. например, Guenther, 1987). По аналогии с массовыми долями компонентов w_i можно определить долю химического элемента Z_i, который представим как отношение массы химического элемента i в общей массе (5.115):

$$Z_i = \sum_{j=1}^{S} \mu_{ij} w_i, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{10.48}$$

где S — это количество вещества, а M — это число элементов в смеси. Коэффициент μ_{ij} обозначает массовую долю элемента i в компоненте j.

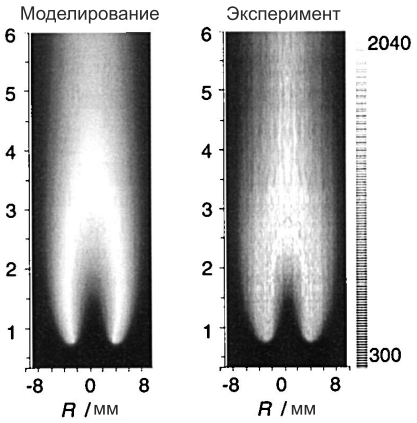


Рис. 10.23. Рассчитанное температурное поле (слева) в ламинарном струйном пламени. Результаты можно непосредственно сравнить с соответствующими результатами экспериментов LIF (справа) (Smooke et al. 1989, Long et al. 1993). Шкала температур и концентрации начинается от темного изображения. Максимальная температура примерно 2000 K, максимальная относительная массовая концентрация радикала OH составляет 0,35%

Доли химических элементов имеют особое значение, т. к. они в реагирующем течении не могут изменяться в химическом процессе.

Для простого пламени неперемешанной смеси, которое можно представить в виде двух потоков, причем один поток — это горючее (F), а другой поток — это окислитель Ox, можно определить переменную смешения ξ с помощью массовых долей элемента Z_i (индексы 1 и 2 обозначают оба потока):

$$\xi = \frac{Z_i - Z_{i2}}{Z_{i1} - Z_{i2}}. \tag{10.49}$$

Преимущество этой формулы состоит в том, чтовеличина ξ из (10.48) и (10.49) связана линейным способом с массовыми долями (см. рис. 10.25). Если коэффициенты диффузии различных компонентов одинаковы (что за некоторым исключением часто применяется для приближенного описания), то переменная смешения, определенная таким образом, не зависит от выбора элемента $i\,(i = 1, \ldots, M)$.

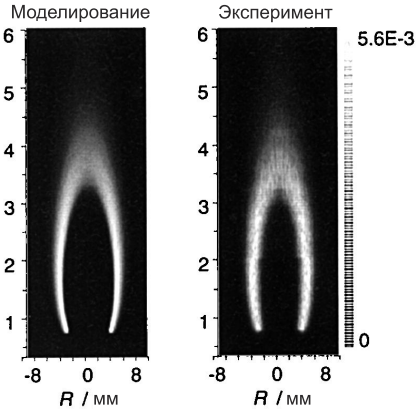


Рис. 10.24. Рассчитанная концентрация гидроксида (слева) в диффузионном струйном пламени. Результаты можно непосредственно сравнить с соответствующими результатами экспериментов LIF (справа) (Smooke et al. 1989, Long et al. 1993)

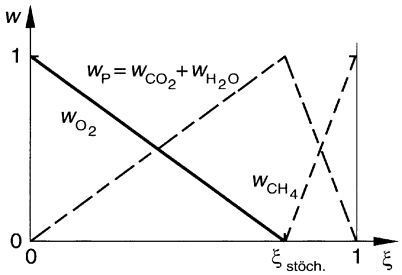


Рис. 10.25. Линейная зависимость между переменной смешения и массовыми долями для простой системы реакций

10.2.7. Очищение выхлопных газов с помощью источников плазмы

В связи с более рациональным использованием ресурсов и усиливающимися требованиями к защите окружающей среды введены более строгие нормы для предельных значений параметров выбросов двигателей внутреннего сгорания транспортных средств. Наряду с этими первичными мерами по предотвращению загрязнения во время горения интенсивно исследова-

лись способы очищения отработанного газа с целью получения предписанных законом предельно допустимых значений.

Трехуровневые катализаторы для снижения NO_x, несгоревшего углеводорода и CO дают у двигателя Отто примерно 90% преобразований, если двигатель работает на стехиометрической смеси горючего и воздуха. Дизели и моторы Отто прямого вспрыска сжигают обеденную смесь горючего и воздуха и производят отработанный газ с обычным содержанием кислорода 5% (двигатель Отто) и до 20% (двигатель Дизеля). В катализаторах из благородного металла окислительные процессы при этих условиях происходят только с O_2, из-за чего уменьшается только CO и несгоревший углеводород (HC), а уменьшение NO_x приостанавливается. Поэтому все большее значение приобретают плазматические процессы по очищению отработанного газа.

Плазменный метод, характеризующийся небольшими затратами является методом очистки с диэлектрически замедленной разрядкой.

Рис. 10.26 показывает принципиальное устройство реактора. Такие плазменные реакторы недавно интенсивно исследовались, чтобы выявить их возможности относительно окисления несожженного углеводорода и реакции NO_x в отработанном газе. Была выявлена возможность снижения

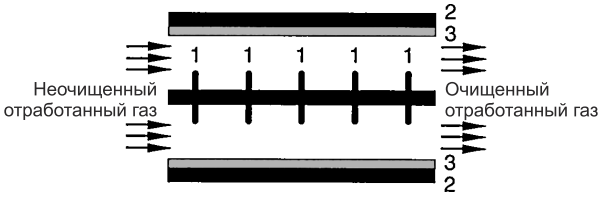


Рис. 10.26. Принципиальная схема плазменного реактора для очистки газов (1 — внутренние электроды, 2 — внешние электроды, 3 — диэлектрик)

содержания углеводорода и ее специфичная зависимость от несожженного углеводорода (Orlandini, Riedel 2000). На рис. 10.27 показано достигнутое снижение газа, состоящего из $72\%\,N_2$, $18\%\,O_2$, $10\%\,H_2O$ и $440\,ppm$ – $-\,540\,ppm$ несожженного углеводорода (зависит от условий эксперимента). В качестве углеводорода исследуются этан (C_2H_6), пропан C_3H_8 и этилен C_2H_4.

Разное уменьшение можно объяснить реакционными и кинетическими эффектами в течении, которые, в свою очередь, объясняются влиянием

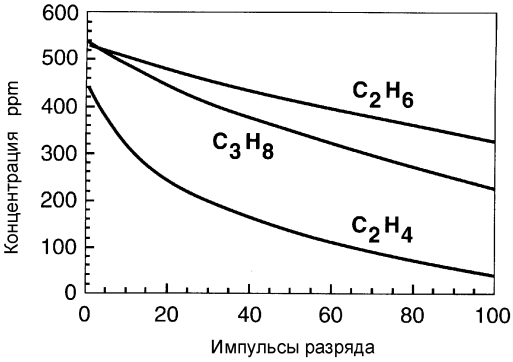


Рис. 10.27. Моделирование снижения C_2H_6, C_3H_8, C_2H_4 в плазмореакторе как функции числа импульсов разрядки

хода реакции и ее чувствительностью. Кроме того, было установлено, что в кислородосодержащих отработанных газах NO окисляется в основном в NO_2. Менее 10% имеющегося сначала NO превращается до N_2. Для удаления NO_2 необходимы другие меры, например каталитическая редукция или редукция с аммиаком.

На рис. 10.28 показано понижение концентрации C_2H_4 вследствие плазменного источника для обработанного газа состава $72\% N_2$, $18\% O_2$, $10\% H_2O$ и $540\, ppm$ несожженного этилена и объема газа в 500 литров за минуту.

Также показано распределение по первым четырем стадиям в реакторе. Понижение концентрации этилена неоднородно, поперечно направлению течения, потому что нужные для снижения и полученные при разряде плазмы радикалы точно также распределяются неоднородно.

10.2.8. Течения в протравливающих реакторах

При изготовлении полупроводников на стадиях обработки применяют методы травления, причем жидкое травление — протравка с жидкими химикатами сменяется все чаще методом сухой травки с реагирующим газом. Протравливающие газы часто производятся в верхней части реактора с помощью плазменного источника и затем направляются в реактор. На рис. 10.29 показано принципиальное устройство реактора.

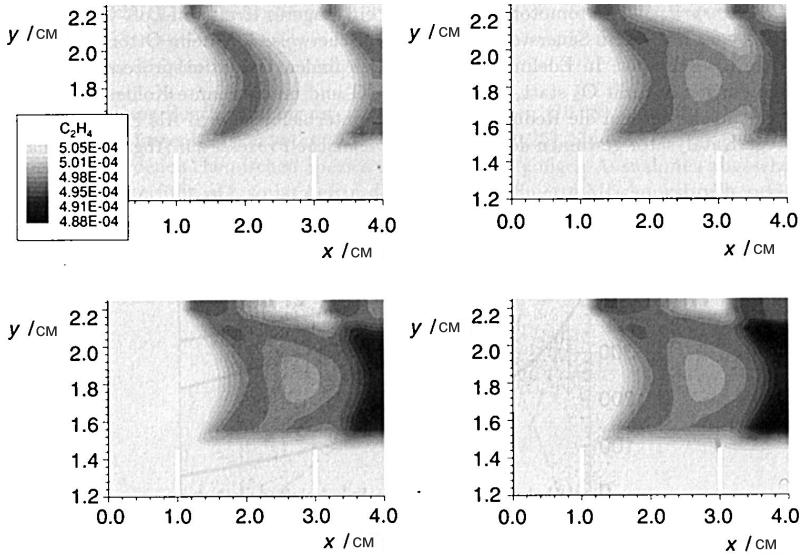


Рис. 10.28. Снижение C_2H_4 в плазмареакторе $t = 0.5$ мс (слева вверху), $t = 1.0$ мс (справа вверху), $t = 1.5$ мс (снизу слева) и $t = 2.0$ мс (слева снизу)

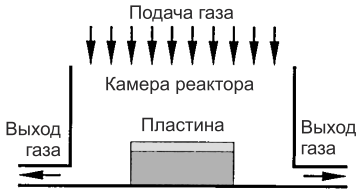


Рис. 10.29. Принципиальная схема протравливающего реактора

Чтобы износ материала был равномерным, эти испытания проводятся при низком давлении и низких скоростях течения, т. к.в этих условиях диффузия превышает конвекцию и фактор реакций и обеспечивает необходимое распределение реактивов.

Процессы на верхней поверхности тесно связаны с течением и диффузией в газовой фазе. Часть попадающих на подложку частиц там поглощает-

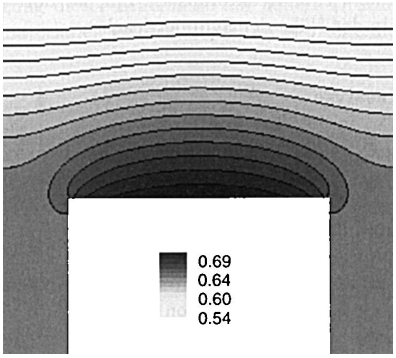


Рис. 10.30. Распределение реакторного продукта SiF_4 в реакторе при протравливании кремния фтором при давлении 40 Па

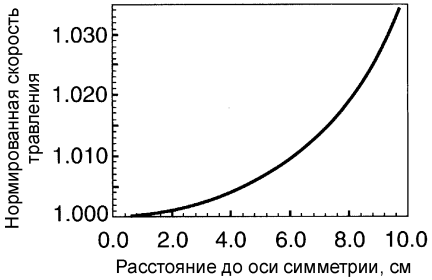


Рис. 10.31. Нормированная скорость травления как функция расстояния до оси симметрии

ся и может реагировать с другими добавками из газовой фазы. Возникающие таким образом продукты реакции могут десорбироваться и возвращаться в газовую фазу.

Рис. 10.30 показывает распределение продукта SiF_4 в симметричном реакторе (состав входящего газа — 70% атомов F и 30% молекул N_2), который образуется при реакциях на верхней поверхности и из-за низкого давления в реакторе очень быстро диффузирует от поверхности.

Скорость на краю подложки диаметром 200 мм повышается примерно на 3.5% (рис. 10.31). Благодаря ускорению течения вблизи краев подлож-

ки на выходе из реактора конвективное течение атомов фтора оказывается больше, чем вблизи оси симметрии.

10.2.9. Гетерогенный катализ

При гетерогенно-каталитических реакциях реагенты и продукты газообразны, в то время как реакция проходит на поверхности твердого материала, катализатора. Катализатор ускоряет ход реакции. Принцип каталитических реакций основывается на уменьшение энергии активации, необходимой для определенной реакции, как это представлено схематично на рис. 10.32.

Многие реакции на поверхности имеют скорости на порядок большие, чем в газовой фазе. Это позволяет реализовывать реакции при более низких температурах.

Катализатор влияет на состояние термодинамического равновесия. Однако с помощью катализатора можно управлять и селективностью продукта. Это достигается благодаря тому, что выбирается необходимое время пребывания смеси в химическом реакторе или изолируются побочные продукты. На этом основывается большинство методов химического синтеза.

Течение гетерогенно-катализаторных реакций можно разделить на 5 стадий:

1) Диффузия реагентов в катализаторе.
2) Адсорбция реагентов на поверхности катализатора.
3) Реакции между реагентами.
4) Десорбция продуктов с поверхности катализатора.
5) Диффузия продуктов с катализатора.

Концентрации реагентов и продуктов на поверхности связаны равновесием адсорбции и десорбции с концентрациями в газовой фазе. Впоследствии в зависимости от внешних условий (температура, давление, концентрации, параметры течения) определяются по скорости различные частичные процессы (перемещение массы, кинетика) для всей глобальной системы реакций. Чтобы представить количественно систему гетерогенных реакций, необходимо описать проходящие частичные процессы и представить их детально отдельными моделями. Аналогично реакциям в газовой фазе также можно смоделировать и гетерогенные реакции с помощью детальных механизмов, которые строятся на молекулярном уровне (Coltrin et al. 1990).

Причем применяется приближение среднего поля, при которой каталитические поверхности описываются с помощью температуры и степени покрытия адсорбенрами, которые в свою очередь зависят макроскопично от параметров в реакторе, но средние значения представляют локально.

В противоположность реакциям в газовых фазах механизмы реакций на поверхностях могут быть описаны только в отдельных случаях. В последние годы с помощью спектроскопии и микроскопии исследованы взаимодействия молекул с однокристальными верхними поверхностями при низких давлениях. Это позволило дать объяснение проходящим там элементарным процессам.

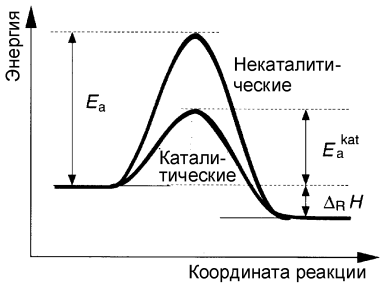


Рис. 10.32. Принцип каталитических реакций. E_a — это энергия активации для некаталитических, а E_a^{kat} — для каталитических реакций

Так как не представляет никаких трудностей перенести непосредственно эти результаты на высокие давления и поликристаллические катализаторные материалы, то в недавнее время стали применять нелинейные оптические методы, такие как спектроскопия по суммам частот (Metka et al. 2000), для исследования каталитических поверхностей в этих условиях. Так были установлены первые детальные механизмы гетерогенных реакций, например, процессов каталитического горения (Deutschmann et al. 1994, 1995) и окисления низких алканов (Zerkle et al. 2000).

Эти механизмы реакций с помощью итоговых уравнений на фазовой границе катализатора и газа соединяются с течением реагирующего газа (Coltrin et al. 1990, Deutschmann et al. 1996). Эта концепция особенно успешно используется при описании ламинарного течения в монолитных катализаторах (Zerkle et al. 2000).

10.3. Турбулентные реагирующие течения

10.3.1. Обзор и терминология

Турбулентные реагирующие течения играют важную роль во многих технических процессах горения. В противоположность ламинарным течениям турбулентные процессы характеризуются быстрыми колебаниями скорости, плотности, температуры и состава. Такая хаотичная природа турбулентности обосновывается высокой нелинейностью лежащих в основе физико-химических процессов. Сами небольшие изменения параметров поля течения могут привести к неустойчивости и тем самым к образованию турбулентности.

Сложность процессов турбулентного переноса (как стандартного примера реагирующих турбулентных течений) является причиной того факта, что математические модели для их описания еще недостаточно хорошо разработаны, по сравнению с моделями для описания ламинарных течений. В последующих разделах представлены наряду с общими закономерностями турбулентных реагирующих течений и некоторые методы математического описания, которые в недавнем прошлом нашли применение в прикладных вычислительных программах.

Турбулентное пламя в не перемешанной смеси газов (см. главу 10.3.7) представляет большой интерес с точки зрения практического применения. Оно реализуется в реактивных двигателях, дизельных моторах, парогенераторах, печах и водородно-кислородных ракетных двигателях. Поскольку горючее и окислитель смешиваются только в камере сгорания, то из-за соображений безопасности, горение в предварительно не перемешанной смеси проще в реализации, чем горение предварительно перемешанной газовой смеси. Именно практическое значение и является причиной разработки многочисленных математических моделей этих процессов горения.

Как показывается ниже, понятие ламинарного пламени в предварительно не перемешанной смеси составляет основу для понимания турбулентного пламени не перемешанной реагирующей смеси. Такое пламя раньше называлось диффузионным пламенем, так как диффузия горючего и окислителя в зоне пламени является лимитирующим процессом по отношению к химической реакции. Но поскольку диффузия компонентов проявляется и играет значительную роль и для пламени предварительно перемешанной газовой смеси, то для различия этих процессов мы должны употреблять точные понятия пламени в «предварительно перемешанной газовой смеси» и пламени в «предварительно не перемешанной газовой смеси».

В идеальном турбулентном пламени предварительно не перемешанной смеси (см. главу 10.3.8) непрореагировавший газ полностью смешивается, прежде чем наступит химическая реакция. Химическая реакция вызывает на граничной поверхности быстрый переход от исхлдного состояния к продуктам реакции. Эта граничная поверхность движется со скоростью v_L.

Движение пламени в предварительно перемешанной смеси является наложением пламени на турбулентное течение. Это означает, что количественное описание турбулентного пламени в перемешанной смеси представляет еще более сложную проблему, чем моделирование пламени в предварительно не перемешанной смеси. Если временная шкала процессов смешения и химической реакции одинакового порядка, то часто невозможно однозначно различить в турбулентном течении горение перемешанной или не перемешанной смеси. Локальное гашение пламени а предварительно не перемешанной смеси приведет к тому, что воздух и горючее смешаются прежде, чем они «воспламенятся» от окружающей их зоны горения (что приведет к горению уже перемешанных порций среды).

10.3.2. Прямое численное моделирование

Не существует никаких указаний на то, что уравнения Навье–Стокса окажутся недействительными для турбулентных течений до тех пор, пока турбулентные масштабы длины будут больше межмолекулярных расстояний. Как правило, это выполняется в процессах горения при атмосферном давлении, так что в принципе турбулентное течение можно было бы представить посредством решения уравнений Навье–Стокса. При прямом численном моделировании (Reynolds 1989) дискретизации области должна быть такой, чтобы ней выявлялись наименьшие по масштабу вихри турбулентного течения.

Проблема состоит в затратах машинного времени при решении, потому что при сегодняшнем уровне технического и программного обеспечения решение задачи можно было бы ожидать лет через 20–30. Это можно продемонстрировать с помощью простых рассуждений. Соотношение наибольшего и наименьшего турбулентных масштабов длины выразится через

$$\frac{l_0}{l_K} \approx R_l^{\frac{3}{4}}, \tag{10.50}$$

где R_l — турбулентное число Рейнольдса, для которого действительно $R_l < Re$. l_0 — интегральный масштаб длины, определяемый размерами

сосудов. l_K — это масштаб длины Колмогорова, представляющий масштаб длин наименьших турбулентных структур.

Для обычного турбулентного течения с $R_l = 500, l_0/l_K \approx 100$, так что для местного разрешения мельчайших структур потребуется сетка примерно 1000 узлов по одной координате, т. е. 10^9 точек для трехмерного случая. Обратим внимание, что для описания нестационарного процесса горения используется по меньшей мере 10000 временных приближений-шагов, таким образом получается количество вычислительных операций порядка 10^{15}. Другая проблема касается того, что расчетное время прямого моделирования, кроме отношения (10.50), определяется и тем фактом, что величина шага по времени должны сокращаться пропорционально квадрату расстояний между узлами сетки. Отсюда следует, что расчетное время для прямого численного моделирования растет пропорционально числу Рейнольдса примерно в 4-й степени.

Несмотря на эти проблемы для систем с простыми химическими процессами возможно прямое численное моделирование для небольших чисел Рейнольда.

Однако это моделирование еще очень далеко от реальных процессов горения, хотя оно и могжет дать ценную информацию о некоторых деталях процессов турбулентного горения.

Для практического использования прямые методы решения уравнений Навье–Стокса (5.108) и (5.109) пока еще не доступны.

Образование замкнутых (ограниченных) областей «свежего» газа, входящего в выходной отработанный газ, представляет интересный феномен в турбулентном пламени предварительно перемешанной смеси. Такой процесс переноса можно исследовать с помощью прямого численного моделирования, и он имеет большое значение для определения области применимости существующих, а также разработки новых моделей при описании турбулентного горения. На рис. 10.33 приведены распределения концентрации OH и CO радикалов, а также величина вихря в турбулентном пламени предварительно перемешанной смеси метана, известные уже из вводной главы (рис. 1.7).

10.3.3. Модели турбулентности

В то время как уравнение Навье–Стокса при применении эмпирических законов переноса для ламинарных режимов течения являются замкнутой системой и могут быть решены численными методами, эти же уравнения

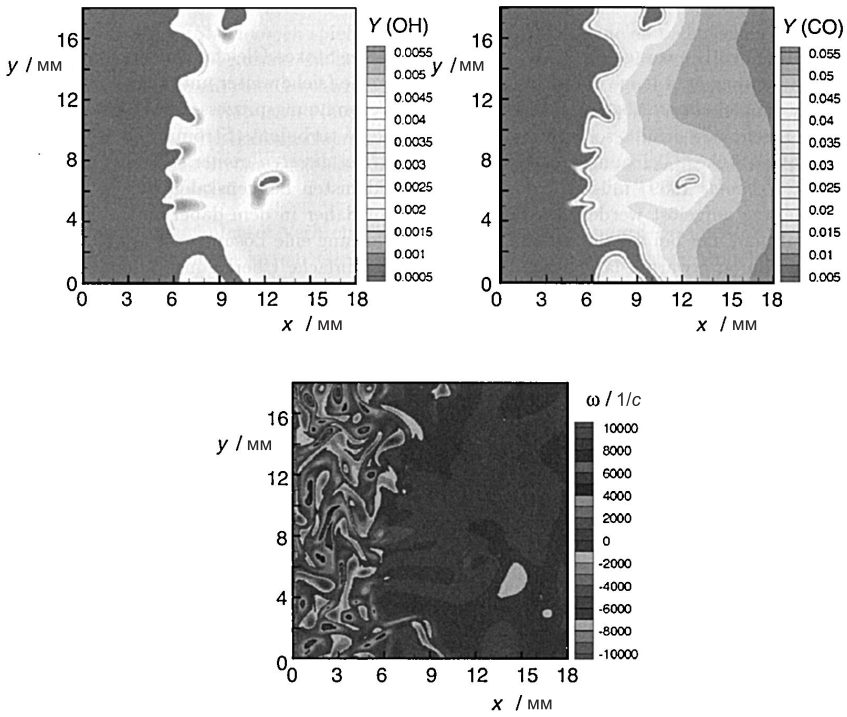


Рис. 10.33. Массовые доли OH (сверху слева), CO (сверху справа) и величина вихря (внизу) в турбулентном пламени предварительно перемешанной смеси метана

для осредненных величин являются незамкнутыми, т. к. дополнительные слагаемые вида $\overline{\rho \boldsymbol{v}'' q''}$ не определены. Для их определения необходимо построить замыкающие уравнения модели турбулентности.

Для решения проблемы замыкания используют модели, представляющие напряжения Рейнольда $\overline{\rho \boldsymbol{v}'' q''}$ как функции осредненных значений зависимых переменных. Обычные современные модели турбулентности (см. Launder, Spalding 1972, Jones, Whitelaw 1985) интерпретируют слагаемые $\overline{\rho \boldsymbol{v}'' q''}$ $(q = w_i, \boldsymbol{v}, h, Z_i)$ в (5.111), (5.112) и (5.117) как компоненты турбулентного переноса и моделируют его поэтому по аналогии с ламинарным случаем с помощью градиентного представления, в соответствии с которым моделируемое слагаемое будет пропорционально градиенту осредненного

значения соответствующей для рассматриваемого переноса переменной:

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}'' q_i''} = -\rho \nu_T \nabla \widetilde{q}_i, \tag{10.51}$$

где ν_T — коэффициент турбулентного переноса. Этот подход является источником многих гипотез.

В действительности, эксперименты показывают, что турбулентное движение может происходить даже при отсутствии градиента (Moss 1979). Турбулентный перенос происходит много интенсивнее, чем ламинарный перенос. По этой причине в очень многих случаях можно пренебречь соответствующими осредненными ламинарными слагаемыми в (5.111) и (5.112). Уравнения сохранения для турбулентных течений реагирующей среды можно решать численным методом, если коэффициент турбулентного переноса ν_T (следует учесть, что он для различных уравнений принимает различные значения) известен. Для определения такого коэффициента существуют многочисленные модели; в большинстве случаев применяются в настоящее время модель турбулентности $k-\epsilon$ (Launder, Spalding 1972, Jones, Whitelaw 1985), которая для турбулентной кинетической энергии использует уравнение

$$\widetilde{k} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho \sum \nu''^2}}{\bar{\rho}}, \tag{10.52}$$

которое можно вывести обычным способом как уравнение сохранения. В качестве дополнительной переменной используют скорость диссипации кинетической энергии

$$\widetilde{\epsilon} = \frac{\widetilde{k}^{3/2}}{l}, \tag{10.53}$$

которое выражается через уравнение

$$\widetilde{\epsilon} = \nu \overline{\nabla bs v''^T \nabla \boldsymbol{v}''}, \tag{10.54}$$

где $\nu = \mu/\rho$ = ламинарная кинематическая вязкость. На эмпирической основе формулируется два дифференциальных уравнения (см. Kent, Bilger 1976)

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{k}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \boldsymbol{v} \widetilde{k}) - \nabla(\bar{\rho} \nu_T \nabla \widetilde{k}) = G_k - \bar{\rho} \widetilde{\epsilon}, \tag{10.55}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{\epsilon}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \boldsymbol{v} \widetilde{\epsilon}) - \nabla(\bar{\rho} \nu_T \nabla \widetilde{\epsilon}) = (C_1 G_k - C_2 \bar{\rho} \widetilde{\epsilon}) \frac{\widetilde{\epsilon}}{\widetilde{k}}. \tag{10.56}$$

Коэффициент турбулентной вязкости определяется как

$$\nu_T = C_\nu \frac{\widetilde{k}^2}{\widetilde{\epsilon}}, \tag{10.57}$$

причем $C_\nu = 0.09$ есть эмпирически определенная постоянная. C_1 и C_2 являются другими эмпирически определяемыми константами модели. Член G_k — это сложная функция тензора турбулентных напряжений, равная из вывода (10.56)

$$G_k = \overline{-\rho(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})}\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}. \tag{10.58}$$

Константы модели $k-\epsilon$ зависят от типа течения и геометрии рассмотренного случая. Кроме того модель реализуется в условиях ранее указанной выше недостаточности градиентного описания потоков (10.51). Несмотря на это ее часто используют, например, в коммерческих программных пакетах для моделирования турбулентных течений.

10.3.4. Осредненные скорости реакции

Решению осредненных уравнений (5.111) и (5.112) предшествует определение осредненных скоростей химических реакций $\widetilde{\omega}_i$. Для демонстрации этих проблем ниже обсуждается два примера (Libby, Williams 1980).

В качестве первого примера рассматривается реакция $\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow$ продукты, протекающая при постоянной температуре, но переменных концентрациях. Предполагается гипотетически, что во времени изменение концентрации соответствует рис. 10.34, при этом полагается, что c_A и c_B не равны нулю одновременно. Чтобы предотвратить совпадение обозначения константы скорости с турбулентной кинетической энергией, коэффициент скорости k обозначается индексом R.

$$\omega_\mathrm{A} = -k_R c_\mathrm{A} c_\mathrm{B}, \quad \bar{\omega}_\mathrm{A} = 0,$$

т. е. осредненную скорость реакции нельзя вычислить непосредственно из осредненных значений концентрации. Для средних значений справедливо:

$$\bar{\omega}_A = -k_R \overline{c_A c_B} = -k_R \bar{c}_A \bar{c}_B - k_R \overline{c'_A c'_B}. \tag{10.59}$$

Итак, ни в коем случае нельзя вычислять (даже приблизительно) средние скорости просто путем представления через произведение осредненных концентрацией.

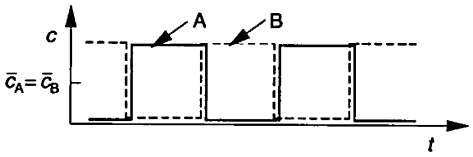


Рис. 10.34. Гипотетический по времени ход течения концентрации в реакции A+B→ продукты.

В качестве второго примера рассматривается реакция с переменной температурой (но постоянной концентрацией), причем температурный график имеет синусоидальный характер в зависимости от времени см. рис. 10.35. Результатом нелинейности константы скорости реакции $k_R = A\exp(-T_a/T)$ является отличие этого выражения от $k_R(\bar{T})$. Это следует пояснить с помощью численного примера. При $T_{min} = 500$ К и $T_{max} = 2000$ К будет $\bar{T} = 1250$ К. Если рассчитывать скорость реакции для температуры активизации $T_a = 5 \cdot 10^4$ К ($T_a = E_a/R$), то получим

$$k_R(T_{max}) = 1.4 \cdot 10^{-11} A,$$

$$k_R(T_{min}) = 3.7 \cdot 10^{-44} A,$$

$$k_R(\bar{T}) = 4.3 \cdot 10^{-18} A.$$

а после вычисления среднего по времени (например, численным интегрированием) получим:

$$\bar{k}_R = 7.0 \cdot 10^{-12} A.$$

Особый интерес представляет тот факт, что при рассмотрении процесса образования окиси азота, рассмотренный выше пример поясняет его сильную температурную зависимость из-за высоких температур активации ($T_a = 3.8 \cdot 10^4$ К). NO образуется в основном при предельных значениях температуры, поэтому определение NO при средних значениях температуры бессмысленно. Следует учитывать температурные колебания.

Шагом понимания проблемы осреднения скоростей реакции является их статистическое определение с помощью функций плотности вероятности (ФПВ). Зная ФПВ, можно с помощью интегрирования определить осредненное значение скорости реакции. В качестве примера A+B→ продукты

получим (Libby, Williams 1980).

$$\bar{\omega} = -\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty k_R c_A c_B P(\rho, T, w_1, \ldots, w_S, \boldsymbol{r})\, d\rho dT dw_1 \ldots dw_S =$$

$$= -\frac{1}{M_A M_B} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty k_R(T) \rho^2 w_A w_B P(\rho, T, w_1, \ldots, w_S, \boldsymbol{r})$$

$$d\rho dT dw_1 \ldots dw_S \qquad (10.60)$$

Главной трудностью этого метода является то, что ФПВ — P должна быть известна. Для ее определения существует много методов, которые могут применяться согласно особенностям каждого случая.

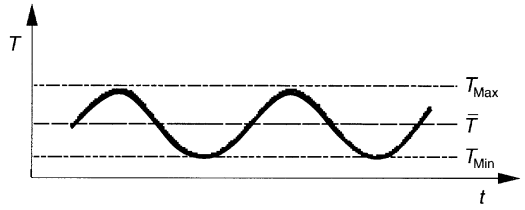


Рис. 10.35. Гипотетический график зависимости температуры от времени в реакции A+B→ продукты

Уравнения переноса для функции плотности вероятности

(См. например Dopazi, O'Brien 1974, Pope 1986). Решением поставленной выше проблемы являются введение в рассмотрение уравнения переноса для ФПВ. Из уравнений сохранения для компонентов можно вывести уравнение переноса, описывающее эволюцию ФПВ соответственно в пространстве и во времени. Огромным преимуществом этого метода является то, что химические реакции рассматриваются точно (в то время как молекулярное движение здесь также следует моделировать).

Для численного решения уравнения переноса ФПВ ее приближают с помощью большого числа различных, так называемых «стохастических» частиц, представляющих отдельные компоненты течений. Решение уравнений переноса ФПВ происходит затем методом Монто-Карло. Решение очень

затратно и ограничивается в настоящее время небольшими схематичными системами максимально с четырьмя компонентами, поэтому должны здесь применяться сокращенные механизмы реакции.

Эмпирические конструкции ФПВ

В этом подходе функция плотности вероятности ФПВ определяется из эмпирических данных. Причем последовательно используется тот факт, что результаты моделирования турбулентного пламени в большинстве случаев мало зависят от точности представления ФПВ.

Простым способом конструирования многомерной функции плотности вероятности может стать метод, основанный на предположении о стохастической независимости отдельных переменных. В этом случае многомерную функцию PDF можно представить в виде произведения одномерных функций ФПВ (Gutheil, Bockhorn 1987):

$$P(\rho, T, w_1, \ldots, w_S) = P(\rho)P(T)P(w_1)\cdots P(w_S). \tag{10.61}$$

Такое разделение в общем случае некорректно, так как, например, w_1,w_2,...,w_S не являются независящими друг от друга (вследствие $\sum w_i = 1$). Из-за этого следует учитывать дополнительные корреляции между отдельными переменными.

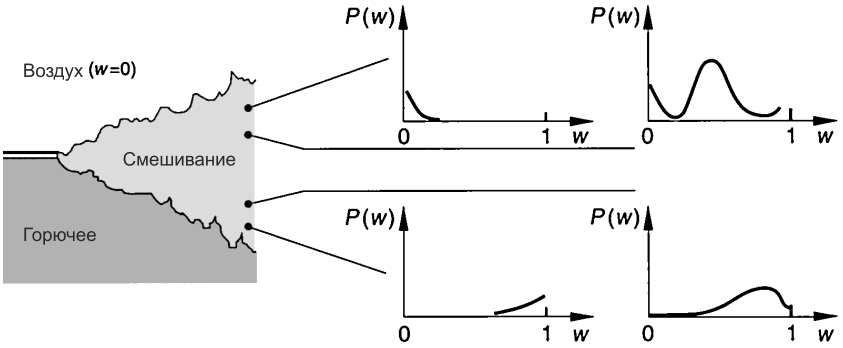


Рис. 10.36. Схема ФПВ для массовой доли горючего в турбулентном слое смешения

Одномерные ФПВ можно определить эмпирически из экспериментов. Далее некоторые такие результаты представлены в виде простых примеров (Libby, Williams 1994).

На рис. 10.36 схематично представлены функции ФПВ массовой доли горючего для различных точек турбулентного слоя смешения. На границе слоя существует большая вероятность появления чистого горючего или воздуха (поясняется стрелками), а наличие смеси горючего и воздуха представляется меньшей долей вероятности. Внутри слоя смешения вероятность появления смеси горючего велика. Функция ФПВ максимально отражает определенное таким образом поведение массовой доли компонентов смеси. Однако и здесь с большой вероятностью предполагается наличие непрореагировавших исходных компонентов (поясняется снова стрелками). Причиной этого является перемежаемость, феномен, обусловленный постоянным смещением локальных границ между горючим, смесью и воздухом, вызванным турбулентными пульсациями, текучесть. Точка находится определенную долю времени то в потоке горючего, то чистого воздуха (см., например, Libby, Williams 1976, 1994). Подобные результаты имеют место и для турбулентной струи, которую можно рассматривать как комбинацию двух слоев смешения (см. рис. 10.37).

В турбулентном реакторе (см. рис. 10.38) функция ФПВ приближенно соответствует распределению Гаусса. Чем больше удаление от границы потока, тем вероятнее появление полного перемешивания. Ширина распределения Гаусса становится все меньше, до тех пор пока, наконец, распределения Гаусса в смеси не перейдет в дельта-функцию Дирака (вероятность появления полного перемешивания ≈ 1).

Для аналитического описания одномерных функций ФПВ применяют так называемые усеченные функции Гаусса или β-функции. Усеченная функция Гаусса (рис. 10.39) состоит из одного распределения Гаусса и двух δ-функций Дирака для представления границ интервала усечения (Gutheil, Bockhorn 1987).

Аналитическое представление этой часто использующейся функции имеет вид (Williams 1985)

$$P(Z) = \alpha\delta(Z) + \beta\delta(1-Z) + \gamma\exp\Big(-\frac{(Z-\zeta)^2}{2\sigma^2}\Big), \tag{10.62}$$

где ζ и σ — обозначает положение и ширину распределения Гаусса ($Z = w_i, T, \ldots$). Нормировочная постоянная γ при заданных α и β будет

$$\gamma = \frac{(1-\alpha-\beta)\sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}}{\operatorname{erf}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{2\sigma}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2\sigma}}\right)}, \tag{10.63}$$

причем сокращение «erf» обозначает интеграл ошибок.

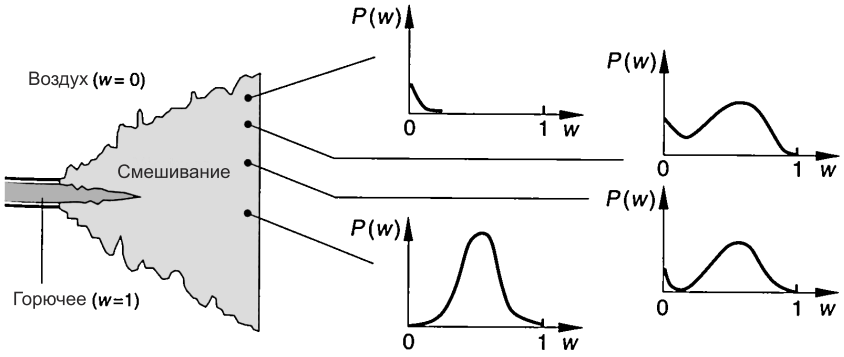


Рис. 10.37. Схематичное изображение ФПВ для массовой доли горючего в турбулентной струе

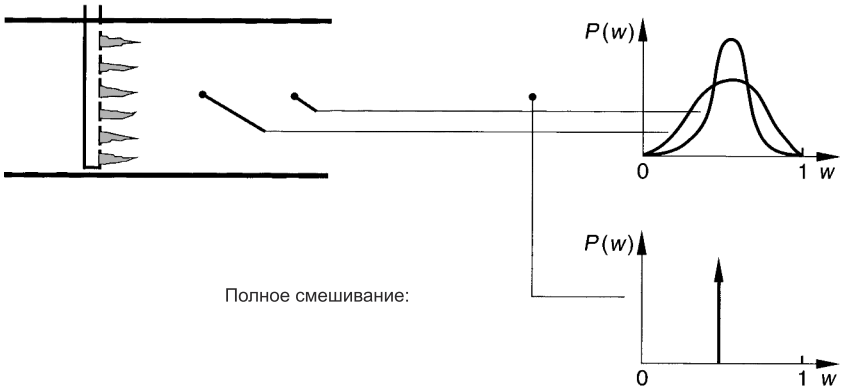


Рис. 10.38. Схематичное изображение ФПВ для массовой доли горючего в турбулентном реакторе

Преимущество β-функции (рис. 10.40) состоит в том, что она содержит только два параметра (α, β), но несмотря на это может представлять множество различных форм ФПВ (Rhodes 1979):

$$P(Z) = \gamma Z^{\alpha-1}(1-Z)^{\beta-1}, \quad \gamma = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \tag{10.64}$$

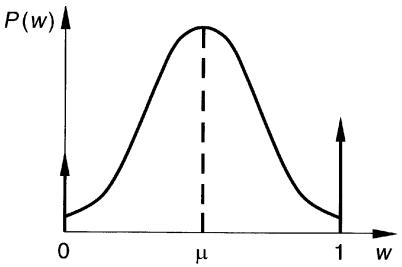


Рис. 10.39. График усеченной функции Гаусса

Третий параметр γ получается из условия $\int P(Z)\,dZ = 1$. (В этой связи следует заметить, что в математике обычно интеграл $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$ называется β-функцией.) Постоянные α и β можно определить из среднего значения и момента переменной Z как

$$\bar{Z} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \bar{Z'^2} = \frac{\bar{Z}(1-\bar{Z})}{1+\alpha+\beta}. \tag{10.65}$$

10.3.5. Модели «разрушения вихрей»

Модели «разрушения вихрей» являются эмпирическими моделями для осредненной скорости реакции с очень быстро протекающими химическими процессами. В этом случае скорость реакции контролируется скоростью турбулентной диссипации. Эта модель представляет зону реакции как совокупность областей из непрореагировавшей смеси и почти полностью сгоревшей смеси.

Формулировка Сполдинга (1970) описывает скорость, с которой области непрореагировавшего газа распадаются на мелкие участки, имеющие достаточный контакт с уже сгоревшим газом, в результате чего участки имеют достаточно высокую температуру, а потому реагируют аналогично потере турбулентной энергии. Для скорости реакции (при F — горючее, C_F — эмпирические контакты порядка 1) получим:

$$\bar{w}_F = -\frac{\bar{\rho} C_F}{\bar{M}} \sqrt{\bar{w}_F''^2}\,\frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{k}} \tag{10.66}$$

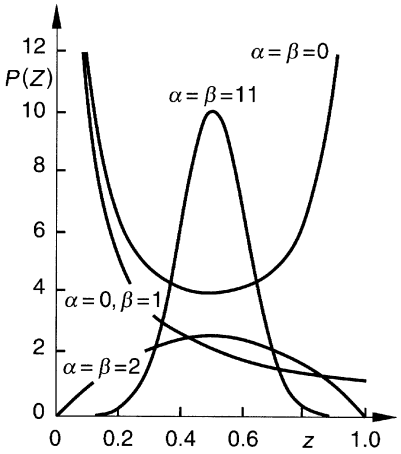


Рис. 10.40. Изображение β-функции для различных параметров α и β

10.3.6. Моделирование «больших вихрей»

Моделирование «больших вихрей» или «крупных вихрей» (LES, Reynolds 1989) — это моделирование турбулентного поля скоростей посредством непосредственного моделирования крупных вихревых структур, в то время как моделирование мелких структур, ведущее к значительным затратам времени на вычисление, происходит с помощью модели турбулентности, например, модели $k - \epsilon$ или модели «линейных вихрей» Kerstein 1992 (LES-LE). Для этого гидромеханические процессы с помощью фильтра разделяются на две области пространственных масштабов. Сферой их применения являются, например, моделирование процессов в двигателе внутреннего сгорания (Amsden et al 1989) или прогнозов погоды.

10.3.7. Турбулентное пламя предварительно не перемешанной смеси

Пламя предварительно не перемешанной смеси с равновесными реакциями

Представления о характере несмешанного турбулентного пламени можно получить, если упрощенно представить, что горючее и окислитель очень быстро реагируют до тех пор, пока не образуют смесь. Такое предпо-

ложение позволит описать процесс на основе лишь расчета смешения. Представление такого турбулентного процесса смешения показано на рис. 10.41. Горючее поступает в окислитель (кислород, воздух). Под действием турбулентного переноса горючее и окислитель образуют горючую смесь, которая при сделанном выше предположении быстрых реакций, реагирует немедленно. Наряду с областями, в которых горючего больше (богатая смесь) и областями, в которых окислитель находится в избытке (обедненная смесь), существует стехиометрическая поверхность, вдоль которой располагается смесь стехиометрического состава. В верхней части рисунка изображена мольная доля в функции расстояния до горелки. Во многих случаях в турбулентном пламени предварительно не перемешанной смеси в области близкой к стехиометрической поверхности появляются зоны пламени, которые можно идентифицировать по интенсивности процесса горения.

Наряду с предположением о ходе химических реакций для упрощения описания процесса вводится предпожение о равнстве коэффициентов диффузии всех компонентов. Тогда смешение всех компонентов протекает аналогично и можно описать этот процесс как функцию только одной переменной. Так как химические компоненты образуются или расходуются в ходе химических реакций, то проще следить за процессом смешения химических элементовивания элементов. Для этого вводят

$$\xi = \frac{Z_i - Z_{i2}}{Z_{i1} - Z_{i2}}, \tag{10.67}$$

где Z_i — это массовая доля элемента. Проблему двух потоков следует рассматривать с учетом массовых долей элементов Z_{i1} и Z_{i2} в обоих потоках (например, в струйном пламени). ξ при одинаковых коэффициентах диффузии не зависит от выбора рассмотренного элемента i $(i = 1, \ldots, M)$ и согласно уравнению (10.67) и $Z_i = \sum \mu_{ij} w_j$ (10.48) линейно связана с массовыми долями w_j. В потоке 1 $\xi = 1$, в потоке 2 $\xi = 0$. ξ может быть представлено как массовая доля вещества, относящегося к потоку 1, $1 - \xi$ как массовая доля вещества, относящаяся к потоку 2.

Используя линейную зависимость (10.67) можно с помощью уравнения (5.116) вывести уравнение для ξ:

$$\frac{\partial(\rho\xi)}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{v}\xi) - \nabla(\rho D \nabla\xi) = 0. \tag{10.68}$$

Следует отметить, что в уравнении сохранения для ξ нет источникового члена. Поэтому ξ часто называют скалярной сохраняющейся величиной

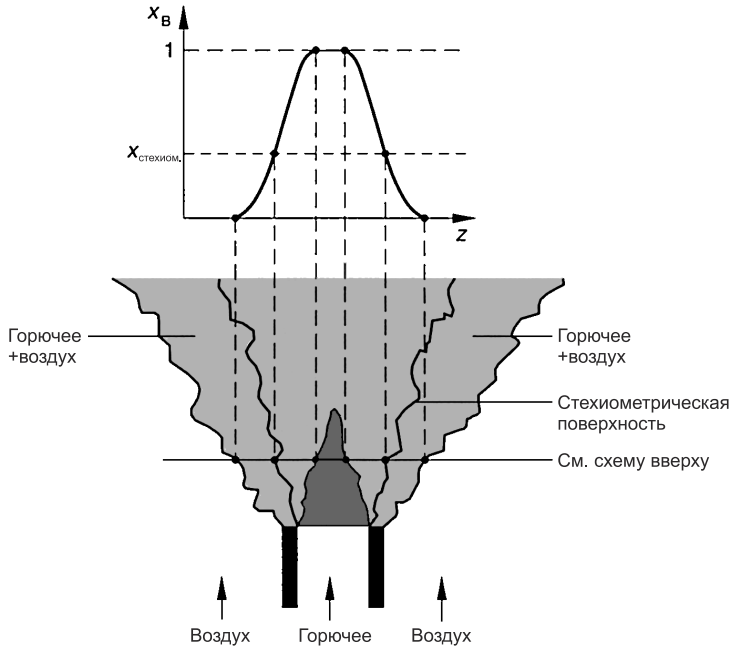


Рис. 10.41. Схематичное изображение турбулентного струйного пламени предварительно не перемешанной смеси

(англ: conserved scalar). Допустим, что число Льюиса $Le = \lambda/(D\rho c_p) = 1$ и, что нет потери тепла, тогда можно через ξ описать поле энтальпии или температуры (кинетическую энергию течения можно не учитывать и поэтому давление постоянно)

$$\xi = \frac{h - h_2}{h_1 - h_2} \tag{10.69}$$

При предположении (a) бесконечно быстрой химии (равновесная химия), (b)равных коэффициентах диффузии компонентов и $Le = 1$, (c) отсутствующими теплопотерями, получим, что все скалярные переменные (температура, массовая доля и плотность) это однозначные функции переменной смешения. Эти функции выражаются непосредственно через равновесный состав.

Проблема представления турбулентного пламени в предварительно не перемешанной смеси связано с проблемой описания турбулентного процесса смешения для ξ. Для решения этой проблемы имеются многочисленные подходы, такие как DNS Reynolds 1989, LES McMurtry et al 1992, Lagrangesche Integral-Methode (LIM)Dahm et al 1995 и методы PDF Pope 1991.

По среднему значению и при использовании градиента (10.51) получим в стационарном случае (ср. ур (5.117))

$$\nabla(\bar{\rho}\widetilde{\boldsymbol{v}}\widetilde{\xi}) - \nabla(\bar{\rho}\nu_T\nabla\widetilde{\xi}) = 0. \tag{10.70}$$

Если известна функция плотности распределения переменной смешения, то можно рассчитать осредненные значение скалярных величин. Так как в уравнении (5.111) и (5.112) входит осредненная плотность, то таким образом можно решить систему осредненных уравнений сохранения. (Pope 1986).

Простейший метод определения функции плотности вероятноти заключается в том, чтобы принять определенную форму функции распределения (например, функция Гаусса или β) и выразить ξ через среднее значение и вариации. Вместо уравнения переноса для ФПВ нужно решать только итоговые уравнения для осредненного значения и вариации ξ. Из уравнения (10.70) можно вывести уравнение сохранения для дисперсии по Фавру $\widetilde{\xi}^2 = \overline{\rho\xi''^2}/\bar{\rho}$ (умножение уравнения (10.70) на ξ и осреднением). Получаем (Bilger 1980)

$$\nabla(\bar{\rho}\widetilde{\boldsymbol{v}}\widetilde{\xi''^2}) - \nabla(\bar{\rho}\nu_T\widetilde{\xi''^2}) = 2\bar{\rho}\nu_T\nabla^2\widetilde{\xi} - 2\overline{\rho D\nabla^2\xi''}, \tag{10.71}$$

где $\nabla^2\xi$ сумма квадратов компонентов градиента $(\nabla\xi)^T\nabla\xi$. Последний член этого уравнения называют скалярной скоростью диссипации χ. Кроме того, и χ должен моделироваться в зависимости от известных величин, например, простым применением положения о градиентном переносе:

$$\widetilde{\chi} = 2\frac{\overline{\rho D\nabla^2\xi''}}{\bar{\rho}} \approx 2D\nabla^2\widetilde{\xi} \tag{10.72}$$

из $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\xi''^2}$ можно теперь определить функцию плотности вероятности $P(\xi;\boldsymbol{r})$ (например, функцию β, см. главу 10.3.5)). С ее помощью затем можно вычислить интересующее нас среднее значение, так как ρ, w_i и T

известные как функции от ξ

$$\widetilde{w}_i(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 w_i(\xi)\widetilde{P}(\xi;\boldsymbol{r})\,d\xi,$$

$$\widetilde{T}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 T(\xi)\widetilde{P}(\xi;\boldsymbol{r})\,d\xi,$$

$$\widetilde{w}_i''^2(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 [w_i(\xi) - \widetilde{w}_i(\boldsymbol{r})]^2\widetilde{P}(\xi;\boldsymbol{r})\,d\xi,$$

$$\widetilde{T}''^2(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 [T(\xi) - \widetilde{T}(\boldsymbol{r})]^2\widetilde{P}(\xi;\boldsymbol{r})\,d\xi. \tag{10.73}$$

где $\widetilde{P}$ — это функция плотности вероятности, определенная по Фавру, которую можно рассчитать из функции плотности вероятности через интеграл по плотности

$$\widetilde{P}(\xi;\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\overline{\rho}}\int_0^\infty \rho P(\rho,\xi;\boldsymbol{r})\,d\rho. \tag{10.74}$$

В результате этого формирунтся система уравнений, составленная из уравнений сохранения для поля скорости и плотности (например, при использовании уравнений модели $k-\epsilon$), а так же уравнений для осредненного по Фавру значения $\widetilde{\xi}$ и дисперсии $\widetilde{\xi}''^2$ параметра смешения ξ. Вследствие однозначной зависимости между $\widetilde{\xi}$ и всеми скалярными величинами (т. е. равновесными составами) можно вычислить статистические характеристики каждого скаляра. С помощью этих уравнений можно рассчитать длину пламени, температурные и концентрационные поля основных компонентов (горючее, кислород, вода, двуокись углерода).

Однако модель никогда не может смоделировать гашение пламени, потому что предполагает бесконечно быстрое протекание химических реакций. Образование копоти и окиси азота так же нельзя описать с помощью этой модели. Поэтому теперь представляет интерес усовершенствование модели, чтобы учитывать влияние конечности скорости химических реакций.

Плямя предварительно не перемешанной смеси с конечной скоростью протекания химических реакций

В случае конечно быстрой химии следует рассматривать полные уравнения сохранения, т. е. наряду с уравнениями сохранения для общей массы, энергии и импульса еще и все уравнения сохранения для отдельных компонентов системы реакций с исходными членами $M_i w_i$:

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{v} w_i) + \nabla(\rho D \nabla w_i) = M_i \omega_i, \quad i = 1, \ldots, S. \tag{10.75}$$

Как это описывается в главе 10.3.4. появляются проблемы при осреднении этих исходных членов, т. к. они нелинейно зависят как от температуры, так и от концентрации.

Осреднение принципиально возможно, если известны ФПВ массовых долей w_i. Затем можно осреднять и решать уравнения (Gutheil, Bockhorn 1987). Проблемы появляются из-за того, что недостаточно точно известна ФПВ и, кроме того, вычисления затрудняются вследствие большого числа компонентов.

С увеличением скорости перемешивания один из химических процессов первым нарушает равновесие. Если скорость смешивания продолжает расти, то от равновесия уходят и другие процессы. Химические процессы будут друг за другом уходить от равновесия, пока реакции, составляющие главную часть энергетического баланса не выйдут из равновесия с процессом смешения. Если скорость процесса перемешивания и дальше увеличивается, то температура отклоняется от своего равновесного распределения.

Это представлено на рис. 10.42. Температура отклоняется от ее равновесного значения соразмерно отклонению системы от равновесия. Левая и правая диаграмма представляют данные сходных экспериментов, причем скорость в струе водорода на правом рисунке увеличилась в три раза. В эксперименте на основе метода рамановского (комбинационного) рассеяния лазерного луча измеряют одновременно массовую долю и температуру. Каждый микросекундный пульс дает точку на диаграмме.

На левом рисунке измерения группируются около линии равновесия. Справа понижение температуры указывает на то, что процесс смешения, соответствующей горизонтальному направлению на диаграмме, конкурирует с происходящим вследствие химической реакции высвобождением тепла, соответствующего на диаграмме вертикальному направлению. Результаты

измерений располагаются ниже линии равновесия. Дальнейшее повышение скорости струи вызывает полное гашение пламени.

Другой характер процесса показан на рис. 10.43. Эти диаграммы демонстрируют локальное гашение пламени. Слева изображено пламя предварительно не перемешанной смеси метана и воздуха с малой скоростью смешивания. Справа представлены измерения в аналогичном пламени, но на другом его месте, а именно там, где воздух быстро смешивается с горючим. Локальное гашение пламени проявляется там, что многочисленные точки измерений находятся далеко от линии равновесия. Если скорость струи и дальше будет расти, то и здесь также будут наблюдать полное гашение пламени.

Усовершенствование представленной в последней главе равновесной модели происходит в результате того, что рассчитывают скорость первого из неравновесных процессов и предполагают, что остальные химические процессы пребывают в равновесии. Чем быстрее происходит смешение тем больше будет отклоняться этот медленный процесс от равновесия. При этом вводят параметр, с помощью которого можно описать это отклонение от равновесия.

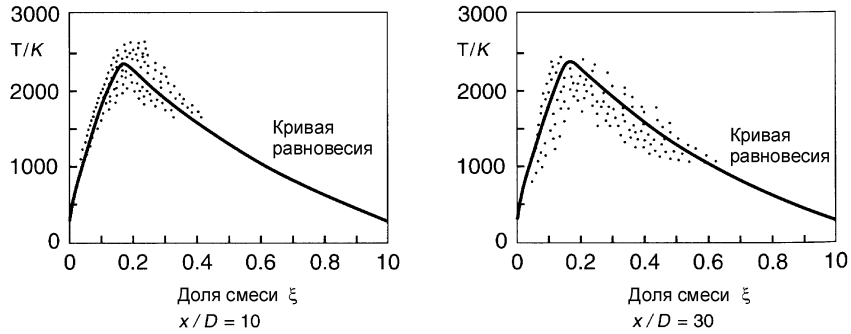


Рис. 10.42. Диаграмма одновременных измерений методом комбинационного рассеяния переменной смешения и температуры пламени турбулентной предварительно не перемешанной струи водорода. Скорость струи на правом рисунке увеличена в 3 раза (Magre, Dibble 1988).

Ламинарное пламя при противопоточной подаче реагентов, согласно данным, приведенным в главе 10.2.4, сильно отклоняется от равновесия.

Основным параметром здесь будет скорость деформации, которая с помощью скалярной характеристики $\chi = 2D\nabla^2\xi$ (Dahm 1993, Bish 1995) переходит в формулу

$$a = 2\pi D \left[\frac{\nabla^2\xi}{(\xi^+ - \xi^-)^2}\right] \exp\left\{2\mathrm{erf}^{-1}\left[\frac{\xi - \frac{1}{2}(\xi^+ + \xi^-)}{\frac{1}{2}(\xi^+ - \xi^-)}\right]\right\}^2 \qquad (10.76)$$

для локального двумерного течения. (Для геометрии Tsuji, приведенной на рис. 10.20 получают скорость деформации из решения уравнений потенциального течения, принимая $a = 2V/R$). Это уравнение корректно показывает, что для каждой деформации скалярная диссипация может быть большой или малой, смотря по тому, большая или маленькая разница имеется между ξ^+ и ξ.

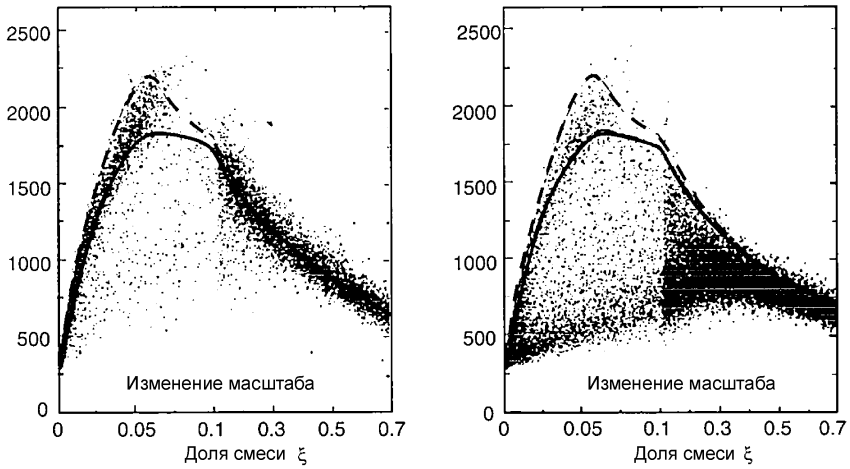


Рис. 10.43. Диаграмма рамановского рассеяния лазерного луча для измерений переменной смешения и температуры в турбулентном неперемешанном струйном пламени метана при различных расстояниях от горелки (Dibble et al 1987, Masri et al 1988), линии показывают расчеты Flamelet для $a = 1$ с$^{-1}$ (заштриховано)и $a = 320$ с$^{-1}$

Скалярная скорость диссипации является параметром, который может выражать отклонение от равновесия. Скалярные величины в пламени являются однозначными функциями переменной смешения, при этом одна-

ко используются не коэффициент равновесия, а коэффициент растяжения пламени. Это означает, что турбулентное пламя рассматривают как сумма многих малых ламинарных струек пламени, образующих в сумме равную скалярную скорость диссипации ξ. Эта модель является усовершенствованной. Предполагается, что неравновесными являются концентрации CO, NO и других веществ. Модель усовершенствуется дальше, если допустить, что течение обладает распределением скалярной скорости диссипации, т. к. скоростное поле в пламени изменяется благодаря движению вихря.

Гашение пламени

Ламинарное горение в противоточном течении предварительно не перемешанной смеси уже описывалось в главе 10.2.4. Оказалось, что характерный параметр, такой как например, температура пламени очень сильно зависит от скорости деформации. Скорость деформации характеризуется параметром a и описывается при этом градиентом скорости на поверхности пламени.

При достаточно большой скорости деформации ламинарное пламя в не перемешанной смеси гаснет. Такой процесс представлен на рис. 10.44. При превышении критического параметра скоости деформации (соответственно критической скорости V воздуха) пламя «задувается». f_W — это безмерный параметр течения, который можно рассчитать по скорости V подводящегося потока воздуха, скорости v_W горючего, вытекающего из пористого цилиндра, числа Рейнольда Re и радиуса цилиндра R. Скорость деформации при этом выразится соотношением $a = 2V/R$.

Рис. 10.45 показывает рассчитанные профили температур для разных скоростей диссипации χ, т. е. для различных скоростей деформации a в пламени с противотоком предварительно не перемешанной смеси. С увеличением скорости деформации понижается максимальная температура пламени. Выше определенного значения скорости деформации a_q (здесь для $c_q = 20.6s^{-1}$, причем q обозначает «гашение») происходит наконец гашение пламени (Rogg et al 1987).

Температура понижается, потому что увеличивается конвективно-диффузное переток тепла, в то время как одновременно снижается выделение тепла вследствие из-за уменьшения времени пребывания реагентов в зоне химической реакции. Пламя, близкое к погашенному, в значительной мере определяется числом Льюиса $Le = \lambda/(D\rho c_p)$, т. е. посредством соотношения теплопроводности и диффузии (Tsujj, Yamaoka 1967, Peters, Warnatz 1982). В турбулентном пламени растяжение ламинарных струек

пламени определяется через скалярную скорость диссипации на поверхности стехиометрической смеси. Скалярная скорость рассеивания — диссипации является таким образом непосредственной мерой для скорости деформации. Если она превышает критическое значение, то происходит локальное погасание струй пламени. Таким образом можно объяснить процессы гашения в турбулентном пламени предварительно не перемешанной смеси.

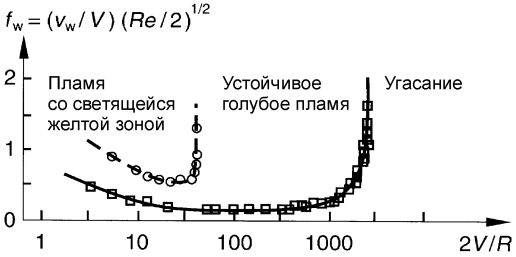


Рис. 10.44. Диаграмма стабильности ламинарного пламени с противотоком реагентов (Tsujj, Yamaoka 1967)

Гашением посредством растяжения струй пламени можно объяснить также спадание (отрыв) турбулентного пламени, схематично изображенное на рис. 10.46. На выходе из сопла растяжение фронта пламени наибольшее, вследствие чего именно здесь чаще всего происходит гашение. Средний светящийся контур показывает отрыв пламени от горелки, положение которого чем больше, чем будет больше исходная скорость горючего. Такой процесс отрыва пламени используется на практике там, где нужно оптимально проводить процессы гашения (например, гашение горящих нефтяных скважин), а именно, у основания пламени, где склонность к гашению из-за сильного растяжения (значительной скорости деформации) наибольшая.

При моделировании турбулентного пламени в не перемешанной смеси следует учитывать, что при определении осредненных значений плотности, температуры и массовой доли интегрируют только те области скалярной скорости диссипации, где не происходит гашение пламени:

$$\widetilde{T}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 \int_0^{\chi_q} T^{(F)}(\chi,\xi)\widetilde{P}^{(F)}(\chi,\xi;\boldsymbol{r})\,d\chi d\xi + \\ + \int_0^1 \int_{\chi_q}^{\infty} T_u(\chi,\xi)\widetilde{P}^{(F)}(\chi,\xi;\boldsymbol{r})\,d\chi d\xi. \tag{10.77}$$

Аналогичные выражения получают и для других осредненных значений в уравнениях (10.73). После локального затухания пламени в потоках предварительно не перемешанной смеси, появляются локальные области, в которых произошло частичное предварительное перемешивание компонентов, и нужно использовать другой параметр для описания степени этого предварительного перемешивания (Rogg et al 1987). Процессы в турбулентном пламени в смеси с предварительным смешением компонентов рассматриваются в главе 10.3.8.

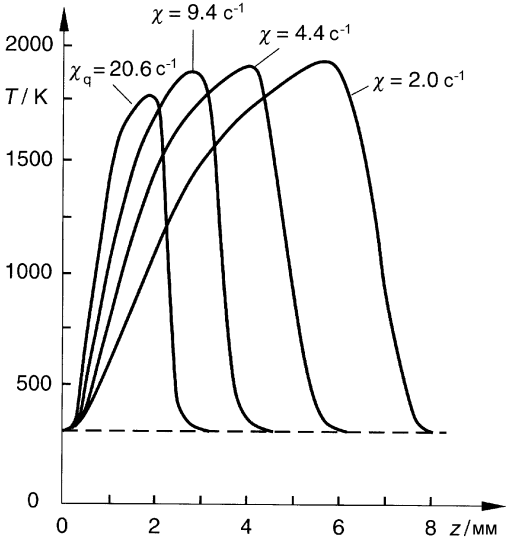


Рис. 10.45. Вычисленные температурные профили в пламени спротивотоком CH_4 и воздуха, для различных скоростей диссипации χ: тушение пламени происходит при $\chi > 20.6s^{-1}$; температура воздуха $T = 298$K, $p = 1$ бар

Моделирование турбулентного пламени предварительно не перемешанной смеси с использованием ФПВ

В главе 10.3 было замечено, что ключевая проблема определения химического члена в уравнениях решается, если известна функция плотности вероятности (ФПВ) для скалярных переменных. Некоторые методы предполагают использование определенных аналитических выражений для ФПВ

(например, усеченные функции Гаусса или β-функции). Эти функции определяются через осредненное среднее значение переменной и ее дисперсию. Из уравнений Навье–Стокса можно вывести основные уравнения для этих двух характеристик.

Несмотря на то, что с помощью этого метода был достигнут значительный успех, нельзя не отметить тот факт, что действительные функции ФПВ часто имеют свойства, которые представляются аналитическими функциями недостаточно полно. Каждую функцию (ФПВ) можно принципиально записать через ее моменты. Однако, с практической точки зрения вывод итоговых уравнений для высших моментов и их решения не представляют интереса.

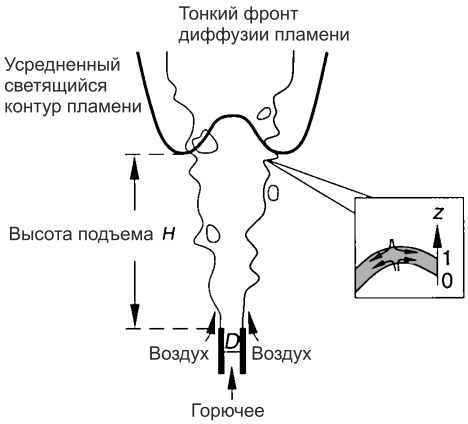


Рис. 10.46. Схематичное изображение процессов при отрыве турбулентного струйного пламени предварительно не перемешанной смеси

Форма объединенных функций плотности вероятности скалярных величин получается из рассмотрения процессов смешивания и химической реакции и вследствие этого определяется с помощью уравнений Навье-Стокса вместе с уравнениями сохранения. Исходя из этих уравнений можно вывести уравнения для объединенной функции плотности вероятности для скорости и скалярных величин (Pope 1986). Функция плотности вероятности в момент времени t и для выделенной точки с координатами x, y, z

$$f(v_x, v_y, v_z, \psi_1, \ldots, \psi_n; x, y, z, t) dv_x dv_y dv_z d\psi_1 \ldots d\psi_n \qquad (10.78)$$

выражает вероятность того, что жидкость имеет компоненты скорости в области v_i и $v_i + dv_i$ и значения скаляров (массовой доли, плотности, энтальпии) между ψ_α и $\psi_\alpha + \partial\psi_\alpha$. Далее уравнение, выражающее эволюцию функции ФПВ (Pope 1986,1991) примет форму

$$\rho(\mathbf{\Phi})\frac{\partial f}{\partial t} + \rho(\mathbf{\Phi})\sum_{j=1}^{3}\left(v_j\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \sum_{j=1}^{3}\left(\left[\rho(\mathbf{\Phi})g_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}\right]\frac{\partial f}{\partial v_j}\right) +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{\Phi}_\alpha}[\rho(\mathbf{\Phi})S_\alpha(\mathbf{\Phi})f]\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial v_j}\left[\langle\frac{\partial p'}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}|\boldsymbol{v},\Phi\rangle f\right]\right) +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{\Phi}_\alpha}\left[\sum_{i=1}^{3}\langle\frac{\partial J_i^\alpha}{\partial x_i}|\boldsymbol{v},\Phi\rangle f\right]\right), \tag{10.79}$$

причем x_i обозначает координаты x-, y-, и z; g_i — ускорение свободного падения в направлении x, y и z; $\mathbf{\Psi}$ — n-мерный вектор скаляров; v_j — компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$, S_α — источниковый член для скалярных величин (например, химические источниковые члены), τ_{ij} — компоненты тензора напряжений и J_i^α — компоненты вектора молекулярной плотности потока (например, диффузионный поток или плотность теплового потока) скаляров α в направлении i. Слагаемые $\langle q|\boldsymbol{v},\mathbf{\Phi}\rangle$ обозначают условные осредненные значения переменной q. Таким образом $\langle q|\boldsymbol{v},\mathbf{\Phi}\rangle$ является осредненным значением q при условии, что скорость и состав, смотря по обстоятельствам, примут значения $\boldsymbol{v}$ и $\mathbf{\Phi}$. Физически это означает, что они имеют смысл математического ожидания осредненного значения плотности молекулярного потока для определенных значений скорости и скаляров.

Первый член в левой части уравнения обозначает изменение ФПВ во времени, второй — конвекцию (движение в реальном пространстве), третий — движение в пространстве скоростей под действием гравитации и средних градиентов давления, четвертый — движение в пространстве состояний компонентов из-за источникового (например, химическая реакция). Особенно важно указать на то, что все члены появляются в левой части уравнения в аналитическом виде. Таким образом химическая реакция может быть точно описана, что является большим преимуществом метода.

Математические ожидания $\langle q|\boldsymbol{v},\mathbf{\Phi}\rangle$ плотностей молекулярных потока в правой части уравнения должны моделироваться, потому что они появляются не в аналитическом виде. Это означает, что необходима формулировка,

дающая обоснование зависимости этих членов от известных (например, рассчитанных) величин.

Необходимость таких моделей обусловлено тем, что для описания течения используют только одноточечную PDF и тем самым не дают никакой информации о пространственных корреляциях.

Уравнение эволюции (10.79) для ФПВ даже с помощью сегодняшних ЭВМ рассчитать не так просто. Проблемой является высокая размерность. В то время как в уравнениях Навье–Стокса только времена и координаты места являются независимыми переменными, в уравнении эволюции ФПВ (10.79) также и компоненты скорости и скаляры являются независимыми переменными. Для решения такой проблемы используется метод Монте–Карло. В этом методе решение для ФПВ достигается моделированием большого числа (например, 10^5 в пространственных двухмерных системах) стохастических частиц. Эти частицы изменяют свои свойства со временем, обусловленные конвекцией, химической реакцией, молекулярным движением и внешними силами. Вследствие чего они имитируют развитие ФПВ (Pope 1986).

На практике объединенную функцию скорости и скаляров $f(\boldsymbol{v}, T, w_i, \rho)$ сводят к ФПВ для скаляров (для точного описания химической реакции) и рассчитывают скоростное поле с посощью модели турбулентности (например, модель $k-\epsilon$), в основе которой лежат осредненные уравнения Навье–Стокса. Обе модели объединяются через плотность ρ. Модель ФПВ производит поле плотности, входящее в модель турбулентного течения. Отсюда рассчитывают новое поле течения и информацию возвращают в модель ФПВ. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет получена сходимость решения. Такое гибридное моделирование ФПВ/турбулентная модель позволяют реально изучить турбулентное пламя. В качестве примера на рис. 10.47 сравниваются экспериментальные результаты на рециркуляционном пламени в неперемешанной смеси воздуха и метана с соответствующей моделью. В основе моделирования лежит гибридный метод в комбинации с упрощенной химической кинетикой (ILDM, Warnatz et al 2001). Совпадение довольно хорошее. Модель значительно лучше, чем модель «диссипации вихря» (улучшенная модель EBU, см. гл. 10.3.5), предполагают, что химическая реакция происходит много быстрее, чем молекулярное смешивание. Допущение быстрой химии переоценивает образование продукта и возрастание температуры. Как следствие этого, предсказанные коэффициенты для образования NO будут завышенными.

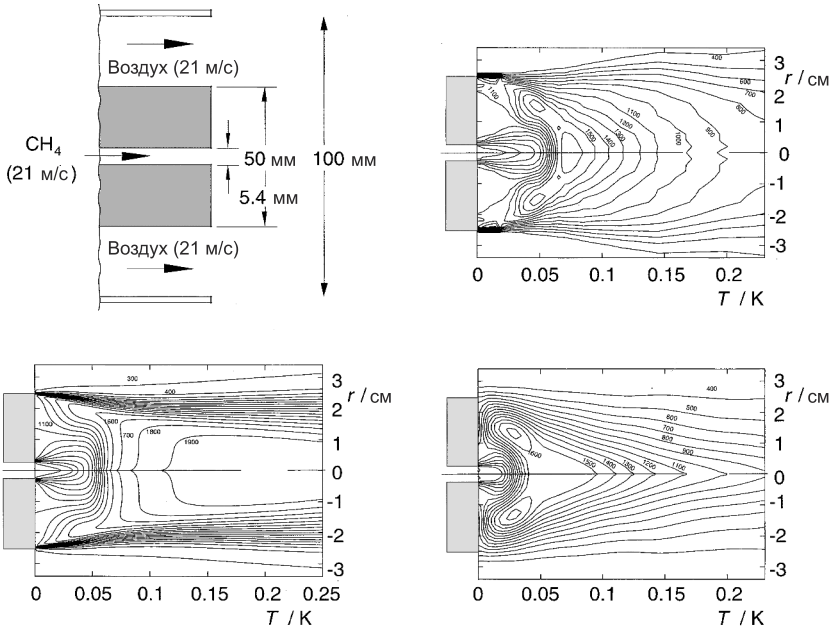


Рис. 10.47. Моделирование не перемешанного струйного пламени. Слева вверху — конфигурации горелки; сверху справа — измеренные профили температуры, $T_{max} \approx 1600$ К; внизу слева — модель «диссипации вихря», $T_{max} \approx 1900$ К; внизу справа — комбинированный метод ФПВ и турбулентной модели, $T_{max} \approx 1600$ К

10.3.8. Турбулентное пламя предварительно перемешанной смеси

Турбулентное пламя в предварительно перемешанной смеси показано на рис. 10.48. Перемешанная смесь из горючего и окислителя течет вверх и пламя в ней стабилизируется благодаря рециркуляции горючего газа за плохо обтекаемым блокирующим телом. Пламя распространяется от тела в непрореагировавшую смесь. Если бы течение было бы ламинарным, то пламя приняло бы V-образную форму. Но так как течение турбулентное, то угол пламени постоянно меняется, в соответствии с локальной скорости поступления смеси, и пламя принимает показанную на рис. 10.48 форму.

Развивающуюся при увеличивающейся степени турбулентности трехмерную структуру пламени можно объяснить с помощью диаграммы Borghi

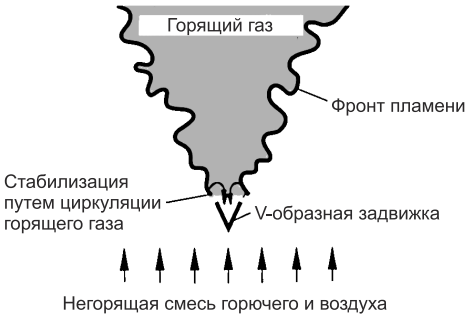


Рис. 10.48. Схематичное изображение мгновенной картины турбулентного пламени предварительно перемешанной смеси, стабилизированного заслонкой.

(Borghi 1984, Candel 1994, Poinsot 1991), представленной на рис. 10.49 в двойной логарифмической шкале. v'/V_L — интенсивность турбулентности v' отнесенная к скорости ламинарного горения v_L; l_0/l_L — отношение масштаба длины турбулентных вихрей l_0 к толщине ламинарного пламени l_L.

Диаграмма разделяется разными прямыми на отдельные области. Если турбулентное число Рейнольдса $R_l = v' l_0/\nu$ меньше 1, $R_l < 1$, то происходит ламинарное горение. Область турбулентного горения $(R_l > 1)$ можно снова разделить. Для этого нужно вновь ввести две безразмерные величины, а именно турбулентное число Карловитца Ka и еще турбулентное число Дамкёллера Da.

Турбулентное число Карловитца Ka описывает соотношение масштаба времени t_L для ламинарного пламени $(t_L = l_L/v_L)$ к масштабу шкале времени Колмогорова t_K:

$$Ka = \frac{t_L}{t_K} \quad t_K = \sqrt{\frac{\nu}{\widetilde{\epsilon}}}, \tag{10.80}$$

где ν — характерная кинематическая вязкость $(\nu = \mu/\rho)$, а $\widetilde{\epsilon}$ — скорость диссипации турбулентной кинетической энергии, см. уравнение (10.53). У масштаба времени Колмогорова время, требуемое вихрю l_K для одного оборота, такое же, как время, необходимое для диффузии на длине вихря. Если временной масштаб ламинарного пламени меньше чем масштаб по шкале Колмогорова, то локально имеет место ламинарное пламя перемешанной смеси, которое включено в общее турбулентное течение (Flamelet-модель).

В диаграмме Берджи эта область находится ниже прямой $Ka = 1$. Иногда эту область называют областью очагового горения.

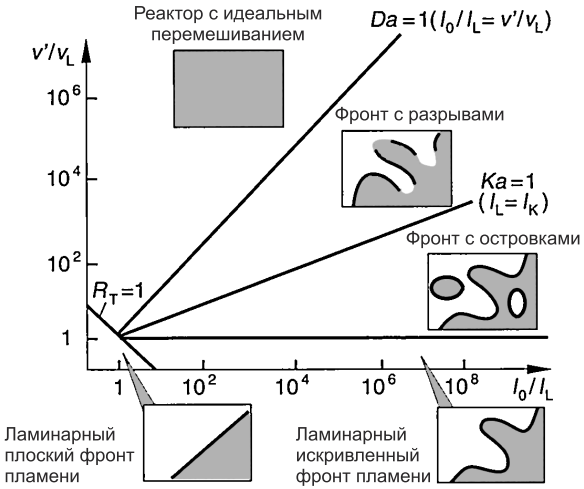


Рис. 10.49. Диаграмма Берджи

Турбулентное число Дамкёллера Da представляет соотношение между макроскопическими шкалами времени и шкалой времени химической реакции

$$Da = \frac{t_0}{t_L} = \frac{l_0 v_L}{v' l_L}. \tag{10.81}$$

Для $Da < 1$ время химической реакции больше, чем время, характерное для протекающих физических процессов. В этой области вихри взаимодействуют непосредственно со структурой пламени, которая так расширяется, что ее едва ли можно обозначить как «фронт пламени». В диаграмме Берджи эта область находится выше прямой $Da = 1$. Эта область называется также гомогенным реактором, или реактором идеального перемешивани.

Между областью реактора идеального перемешивания и областью очагового горения находится область реакционной зоны, где часть вихрей находится во фронте пламени (вихрь имеющий масштаб длины l_K, меньше чем l_L). В каждом турбулентном течении находится широкий спектр различных скоростей диссипации $\widetilde{\epsilon}$, которые обладают логарифмическим нор-

мальным распределением (Warnatz et al 2001, Dahm, Bish 1993, Dahm et al 1995, Bidh, Dahm 1995). Поэтому условия в турбулентном пламени можно описывать не как точку в диаграмме Borghi, а как зону, которая может простираться через различные зоны-диаграммы.

«Flamelet»

Описанные здесь вспомогательные средства позволяют рассчитать ламинарное пламя в перемешанной смеси, например, профили температур и концентраций (включая концентрации вредных веществ), а также скорость пламени. Турбулентное пламя, однако, трехмерное и нестационарное. Непосредственное численное моделирование (DNS) требует ресурсов, которые превосходят (ср. главу 10.3.2) область возможностей сегодняшних ЭВМ. Практической альтернативой этому является разработка моделей, позволяющих отразить важнейшие свойства турбулентного пламени.

Flamelet-модель турбулентного пламени перемешанной смеси аналогично Flamelet-модели пламени предварительно не перемешанной смеси. Турбулентное пламя представляет собой ансамбль многих маленьких ламинарных струй пламени в турбулентном поле течения. Если турбулентное число Рейнольдса R_l где-то около 0, то модель просто переходит в модель ламинарного пламени. Есть мнение, что концепцию Flamelet можно применять в области больших чисел Дамкёллера, где турбулентные шкалы времени больше шкал времени ламинарного пламени. Эта область находится в нижней правой части диаграммы Берджи (рис. 10.49).

В турбулентном пламени предварительно не перемешанной смеси имелась возможность (по меньшей мере в случае быстрой химии) поле концентрации полностью выразить через переменную смешения. Для турбулентного пламени предварительно перемешанной смеси это бессмысленно, так как горючее и окислитель уже перед реакцией смешались друг с другом. Поэтому следует выбрать другой вариант для выражения процесса горения. Обычно используется переменная c, описывающей степень полноты процесса горения во фронте пламени и принимающая значение от 0 до 1 (Bray 1980). Для этого использовали, например, процентную долю образования конечного продукта как

$$w_{\mathrm{CO_2}} = c w_{\mathrm{CO_2,b}}, \tag{10.82}$$

где индекс b обозначает сгоревший газ. Профиль не может иметь максимума, потому что иначе не возможно однозначное определение c. Скаляры,

такие как OH, O_2, CO, CO_2 и т. д. определяются в каждой точке течения однозначно через c и, если нужно, через локальную диссипацию c.

Ламинарное пламя в предварительно перемешанной смеси с заданными значениями скорости диссипации можно получить экспериментально (Law 1989) и численным методом (Stahl, Warnatz 1991).

Эксперименты с лазерной диагностикой оправдывают применение модели Flamelet при турбулентном горении перемешанных смесей в условиях их движения. На рис. 10.50 показан такой пример. В этом турбулентном пламени бунзеновской горелки предположение Flamelet оправдано. На рис. 10.50 показано полученное методом лазерно-индуцированной флюоресценции (ЛИФ) мгновенное распределение радикалов OH при турбулентном горении перемешанной пламени из газа и воздуха на горелке в промышленного масштаба. Можно отчетливо увидеть зубчатые ламинарные структуры пламени. При применении модели Flamelet используют модель для описания движения и изменения c. Из c с помощью модели Flamelet получаются температуры, концентрации веществ и плотности, которые затем входят в модель турбулентности. Для соединения моделей Flamelet и турбулентности имеются многочисленные возможности описанные в Ashurst 1995, Candel et al 1994, Pope 1991, Libby, Williams 1994, Peters 1987.

Скорость распространения турбулентного пламени

Продвижение турбулентного фронта пламени в предварительно перемешанной смеси пытались (аналогично ламинарному случаю) выразить через турбулентную скорость пламени v_1. В простейшем случае представляется турбулентный фронт пламени как угольчатый ламинарный фронт пламени (Damköhler 1940), с

$$\rho_u v_T A_T = \rho_u v_L A_L, \tag{10.83}$$

где A_L — общая площадь угольчатых ламинарных фронтов, A_T — площадь среднего турбулентного фронта и v_L — ламинарная скорость пламени (сравни рис. 10.51). Отсюда получается основная формула

$$v_T = v_L \frac{A_L}{A_T}. \tag{10.84}$$

Итак, соотношение v_T и v_L выражаются соотношением ламинарной и (средней) турбулентной площади пламени. Дамкёллер использует, например, выражение $A_L/A_T = 1 + v'/v_L$, где v' — обозначает скорость турбулентных

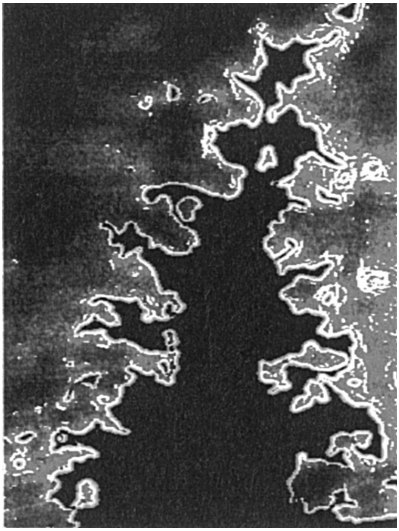


Рис. 10.50. Измерение методом ЛИФ концентрации радикала OH в турбулентном струйном пламени предварительно перемешанной смеси, которое стабилизировалась на сопле диаметром 3 см; черным цветом показана область исходной смеси ($\Phi = 0.8$, $R_l = 857$, $Ka = 0.07$).

колебаний (сравните главу 10.3.8). В результате получаем выражение

$$v_T = v_L + v' = v_L \left(1 + \frac{v'}{v_L}\right). \tag{10.85}$$

Этот результат совпадает с экспериментальными данными, пока интенсивность турбулентности невелика (до появления затухания). Эта модель иллюстрирует тот факт, что при горении в цилиндре двигателя увеличение числа оборотов (v' примерно пропорциональна числу оборотов) вызывает ускорение скорости горения. Без этой зависимости эффективное горение в поршневых двигателях ограничивалось бы низким числом оборотов (Heywood 1988).

Точно также данные экспериментов подтверждают факт независимости уравнения (10.83) от турбулентного масштаба длины (например, от интегрального размера l_0). Это можно легко объяснить с помощью простой схемы. (рис. 10.52). Хотя оба изображенных фронта пламени имеют разные

масштабы длин, общие площади ламинарных фронтов и вследствие этого турбулентные скорости у них одинаковые.

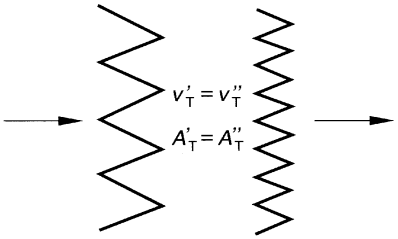


Рис. 10.52. Схематичное изображение двух фронтов пламени с различными шкалами длин по одинаковой площадью

У этой простой модели появляются проблемы, если смесь слишком обогащенная или наоборот слишком обедненная (за исключением границ горючести, определяющихся экстраполяцией, рис. 10.54). Также, если ламинарная скорость пламени v_L равна 0, то пламя отсутствует, но модель ошибочно предполагает $v_T = v'$.

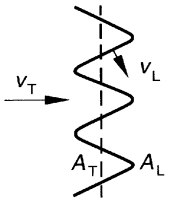


Рис. 10.51. Схематичное изображение распространения турбулентного фронта пламени

Гашение пламени

При возрастающей интенсивности пульсаций скорости v' наблюдают максимум турбулентной скорости пламени v_T, обусловленный развитием процессов локального гашения. Этот максимум был обнаружен, например, Bradley и сотрудниками 1984, 1993 в бомбе постоянного давления C_3H_8 — воздух при интенсивном процессе турбулизации посредством нескольких мощных вентиляторов (рис. 10.53). Объяснение этому кроется в представлении Flamelet (гашение при достаточном большой скорости деформации). Рис. 10.54 демонстрирует деформацию, необходимую для гашения как функцию эквивалентного соотношения Ф для пламени в предварительно перемешанной смеси метана и воздуха.

Проверялись различные механизмы, чтобы убедиться, что в разногласии между измерением и моделированием виновата не химия. Опыт пока-

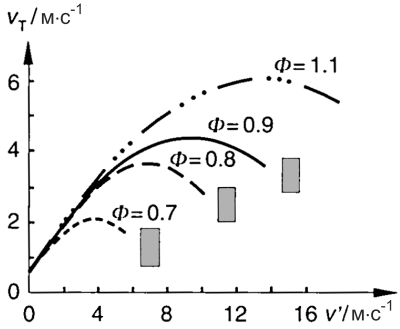


Рис. 10.53. Зависимость турбулентной скорости пламени от интенсивности турбулентности, реакция смеси C_3H_8 и воздуха в бомбе, серым показана область гашения

зывает, что небольшие энергопотери, которые в эксперименте трудно рассчитать, могут стать причиной такого разногласия (Stahl, Warnatz 1991).

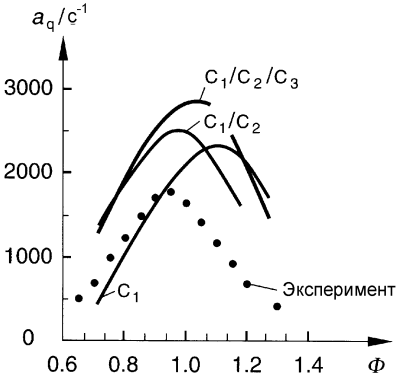


Рис. 10.54. Зависимость деформации a_q, необходимой для гашения пламени, от состава смеси пропана и воздуха

Эти измерения и моделирование в ламинарных условиях вместе с моделью Flamelet позволяют объяснить явления гашения, наблюдаемые в турбулентном пламени предварительно перемешанных реагентов.

Далее расчеты показывают, что характерное время для гашения пламени составляет доли миллисекунды. Изменение параметров газа, вызванные внезапным гашением, может быть причиной источника звука (вместе с соответствующими условиями резонанса, обусловленными геометрией (Hakl, Warnatz 1991)).

Как показывает рис. 10.54, особенно легко гаснут обедненные (как и обогащенные) смеси. Это является одной из причин, почему неожиданно наблюдается сильный выброс углеводорода у бензиновых двигателей (двигателей Отто). Наивно было бы полагать, что избыток кислорода ведет к полному сгоранию.

10.4. Сверхзвуковые и гиперзвуковые течения

10.4.1. Физико-химические явления при входе в плотные слои атмосферы

Во внешних слоях атмосферы имеет место свободно-молекулярное течение. С падением высоты полета и увеличением плотности воздуха уменьшается средняя свободная длина пробега (пути) газовых частиц. Только в самых нижних воздушных слоях можно говорить о непрерывном течении (о сплошной среде).

Решающим для области применения механики сплошной среды является число Кнудсена $K_n = \lambda/L$, отношение средней длины свободного пробега молекулы λ в газе к характеристической длине L летательного аппарата. Сплошность характеризуется числом Кнудсена $K_n \leqslant 10^{-2}$. Например, средняя длина свободного пробега молекулы на высоте 90 км составляет $\approx 10^{-3}$ м, так, что для описания области обтекания вокруг тела длиной 0,1 м или длиннее можно использовать уравнения Навье–Стокса.

В этих почти непригодных для эксперимента условиях вычислительная аэрогидротермодинамика, основываясь на уравнениях Навье–Стокса механики сплошных сред в комбинациях с физико-химическими моделями, является важным инструментом для предсказания характеристик течения, таких как поток тепла, распределение давления или коэффициент трения. Рассматривая явления перед летящим аппаратом, получают распределение физико-химических параметров. Там образуется вследствие сверхзвукового течения скачок уплотнения, последствием которого является резкое увеличение величин давления, плотности и температуры, связанное с понижением скорости течения. Это увеличение происходит в масштабе длин, сравнимом со средней свободной длиной пробега молекул. В скачке уплотнения течение с высокой скоростью с числом Маха $M \gg 1$ переходит в течение с высокой энтальпией и с числом $M < 1$.

В отличие от поступательных степеней свободы колебательные и вращательные степени свободы, а также состав воздуха сперва не изменяются. Но непосредственно за скачком уплотнения, в результате столкновения частиц с высокой температурой, все это увеличивает энергию колебания и свободного вращения и вызывает химические реакции. Типичные изменения температуры позади ударной волны, вызывающие эти явления реального газа, приведены далее:

	$< T <$	$400\ K$	
$400\ K$	$< T <$	$2000\ K$	O_2
$600\ K$	$< T <$	$3000\ K$	N_2
$2000\ K$	$< T <$	$5000\ K$	O_2
$4000\ K$	$< T <$	$10000\ K$	N_2
$1000\ K$	$< T <$	$5000\ K$	NO
$3000\ K$	$< T <$	$8000\ K$	NO

Какие из названных эффектов действительно возникнут, зависит от конкретной входной траектории летательного аппарата, это определит максимальная температура. Наряду с уже рассмотренными изложенными процессами при обтекании летательного аппарата, развиваются также на поверхности тела еще и гетерогенные физико-химические процессы, характеризуемые как взаимодействие газа и стенки. В течениях, имеющих высокую степень диссоциации вблизи поверхности летательного аппарата, имеют большое значение пристенные взаимодействия с реакциями, такие как эрозия и реакции катализа. Для предсказания максимально проявляющихся на космическом аппарате тепловых нагрузок необходимы модели, определяющие взаимодействие газа и стенки.

Дополнительно к этим реакционно-кинетическим явлением в общем течении и прежде всего в пограничном слое на поверхности летательного аппарата развиваются явления переноса массы, импульса и энергии. Эти процессы описываются моделями, с помощью которых можно определить коэффициенты диффузии, вязкости и теплопроводности. Если скорость полета при входе в атмосферу настолько высока, что в области скачка уплотнения температуры явно выше 5000 К, то происходит ионизация воздуха.

10.4.2. Химическая неравновесность

Повышение температуры за ударной волной ведет к развитию химических реакций. В качестве простейшей модели в литературе указывается 5-компонентная модель (Riedel et al 1992, 1993). Воздух содержит молекулы кислорода и азота. Они диссоциируют благодаря повышению температуры позади скачка уплотнения; возникают атомы кислорода и азота и как конечный продукт молекулы NO. Получается следующая схема реакции для горячего воздуха, состоящая из трех реакций диссоциации (R1), (R3), (R5) и двух заместительных (обменных) реакций (R7) и (R9), а также соответствующих обратимых реакций (R2), (R4), (R6) и (R8) и (R10):

Реакция					A	β	E_a	
O_2	$+M'$	$\longrightarrow$	O	$+O+M'$	$2{,}70{\cdot}10^{19}$	$-1{,}0$	494,0	$(R1), (R2)$
N_2	$+M''$	$\longrightarrow$	N	$+N+M''$	$3{,}70{\cdot}10^{21}$	$-1{,}6$	941,0	$(R3), (R4)$
NO	$+M'''$	$\longrightarrow$	N	$+O+M'''$	$2{,}90{\cdot}10^{15}$	0,0	621,0	$(R5), (R6)$
O	$+N_2$	$\longrightarrow$	NO	+N	$1{,}82{\cdot}10^{14}$	0,0	319,0	$(R7), (R8)$
NO	+O	$\longrightarrow$	O_2	+N	$3{,}80{\cdot}10^{9}$	1,0	173,1	$(R9), (R10)$

	O_2	N_2	O	N	NO
M'	1,00	0,10	2,80	0,10	0,10
M''	0,10	1,00	0,10	2,80	0,10
M'''	0,05	0,05	1,00	1,00	1,00

где $k = A \cdot T^{\beta} \cdot \exp(-Ea/(R \cdot T))$. Параметр Аррениуса A имеет размерность см/моль·с, а E_a — энергия активации — кДж/моль. Символ M обозначает любой продукт, находящийся в системе, который участвует в реакции в качестве ударного партнера, но сам не реагирует.

Диссоциация кислорода протекает непосредственно через реакцию (R1). Атомарный азот напротив образуется из-за высокой энергии связи тройного соединения и связанной с этим высокой энергии активации в основном через обе реакции обмена (R7) и (R9) и только очень малая доля образуется через реакцию диссоциации (R3). Образованный в (R7) NO распадается затем через реакцию диссоциации NO (R5) на N и O.

Насколько быстро и в каком объеме проходят эти реакции зависит от масштаба шкалы времени (Warnafz et al 1992). Если заданная течением временная шкала сопоставима с временной шкалой химических реакций, то химические реакции протекают так быстро, что устанавливается химическое равновесие. Образование и потребление отдельных продуктов в этом случае бесконечно быстрых реакций больше не зависят от времени. При задании давления и температуры получается равновесная концентрация частиц определяемая из минимума *свободной энергии* системы. Система реакции содержит 5 разных продуктов и описывается по правилу фаз Гиббса через три линейно независимые пары реакций (R1), (R2); (R3), (R4); (R5), (R6) и два компонента (N и O) (Riedel et al 1993, Warnatz et al 1992). Но этот случай далее здесь не будет рассматриваться, так как в гиперзвуковых течениях скорости так велики, что вышеупомянутое предложение о масштабах времени ведет к неточным прогнозам состояния течения.

Типичной ситуацией в сверхзвуковом полете при входе в плотные слои атмосферы часто является сравнение масштаба времени течения с масшта-

бом времени химической реакции. Поэтому налицо *химическая неравновесность*, которую необходимо учитывать в физико-химической модели течения. Кроме того, такие течения также часто пребывают при *температурной неравновесности* (см. гл. 10.4.3).

Скорости образования $(\partial Z_i/\partial t)_{chem}$ (изменение по времени массовой доли) каждого вида продукта в элементе среды поэтому зависит от времени. Их можно рассчитывать, зная уже заранее температуру и давление элемента среды, из уравнений для скоростей реакций, приведенных в гл. 10.1.3, представляющих собой часть общей системы дифференциальных уравнений. Принимая во внимание, что температура и давление в поле течения изменяются не только вследствие химических реакций, но и из-за движения массы, импульса и энергии, расчет массовой доли должен происходить в целом вместе с расчетом течения.

Однако очень часто такую зависимость не учитывают, и применяют модели, обозначаемые в литературе как объемные (определяющиеся по объему) или нульмерные, и получают из них необходимые данные о реакциях и типичные масштабы времени для такой системы.

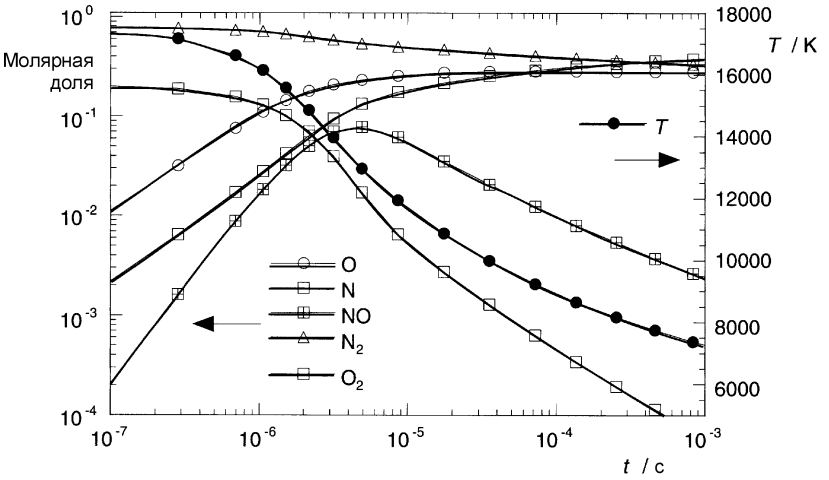


Рис. 10.55. Изменение молярной доли и температуры по времени для механизма реакций в горячем воздухе

Для формирования уравнений изменения во времени массовой доли пяти компонентов нужно для каждой реакции специфицировать параметр Аррениуса по уравнению (10.21). Параметры получаются в результате оценки (Riedel 1992) значений скоростей реакции как функции температуры, полученных экспериментальным путем и имеющихся в литературе.

Рис. 10.55 показывает изменение долей молей O_2, O, N_2, N и NO как функции времени для начальной температуры позади ударной волны $T = 17500\,K$, рассчитанные с помощью этого механизма реакции. При расчете исходят из состава воздуха, состоящего из 79% N_2 и 21% O_2. Газы, составляющие следы, не учитываются. Отчетливо видна полная диссоциация молекул кислорода, которая заканчивается примерно через 0,5 мс. N_2 наоборот диссоциирует только небольшой частью. NO проходит при 4,1 мс максимум. Затем температура сильно снижается, если изменение O и N долей достигает максимума, потому что затем здесь должны использовать больше всего энергии для диссоциации.

10.4.3. Температурная неравновесность

За скачком уплотнения наряду с химическими реакциями появляются также реакции, вызывающие колебания и вращения молекул в результате столкновений с частицами с высокой поступательной энергией. Последствием этого может быть то, что физико-химические модели диссоциирующего воздуха ведут себя совершенно по-другому чем это предсказывают температурные модели. Возможными процессами могут быть энергообмен между энергией колебаний и энергией поступательного движения (обозначенный как V-T передача энергии), колебанием и вращением (V-R передача энергии) или между разными стадиями колебаний (V-V-передача энергии).

Все эти возможные взаимодействия могут быть описаны через так называемые основные уравнения, которые выражают отношение между изменением числа замещений внутренней степени свободы и вероятностью перехода V-T, V-V, и V-R передачи энергии молекул O_2, N_2 и NO. Так как вращательная степень свободы очень быстро переходит в термическое равновесие — для этого необходимо в среднем только 2–3 удара, то можно исходить из общей температуры для поступательного движения и для вращения. Установление равновесия колебательных степеней наоборот длится существенно дольше и эту ситуацию неравновесия следует учитывать в описании гиперзвукового течения. Возможным подходом к моделированию возбуждения колебаний является селекция молекул по их степени возбу-

ждения. Все процессы возбуждения и релаксации, связанные с термической неравновестностью, отображаются в детальном механизме реакции селектированных по состояниям молекул $O_2(v)$ и $N_2(v)$, причем v предназначается для возможных, вызванных колебаниями состояний и от основного состояния с $v = 0$ до $v = v_{max}$ непосредственно приближающихся к границе диссоциации молекулы. Если представить уровень энергии, определяемый возбуждением колебаний, моделью негармоничного осциллятора

$$E(v) = hc\left[\nu_0(v + \frac{1}{2}) - \nu_0 x_e(v + \frac{1}{2})^2\right],$$

то получим для азота $v_{max}^{N_2} = 46$, а для кислорода $v_{max}^{O_2} = 36$. ν_0 — это частота основного колебания, а $\nu_0 x_e$ — постоянная негармоничности. c — скорость света, h — постоянная Планка. Для NO такая модель неприемлема, так как появляются только незначительные концентрации. Точно также здесь не учитывается энергия вращения (в предположении общей вращательной и поступательной температуры).

В рамках такого подхода возникает трудность определения всех детальных коэффициентов скорости для выбранных компонентов. В литературе имеются результаты измерений в большинстве случаев только для простых состояний возбуждения. Здесь нужны другие гипотетические модели, чтобы можно было определить параметр Аррениуса для реакций диссоциации и обмена, а также для V-T энергопередачи в зависимости от числа колебательных квантов v. В общем с помощью этого, подробно описанного Riedel et al 1993, метода получили механизм из 87 видов и 502 реакций.

На рис. 10.56 показано возникновение выбранных колебательных состояний и одновременное снижение замещения основного состояния. Все вызванные состояния принимают максимальное значение примерно в одно и то же время между 1 и 10 мс, максимум наступает тем позднее, чем выше будет состояние возбуждения. Предполагается, что в начале все молекулы кислорода и азота находятся в основном состоянии, потому что при обычной температуре воздуха 200 K только малая часть всех молекул находится в возбужденных колебательных состояниях. При такой температуре соотношения молекул O_2 в первом возбужденном состоянии к молекулам кислорода в основном состоянии составляет примерно 10^{-5}.

На рис. 10.57 изображено сравнение моделей. Линии показывают изменение молярной доли O_2 и температуры, рассчитанной с помощью модели по Riedel 1993. Начальная температура в этом случае составляет 22000 K при давлении 25,6 HPa.

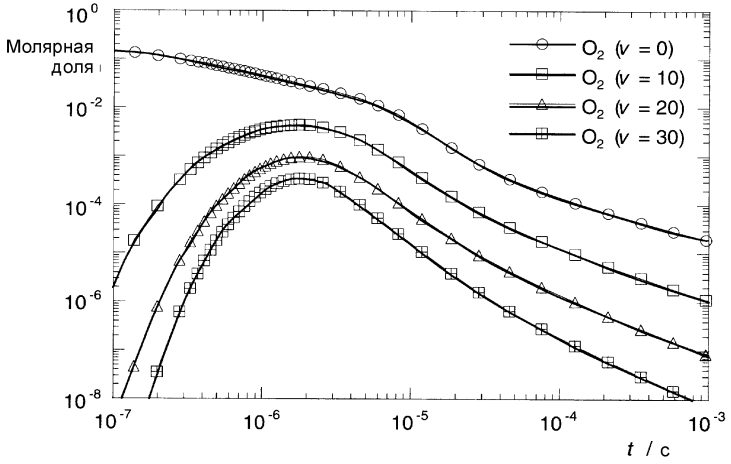


Рис. 10.56. Основное состояние и выбранные состояния возбуждения молекулы кислорода

После 1 миллисекунды из-за энергозатрат, необходимых для реакций и процессов возбуждения, система охладится до температуры 7300 K. Для сравнения нанесен график температуры и концентрации с рис. 10.55, который получили при предположении температурного равновесия. Обе разные начальные температуры для этого сравнения были выбраны так, что для $t \to \infty$ достигается одинаковая поступательная температура. При температурной неравновесности получается замедленное изменение концентраций. Это ясно видно при позднем подъеме молярной доли кислорода вследствие замедленной диссоциации молекул кислорода и при позднем максимуме в развитие молярной доли NO. Это происходит в термической химии при 3 миллисекундах, а в нетермической химии — только при 9 миллисекундах.

Рис. 10.58 показывает слева распределение O_2 при обтекании цилиндра радиусом 1 м при числе Маха $M = 25$, рассчитанного с помощью нетермической модели. Решают уравнения Навье-Стокса (см. гл. 5.4.6). Скорость обтекания составляет 7200 м/сек при температуре 205 K. Массовые доли рассчитывают через суммирование всех вызывающих возбуждение состояний $O_2(v)$. Как у молекул O_2, так и у молекул N_2 замещение возбужденных состояний меньше, чем это соответствует распределению Больцмана при наличие температурного равновесия.

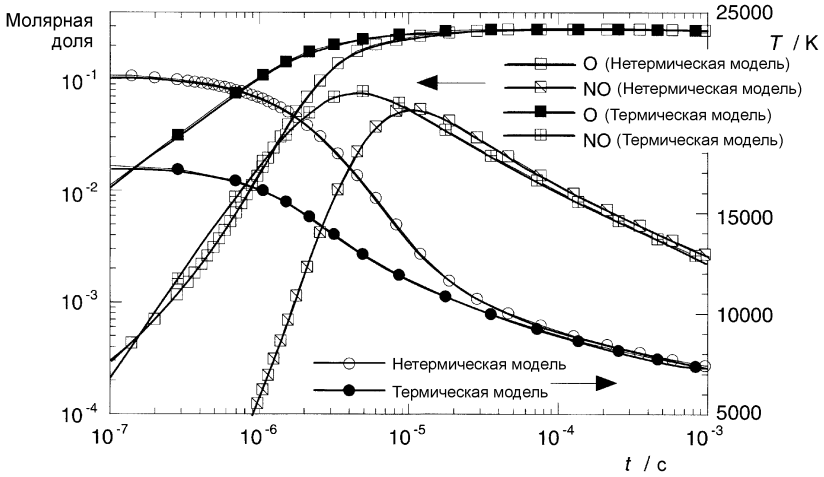


Рис. 10.57. Сравнение развития во времени молярной доли атома кислорода, молекулы NO и температуры. Так как колебательные степени свободы получают вследствие небольшого замещения меньше энергии, то температура в ударном фронте поднимается до 15330 K, что на 15% выше, чем температура, рассчитанная с помощью термической модели

Кроме того, сказывается увеличение расстояния между ударными слоями. В правой части рисунка изображена разница в распределении температур, рассчитанных с помощью нетермической и термической моделей. При предположении термического равновесия образуется почти вдвое больше молекул NO, чем в расчете с помощью термической схемы реакции. Как следствие этого при предположении температурного равновесия проявляется резкое увеличение атомов азота в области за ударной волной. Однако значения в области непосредственно перед летательным аппаратом больше не отличаются.

10.4.4. Реакции на внешней поверхности летательных аппаратов при входе в атмосферу

В последние годы интенсивно исследовались материалы, которые можно было использовать как теплозащиту, предназначенную для полетов в плотных слоях атмосферы. Среди других исследовался материал RCC (Reaction Cured Class) для американских космических шаттлов. Он состоит

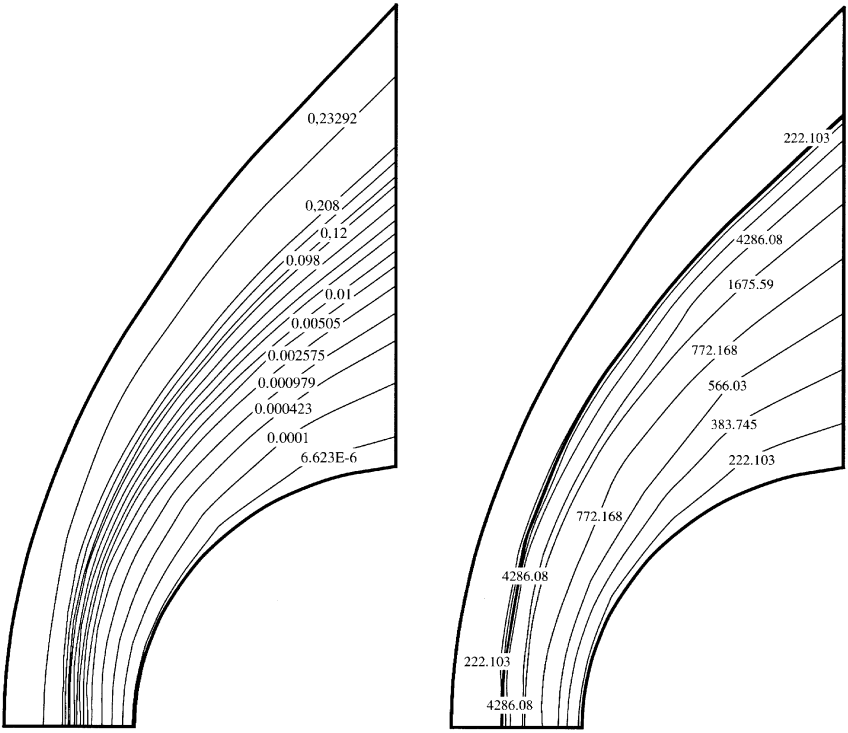


Рис. 10.58. Слева: массовая доля O_2, рассчитанная при помощи нетермического механизма реакции для обтекания цилиндра радиусом 1 м с числом Маха $M = 25$ (no Riedel et al 1993), справа: разница в температурах обеих моделей

из 94% SiO_2, 4% B_2O_3 и 2% SiB_4 и демонстрирует сильную температурную зависимость.

При низких температурах вероятность рекомбинации мала, но она сильно увеличивается с возрастанием температуры (Dentxhmann et al 1995). При возникающих во время полета температурах рекомбинация атомов кислорода и азота на внешней поверхности вносит значительный вклад в теплозащиту летательных аппаратов.

Для предсказания теплопередачи к летательному аппарату необходимо моделировать взаимодействие газ-стенка, дополнительно к чистым реакциям в газовой фазе.

Адекватное описание рекомбинации и связанное с этим высвобождение тепла, выявляет и здесь концепцию элементарных реакций, которая сейчас должна применяться как для реакций газовой фазы, так и для реакций на верхней поверхности. Механизм реакции газовой фазы следует расширить за счет следующих реакций на верхней поверхности летательного аппарата.

Реакция					A	E_a	S^0
O	+(s)	$\longrightarrow$	O(s)				0,1
N	+(s)	$\longrightarrow$	N(s)				0,1
O(s)		$\longrightarrow$	O	+(s)	$5{,}0{\cdot}10^{11}$	200,0	
N(s)		$\longrightarrow$	N	+(s)	$7{,}3{\cdot}10^{11}$	215,0	
O_2(s)		$\longrightarrow$	O_2	+(s)	$1{,}0{\cdot}10^{12}$	10,0	
N_2(s)		$\longrightarrow$	N_2	+(s)	$1{,}0{\cdot}10^{12}$	10,0	
O	+O(s)	$\longrightarrow$	O_2	+(s)	$6{,}0{\cdot}10^{13}$	60,0	
N	+N(s)	$\longrightarrow$	N_2	+(s)	$6{,}0{\cdot}10^{13}$	60,0	
O(s)	+O(s)	$\longrightarrow$	O_2(s)	+(s)	$2{,}0{\cdot}10^{19}$	160,0	
N(s)	+N(s)	$\longrightarrow$	N_2(s)	+(s)	$7{,}0{\cdot}10^{17}$	160,0	

Причем A имеет единицу измерения см $\cdot$ моль $\cdot$ с, E_a — в кДж/моль, а коэффициент захвата S^0. Эта подробная схема реакций процессов на поверхностях включает адсорбцию и десорбцию атомов азота и кислорода, а также десорбцию соединенных на внешней поверхности атомов кислорода и азота и молекул N_2 и O_2. Адсорбцию молекулярного кислорода и азота можно не учитывать, потому что эти атомы из-за высоких температур сейчас же снова дессорбируют. Взаимодействие NO с поверхностью в модели не учитывается, потому что об этом нет никаких экспериментальных данных.

Адсорбция атомов кислорода и азота, выражается через коэффициент захвата, который показывает с какой вероятностью частица газовой фазы адсорбируется на поверхности. Способом, описанном Dentshmann et al 1995, можно пересчитать коэффициенты захвата в форме Аррениуса, что ведет к предэкспоненциальному фактору, зависящему от вида покрытия поверхности.

Собственно рекомбинация атомов кислорода и азота в соответствующую молекулу может происходить двумя возможными путями:

1. Реакция атома кислорода (атома азота) газовой фазы с атомом кислорода (атомом азота), адсорбированном на поверхности и присоединившейся

десорбцией молекулы O_2 (молекулы N_2). Этот путь обозначается в литературе как реакция Eley–Ridel и связан с *низкой энергоаккомодацией.*

2. Реакция двух адсорбированных на верхней поверхности атомов кислорода (атомов азота) друг с другом и присоединившейся десорбции молекулы O_2 (молекулы N_2). Этот путь обозначается в литературе как реакция Langmuit–Hinshelwood и связана с *высокой энергией аккомодации.*

Энергия, способствующая нагреву поверхности, зависит как от числа рекомбинирующих атомов, так и от доли освободившейся при этом энергии, которая аккомодируется от поверхности. Для количественного определения этих обоих эффектов определим коэффициент рекомбинации как соотношение

$$\gamma = \frac{j_{\text{reaktiv}}}{j_{\text{общ}}}$$

от общего потока массы атомов $j_{\text{общ}}$, попавших на поверхность и потока массы рекомбинированных молекул j_{reaktiv}. Коэффициент аккомодации энергии β определится через

$$\beta = \frac{j_q}{j_{\text{reactiv}} \cdot \Delta_D h},$$

с подводом тепла к поверхности j_q и Δ_{Dh} как удельная энтальпия диссоциации. Обусловленный процессами рекомбинации поток энергии к поверхности зависит следовательно от продукта $\gamma \cdot \beta$. Как γ так и β зависят от температуры. Оба коэффициента можно вычислить с помощью вышеописанной реакционно-кинетической модели. Сравнение с экспериментальными изменениями потоков тепла (Deutschmann et al 1995) определяет пригодность схемы реакций на поверхности.

На рис. 10.59 показано обтекание полуцилиндра радиусом 1 м (скорость течения 7200 м/сек, температура течения 205 K) O_2 и N_2 и температуру в ударной волне и вдоль поверхности летательного аппарата. Значения x в области $-1,5\,m \leqslant x \leqslant -1,0\,m$ соответствуют линии симметрии перед летательным аппаратом. Точки на поверхности летательного аппарата имеют координату x в области $-1,0\,m \leqslant x \leqslant -0,0\,m$. Ясно видно влияние реакций на верхней поверхности на температуры стенки и концентрации продуктов пристенной области.

Рекомбинация атомов азота на стенке вызывает увеличение доли молекул N_2 в области непосредственно перед поверхностью ($x = 1,0$ м). У O_2 можно наблюдать тот же эффект, однако на меньшем уровне, потому что степень диссоциации O_2 находится много выше, чем степень диссоциации N_2.

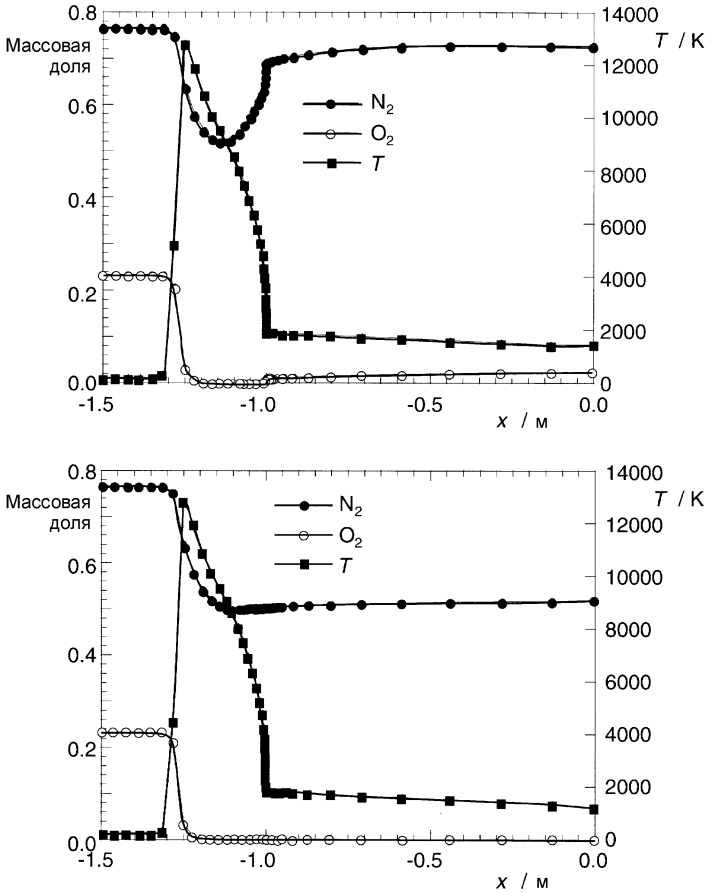


Рис. 10.59. Доли масс O_2 и N_2 и температуры вдоль линии симметрии и вдоль верхней поверхности. Вверху: подробная модель реакции для взаимодействия газа-стенки, внизу: без взаимодействия газ-стенка

Если пренебречь взаимодействием газ–стенка, то получится соотношения с уменьшением молекул азота и кислорода в близкой к стенке области, показанные в нижней части рис. 10.59. В обеих моделях наблюдают внизу по течению и вдоль летательного аппарата увеличение молекул кислоро-

да и азота, которое независимо от пристенного эффекта обуславливаются понижением температуры и усилением рекомбинации атомов.

Температура в точке торможения увеличивается вследствие высвобождающегося рекомбинационного тепла до 1920 K и лежит на 80 K выше результата, полученного когда не учитывали взаимодействие газ–стенка.

11

Течения в атмосфере и океане

11.1. Основы течений в атмосфере и океане

11.1.1. Введение

Течения в околоземной атмосфере (воздушные течения) и в океанах (морские течения) принципиально не отличаются от течений, характерных для технических приложений, рассмотренных в предыдущих главах. Речь идет о движениях в газах (атмосфера) и жидкостях (океан), которые подчиняются влиянию силы тяжести и определяются силой давления и трения. Атмосфера и океан являются частью вращающейся системы, в которой действуют еще и силы Кориолиса и центробежные силы.

Такая общая трактовка течений в атмосфере и океане полностью оправдана. На англосаксонском диалекте этомк направлению дали название Geophysycal Fluid Dynamics, переводящееся как геофизическая гидродинамика. Здесь следует сделать ссылку на учебники Cushmann–Roisin 1994, Cill 1982 и Pedlosky 1994. Людвиг Прандтль также занимался в своем путеводителе по гидроаэродинамике различными вопросами течений в атмосфере и океане.

В следующей главе будут показаны существенные элементы геофизических гиродинамических процессов в атмосфере и океане с точки зрения Прандтля. Это, естественно, можно сделать только в обзорном виде и ни в коей мере не заменять обширную специальную литературу в области метеорологии и океанографии.

11.1.2. Основные уравнения во вращающейся системе

Представленные в главе 5 основные уравнения для жидкостей и газов справедливы также для жидкости в океане и атмосфере. В соответствующих уравнениях представлены только такие специфические свойства как плотность, теплопроводность или вязкость в изучаемой среде. В качестве

нового аспекта следует учесть, что Земля и вместе с ней атмосфера и океан вращаются вокруг оси. Поскольку целесообразней описывать процессы движения в связанной системе координат, основные уравнения также будут записываться во вращающейся системе. Представленные в главе 5 уравнения движения справедливы для свободной от ускорения инерциальной системы. В метеорологии и океанографии принято представлять уравнения движения во вращающейся системе координат Земли. При этом появляются дополнительные ускорения (ускорение Кориолиса, центробежное ускорение), так что уравнения Навье–Стокса (5.20), записанные в векторном виде, представятся:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + 2\cdot\Omega\times\boldsymbol{v} + \Omega\times\Omega\times\boldsymbol{r}\right) = F - \nabla p + \mu\cdot\Delta\boldsymbol{v}. \quad (11.1)$$

Дополнительно появившиеся в левой части уравнения слагаемые — это ускорение Кориолиса $2\cdot\Omega\times v$ и центробежное ускорение $\Omega\times\Omega\times r$. Причем, как изображено на рис. 11.1, Ω является вектором угловой скорости земного вращения, а r — расстояние, на котором находится точка массы от оси вращения. Величина вектора угловой скорости вращения определена как отношение частоты вращения Земли $\Omega = 2\cdot\pi$ к продолжительность оборота вращения и поэтому $\Omega = 2\cdot\pi/24 = 0,727\cdot 10^{-4}\text{с}^{-1}$. Описывать многие проблемы в метеорологии и океанографии через движение в сферических координатах, как это подходило бы для Земли, не требуется. Декартову систему координат накладывают на поверхность Земли так, что ее горизонтальные координаты $(x,\, y)$ образуют *касательную плоскость* на определенной географической широте ϕ. Вертикальная координата z направляется вертикально к этой плоскости, как это показано на рис. 11.1 Вектор угловой скорости вращения Ω можно разложить в этой координатной системе на

$$\Omega = \Omega\cdot\cos(\phi\cdot\boldsymbol{j}) + \Omega\cdot\sin(\phi\cdot\boldsymbol{k}) = f^*\cdot\boldsymbol{j} + f\cdot\boldsymbol{k},$$

где $f^* = 2\Omega\cdot\cos(\phi)$, $f = 2\Omega\cdot\sin(\phi)$ можно обозначить как *параметр Кориолиса.*

В атмосфере и океане в качестве консервативной силы F в (11.1) действует сила тяжести:

$$\boldsymbol{F} = -\rho\cdot g\cdot\boldsymbol{k} = -\rho\nabla\Phi,$$

где g — это ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/сек^2. Оно может также выражаться градиентом потенциала тяжести Φ ($\Phi = g\cdot z$). Сила тяжести

направлена к центру Земли и тем самым имеет проекцию $g \cdot \cos(\phi)$ в направление к оси вращения. Центробежная сила $\Omega \times \Omega \times r$ действует по направлению от оси вращения наружу и поэтому противоположна силе тяжести. Из-за небольшого значения центробежной силы ($\Omega^2 \cdot r \approx 3 \cdot 10^{-2}$ м/сек) ее в метеорологии и океанографии в противовес силе тяжести не учитывают.

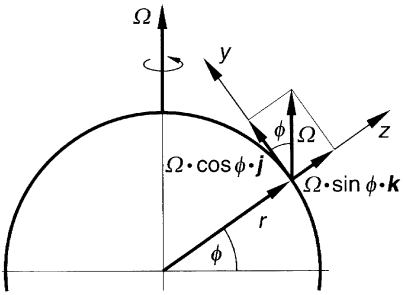


Рис. 11.1. Компоненты вращения Земли Ω в тангенциальной плоскости (ось x перпендикулярна плоскости рисунка)

Произведя указанные ранее упрощения можно записать уравнения Навье–Стокса (5.20) для тангенциальной плоскости:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p - \nabla \Phi + \nu \cdot \Delta \boldsymbol{v}, \tag{11.2}$$

где $\nu = \mu/\rho$ обозначает кинематическую вязкость.

Добавившаяся во вращающуюся координатную систему сила Кориолиса должна была бы, собственно, присутствовать во всех уравнениях движения гидромеханики, потому что все процесса течения, как и механические процессы, происходят на вращающейся Земле.

В качестве меры для относительного веса силы Кориолиса принято число Росби (Rossby), которое с точки зрения физики представляет соотношение силы инерции $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ и силы Кориолиса $f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}$. Для процесса течения с характерным размером L и скоростью U можно оценить порядок величины:

$$\text{сила инерции} \sim \frac{U^2}{L}$$
$$\text{сила Кориолиса} \sim f \cdot U.$$

Вследствие чего число Росби будет

$$Ro = \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила Кориолиса}} = \frac{U}{f \cdot L}. \tag{11.3}$$

Большое число Росби ($Ro \gg 1$) означает, что в уравнениях (11.2) силой Кориолиса можно пренебречь. В обратном случае при ($Ro \ll 1$) сила Кориолиса играет доминирующую роль и ею нельзя пренебречь.

Это поясняется следующими примерами. Для параметра Кориолиса здесь применено значение 10^{-4}с^{-1}, которое соответствует географической широте $\approx 45°$. Для различных течений имеем:

Течения	Размер	Скорость	Ro
Циклон	10^3 км	10 м/с	0,1
Ветер с суши на море	50 км	5 м/с	1
Пылевой вихрь	50 м	5 м/с	10^3
Смерч	50 см	5 см/с	10^3

Из этой таблицы видно, что для небольших атмосферных и технических течений сила Кориолиса не играет роли. В крупных же процессах (циклонах) ее нужно учитывать. Это поясняется и в следующих главах, в которых описывается некоторые атмосферные и океанические течения.

Уравнение (11.2) представляет основу для формального описания процессов движения в атмосфере и океане. К ним присоединяются еще уравнение неразрывности и уравнение энергии, которые уже рассматривались в гл. 5. Сопоставление уравнений даются в главе 11.4.

В качестве дополнения следует остановиться на понятии потенциальной температуры, использующееся часто в метеорологии. Оно складывается из первого основного закона термодинамики для адиабатического процесса. В этом случае давление p и температура T связаны:

$$\frac{T(p_0)}{T(p)} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{C_p}}, \tag{11.4}$$

где p_0 — давление, обычно $p_0 = 1000\,\text{кПа}$. Потенциальная температура θ это температура, $T(p_0)$ которую воспринимает воздушный объем с температурой T и давлением p, если это при адиабатическом процессе ведет к разности давления p_0

$$\theta = T \cdot \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{C_p}} \tag{11.5}$$

где $R = 287$Дж/(кг·К) — газовая постоянная для сухого воздуха, $c_p = 1005$Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Потенциальная температура является для адиабатического процесса сохраняющейся величиной, т. е. $d\theta/dt = 0$, поэтому ее используют при описании атмосферных процессов.

11.1.3. Геострофическое течение

В этой главе исследуется действие силы Кориолиса на течения в атмосфере и океане. Для этого рассматривается горизонтальное свободное от трения течение (индекс h). Из уравнения (11.2) получают:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_h}{dt} + f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_h = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla_h p. \tag{11.6}$$

Частица жидкости может ускорятся по горизонтали вследствие действия силы Кориолиса и силы давления. Но если течение не ускоряется, т.е. $d\boldsymbol{v}_h/dt = 0$, то получим в равновесии

$$f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_h = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla_h p.$$

После преобразования получим для скорости $\boldsymbol{v}_h$

$$\boldsymbol{v}_h = \frac{1}{\rho \cdot f} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla_h p. \tag{11.7}$$

Она называется геострофиса (в атмосфере геострофический ветер) и обозначается индексом g: $\boldsymbol{v}_g$. Как видно из (11.7) направление течения параллельно линиям одинакового давления (изобарам) или перпендикулярно к градиентам давления. Это изображено на рис. 11.2. Невероятный на первый взгляд факт вертикального течения по направлению к действующей силе (давления), объясняется тем, что во вращающейся системе координат с силой Кориолиса появляется компенсирующая сила, которая может привести к равновесию (так называемое геострофическое равновесие) (рис. 11.2).

В соответствии с гл. 11.1.2 это возможно, если число Росби будет $Ro \longrightarrow 0$. В силу того, что $Ro = U/(f \cdot L)$ речь должна идти об крупномасштабном процессе течения. На самом деле почти геострофическое течение можно наблюдать например, в атмосферных областях высокого и низкого давления. Здесь дует ветер почти параллельно изобарам а именно в области низкого давления против часовой стрелки, а вокруг области

повышенного давления по часовой стрелке. Любой читатель сможет это проверить, посмотрев на метеокарту северного полушария. В южном полушарии параметр Кориолиса $f = 2 \cdot \Omega \cdot \sin(\phi)$ отрицательный.

По этой причине там дует ветер в направлении по часовой стрелке вокруг области пониженного давления. Поэтому область низкого давления воздуха находится справа от направления ветра. Геострофический закон течения (11.7) действителен для всех высотных слоев атмосферы или глубинных слоев океана. Наблюдения показали, что в атмосфере геострофический ветер изменяется вместе с высотой, (обнаруживают типичное увеличение скорости ветра с высотой, см. рис. 11.20 в гл. 11.2.5). Вывод закона ветра (11.7) по вертикальной координате z при применении уравнения состояния для газа и статистического уравнения (см. гл. 11.2.4 и 11.2.5) дает следующее соотношение:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_g}{\partial z} = \frac{g}{f \cdot T} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla T, \tag{11.8}$$

где g — ускорение свободного падения, f — параметр Кориолиса и T — температура воздуха. Это уравнение еще называют *термическим уравнением ветра*, потому что изменение геострофического ветра с изменением высоты зависит от горизонтальных градиентов температуры. В качестве термического ветра $\boldsymbol{v}_T$ принимается интеграл (11.8):

$$\boldsymbol{v}_T = \boldsymbol{v}_g(z_2) - \boldsymbol{v}_g(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{g}{f \cdot T} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla T \right) \cdot dz.$$

Зная температурное поле $T(x, y, z)$, можно рассчитать отсюда термический ветер $\boldsymbol{v}_T$. В большинстве случаев для простоты вводят температурную константу высоты, которую считают постоянной между двух уровней высоты z_1 и z_2, так что термический ветер выразится формулой:

$$\boldsymbol{v}_T = \frac{g}{f \cdot T} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla T \cdot (z_2 - z_1). \tag{11.9}$$

Это термическое уравнение ветра очень важно для глобальных атмосферных циркуляций (см. гл. 11.2.5). Оно объясняет, что в высотных атмосферных слоях из-за разницы в температурах в экваториальных и полярных областях дуют практически всегда западные ветры. С другой стороны термический ветер образуется из равновесия между горизонтальной силой давления и Кориолисовой силой. Равновесие может быть как устойчивым

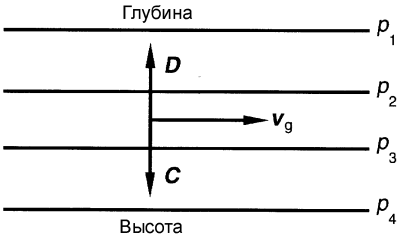


Рис. 11.2. Зависимость между полем давления p, силой давления D, силой Кориолиса C и геострофической скоростью $\boldsymbol{v}_g$

так и неустойчивым, как например, с помощью конвекции и тяжелых волн объясняется в гл. 11.2.3 и 11.2.4. В случае термического ветра, предполагая, например, большой градиент горизонтальной температуры, можно вывести из равновесия силу давления и кориолисову силу, что приведет к так называемой бароклинной неустойчивости, последствием которой являются области низкого давления (циклоны) в наших широтах (см. гл. 11.2.5).

11.1.4. Завихренность

Процессы движения в атмосфере и океане можно описать с помощью уравнений движения (11.2) и приведенных в гл. 5 уравнений неразрывности и энергии. На крупномасштабной пространственной шкале доминируют процессы движения вследствие циклонных и антициклонных вихрей с вертикальной осью и областями высокого и низкого давления. (см. гл. 11.2.5) Поэтому наряду с уже названными ранее уравнениями применяются уравнения, описывающие завихренность геофизических течений. Они связаны с понятиями завихренность и потенциальная завихренность.

Завихренность (обозначенная ζ), определяется как вертикальный компонент вихря скорости:

$$\zeta = \boldsymbol{k} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}. \tag{11.10}$$

Так как завихренность выражает интенсивность вихря течения относительно связанной с Землей системы координат, то ее еще обозначают как относительную завихренность, а именно как 2Ω или в тангенциальной плоскости как $2\Omega \sin(\phi)$. Последнее значение соответствует непосредственно параметру Кориолиса f. Сумму относительной завихренности ζ и параметра

Кориолиса f называют абсолютной завихренностью и обозначают η:

$$\eta = \zeta + f. \tag{11.11}$$

Уравнение для изменения во времени абсолютной завихренности получают, применяя оператор $\boldsymbol{k} \cdot \nabla\times$ к уравнению движения (11.2). Пренебрегая некоторыми значениями и не учитывая трения, получают для пространственных атмосферных и океанических процессов уравнение для абсолютной или относительной завихренности.

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + \beta \cdot \boldsymbol{v} = -\eta \cdot \nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h, \tag{11.12}$$

где β — это так называемый бета-параметр

$$\beta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \tag{11.13}$$

с радиусом Земли r, который дает изменение параметра Кориолиса f с геофизической широтой. В частном случае двухмерного, несжимаемого течения в плоскости $x - y$ получают вместо (11.12):

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + \beta \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{11.14}$$

При таком предположении абсолютная завихренность является постоянной величиной. Отсюда:

$$\eta = \zeta + f = \text{const}.$$

Из-за зависимости параметра Кориолиса f от географической широты при движении на север или юг относительная завихренность течения должна увеличиваться или уменьшаться. Это влияние сферичности формы Земли на силу Кориолиса называют также (из-за 11.13) (β)-эффектом. Это ведет к образованию пространственных колебаний в меридиональном направлении (рис. 11.3), которые в атмосфере и океане обнаруживаются как волны Росби (Rossby). Формально это получается из линейной формы уравнения завихренности (11.14) при предположении постоянного главного течения $\overline{u}$ (в направлении запад-восток) для упрощенной формы завихренности течения $\zeta' = \partial \boldsymbol{v}'/\partial x$. При волновом представлении

$$\boldsymbol{v}'(x,t) = v_0 \cdot \cos(a \cdot (x - c \cdot t))$$

(волновое число $a = 2 \cdot \pi/\lambda$, длина волны λ, фазовая скорость c) получают из линеаризированного уравнения завихренности дисперсное соотношение для фазовой скорости волн Росби

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{a^2} = \bar{u} - \frac{\beta \cdot \lambda^2}{4 \cdot \pi^2}. \tag{11.15}$$

Из дисперсного уравнения (11.15) можно определить длину волны для стационарных волн (т. е. $c = 0$). Для типичных скоростей течения в атмосфере и океане получим:

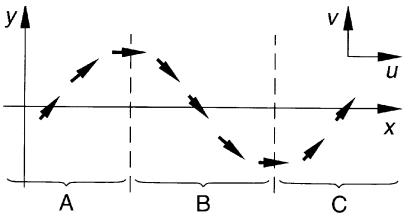


Рис. 11.3. Траектория частицы жидкости при действии β-эффекта. Области A и C: $v > 0, B : v < 0$.

Итак, говоря о волнах Росби, подразумевают крупномасштабные процессы в атмосфере и океане. Стационарные волны Росби вызываются горными формированиями, проходящими в направление север-юг.

Пример волн Росби представлен на рис. 11.4. Завихренность и описывающее ее уравнение а так же понятие потенциальной завихренности все больше употребляются в последние годы в метеорологии и океанографии. Потенциальная завихренность, обозначающаяся чаще всего PV, определена как произведение абсолютной завихренности η и вертикального градиента потенциальной температуры $\partial\theta/\partial z$:

$$PV = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} \cdot \eta. \tag{11.16}$$

Из уравнения завихренности (11.12) и первого закона термодинамики (см. гл. 5) можно вывести уравнение для потенциальной завихренности в адиабатических процессах.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} \cdot \eta\right) = 0. \tag{11.17}$$

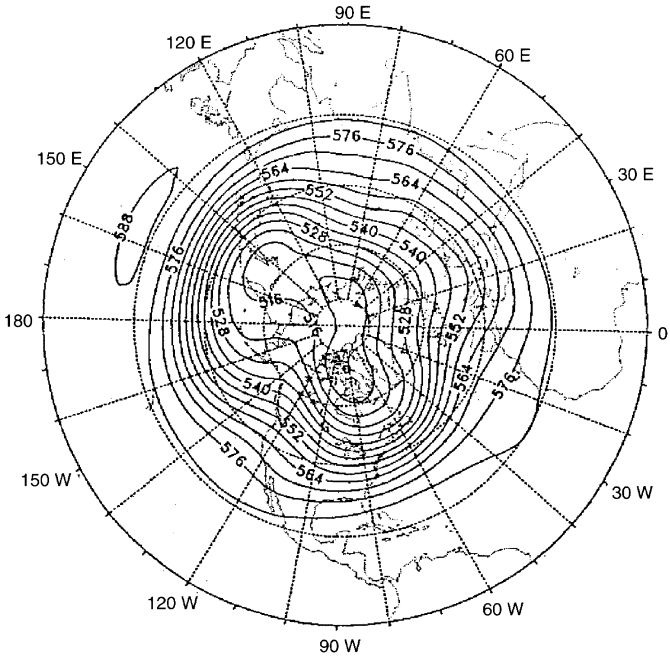


Рис. 11.4. Пространственные стационарные волны высотой ≈5км в северном полушарии. ясно просматривается образование «корыта подветренной стороны» восточнее Скалистых гор

Это уравнение справедливо для пространственных трехмерных адиабатических процессов движения. Потенциальная завихренность для них является сохраняющейся величиной.

В океанографии часто применяют измененную форму потенциальной завихренности, имеющую вид для баротропных течений:

$$PV = \frac{\eta}{H}, \tag{11.18}$$

где H — глубина водяного столба. Соответствующее уравнение завихренности будет:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{H}\right) = 0. \tag{11.19}$$

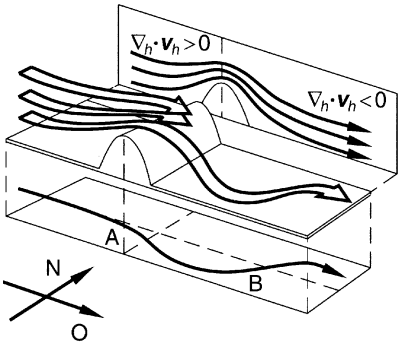


Рис. 11.5. Траектории частиц жидкости при обтекании двухмерной горы. Действия дивергенции и β-эффекта на завихренность в уравнение (11.12) приводит на подветренной стороне к образованию корыта

Следствием представления потенциальной завихренности в форме (11.17) или (11.19) стало объяснение наряду с образованием волн Росби еще одного пространственного явления: это корыто подветренной стороны. Оно представляет собой образование корыта (области относительно низкого давления) на подветренной стороне гор, проходящих в направление север-юг. Это показано на рис. 11.5. В горах это приводит из-за поперечного сужения линий тока к конвергенции по вертикали. Соответственно уравнению завихренности это вызывает изменение относительной завихренности ζ, которое вместе с β-эффектом (11.13) (рис. 11.3) ведет к образованию корыта подветренной стороны.

11.1.5. Сила Экмана

В главе 11.1.3 геострофическое течение было представлено как течение, отвечающее равновесию между силой давления и кориолисовой силой. В этой главе, сохраняя приближение горизонтального течения, допускается в качестве третьей силы, еще сила трения. Уравнение движения будет иметь вид:

$$f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_h = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla_h p + \nu \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_h}{\partial z^2}. \tag{11.20}$$

С помощью соотношения для геострофического ветра (11.7) можно силу давления заменить на $f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_g$ и тогда получим:

$$f \cdot \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_g) = \nu \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_h}{\partial z^2}.$$

Или для компонентов скорости u и v:

$$-f \cdot (v - v_g) = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{11.21}$$

$$f \cdot (u - u_g) = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{11.22}$$

Из уравнений (11.21) и (11.22) при подходящих граничных условиях можно рассчитать вертикальное изменение компонентов скорости течения $u(z)$ и $v(z)$. Рассмотрим сначала пример для атмосферы. На Земле должно действовать условие прилипания, см. (5.86):

$$z = 0; \quad u = v = 0 \tag{11.23}$$

Можно, с уверенностью, предположить, что влияние условия прилипания на слой атмосферного течения будет тем меньше, чем дальше он удален от границы. На больших высотах (формально для $z \longrightarrow \infty$), течение должно наложиться на геострофическое течение:

$$z \longrightarrow \infty : \quad u = u_g, \quad v = v_g, \tag{11.24}$$

Можно получить аналитические решения Уравнений (11.21) и (11.22) с помощью граничных условий (11.23) и (11.24), как это сделал в 1905 году шведский океанограф Экман. Для упрощения следует так сориентировать систему координат, чтобы гестрофический ветер дул в направление x, и поэтому $\boldsymbol{v}_g = (u_g, 0)$. Решение будет:

$$u(z) = u_g \cdot (1 - \exp(-\frac{z}{D}) \cdot \cos(\frac{z}{D})), \tag{11.25}$$

$$v(z) = u_g \cdot \exp(-\frac{z}{D}) \cdot \sin(\frac{z}{D}), \tag{11.26}$$

вместе с

$$D = \sqrt{\frac{2 \cdot \nu}{f}}. \tag{11.27}$$

Размерная длина D (11.27) обозначается еще и как длина Экмана.

Для того, чтобы лучше представить изменение направления ветра с изменением высоты, часто пользуются так называемой годограммой, в которой векторы скорости проецируются на плоскость $u - v$. Это показано на рис. 11.6 Наблюдаем с увеличением суммы скоростей вращение ветра в направлении геострофического ветра. Для высот $z > \pi \cdot D$ годограмма представляет спираль, которая называется так же спиралью Экмана. Очевидно отклонения действительного ветра $\boldsymbol{v}_h$ от геострофического ветра $\boldsymbol{v}_g$ для $z > \pi \cdot D$ очень малы, поэтому слой ниже $\pi \cdot D$ тоже обозначается как пограничный слой Экмана или кратко Экмановский слой. Он представляет собой пограничный слой, обусловленный трением над твердым подслоем во вращающейся системе.

Для океана проблема слегка изменяется. Здесь исследуют вопрос, какое течение образуется в море при отсутствии пространственных градиентов давления (геострофическое течение) под действием касательной составляющей ветра на морскую поверхность. Уравнения выглядят следующим образом:

$$-f \cdot v = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad f \cdot u = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{11.28}$$

В качестве граничного условия сейчас представим:

$$z = 0: \quad \frac{\tau_x}{\rho} = \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\tau_y}{\rho} = \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{11.29}$$

$$z \to -\infty: \quad u = v = 0. \tag{11.30}$$

где τ_x и τ_y — компоненты касательного напряжения по направлениям x и y, действующие на поверхность воды под действием ветра.

Решение этого уравнения, данное Экманом, будет справедливо для случая, когда касательное напряжение ветра действует в направление y (т. е. $\tau_x = 0$):

$$u(z) = \frac{\tau_y}{\rho \cdot \sqrt{\nu \cdot f}} \cdot \exp(\frac{z}{D}) \cdot \cos(\frac{z}{D} + \frac{\pi}{4}), \tag{11.31}$$

$$v(z) = \frac{\tau_y}{\rho \cdot \sqrt{\nu \cdot f}} \cdot \exp(\frac{z}{D}) \cdot \sin(\frac{z}{D} + \frac{\pi}{4}), \tag{11.32}$$

z — здесь отрицательно.

Годография морского течения по (11.31) и (11.32) представлена на рис. 11.7. На нем опять видна спираль Экмана, точно такая же как на рис. 11.6. Самым удовлетворительным в этом решении является то, что приповерхностное морское течение направлено вправо от выявленной касательной ветра под углом 44^0.

Ели применить для определения вертикального распределения $H = \pi \cdot D$ пограничного слоя Экмана в атмосфере и океане соответствующие значения кинематической вязкости (воздух: $\nu = 0,15$ см^2/с, вода: $\nu = 0,01$ см^2/с), то получим, например, для $f = 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$:

Атмосфера: $H = 55$ см,

Океан: $H = 15$ см.

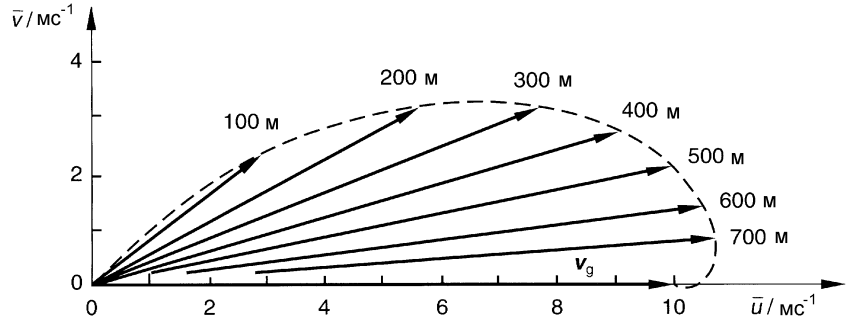


Рис. 11.6. Годография распределения ветра в атмосферном слое Экмана согласно (11.25)–(11.27) для случая $|\boldsymbol{v}_g| = 10\,\text{м/сек.}$, $f = 10^{-4}\text{с}^{-1}, \nu = 10\,\text{м}^2/\text{с}, \boldsymbol{v}_g =$ геострофический ветер. (Это наблюдение, сделанное на борту исследовательского судна «Фрам», натолкнуло Экмана на вывод уравнений)

По наблюдениям эти значения более чем незначительные. Действительно, вертикальная величина слоя Экмана в атмосфере составляет около 1000 м, а в океане — около 50 м. Причиной такого отклонения является турбулентность пограничных атмосферных и океанических слоев и поэтому в уравнениях (11.21), (11.22) и (11.28) нужно применять турбулентные коэффициенты ν_t вместо молекулярной кинематической вязкости ν (т. е. $\nu_t \approx 10\,\text{м}^2/\text{с}$ для атмосферы и $\nu_t \approx 0,1\,\text{м}^2/\text{с}$ для океана).

Другим недостатком решений Экмана по сравнению с наблюдениями является большой угол отклонения в 45^0 между наземным и геострофическим ветрами или касательной ветра и поверхностным течением. Это объясняется тем, что турбулентный коэффициент диффузии не является константой, а изменяется с высотой. Уравнения Экмана, решенные с учетом переменных коэффициентов диффузии дали уже угол отклонения 20^0 в соответствии с данными наблюдений. Фактически еще Прандль в 1949 году в 3-м издании своей книги получил аналитическое решение для турбулентного слоя Экмана (см. там гл. V, 9), которое очень близко совпадало с данными наблюдений.

11.1.6. Слой Прандтля

Слой Экмана, рассмотренный в предыдущей главе, описывает течение в вертикальном направлении во всем пограничном слое в атмосфере или

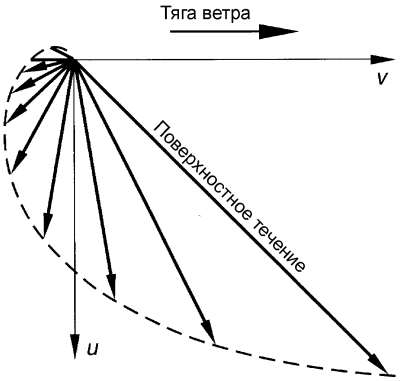


Рис. 11.7. Годограф скоростей в слое Экмана для океана

океане. Вблизи земной поверхности соотношения исследуются точнее с помощью многочисленных экспериментов, и отсюда выводится концепция, обозначающаяся в немецкой литературе как слой Прандтля. Итак, представим, что в слое Прандтля константой является турбулентное касательное напряжение:

$$\tau(z) = \tau_0 = -\overline{\rho \cdot w' \cdot \boldsymbol{v}'_h} = \bar{\rho} \cdot u_*^2. \tag{11.33}$$

Величина $u_*^2 = \overline{|\omega' \cdot \boldsymbol{v}'_n|}$ определяет касательную скоростью. С помощью обычного выражения градиентов для турбулентного течения

$$\overline{\omega' \cdot \boldsymbol{v}'_n} = -\nu_t \cdot \frac{\partial \overline{\boldsymbol{v}}_n}{\partial z}$$

и значения пути смешения Прандтля для турбулентных коэффициентов диффузии $\nu_t = \boldsymbol{k} \cdot u_* \cdot z$, с помощью константы Кармана $y = 0,4$, при выборе системы координат $\overline{\boldsymbol{v}} = (u, 0)$ путем интегрирования профиля ветра получим:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \cdot \ln(\frac{z}{z_0}). \tag{11.34}$$

Это отношение известно как логарифмический закон ветра. Выражающаяся логарифмом высота z_0 обозначается как размер неровности и является мерой для неровности почвы (например, высоты песка: $z_0 = 0,1$ мм, травы: $z_0 = 5$ см). Логарифмический профиль ветра многократно подтвержден

измерениями и справедлив для высоты 20–50 м атмосферы. Подобный закон действует и в технических турбулентных течениях вдоль шероховатых пластинам или в трубах (закон стенки, гл. 4.2.5).

Особенность атмосферного слоя Прандтля — это одновременное появление вертикального температурного градиента, который ведет к расслоенному касательному течению. Для учета влияния температурного расслоения на профиль ветра использовали теорию подобия Монина и Обухова, 1954. Ее суть в том, что соответственно нормированные скоростные градиенты в слое Прандтля универсальны:

$$\frac{k \cdot z}{u_*} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \phi(\frac{z}{L}). \tag{11.35}$$

Безразмерная функция подобия ϕ зависит только от нормированной высоты $\approx L$. Причем L — это длина Монина–Обухова, которая через турбулентную температуру $\overline{\omega' \cdot \theta'}$ влияет на температурный слой.

$$L = -\frac{u_*^3}{\frac{k \cdot g}{\theta_0} \cdot \overline{w' \cdot \theta'}}. \tag{11.36}$$

Функция ϕ определена многочисленными измерениями. Наиболее употребительной является форма:

$$\phi = 1 + 5 \cdot \frac{z}{L} \quad \frac{z}{L} > 0 \text{ стабильный слой,}$$

$$\phi = 1 \qquad \frac{z}{L} = 0 \text{ нейтральный слой,}$$

$$\phi = (1 - 15 \cdot \frac{z}{L}^{-\frac{1}{4}} \quad \frac{z}{L} < 0 \text{ неустойчивый слой.}$$

Вертикальный профиль ветра в термически расслоенном слое Прандтля получили, проинтегрировав (11.35) и используя эмпирические значения для функции подобия $\phi(z/L)$.

Слой Прандтля в океане тоже можно описать с помощью логарифмического закона течения. Однако океанический слой, близкому к поверхности очень сильно искажается волнами, поэтому закон скорости, аналогичный (11.34) можно вывести только при очень благоприятных условиях. Материалы, касающиеся пограничных слоев в атмосфере и океане и их взаимодействия можно найти в монографии Крауза и Бусингера (Kraus und Businger) 1934.

11.2. Течение в атмосфере

В следующих главах подробно описываются примеры отдельных форм течений в атмосфере. Они ограничиваются немногими типичными явлениями, но они охватывают все масштабы, от небольших пыльных вихрей до глобальных атмосферных циркуляций.

Поскольку воздух сам по себе невидим, то ставится задача, сделать его видимым в атмосферных течениях. И здесь приходят на помощь облака, как естественный визуализатор. Примеры этого можно увидеть на фотографии Земли из космоса, сделанной метеоспутником (рис. 11.8). Различные атмосферные явления, изображенные на этом снимке со спутника, поясняются с помощью интерпретации рис. 11.9. В следующих главах мы подробней остановимся на этих формах течения. Подробное отображение различных атмосферных явлений дается в монографии Алькинсона 1981.

Многочисленные снимки со спутников и интерпретация атмосферных течений представлены и у Скорера 1986.

Подробное описание форм движения в атмосфере представлены, например, в немецких учебниках Хекеля 1999, Крауза 2000 или Лилеквиста и Гемана 1987. Теоретический аспект атмосферных течений подробно изложен в монографиях Этлинга 1996 и Пиклера 1997.

В выше названных книгах изучению течения в атмосферном пограничном слое отводится определенное место. Как следует из этих работ в описании слоя Экмана (гл. 11.1.5) и слоя Прандтля (гл. 11.1.6) следует все оставить без изменения, поэтому далее эти течения с пограничными слоями рассматриваются не будут. Заинтересованным читателям следует обратиться к специальным монографиям, посвященным пограничному слою в атмосфере, Гаррата 1992 или Каймаля Финнигана 1994.

11.2.1. Термические системы ветров

Как уже обсуждалось в главе 11.1.2 движения воздуха вызывается силами давления, Кориолиса, трения и тяжести или влияют на него. Причем трение вызывает ослабление течения, а Кориолисова сила лишь изменение направления. Поскольку сила тяжести действует только на вертикальное движение, сила давления служит как бы причиной для горизонтального движения. Возникает вопрос, откуда берутся силы давления? Т. к. атмосфера является почти идеальным газом, то давление воздуха, согласно уравнению состояния газа, а также уравнению энергии (первый закон термодинамики, см. гл. 5), зависит от температуры воздуха.

В дальнейшем такие процессы в течениях, которые получаются вследствие разницы температур по горизонтали, будем рассматривать в кратких эскизных описаниях. Эти течения называют еще термическим ветром.

Для этой цели рассмотрим циркуляцию в плоскости $x - z$. Циркуляцию Γ вдоль замкнутой кривой S определим как:

$$\Gamma = \oint_s \boldsymbol{v} \cdot ds = \oint_s v_s \cdot ds, \tag{11.37}$$

где v_s — компонента скорости в направлении вектора s. Если Γ при вычислении интеграла согласно (11.37) будет положительна, то тогда говорят о циклонной циркуляции (в направлении против часовой стрелки), если $\Gamma < 0$, то циркуляция будет антициклонной.

Временное изменение циркуляции получается из уравнения движения (11.2). В дальнейшем должны рассматривать явления небольшого масштаба, поэтому кориолисову силу можно не учитывать. Трением тоже можно пренебречь. В результате получим:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_s v_s \cdot ds = - \oint_s \frac{dp}{\rho}, \tag{11.38}$$

используя уравнение состояния для идеального газа $p = \rho \cdot R \cdot T$: получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_s \frac{R \cdot T}{p} \cdot dp. \tag{11.39}$$

При постоянной температуре воздуха, произведя интегрирование вдоль замкнутой кривой в (11.39), получим $d\Gamma/dt = 0$. В результате чего возникает циркуляция, налицо контрастные температуры. Это можно пояснить на примере так называемого *ветра суша–море*. В солнечные дни воздух над сушей нагревается сильнее, чем над водой, что объясняется разной теплопроводностью и теплоемкостью приповерхностного слоя (вода или твердая земля). Т.к. давление воздуха всегда понижается с высотой, как говорилось в гл. 2.7, то получим распределение изобар и изотерм, представленные схематично на рис. 11.10.

Выбрав кривую интегрирования S так, что она пройдет вдоль изотерм и изобар, получим как на рис. 11.10

$$\frac{d\Gamma}{dt} = R \cdot (T_3 - T_1) \cdot \ln(\frac{p_3}{p_1}) > 0. \tag{11.40}$$

Устанавливается циклоническая циркуляция, которая направлена от холодной воды к теплой суше (земле), и представляет морской ветер (дневной бриз).

На больших высотах (низкое давление воздуха) возникает заместительное течение от суши к морю (земной ветер). Ночью положение меняется. Воздух над сушей охлаждается сильнее, чем над водой. На рис. 11.10 изотермы T_1 и T_3 меняются местами, соответственно возникает антициклональная циркуляция, т.е. около земной поверхности в направлении от суши (земли) к морю. В общем можно сказать, что термическая циркуляция в атмосфере является следствием выравнивания температур между относительно теплыми и холодными областями.

Этот простой пример натолкнул на важное открытие, что атмосферные движения вызываются горизонтальной разницей температур. Примером этому является циркуляция ветра земля–море. Она происходит практически на всех побережьях и ее горизонтальное пространство составляет от 10 до 100 км. Причем сила ветра суша–море зависит согласно уравнению (11.40) от разницы температур на суше и на воде, и от наложенного обычно пространственного течения. Другой пример — это так называемые наклонные ветры. Они зарождаются на склонах и создают днем вблизи нагреваемых склонов восходящий поток, а ночью из-за охлаждения воздуха вблизи склонов — нисходящий поток воздуха. Но поскольку в последнем случае склон обтекает более холодный воздух, то его еще называют как отход холодного воздуха.

В простейшем случае наклонные ветры можно тоже объяснить с помощью уравнений для циркуляции (11.38)–(11.40). В действительности же соотношения более сложны, т. к. атмосфера уже у основания имеет вертикальные температурные слои и изотермы потому не могут проходить параллельно склону. Это доказал уже Прандтль и дал аналитическое решение наклонного ветра в более раннем издании путеводителя по гидроаэромеханике (3^{e} издание, 1949, глава V, 16). Другие положения по термическим ветровым системам можно найти в монографиях Алкинсона (Alkinson) 1981, Симпсона (Simpson) 1994, 1997.

11.2.2. Термическая конвекция

В главе 8, посвященной теплопередаче, было рассмотрено явление естественной конвекции. В атмосфере существуют условия для *клеточной конвекции* в горизонтальных слоях (гл. 8.2.2). В клеточной конвекции речь

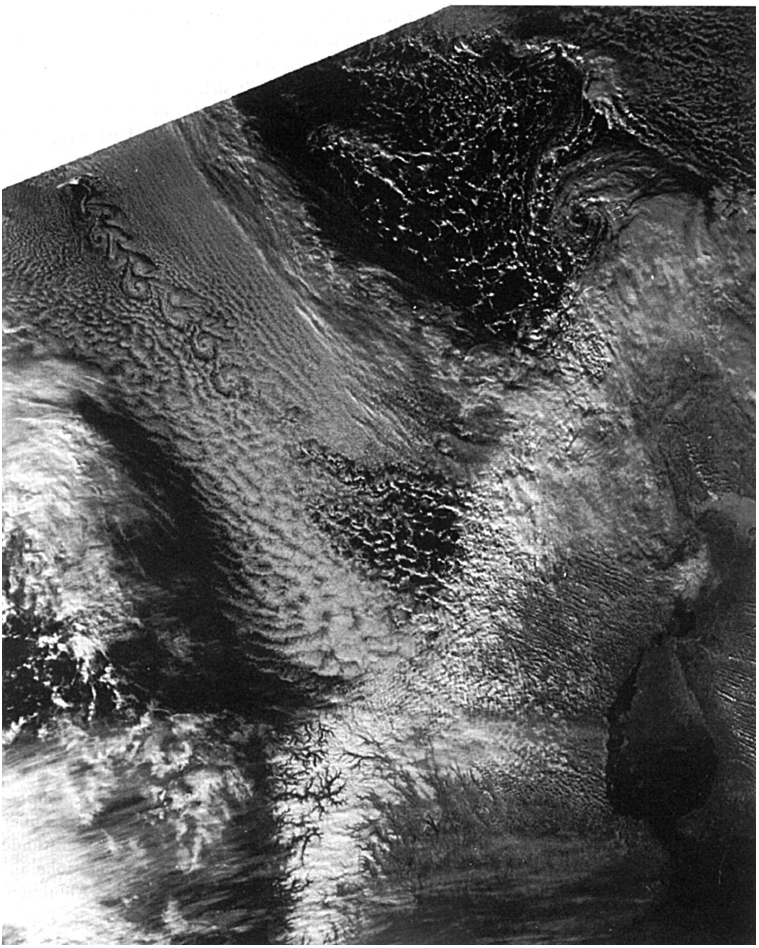


Рис. 11.8. Снимок со спутника, показывающий различные атмосферные явления (например, термическая конвекция в форме роликов, и клеток, завихрений, тяжелых волн, циклонов), которые видны сквозь облака

идет о расслоенной (стратифицированной) среде. Основную мысль можно упрощенно представить следующим образом.

Рис. 11.9. Интерпретация различных типов течения, изображенные на фото 11.8, сделанного спутником

Зная о постоянстве вертикальных температурных градиентов в атмосфере, можно из уравнения движения и первого закона термодинамики вывести следующее уравнение для вертикального движения частицы из состояния покоя в направлении z:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + N^2 \cdot z = 0, \tag{11.41}$$

где N — частота Брунта–Вайзеле, названная по имени английского и финского метеорологов, определить которую можно по вертикальным градиентам актуальной температуры T или потенциальной температуры θ (11.5):

$$N = \sqrt{\frac{g}{T_0} \cdot (\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma')} = \sqrt{\frac{g}{\theta_0} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}}, \tag{11.42}$$

где Γ' — сухой адиабатный градиент температуры со значением $\Gamma' = q/c_p = 9,8 \cdot 10^{-3}$К/м или около 1 К/100 м. Если поток воздуха направляют

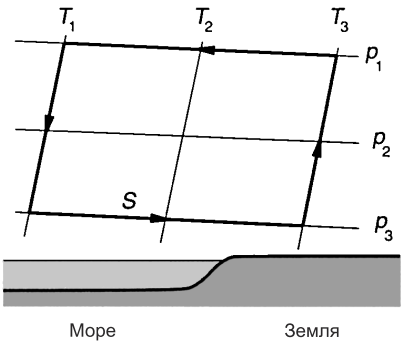


Рис. 11.10. Схематичное изображение циркуляции ветра земля — море в случае, если поверхность земли теплее чем вода (морской ветер). Изотермы $T_1 < T_2 < T_3$, изобары $p_1 < p_2 < p_3$

по вертикали на высоту Z_a, от его положения равновесия, то получим в качестве решения (11.41):

$$Z(t) = Z_\alpha \cdot \exp(N \cdot t), \quad \frac{\partial T}{\partial z} < -\Gamma' \quad \text{или} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} < 0.$$

$$Z(t) = Z_\alpha \cdot \cos(N \cdot t), \quad \frac{\partial T}{\partial z} > -\Gamma' \quad \text{или} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} > 0.$$

В первом случае поток воздуха удаляется все дальше от своего положения равновесия, которое можно определить как неустойчивое или нестабильное. В этом случае в среде воздуха может произойти переход к термической конвекции, при условии, что температура воздуха понижается быстрее с высотой, чем в случае адиабатического (нейтрального) слоя.

Во втором случае частица воздуха колеблется вокруг своего положения равновесия. Этот случай, названный устойчивым, рассматривался в гл. 11.2.4 при обсуждении тяжелых волн.

Термическая конвекция в атмосфере появляется вследствие нагревания воздушных слоев земной почвой. Рассмотренная в гл. 7.2 форма клеточной конвекции встречается и в атмосфере. Она видна через облака, которые образуются в верхней части конвективных клеток вследствие охлаждения поднимающегося вверх влажного воздуха. На рис. 11.8 показан фотоснимок со спутника различных видов атмосферной конвекции: продолговатых

конвективных роликов (дорожки из облаков), а также открытые и закрытые клетки. Конвективное течение, представленное этими облаками, схематично изображено на рис. 11.11 и на рис. 11.12 показан фотоснимок со спутника.

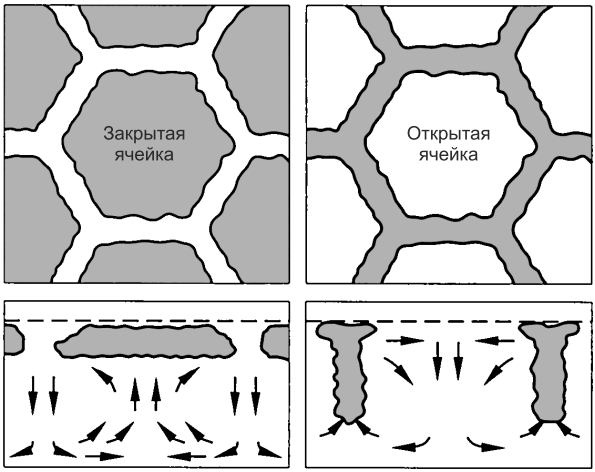


Рис. 11.11. Вид и поперечное сечение, образованное закрытыми и открытыми конвективными клетками. Серые: облака, стрелки: циркуляция. Хотя образцы на рис. 11.8 и рис. 11.11 выглядят так же, как и в лабораторных течениях (гл. 8.2.2), однако есть и некоторые принципиальные отличия. Это касается как определений так и физического механизма возникновения. Атмосферная конвекция ограничена чаще всего слоем, высотой 1–2 км над поверхностью Земли. Определенные на рис. 11.8 и 11.9 конвективные формы имеют следующие горизонтальные длины волн: облачные дорожки 3–15 км, клетки 10–30 км. Соотношение высоты к ширине составляет от 1:3 до 1:10 у линейных конвективных образцов и около 1:20 у клеток. В лаборатории это соотношение составляет примерно 1:3

Причина таких соотношений в атмосферной конвекции объясняется по разному, например в обзорных статьях Алкинсона и Цванга 1996 с помощью клеток, а у Этлинга и Бровна 1993 — роликов. Здесь, по-видимому, особенно играет роль высвобождение латентного тепла при образовании облаков; эффект, который конечно же не появится в лабораторных исследованиях на жидкостях. Другие аспекты термической конвекции в атмосфере можно найти в монографии Эмануеля 1994.

Рис. 11.12. Снимок со спутника открытых конвективных клеток

11.2.3. Тяжелые волны

В предыдущей главе обсуждалось возникновение термической конвекции в неустойчиво стратифицированной атмосфере. Она возникает вследствие нагревания воздуха земной поверхностью. Но часто атмосфера вблизи Земли охлаждается вследствие медленного излучения (например ночью) и температура воздуха увеличивается с высотой. Такую атмосферу называют стабильно расслоенной (устойчиво стратифицированной). При решении уравнений (11.41) для устойчивого слоя (второй случай) образуется вращение:

$$Z(t) = Z_a \cdot \cos(N \cdot t), \tag{11.43}$$

с частотой N Брунта–Файзелле согласно (11.42). Продолжительность вращения потока воздуха, направленного вертикально, составляет $\tau = 2 \cdot \pi / N$. Некоторые примеры к этому:

$\frac{\partial T}{\partial z}\left[\frac{\text{K}}{100\text{ м}}\right]$	$\frac{\partial \theta}{\partial z}\left[\frac{K}{100\text{ м}}\right]$	$N[\text{с}^{-1}]$	$\tau[\text{с}]$
$-0{,}65$	0,35	0,011	570
0	1,0	0,018	350
+1,0	2,0	0,026	240

Устойчиво стратифицированная атмосфера представляет собой способную к вращению среду, поэтому распространяет волны, движущая сила которых является силой тяжести. Поэтому эти волны обозначаются тоже тяжелыми (гравитационными) волнами. Теперь кратко опишем вывод волнового уравнения. За основу берется аппроксимация Буссиника уравнений движения, как она дается в главе 5 в качестве уравнения (5.88). После обычной линеаризации получаем одно из уравнений возмущений (5.114)–(5.116).

Для простоты рассмотрим спокойную атмосферу, после сложения этих уравнений получим дифференциальное уравнение для вертикальной скорости ω:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+N^2\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \tag{11.44}$$

Решение этого уравнения будем искать в форме волны

$$w(x,z,t)=w_0\cdot\cos(a\cdot x+b\cdot z-\omega\cdot t), \tag{11.45}$$

где соответственно рис.11.13 a и b — это горизонтальные и вертикальные компоненты ($a=2\pi/\lambda_x,\ b=2\cdot\pi/\lambda_z$) волнового вектора с волновым числом m, а ω — собственная частота волн. После подстановки формулы волн (11.45) в волновое уравнение (11.44) получим в качестве условия для частоты:

$$\omega=N\cdot\frac{a}{m}=N\cdot\cos(\alpha). \tag{11.46}$$

Частота вращения тяжелых волн может достичь наивысшей частоты Брунта-Вейзеле N (для $\alpha=0$ т. е. точно горизонтальное распространение волн).

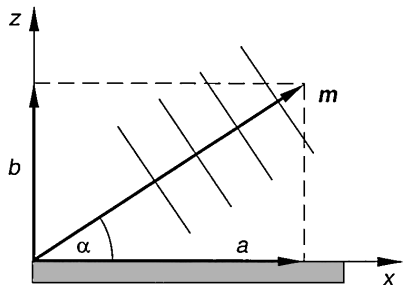


Рис. 11.13. Волновой вектор с волновым числом m для внутренних тяжелых (гравитационных) волн. Нормально к m располагаются области вращения.

В силу соотношения $m \cdot c = \omega$ фазовая скорость в направление распространения $\mathbf{m}$ будет:

$$c = \pm \frac{N}{m} \cdot \cos(\alpha), \tag{11.47}$$

а для горизонтально распространяющейся волны $(\alpha = 0, m = a)$:

$$c = \pm \frac{N}{a} = \frac{\lambda \cdot N}{2 \cdot \pi}.$$

Некоторые цифровые примеры. Подставив $\partial T/\partial z = 0$, $(\partial\theta/\partial z) = = 1\text{K}/100$ м, т.е. $N = 0,018\,\text{с}^{-1}$, получим

$$\lambda = 1 \text{ км} \longrightarrow c \approx 3 \text{ м/сек};$$

$$\lambda = 3 \text{ км} \longrightarrow c \approx 10 \text{ м/сек}.$$

Итак, фазовая скорость тяжелых волн лежит в порядке величин атмосферных скоростей ветра. Если направления скорости ветра и фазовой скорости противоположны, то это вызывает появление стационарных тяжелых волн. Это тот случай, когда между скоростью ветра υ, длиной волны λ и частотой Брунта–Фейзеле N установится следующее соотношение:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot U. \tag{11.48}$$

Стационарные волны образуются особенно с подветренной стороны гор, которые заставляют приходящие потоки воздуха подниматься по их переднему склону и это вызывает непрерывное возмущение тяжелых волн по вертикали. Возникающие при этом волны называются также подветренными волнами.

При соответствующей влажности воздуха это ведет в областях с восходящими потоками ветра к адиабатическому охлаждению и соответственно, к образованию облаков. Вследствие этого подветренные волны (а так же и тяжелые волны)в результате периодического расположения облаков поперечно к направлению ветра делаются заметными (рис. 11.14).

Это часто можно обнаружить на снимках со спутника в форме, данной на рис. 11.15. Поскольку свободная атмосфера почти всегда практически устойчиво стратифицирована, тяжелые волны относятся к более или менее постоянно присутствующим формам движения в атмосфере. Соответствующие объяснения представлены в монографии Госсарда и Гоке 1975, а так же в обзорной статье Вуртеле et. al 1996.

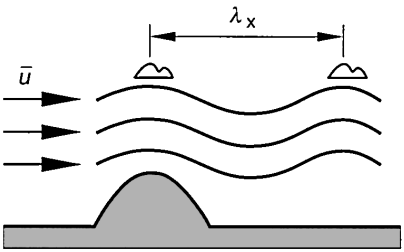


Рис. 11.14. Схематичное изображение подветренных волн и их видимость вследствие образования облаков

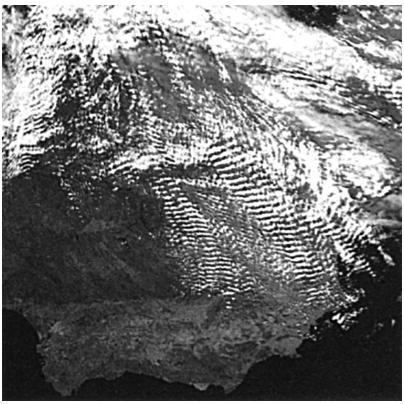


Рис. 11.15. Фото со спутника тяжелых волн, вызывающих ленточные формы образования облаков (середина снимка)

11.2.4. Вихри

Наряду с ранее описанными формами движения, такими как ветер суша–море, термическая конвекция или тяжелые волны, вихри различной силы тоже считаются проявлением атмосферной динамики. Они могут представляться как областями низкого давления с горизонтальным размером в несколько тысяч километров, так и маломасштабными пыльными смерчами диаметром 50 м. В следующей таблице приведены примеры различных

ветровых явлений, причем данные — диаметр, скорость ветра и продолжительность существования являются типичными.

обозначение	диаметр [км]	время существования	скорость [м/с]	направление вращения
циклон	2000	4 дня	20	??
шторм	500	10 дней	80	??
орографический вихрь	50	1 день	5	??
Торнадо 1	1 h	100	??	??
Пылевой вихрь	0,1	1 мин	10	??

Приведенные в таблице примеры представляют вихрь с вертикальной осью, направление вращения у крупномасштабных явлений области низкого давления и смерча всегда циклональное, а у маломасштабных явлений может быть как циклональным так и антициклональным. Такая разница связана с действием кориолосовой силы, как это можно увидеть на диаграмме сил на рис. 11.16.

В идеальном случае симметричного вращения вихря, пренебрегая силой трения, из уравнений движения (11.2) получаем следующее равновесие сил (рис. 11.16):

$$\frac{v^2}{r} + f \cdot v = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \tag{11.49}$$

центробежная сила плюс кориолисова равна силе давления, где r — расстояние от центра вихря.

Причем сила давления действует, смотря по обстоятельствам, в направление к центру вихря, а центробежная сила — от центра вихря. Центробежная сила как и кориолисова сила в мощном пространственном циклоне имеют одинаковое направление (рис. 11.16), а в антициклоне (область высокого давления здесь не представлена) — направление силы давления.

Для оценки равновесия сил следует привести два примера:

	$\frac{v^2}{r}$	$f \cdot v$	$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}$	Единицы
циклон	1	3	5	$\cdot 10^{-3}$ м/с
торнадо	5000	5	5000	$\cdot 10^{-3}$ м/с

Если в крупномасштабном вихре (область низкого давления) важную роль играет кориолисова сила, то в маломасштабном вихре (торнадо) ею можно пренебречь. Эскиз этого показан на рис. 11.16.

Причиной возникновения приведенных вихревых явлений является сочетание различных факторов. При обсуждении отдельных примеров следует кратко напомнить, что общим здесь является механизм усиления вихря, который определяется уравнением завихренности (11.12). Для относительной завихренности ζ и не учитывая зависимость ширины от кориолисова параметра f его можно записать как:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(f + \zeta)\nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h. \tag{11.50}$$

Вследствие этого наступает усиление вихря (или ослабление), если в горизонтальном поле течения имеется конвергенция (или дивергенция). В качестве примера рассмотрим торнадо. Для него имеет значение, что $|\zeta| \gg f$ и тем самым:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\zeta \cdot \nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h. \tag{11.51}$$

В этих вихрях наблюдают всегда течение к ядру вихря вблизи поверхности земли, так что $\nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h < 0$.

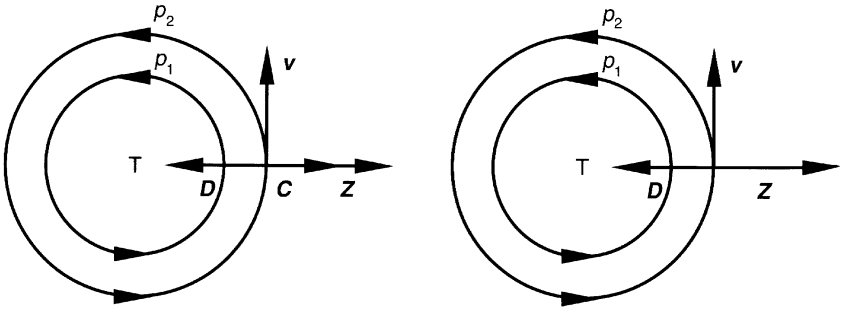


Рис. 11.16. Равновесие сил в симметрично вращающихся вихрях. В центре вихря господствует, смотря по обстоятельствам, низкое давление воздуха (T). Изображены скорость течения V, изобара P, кориолисова сила C, сила давления D, центробежная сила Z. Слева: крупномасштабный вихрь (область низкого давления), справа: маломасштабный вихрь (например, торнадо)

Если еще слабый вихрь вначале имеет циклональную завихренность ($\zeta > 0$), то она со временем вследствие $\nabla_n \cdot \boldsymbol{v}_n < 0$ увеличится. Эскиз

этого дан на рис. 11.17. При начальном антициклональном направлении вращения ($\zeta < 0$) происходит тот же эффект. Суммарное вращение усиливается, направление вращения остается антициклональным.

Теперь давайте остановимся кратко на отдельных видах вихрей.

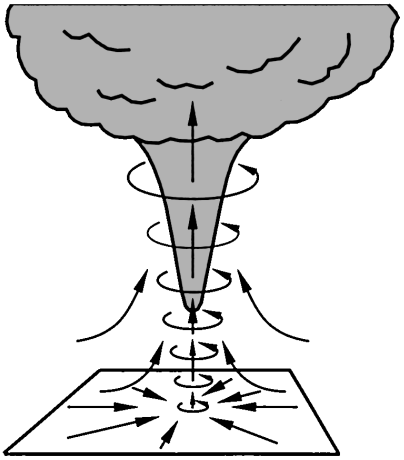


Рис. 11.17. Схематичное изображение усиления вихря вследствие горизонтальной конвергенции течения. Воронкообразные скопления облаков (заштриховано) соответствуют видимой части торнадо

Область низкого давления

Области низкого давления — это пространственные атмосферные вихри с относительно низким давлением воздуха в ядре вихря (отсюда и название — область низкого давления или коротко низменность). Ветер дует согласно геострофическому равновесию (см. гл. 11.13) вокруг центра низменности в математически положительном направлении (против часовой стрелки), поэтому это называют еще циклоном. Из-за большого пространственного размера область низкого давления можно обнаружить на фото со спутника в виде вихря со спиралеобразноым распределением облаков (как на рис. 11.18), или по полю давления на метеокарте Земли.

Такая метеокарта с изобарой, характеризующей область низкого давления, представлена на рис. 11.19. Зоны низкого давления со своими об-

Рис. 11.18. Фотография со спутника циклона (область низкого давления), характеризующегося облаками спиральной формы

лачными и дождевыми областями определяют погоду в средних широтах обеих полушарий и представляют поэтому важнейшие крупномасштабные вихри.

Возникновение областей низкого давления можно объяснить особым видом неустойчивости, так называемой бароклинной неустойчивостью. Подробное изложение теории бароклинной неустойчивости даны в уже ранее упомянутых монографиях Гусмана–Роизин, Этлинга, Гилля, Педлоски и Пихлера.

Здесь же изложена только основная идея. Как говорится в главе 11.1.3, в идеальных условиях можно установить равновесие между силой давления и кориолисовой силой. Это вызовет геострофический ветер (11.7) и термическую связь (11.8). Последняя свидетельствунт, что в бароклинной атмосфере горизонтальный градиент температуры вместе с градиентом давления ведут к изменению геострофического ветра с высотой. В этом случае теплые воздушные массы располагаются рядом с холодными воздушными массами. Но это равновесие не устойчиво и при превышении критического горизонтального температурного градиента вызывает вертикальное перераспределение, т.е. холодные воздушные массы располагаются под теплыми массами. Но поскольку вращение Земли оказывает сильное влияние на

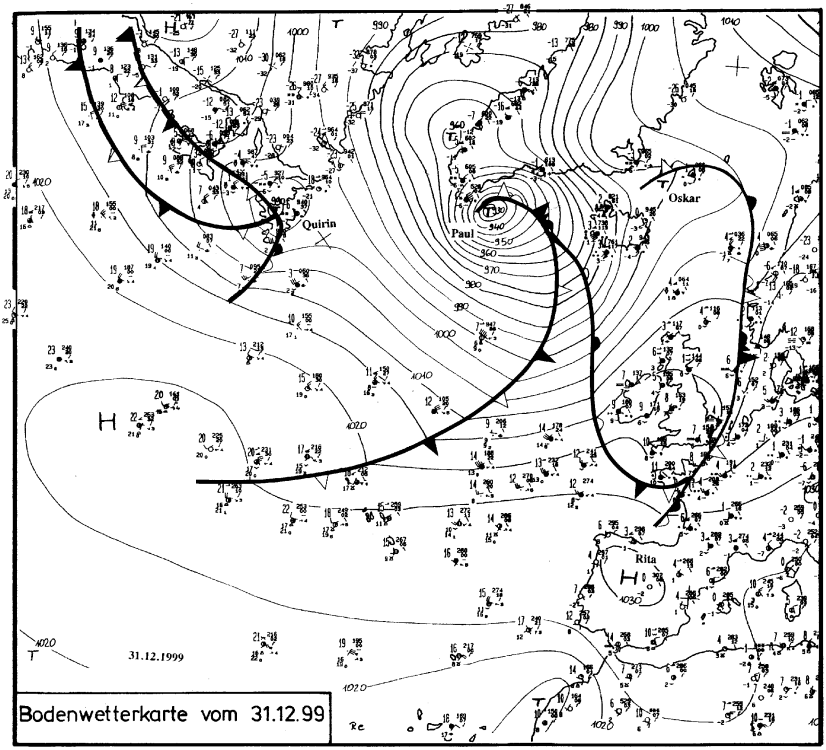


Рис. 11.19. Геометеокарта с различными системами низкого давления (Т), например ураган Пауль 1999 на южной оконечности Гренландии. Цифры на изобаре: давление воздуха в гектопаскалях (гПа) (например, давление в центре (ядре) урагана 930 гПа)

мощные движения, это ведет к образованию циклональных горизонтальных движений, образующих в конце концов циклон.

Тропические циклоны

Тропические циклоны — это, как уже говорит за себя название, области низкого давления в тропических зонах атмосферы. Они называются смерчами в западной Атлантике (Карибское море, США) и тайфунами в азиатском регионе. Уже во вводной главе на рис. 1.8 была изображена фотография со спутника такого смерча.

Под безобидным названием тропический циклон скрывается в общем-то одна из мощнейших систем ветров в атмосфере, из-за чего они обозначаются еще и как тропические вихри. Высокие скорости ветра (до 300 км/ч) и связанные с ними появления морских волн, постоянно ведут к огромным разрушениям, если такой вихрь выходит на сушу. В век телевидения кадры таких вихрей сегодня не редкость.

Причины возникновения тропических вихрей приводятся дальше. Они образуются над теплыми тропическими океанами, где воздух очень сильно насыщен парами воды. При высотной конвекции этих областей (грозовые облака до 15 км высоты) водяной пар конденсируется и высвобождает в результате этого скрытую тепловую энергию. Все это вместе с вращением земли ведет в конце концов к образованию циклона, который по мере своего продвижения на запад над влажным теплым океаном усиливается, пока наконец не превратится в вихрь. Другая информация по структуре и наличию тропических циклонов, а также о их возникновении представлена в монографии Элснера и Кара (Elsner und Kara) 1999 или в видеофильме о природных катастрофах (Discovery Channel, 1997), который очень впечатляюще продемонстрировал всю разрушительную силу тропических вихрей.

Орографические вихри

Из гидрогазодинамики известно, что позади обтекаемых тел могут образовываться вихри. Такими телами в атмосфере являются холмы, плоскогорья и горы. Из различных видов орографически обусловленных вихрей следует остановиться только на вихревой дорожке Кармана, которая возникает вслед за телами и уже довольно известна в газогидродинамике. В атмосфере такие вихревые дорожки появляются с подветренной стороны больших островов, как это можно увидеть на примере Jon Mayen, изображенном на рис. 11.8. Отдельные циклонические и антициклонические вихри имеют диаметр 10–30 км, общая длина дорожки может составлять до 400 км.

Так как острова — это всегда плоские препятствия (высота:ширина $\approx$ 1:10),то воздух стремится обтекать препятствие. Это происходит благодаря инверсии температур ниже апогея высоты, действующего на нижние слои атмосферы как крышка на основание подъемной силы Архимеда.

Торнадо и пыльная буря

Торнадо — это обычное в США название экстремально мощных шлейфообразных вихрей, возникающие в связи с большими грозовыми облаками

(рис. 11.17). Их диаметр в отличие от тропических вихрей, составляет только немногие сотни метров. Большие скорости (до 400 км/ч) и господствующее в центре ядра вихря весьма низкое давление (до 50 ГПа по отношению к окружающей среде) ежегодно проносят огромные убытки и беды. Мощь их разрушительной силы убедительно продемонстрирована на видео (например Video Discavery Channel 1997). Вращение торнадо может быть как циклональным, так и антициклональным. У очень мощных торнадо преобладает циклональное вращение, потому что основные облака вследствие крупномасштабных ветровых эффектов в большинстве случаев уже обладают циклональным вращением. Превращение этого начального вращения в торнадо очень многогранное и еще полностью не понято. Но как часть процесса можно для объяснения снова применить механизм усиления вращения (11.51). Мощные восходящие и нисходящие потоки (до 40 м/сек) в грозовых облаках вследствие условия неразрывности ведут к образованию сильных расходящихся и сходящихся потоков по горизонтали, вызывающих согласно (11.51) усиление завихренности. Это схематично представлено на рис. 11.17.

В Европу тоже приходят торнадо, но здесь они проявляются значительно слабее. Их называют тромбами или смерчами (над морем — водными смерчами). Богатый материал о возникновении торнадо и о причинах их зарождения можно найти у Курха (Church et. al) 1993. Пыльная буря — это такой же вихрь в форме шланга с вертикальной осью, но он не связан с наличием облаков. Его возникновение чаще всего связано с термической конвекцией и является следствием хорошей погоды. Из-за своего небольшого распространения 10–100 м по горизонтали и 100–500 м по вертикали, а также умеренных скоростей ветра 10 м/сек, он считается младшим братом торнадо. Понятие пыльная буря (пыльный черт) связано с тем, что он всасывает в себя, в свой центр вихря свободный почвенный материал и поднимает его вместе со своим ядром на высоту. Вследствие чего вихрь можно видеть.

Механизм возникновения вихрей типа пыльных бурь все еще полностью не объяснен и не изучен.

Вблизи нагретой земной коры теплый воздух поднимается в форме шлейфов на высоту и образует горизонтальный поток воздуха. Если существует определенное начальное вращение, например посредством препятствия, то конвергенция ветра в области восходящего шлейфа ведет согласно (11.51) к усилению вращения.

11.2.5. Глобальные атмосферные циркуляции

В предыдущих главах были представлены различные отдельные явления атмосферных течений. Для обобщения этого следует представить, как ведет себя атмосфера в глобальном масштабе. Причем есть две вещи, влияющие особенно на захватывающую большое пространство динамику: это вращение Земли и солнечное излучение. Но поскольку Земля имеет сферическую форму, то атмосфера вблизи экватора получает больше солнечной энергии, чем в полярных областях. Это ведет в свою очередь к тому, что температура воздуха в экваториальных областях выше чем в областях высоких широт.

В главе 11.2.1 было дано объяснение термической циркуляции следующим образом. Температурный градиент по горизонтали вызывает вертикальную циркуляцию, причем воздух около поверхности Земли течет от холодных к теплым областям. Следствием этого должна была быть такая же циркуляция между полярными областями и экватором. На самом же деле это произойдет, если это будет и в ограниченном пространстве между экватором и приблизительно 30° северной и южной широтой. Такая циркуляция называется по имени английского метеоролога циркуляцией Хедли.

Такие термические циркуляции, захватывающие большие пространства, происходят на вращающейся Земле, поэтому нужно учитывать влияние кориолисовой силы. В главе 11.1.3 мы установили, что при геострофическом равновесии горизонтальный градиент температуры ведет к изменению высоты геострофического ветра. Причем ветер дует так, что теплый воздух находится справа по направлению течения (термическая формула ветра (11.9)).

С установлением температурного градиента между экватором и полюсом, охватывающего большое пространство, под влиянием вращения Земли должна образоваться зона западных ветров, т.е. более или менее параллельное течение на восток. Это действительно наблюдается, как это видно на рис. 11.20 из распределения зональной горизонтальной скорости ветра. Заметно также и образование максимального ветра на высоте 10 км, который называют струйный поток или в английском реактивный поток. Скорости ветра здесь могут достигать 100–300 км/ч, что имеет значение для авиации.

В областях между экватором и 30° широты наблюдаются восточные ветры. Они образуются вследствие существующей вблизи Земли разности давления воздуха (низкое давление на экваторе — высокое давление в субтропиках) соответственно геострофическому уравнению ветра (11.7).

Рис. 11.20. Средняя зональная скорость ветра в м/сек в зависимости от геострофической широты и высоты. Положительные значения: западные ветры; отрицательные значения: восточные ветры

Вместе с нижней циркуляцией Хедли они образуют пассатные ветры (рис. 11.21), которые считались основными составляющими системы ветров в атмосфере и играли важную роль в судоходстве в былые времена.

На средних широтах атмосферная динамика, захватывающая большие пространства, проявляется образованием и распадом областей низкого давления (циклоны) и высокого давления (антициклоны). Как уже кратко говорилось в главе 11.2.5, области низкого давления возникают в результате бароклинной неустойчивости основного течения в зоне западных ветров. Она предполагает переход критического горизонтального температурного градиента, как это часто бывает на средних широтах. Эти циклоны своими облаками и атмосферными осадками практически делают погоду в наших широтах.

Говоря по-простому, можно констатировать, что глобальная атмосферная циркуляция осуществляет выравнивание температур между полярными и экваториальными областями в атмосфере. Но вследствие сферической формы Земли и поэтому неравномерного распределения солнечного излучения невозможно полностью осуществить это выравнивание. Глобальные воздушные течения действуют так, что разница в температурах между низкими и высокими широтами падает медленнее, чем это происходило бы из-за простого баланса солнечных дней.

Сделанные выше выводы можно объединить в простой схеме глобальной атмосферной циркуляции, как это представлено на рис. 11.21. Подробнее описание глобальной циркуляции представлены в монографиях Гротьена (Grotjahn) 1993, а также Рейхото (Peixoto) и Оорта (Oort) 1992.

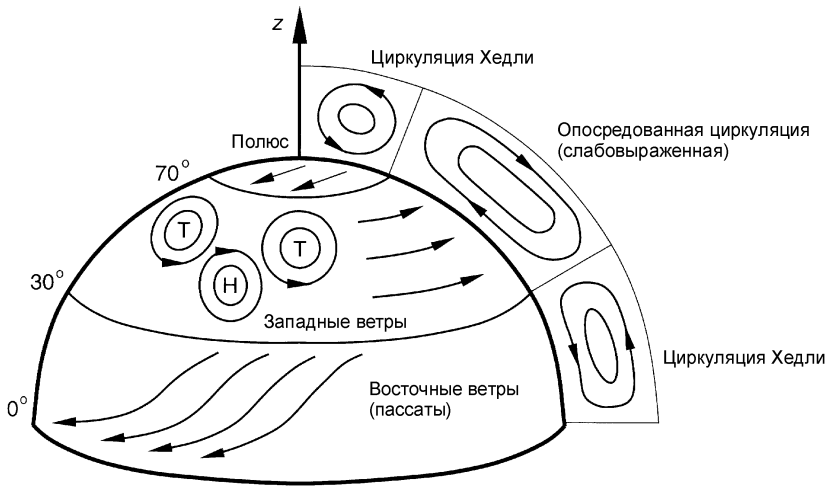


Рис. 11.21. Схематическое изображение глобальных атмосферных циркуляций

11.3. Течения в океане

В главе 11.1 обсуждались различные аспекты течений, общих для атмосферы и океана. Это были геострофическое течение (11.1.3), волны Росби (Rossby) и слой Экмана (Ekman) (11.1.5). Поэтому эти формулы течения далее не будут обсуждаться. Несмотря на то, что основополагающая механика течения в обеих средах одинаковая, есть и некоторые различия, вызывающие особые соотношение для течения в океане.

Главное отличие основано на том, что воздух практически не имеет боковых ограничений, он может без помех обтекать земной шар, мировые же океаны ограничены сушей. Следствием этого является то, что океаническая циркуляция, захватывающая большое пространство, располагается в соответствующих бассейнах (например, Северная Атлантика) в форме мощных антициклональных вихрей.

Другое отличие — это свободная подвижная морская поверхность, образующая верхний край океана, вследствие чего располагающаяся над ней атмосфера за счет касательной составляющей ветра может оказывать силу на верхнюю поверхность воды, и таким образом действовать как главный привод морских течений.

По поводу вертикальной структуры следует заметить, что плотность воды ρ определяется не только давлением p и температурой T как в атмосфере, здесь еще большое влияние на плотность воды имеет кроме того содержание соли в воде c.

Далее уже можно кратко охарактеризовать океанские течения, учитывая все ранее сказанное. Но это не относится ни в коем случае к обширной области океанографии. Из многочисленных монографий по океанографии здесь приводятся лишь те, например, Педлоски (Pedlosky) 1996, Понда и Пикарда (Pond und Pickard) 1991, в которых большинство динамических аспектов морских течений рассматриваются в духе этой книги.

11.3.1. Течения, приводящиеся в движение ветром

В главе 11.16 о околоземном атмосферном пограничном слое (слое Прандтля) говорилось, что ветер действует на поверхность Земли тангенциальной силой, которая, отнесенная к единице площади, обозначается как тангенциальное или касательное напряжение. Измерения показывают, что касательная составляющая, обозначенная обычно τ (см. (11.33), действует по направлению околоземного ветра и пропорциональна квадрату скоростей:

$$\tau = \rho \cdot c_w \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \boldsymbol{v}. \tag{11.52}$$

Коэффициентом c_w называют коэффициент сопротивления. Типичное значение коэффициента $c_w \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$. Касательное напряжение воздуха Земли (11.52) действует на морскую поверхность, и поскольку она подвижна, образуется поверхностное морское течение. В простом случае, когда имеют дело с горизонтальными гомогенными отношениями, образуется спираль Экмана согласно (11.31) и (11.32) (см. главу 11.15) причем течение на поверхности моря сдвигается на 45° вправо от направления касательной напряжения τ_w или направления ветра на поверхности Земли $\boldsymbol{v}$. На самом деле этот угол в океане значительно меньше, он будет составлять где-то 20°. Если опустить это объяснение и задаться вопросом, как будет распространяться поверхностное морское течение, то придется учесть влияние распределения ветра на больших пространствах на движение воздушных масс, согласно (11.31), (11.32) и (11.52).

При рассмотрении среднего состояния атмосферы и океана, описанного в гл. 11.2.5, обнаружилось, что примерно между экваториальными регионами и 30° N/S господствуют пассаты восточного направления, а между 30° и приблизительно 70° доминируют циклоны с преимущественно за-

падными ветрами. Вследствие этого, представляя упрощенно, что в низких географических широтах касательное напряжения ветра действует в западном направлении, а в высоких широтах — в восточном направлении. Это представлено на рис. 11.22. Соответственно развивались бы и морские течения с востока на запад или в обратном направлении.

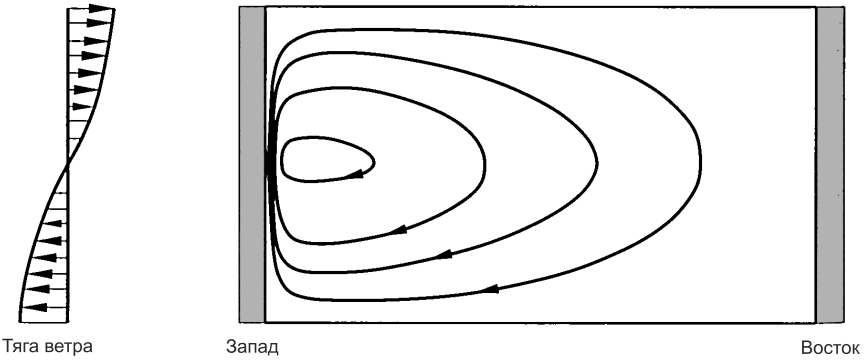


Рис. 11.22. Схематическое изображение движения ветров и обусловленных ими океанических течений

Как уже говорилось во введении, океаны перекрыты континентами, проходящими в направлении север–юг по их зональному расположению. Вследствие этого, к восточному побережью в низких широтах всегда подходят воды, а в высоких широтах отходят. Поэтому на восточном побережью должно образоваться течение с юга на север, обусловленное законом сохранения массы. На западном побережье происходит все наоборот. В идеальном случае касательные напряжения ветра вызывают таким образом в соответствующих океанских бассейнах закрытую антициклональную циркуляцию, как это схематично изображено на рис. 11.22. Бросается в глаза сильное сгущение линий течения.

Поскольку океанские вихри, захватывающие большое пространство, имеют большое распространение по меридиану, то они захватывают водные массы различной температуры — теплые на юге, холодные на севере. Морские течения, приводящиеся в движение ветром, несут поэтому в западной части теплые воды на север, а холодные воды в восточной части — на юг, как это показано на рис. 11.23. Все это конечно же оказывает большое

влияние на климат нашей Земли. Если сравнить температуры воздуха в январе вдоль шестидесятой параллели, то они составят, например, в Ирландии $+6°$ С, а на Лабрадоре $-10°$ С.

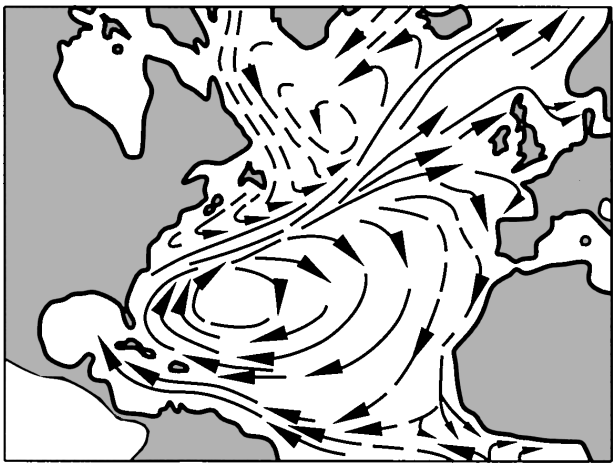


Рис. 11.23. Наблюдающиеся течения, проходящие близко к поверхности, в Атлантическом океане. Сплошные линии: теплое морское течение, пунктирные линии: холодное морское течение.

Итак, мягким зимним климатам в Западной Европе мы обязаны теплому морскому течению Гольфстрим.

11.3.2. Морские волны

Как и атмосфера, океан является также средой, производящей колебательные процессы, в которой присутствуют разные формы волн. В главе 11.1.4 уже обсуждались волны Росби, возникающие вследствие зависимости параметра Кориолиса от широты (β- эффект). Установленное там дисперсионное соотношение (11.15) $c = \bar{u} - \beta/a^2$ справедливо не только для атмосферы, но и для океана. Поэтому далее мы больше не будем говорить о волнах Росби.

В главе 11.2.4 рассматривались тяжелые (гравитационные) волны, характерные для устойчиво стратифицированной атмосферы. Океаны тоже,

подобно атмосфере на больших широтах, точно также устойчиво расслоены, и действие подъемной силы Архимеда вызывает образование внутренних глубинных гравитационных волн. Формально такие волны в океане объясняются точно также уравнением (11.44), выведенном уже для атмосферных гравитационных волн. Только в океане для частоты N Брента–Вяйсяла (11.42) нужно применять еще вертикальный градиент плотности, который устанавливается не только по давлению и температуре, но и по содержанию соли. Поэтому дисперсионное соотношение для океанских волн будет идентично (11.47). Коэффициент частоты Брента–Вяйсяла для океана составляет обычо $N \approx 0,5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{c}^{-1}$, вследствие чего продолжительность колебания будет примерно 30 мин.

Ни волны Росби, ни глубинные гравитационныее волны обычно недоступны простому наблюдателю океана. Волны на поверхности моря, являющиеся одной их распространенных форм движения в океане известны почти каждому. На этих поверхностных волнах мы остановимся подробнее далее.

Здесь следует кратко пояснить вывод дисперсионного соотношения для линейных поверхностных волн. Допустим, что масса воды является несжимаемой и свободной от трения средой, т.е. справедливо $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Благодаря этому волны можно выразить через потенциальное течение, в основе которого лежат соотношения для потенциала скорости $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$.

В отличие от классической теории потенциального течения (см. главу 4.1.5) здесь существует верхняя граница жидкости, образованных подвижной верхней свободной поверхностью, высота которой меняется, т. е. $\eta(x, y, z, t)$. Для нее формула волны в простом случае будет представлена в форме

$$\eta(x,t) = \eta_0 \cdot \cos(a \cdot (x - c \cdot t))$$

(волновое число $a = 2 \cdot \pi/\lambda$, фазовая скорость c). Используя физические граничные условия

$$w(\eta) = \frac{d\eta}{dt}, \quad w(z = -h) = 0$$

и глубину до морского дна h и не учитывая кориолисову силу, получим из линейной зависимости, в которой не учитывается трение (11.2) выражение для фазовой скорости:

$$c = \sqrt{\frac{g}{a} \cdot \mathrm{th}(a \cdot h)}. \tag{11.53}$$

Фазовая скорость волн очевидно зависит от длины волны $\lambda = 2 \cdot \pi/a$ и глубины h. Смотря по значениям λ и h можно дать следующие упрощенные граничные условия $h/\lambda > 0,5$ и $h/\lambda \leqslant 0,05$ для

$$h/\lambda > 0,5 \rightarrow \operatorname{tg}(a \cdot h) \approx 1$$

из (11.53) получим:

$$c = \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}}. \tag{11.54}$$

Если выполняется условие $h/\lambda \geqslant 1$, то эти волны называются короткими волнами или волнами на глубокой воде. При этом не следует думать, что сама по себе глубина h велика, она должна быть только больше, чем длина волны λ. Волны глубокой воды обладают дисперсией. Согласно (11.54) длинные волны движутся быстрее, чем короткие. Это приведет к тому, например, что мертвая рябь на берегу вызовет возмущение морских волн и закончится это все бурей, которая не выйдет на сушу (берег). Приведем некоторые цифровые примеры для скорости распространения таких волн:

$$\lambda = 10m \rightarrow c \approx 4\,\text{м/с}$$

$$\lambda = 100m \rightarrow c \approx 12\,\text{м/с}$$

$$h/\lambda \leqslant 0,05 \rightarrow \tanh(a \cdot h) \approx a \cdot h$$

из (11.53) получим:

$$c = \sqrt{g \cdot h}. \tag{11.55}$$

Если $h/\lambda \ll 1$, то волны обозначаются как длинные или плоские волны. В отличие от глубинных волн они не обладают дисперсией, фазовая скорость зависит только от глубины: например

$$h = 10\,\text{м}, \quad \lambda = 200\,\text{км} \rightarrow c \approx 10\,\text{м/с},$$
$$h = 1000\,\text{м}, \quad \lambda = 20\,\text{км} \rightarrow c \approx 200\,\text{м/с}.$$

В свободном океане (большая глубина) отношением (11.55) выражается фазовая скорость очень длинных волн, вызванных морским извержением (цунами).

Решая уравнение потенциальных течений, получают не только фазовую скорость (11.53), но и поле скоростей в воде, которое индуцируется вследствие поверхностных волн. Точные аналитические решения можно найти у Лайтхилла 1987. В этом месте следует сделать лишь эскизы орбитальных движений частиц воды (рис. 11.24), которые берутся из скоростных полей.

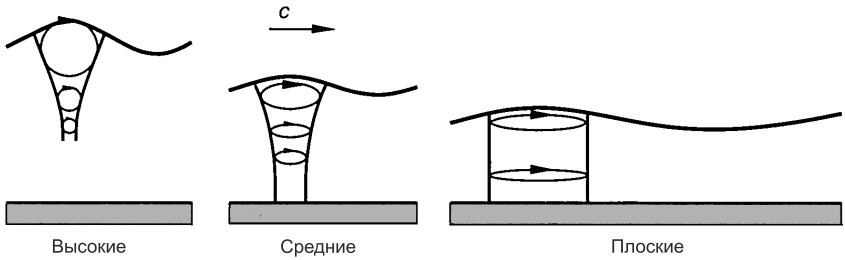


Рис. 11.24. Волны на поверхности моря и полученные орбитальные движения частиц воды для различных глубин. Фазовая скорость c

Рис. 11.25. Волны на поверхности моря

Рассмотренные выше волны представляют случай идеальной жидкости, не испытывающей трения. Если допустить в качестве еще одной силы поверхностное натяжение, то она будет доминировать при очень коротких волнах ($\lambda < 0,2$ м) над силой тяжести.

Эти видимые волны называются также капиллярными волнами.

Конечно наблюдателю редко представляется реальная морская поверхность в форме гармоничных волн с постоянной длиной волны. Очень часто наблюдают наложение многих волн различной амплитуды, длиной волны и фаз (рис. 11.25). Здесь мы не будем останавливаться подробно на этом так называемом морском спектре, следует сделать ссылки на проводящуюся далее литературу о волнах (например, Lighthill 1987, Voung 1999).

11.4. Использование законов течений в атмосфере и океане

Наряду с рассмотренными гидродинамическими явлениями в атмосфере и в океане большое значение приобретают в последнее время проблемы прогнозирования погоды, антропогенного изменения климата и понижения концентрации озона (озоновые дыры). Чтобы рассмотреть подробнее эти

проблемы, им посвящена краткая глава, куда вошли и соответствующие гидродинамические вопросы.

11.4.1. Прогнозирование погоды

Каждый человек практически ежедневно сталкивается с атмосферными явлениями в виде объявлений прогнозов погоды. В основе прогнозов погоды берется температура воздуха и давление воздуха за определенное время, а также формирование облаков и гроз. Как гидродинамическое явление, к этому следует добавить прогнозирование силы и направления ветра.

Предсказание погоды за последние 100 лет развивалось начиная с эмпирических способов и до применения физико-математических методов, основывающихся на динамических и термодинамических законах газогидродинамики. В качестве основы служат при этом уравнения как они уже были представлены в гл. 5.4.5. Эти уравнения содержат информацию в форме, обычной для описания течений в атмосфере и океане.

Структура уравнений для описания системы атмосфера–океан

локальное временное изменение		адвекция		сила (источник)		диффузия	
$\partial \boldsymbol{v}/\partial t$	$+$	$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$	$=$	$\boldsymbol{F}_i$	$+$	$K_v \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v},$	(11.56)
$\partial \rho/\partial t$	$+$	$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho$	$=$	Q_ρ		,	(11.57)
$\partial T/\partial t$	$+$	$\boldsymbol{v} \cdot \nabla T$	$=$	Q_T	$+$	$K_T \cdot \nabla^2 T,$	(11.58)
$\partial q_i/\partial t$	$+$	$\boldsymbol{v} \cdot \nabla q_i$	$=$	Q_{q_i}	$+$	$K_q \cdot \nabla^2 q_i,$	(11.59)
$\partial c_n/\partial t$	$+$	$\boldsymbol{v} \cdot \nabla c_n$	$=$	Q_{c_n}	$+$	$K_c \cdot \nabla^2 c_n,$	(11.60)

где скорость v и $F_i = -f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} - (1/\rho) \cdot \nabla p - \nabla \phi$ в уравнении движения (11.56). Плотность ρ и $Q_\rho = -\rho \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{v}$ для сжимаемой среды в уравнение неразрывности (11.57), температура T и источники выделения и поглощения тепла Q_T (например, адиабатическая компрессия

($Q = -(1/(\rho \cdot c_p)) \cdot dp/dt$), расхождение длинно и коротковолновых струйных потоков, фазовый переход воды (скрытое тепло) в уравнение для внутренней энергии (11.58), фазы водяного пара q_2 и льда q_3 и фазовые преобразования (например, конденсация, испарение, замерзание) в итоговом уравнении для водной фазы qi (11.59) и газа, например, $c_1 = CO_2$, $c_2 = NO$, $c_3 = O_3$ и т.д. Содержание соли в океане и источники и стоки, а также химические преобразования веществ Q_c в итоговом уравнение для $c_n (n = 1, 2, 3 \ldots)$ (11.60). В диффузионном законе уравнений K_v, K_T, K_q, K_c означают турбулентные коэффициенты диффузии для любых текущих сред. Термодинамические переменные давление p, плотность ρ и температура T связаны еще уравнениями состояния. Для атмосферы имеет значение $p = R \cdot \rho \cdot T$, а для океана — $\rho = \rho(p, T, c)$, где c содержание соли.

К уравнению движения (11.56), уравнению неразрывности (11.57) и уравнению энергии (11.58) присоединяются еще уравнения движения для водного потока и текущей жидкости (облако и дождевые капли) (11.59) и для веществ (11.60). Из структуры уравнений видно, что атмосферные течения, воздушные смеси распространяются как с помощью ветра, захватывающего большие пространства (адвекция), так и с помощью маломасштабной турбулентности (диффузия).

С помощью уравнений (11.56)–(11.60) можно предсказать временное развитие ветра, температуры и атмосферных осадков в регионе, если известны начальные значения. Начальные значения практически должны получать из полученных в одно и то же временя различных измерений атмосферных переменных. Все таки решать уравнения, из-за их нелинейности, придется не аналитическим путем. Вместо этого используют численные методы решения, обычные для других областей газодинамики. В аэродинамике для этого была выделена специальная область под названием численное математическое прогнозирование погоды, в которой физические уравнения (11.56)–(11.60) решались методами вычислительной математики.

Сегодня предсказания погоды основывается фактически на результатах численного решения газодинамических уравнений (11.56)–(11.60). В качестве примера служит просчитанное развитие давление воздуха на земную поверхность на рис. 11.26. В заключение можно представить современное прогнозирование погоды как практическое применение законов газодинамики в атмосфере. Описание основ предсказания погоды и примеров практического применения можно найти в монографии Бальцера, Энке и Верн 1999.

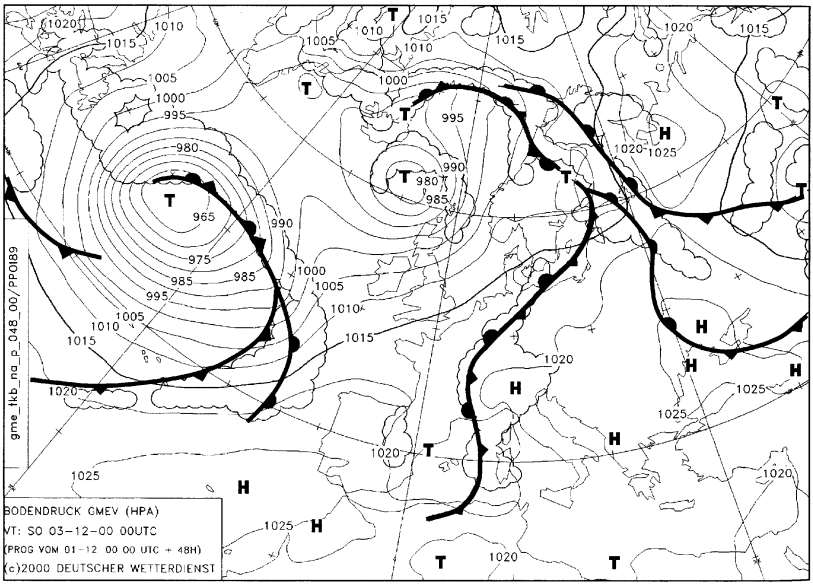


Рис. 11.26. Пример прогноза давления Земли на 2 суток (на 48 часов) для областей — Атлантики и центральной Европы.

11.4.2. Парниковый эффект и прогнозирование климата

Уравнения (11.56)–(11.60) для атмосферы и океана можно в принципе интегрировать вперед по времени на значительные промежутки времени, а также применять их для составления прогноза погоды на несколько дней. Из-за нелинейности и известного хаотичного поведения системы уравнений прогноз погоды на длительный промежуток времени не может быть идеально точным. Результаты численного интегрирования могут интерпретироваться только как пространственное или повременное средство для различных переменных (например, средняя температура воздуха в январе). По наблюдениям, это соответствует средним соотношениям атмосферы, которые и обозначают климат.

Таким образом, газогидромеханические уравнения (11.56)–(11.60) годятся для прогнозирования климата на Земле. В рассматриваемых сейчас промежутках времени (месяцы, годы, десятилетия) преобладают термоди-

намические эффекты в уравнении энергии (11.58), особенно заметно расхождение коротко- и длинноволновых струйных потоков. А они сильно зависят от пространственного и повременного распределения струйных примесей воздуха (например, водяной пар, двуокись углерода). Поэтому уравнения движения для этих веществ (11.59) и (11.60) имеют при прогнозировании климата большое значение. В качестве простого примера здесь кратко рассматривается так называемый эффект парника, играющий в дискуссии о будущем изменении климата большую роль.

В главе 11.2.5, посвященной глобальной атмосферной циркуляции было высказано мнение, что главной причиной перемещений, захватывающих большие пространства, является неодинаковое нагревание поверхности Земли коротковолновым солнечным излучением в различных географических широтах. Эти воздушные течения, вместе с распределением температуры и водяного пара, и определяют климат на нашей Земле. Средняя температура земной поверхности определяется, если не учитывается влияние атмосферы, из равновесия между солнечным излучением S_0 и длинноволновым излучением черного тела $\sigma \cdot {T_0}^4$.

$$\frac{S_0}{4} \cdot (1 - \alpha) = \sigma \cdot {T_0}^4 \tag{11.61}$$

где S_0=1360 Вт/м^2 — солнечная постоянная, α — альбедо Земли (отражательная способность земной поверхности), $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2/К^4 — постоянная Стефана–Больцмана.

Подставив $\alpha = 0,3$ для среднего альбедо Земли, получим из (11.61) $T_0 \approx 255K$, соответственно -18^0C. Но наблюдаемая средняя температура воздуха около Земли составляет $\approx +15^0C$ или 288 К. Это объясняется тем, что длинноволновое излучение исходит не только от твердых тел (как от поверхности Земли), но и также от определенных газов. Из газов, имеющихся в атмосфере Земли, особенно известны в качестве абсорбентов и эмитаторов длинноволнового излучения водяной пар H_2O, двуокись углерода CO_2 и озон O_3. Эти газы излучают как в направлении космоса, так и в обратном направлении, т.е. в направлении поверхности Земли.

Такое длинноволновое излучение называется еще противоизлучением. Оно уменьшается из-за эффективного длинноволнового излучения поверхности Земли, так что вместо (11.61) действительно:

$$\frac{S_0}{4}(1 - \alpha) = \sigma \cdot {T_0}^4 - \lambda_g; \tag{11.62}$$

где λ_g — это длинноволновое противоизлучение атмосферы. В результате это противоизлучение накладывается на солнечное излучение, вследствие чего для (11.62) должна получаться более высокая температура, чем в уравнении (11.61). Этот эффект называют также парниковым эффектом. На самом деле присутствующие в атмосфере газы вместе с их излучающим действием таким образом и создают климат, необходимый для жизни на Земле.

Антропогенное изменение климата можно обосновать излучением, которое как двигатель побуждает к преобразованию энергии в системе атмосфера–океан–Земля (твердое тело). Если в атмосферу выбросить дополнительное количество производящих парниковый эффект газов (например, CO_2, метан) и усилить там длинноволновое атмосферное противоизлучение (λ_g в (11.62), то из-за простого уравновешивания излучения (11.61) поднимется средняя глобальная температура T_0 около поверхности Земли). Этот парниковый эффект газов частично компенсируется действием аэрозолей (маленькие капли и частицы, например, минеральная пыль или вулканический пепел диаметром немногим более μm). Они отражают часть коротковолнового солнечного излучения, в результате чего повышается квазиальбедо α в уравнении (11.61). Вследствие этого понижается температура воздуха T_0 вблизи поверхности Земли. Несмотря на охлаждающее действие аэрозолей сегодня прогнозируют увеличение температуры воздуха T_0 в следующие 50 лет примерно на 1°–3°.

В этой главе необходимо выделить два аспекта: роль атмосферы как среды-переносчика газов-микроконцентраций и аэрозолей и оценка парникового эффекта посредством численной имитационной модели.

Если, например, рассмотреть парниковый газ CO_2, то при сгорании горючих ископаемых в атмосферу с началом индустриализации дополнительно (к уже имеющемуся CO_2) выделяется диоксид углерода. Прежде всего, CO_2 доставляется из близких к Земле источников в более высокие воздушные слои и там посредством мощных пространственных течений довольно равномерно распределяется в атмосфере (рис. 11.27). Формально перемещение и диффузию CO_2 (и других парниковых газов) в атмосфере можно описать, например, при помощи уравнения (11.60). Таким образом, глобальная циркуляция в атмосфере (смотри главу 11.2.5) способствует перемешиванию атмосферы с CO_2 и с другими выделяющимися и действующими на излучение сопутствующими газами, которые содействуют парниковому эффекту.

Пример естественного внесения аэрозолей в атмосферу — извержения

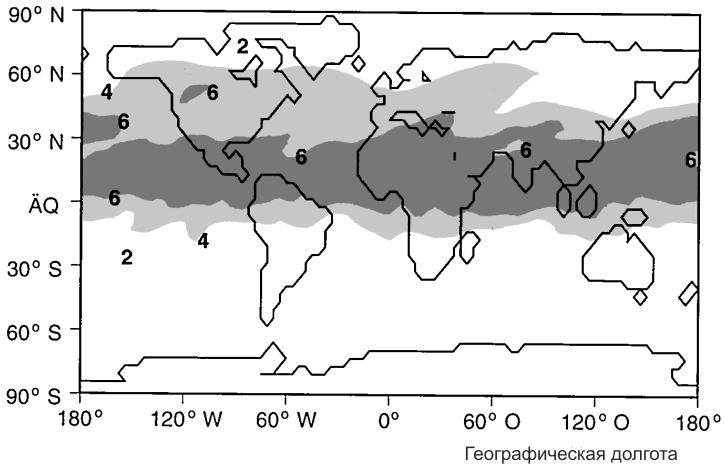


Рис. 11.27. Высчитанное глобальное распределение концентрации аэрозолей (в $\mu g/m^3$) на высоте 20 км на 15 ноября 1991 года, через 5 месяцев после извержения вулкана Пинатубо

вулканов. Одним из наиболее значимых событий этого столетия явилось извержение вулкана Пинатубо 15 июля 1991 . Этот вулкан, расположенный на Филлипинах ($15,14^0$ N, $120,35^0$ O), выбросил столп сернистых аэрозолей на высоту, приходящуюся на область нижней стратосферы между 20 и 25 км. Там они быстро распространились через атмосферные течения вокруг земного шара и несколько месяцев позже разошлись по всему северному полушарию и даже в области южнее экватора. Выброс вулканных аэрозолей рассчитали с помощью глобальной транспортной модели, которая применяла уравнения (11.56)–(11.60) (Timmreck et al. 1999). Результат расчета концентрации аэрозолей на высоте примерно 20 км на 15.11.1991, то есть пять месяцев после извержения вулкана, представлен на рисунке 11.27. Вследствие ранее упомянутых свойств излучения аэрозолей (отражение солнечного излучения), через 1-2 года после извержения вулкана произошло уменьшение околоземной температуры воздуха в северном полушарии примерно на $0,5^0$ C.

По уравнениям геофизической аэрогидродинамики (11.56)–(11.60) можно судить о влиянии парникового эффекта на глобальные течения в атмосфере, а также в океане. В энергетическом уравнении (первое начало

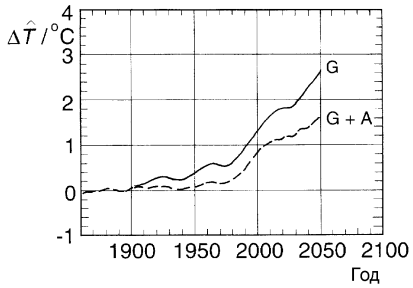


Рис. 11.28. Рассчитанное с помощью климатической модели изменение во времени глобально усредненной околоземной температуры воздуха по отношению к атмосфере без антропогенной нагрузки парниковыми газами и аэрозолями. Имитация G — только парниковые газы, имитация $G + A$ — парниковые газы и аэрозоли

термодинамики) как тепловые источники и др. присутствуют дивергенции коротковолновых и длинноволновых потоков излучения (лучистых потоков), эффект которых также зависит от концентрации и пространственного распределения остаточных газов и аэрозолей. При рассмотрении последнего можно говорить о глобальном температурном распределении и ,следовательно, о воздушных потоках, вызываемых температурными градиентами.

Как уже говорилось о прогнозе погоды (смотри гл. 11.4.1), уравнения для системы атмосфера-океан разрешимы только численным путем. Поэтому прогноз будущих климатических изменений, обусловленных антропогенным парниковым эффектом, можно осуществить последовательно только с помощью дискретизации уравнений (11.56)–(11.60) на вычислительной сетке и решения краевой начальной и граничной задачи, применяя численные методы.

Как результат применения такой модели климата на рисунке 11.28 представлено изменение во времени глобально усредненной околоземной температуры воздуха, вызванное антропогенным увеличением парниковых газов и аэрозолей. В гамбургском институте метеорологии имени Макса Планка с помощью связанных моделей атмосфера-океан были проведены расчеты двух сценариев (Roeckner et al. 1999). В случае G учитывали лишь естественное и анторопогенное внесение парниковых газов. При варианте $G + A$ дополнительно рассчитывали влияние излучения естественных и антропогенных аэрозолей. Результаты представлены на рисунке 11.28 как

разница температуры воздуха на климатической модели при постоянном содержании концентрации парниковых газов и аэрозолей. В следующие 50 лет в случае чистого парникового эффекта прогнозируют антропогенно обусловленное повышение глобальной температуры воздуха примерно на $2,6^0$ С. Это температурное увеличение сокращается при учете антропогенных эмиссий аэрозолей (в большинстве случаев серных соединений) на $1,6^0$ С.

При кажущемся на первый взгляд большом количестве публикаций как основу изучения климата и климатических изменений следует назвать только монографию $Houghton$ 1997 и доклад $Intergovernmental\ Panel\ of\ Climate\ Change\ (IPCC)$ 1996. В последнем опубликованы результаты расчетов моделей климата. Принципы моделирования различных частей климатической системы (атмосфера, океан, биосфера и т.д.) описаны в сборнике $Trenberth$ 1992.

11.4.3. Озоновая дыра

Наряду с парниковым эффектом озоновая дыра оказывает влияние на глобальное изменение климата. Конкретно речь идет о феномене в стратосфере над северным и южным полюсами. Здесь складывается такая ситуация, что во время перехода от зимы к весне на высотах между 20 и 30 км происходит отчетливое снижение концентрации газа озона O_3. При этом говорят о дыре не в смысле полнейшего исчезновения озона, а о том, что произошло ярко выраженное снижение содержания озона над южным полюсом с типичных 400 DU ($Dobson$-единица — мера суммарного содержания озона в воздушном столбе) в 1979 году до 180 DU к 1992 году. Это представляется как озоновая дыра (рис. 11.29) в области, геометрически напоминающей окружность, с сильно уменьшенной концентрацией озона над южным полюсом.

В зоне нижней и средней стратосферы, а именно на высотах 15–30 км, находится слой с максимальной концентрацией озона. Так как озон обладает абсорбирующей способностью к коротковолновому солнечному излучению (ультрафиолетовое (UV)-излучение), этот озоновый слой защищает жизнь на Земле от вредных UV-лучей. Озон O_3 образуется при этом из молекулярного O_2 и атомарного кислорода O посредством абсорбции ультрафиолетового излучения с длиной волны < 242 нм.

Озон снова распадается при коротковолновом солнечном излучении с

длиной волны менее 1200 нм и расщепляется на молекулярный и атомарный кислород.

В целом эти реакции образуют фотохимическое равновесие (баланс), но в итоге не выражают механизм рассеяния озона. Этот процесс происходит только из-за дальнейших каталитических реакций распада:

$$X + O_3 \rightarrow O + O_2, \tag{11.63}$$

$$OX + O \rightarrow X + O_2. \tag{11.64}$$

Катализатор X (например: хлор, водород, угарный газ) при этой реакции снова высвобождается и может разрушать озон далее.

Распад озона в полюсной стратосфере следует отнести к таким каталитическим реакциям. При этом, оказывается, особенно играют роль вещества, вызванные отчасти антропогенно, например, оксиды азота (NO, NO_2), радикалы водорода (OH, HO_2), хлор Cl или фтор-хлороуглеводороды($FCKW$). В литературе находят более чем 30 различных механизмов реакций, приводящих к чистому распаду озона в атмосфере.

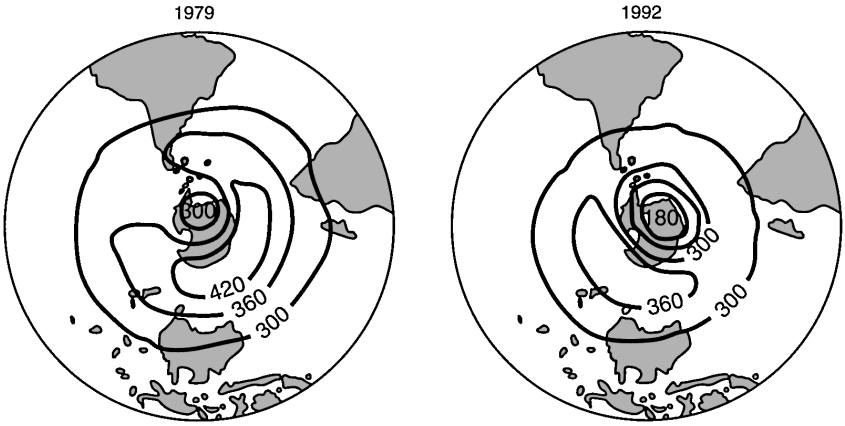


Рис. 11.29. Суммарное содержание озона в атмосфере в *Dobson*-единицах над южным полушарием в октябре 1979 и 1992 годов

В предыдущих главах описаны механизмы переноса химических субстанций в среднюю стратосферу над Антарктикой или Северным полюсом. Посредством синоптических систем (областей низкого давления) и циркуляции Хадли эти вещества более или менее равномерно распределяются

над северным полушарием. Еще дальше они должны преодолеть барьер тропопаузы (верхней границы тропосферы), которая сильно затрудняет вертикальную диффузию. С помощью достигающей больших высот тепловой конвекции в тропиках, как и с помощью фронта низкого давления (циклона) тропосферный воздух в отдельных областях достигает стратосферы (рисунок 11.30). Последнее выделяется в ее аэродинамическом свойстве благодаря более или менее параллельным системам ветров, осуществляющим распределение веществ в направлении востока и запада. Но для того, чтобы антропогенные сопутствующие вещества достигли полярной стратосферы, необходима меридиональная циркуляция. Она фактически существует и носит название по именам ученых, ее обнаруживших, как циркуляция Бревера–Добсона. Схема меридиональной циркуляции в тропосфере и стратосфере представлена на рисунке 11.30. Продолжительность этой циркуляции, а стало быть перемещение тропосферного воздуха к полярным областям стратосферы, составляет несколько месяцев. Следовательно, только те химические вещества могут привести к распаду озона, которые обладают большой продолжительностью жизни. Именно $FCKW$, с продолжительностью контакта (реакции) в несколько лет, являются кандидатами. Хотя распад озона — чисто фото-химический процесс, все же при объяснении озоновой дыры в антарктической стратосфере имеют место атмосферные маршруты перемещения.

В связи с озоновой дырой вводится в рассмотрение еще следующий аэрогидродинамический эффект, который здесь будет коротко освещен. В процессе распада озона также играет важную роль температура воздуха, особенно в связи с реакциями над водородом. Возможно низкая температура (например — 90^0 C) благоприятствует длительности реакции различных процессов, имеющих значение в озонной химии. Стратосферный воздух над южным полюсом должен вследствие этого охлаждаться. Оно обеспечивается тем, что воздух не перемешивается с относительно теплым воздухом из средних широт. Фактически этому препятствует очень устойчивый полюсный циклональный вихрь, образующийся в зимние месяцы над Антарктикой. Этот вихрь характеризуется высоким значением потенциального завихрения (см. главу 11.1.4). В итоге новые теоретические и численные исследования показали, что подобный вихрь практически не допускает смешения воздушных масс извне (здесь — из средних широт). Говорят о потенциальном барьере завихрения. Впрочем, это свойство полярных вихрей также объясняет, почему озоновая дыра над северным полюсом обнаруживается менее отчетливо чем над южным полюсом. Полярный вихрь

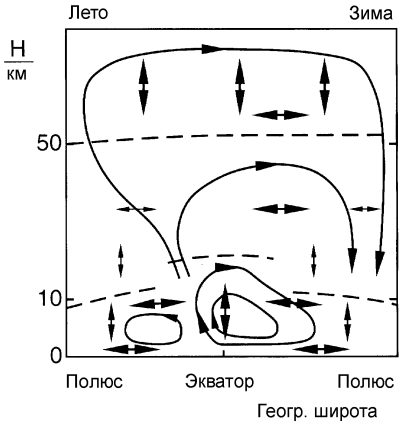


Рис. 11.30. Схематичное представление меридиональной циркуляции в тропосфере ($\sim 0-10$ км)и стратосфере ($\sim 10-50$ км), а также главных транспортных маршрутов атмосферных сопутствующих веществ (жирные стрелки)

северного полушария переменчив и там полярный воздух легче перемешивается с воздухом из средних широт.

В целом можно констатировать, что распад озона в полярной стратосфере — это фотохимический процесс, вызываемый антропогенными сопутствующими веществами. Без различных процессов перемещений в атмосфере, от компактной турбулентной диффузии до достигающей большой высоты тепловой конвекции вплоть до стратосферной циркуляции Бревера–Добсона, которые доставляют вещества лишь к их месту реакции и к полярному вихрю, который практически блокирует эти вещества зимой, расщепление озона было бы неосуществимо.

Дальнейшие подробности об озоновой дыре можно найти, например, в монографиях Фабиана (Fabian) 1992, Граеделя (Graedel) и Крутцена (Crutzen) 1994, Лабитцке (Labitzke) 1999 или в обзорной статье Соломона (Solomon) 1999.

12

Биоаэрогидродинамика

12.1. Основы биоаэрогидродинамики

В отличие от предыдущих глав, биоаэрогидродинамика изучает течения, воздействующие на упругие биологические поверхности. Различают обтекание живого организма воздухом или водой, например, полет птицы или плавание рыбы и внутренние течения, к примеру, замкнутое кровообращение живого существа. В ходе эволюции в предшествующие миллионы лет для движения живых существ в зависимости от размера и веса появились такие формы передвижения как ползание, бег, плавание, скольжение или полет.

Тяга, необходимая для изменения местоположения, связана с подходящим по числу Рейнольдса управлением течением. Бактерии и простейшие передвигаются при очень маленьких значениях числа Рейнольдса и поэтому их движение происходит при преобладающем влиянии трения ресничек и жгутиков. Головастики и каракатицы используют для передвижения силу инерции выбрасываемой из тела струи жидкости, направленной в сторону, противоположную движению. Угри движутся волнообразно, киты при числе Рейнольдса до 10^8 используют как движущую силу вихрь, отделяющийся от хвостового плавника. Быстро плавающие рыбы, такие как акулы, имеют продольные бороздки на своих чешуйках, которые, соприкасаясь с внутренним вязким слоем пограничного слоя, уменьшают сопротивление течения.

Тепло- и массопередача в живых организмах осуществляется с помощью кровообращения, а также дыхания, крово- и лимфоциркуляции и водного баланса. Все течения, возникающие при биологических процессах, взаимосвязаны, что отчетливо проявляется на движении внешних или внутренних сверхгибких и структурированных поверхностей. Следовательно, необходимо активное управление потоком, гидропотери которого должны быть незначительными.

Из множества биологических течений, в этой главе будут рассматриваться кругооборот дыхания и подробно циркуляция крови в теле человека. На рисунке 12.1 схематично изображено кровообращение человека. Сердце каждую минуту прогоняет примерно 5 литров крови по замкнутой системе. За счет физической нагрузки мощность нагнетания может повышаться от 20 до 30 литров в минуту. Существует два круга кровообращения, связанных между собой посредством сердца. Один называют большой круг кровообращения, а другой — малый (или легочный) круг кровообращения. В целом круг кровообращения осуществляет газообмен между продуктами обмена веществ в человеческой ткани и воздухом атмосферы.

Большой круг кровообращения начинается с аорты, разделяющейся далее на большие артерии. Капилляры задействованы в кровообращении по большому кругу кровообращения, с их помощью кровь отдает часть ее кислорода и усваивает диоксид углерода. По капиллярам кровь течет в вены, посредством которых она снова подается к сердцу. Из сердца кровь поступает в малый круг кровообращения, который состоит из артерий, капилляров и вен малого круга кровообращения. По капиллярам малого круга кровообращения кровь отдает часть диоксида углерода и усваивает столько кислорода, сколько она до этого отдала ткани.

Числа Рейнольдса кровопотока в артериях находятся в пределах от сотни до нескольких тысяч. Сокращения сердца вызывают в маленьких артериях периодическое ламинарное течение, а в больших артериях — переходный поток.

При этом переход к турбулентному артериальному течению начинается с профилей скоростей, имеющих точку перегиба, неустойчивость которых изложена в главе 7.3. Такие течения встречаются при нестабильном противотоке (рециркуляции) вблизи артериальной стенки во время фазы релаксации (расслабления) сердца. Чем меньше разветвленность артерии, тем в меньшей степени проявляется пульсирующий характер поток.

В изогнутых артериях, в особенности в аорте, формируется центробежная сила вторичного течения, как это известно из главы 4.2.7. При этом перпендикулярно к линии тока появляется составляющая, вызывающая циркуляционный поток в направлении наружной стенки. Это стабилизирует переходный процесс.

Критическое значение числа Рейнольдса для осредненного по времени профиля скорости возрастает с 2300 для прямых труб (каналов) до 6000 для изогнутых труб. Максимальные числа Рейнольдса у здоровых людей таковы, что вторичное течение в искривлении канала аорты при нормальных

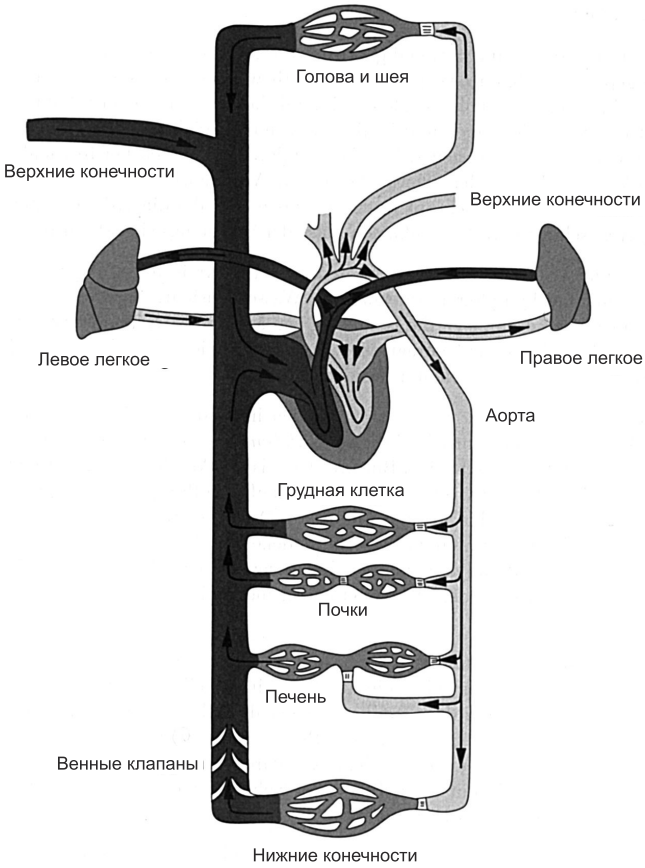


Рис. 12.1. Кровообращение тела человека

условиях предотвращает возникновение турбулентности. В действительности описанное неустойчивое переходное течение в близкой к стенке области пограничного слоя возникает во время фазы замедления цикла нагнетания (систолы). Наступающие при этом неустойчивости все же в короткое время демпфируются вследствие изменения профиля скоростей во времени.

Поток крови, покидающий сердце, дробится на разветвления от 30 крупных каналов до нескольких сотен миллионов маленьких отдельных ми-

кроциркуляционных течений в кровеносных сосудах с диаметром в несколько сотен микрометров или в капилляров с диаметром меньше чем 10 микрометров.

Набегающий поток (расход крови через канал) в прямом сосуде (вене, артерии) диаметром D составляет приблизительно $0,03 \cdot Re_D \cdot D$. Отсюда следует, что большую часть артерий после разветвления характеризуют с помощью набегающих потоков и поэтому они не являются осредненными течениями Пуазейля. Если рассмотреть большую дугу аорты на рисунке 12.1, не учитывая значительную ее искривленность, то благодаря набегающему потоку, можно не прогнозировать возникающего вторичного течения.

Кровяное давление сердца порождает расширение артерий примерно на 2%. Скорость распространения волны давления по вязко-упругим артериальным стенкам приблизительно в пять раз больше, чем максимальная скорость крови. Пренебрежение упругостью, которое применяют как фактор 5 для определения скорости распространения в следующих главах, влечет за собой бесконечную скорость распространения.

Если рассмотреть первую Фурье-составляющую распределения по скорости импульса крови с круговой частотой ω, то она зависит от отношения радиуса артерии R и осциллирующей толщины пограничного слоя $\sqrt{\nu/\omega}$. Если взять для вязкости крови $4 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ и для круговой частоты импульса крови $\omega = 8s^{-1}$, то получим толщину пограничного слоя приближенно $\delta = 0,7$ мм. Для n-й моды (характеристики) импульса крови толщина пограничного слоя умножается на $\sqrt{n}$. Для больших артерий отношение радиуса артерии R к толщине пограничного слоя δ составляет величину порядка 10. Отсюда следует, что распределение скорости по поперечному сечению артерии близко к равномерному. Изменения распределения по скорости появляются исключительно в пограничном слое у стенки, которые составляют 10% от радиуса артерии. Таким образом, соответственно уравнению Эйлера (5.72), почти весь градиент давления импульсов крови преобразуется в ускорение. При этом, в противоположность градиенту давления, течение имеет сдвиг фазы почти 90^0. Он уменьшается в пограничном слое из-за касательного напряжения на стенке только на 45^0.

Скорость распространения импульса в крови составляет 5 м/сек. При этом речь идет не только об распространяющейся от сердца волне. Разветвления артерий вызывают некое количество отраженных волн, которые накладываются на изначальный импульс давления и импульс скорости. Отсюда имеем в артериях периодический (пульсирующий) характер вслед-

ствие наложения движущихся и стационарных волн. Как следствие, аорта, например, действует как объемный резервуар для выталкивания крови из сердца и обеспечивает практически установившийся объемный ток циркуляции крови.

Кровь — это суспензия (взвесь), состоящая из плазмы крови и занимающих то 40 до 50 процентов по объему деформируемых кровяных телец. Красные кровяные тельца представляют собой деформируемые дискообразные тельца длиной до 8 микрометров. Так как плазма крови на 90% состоит из воды и поэтому она обладает ньютоновскими свойствами, но сама кровь не имеет ньютоновских свойств. В первом приближении вязкие свойства крови можно описать с помощью эффективной вязкости. Она увеличивается при уменьшающейся доле сдвига благодаря возрастающему скоплению (аккумуляции) красных кровяных телец. В сосудах с небольшим диаметром наступает вследствие этого неравномерное по поперечному сечению распределение концентрации, которое оказывает влияние на гидравлические потери.

12.1.1. Кругооборот дыхания

Кругооборот дыхания в теле человека связывает кровообращение с атмосферой и обеспечивает кислородный обмен и обмен диоксидом углерода из окислительного внутриклеточного обмена. Легкие имеют большую площадь поверхности для обеспечения необходимой газовой диффузии. Воздушный поток обеспечивает вентилирование легочных трактов.

Легкие снабжаются воздухом посредством разветвленного дыхательного тракта (рис. 12.2) и крови через легочно-артериальные ветвления. Дыхательный путь начинается с носа, трахеи и левых и правых основных бронхов, которые далее разветвляются более чем на 150000 бронхиол и альвеол. При этом диаметр трахеи составляет до 1,8 см, основных бронхов — 1,2 см и альвеол — 250 микрометров. Среднее значение числа Рейнольдса воздушного потока составляет при нормальном дыхании в трахее $Re_D = 800$, примерно после пяти разветвлений $Re_D = 100$ и после десяти ветвлений $Re_D = 10$. При усиленном дыхании будет превзойдено критическое значение числа Рейнольдса и в трахее возникает турбулентное течение. В альвеолах, которые имеют суммарную площадь поверхности приблизительно 100 м^2, скорость течения практически нулевая, так что газообмен осуществляется посредством диффузии.

Дыхание в состоянии покоя происходит с частотой 12 мин$^{-1}$. На рисуноке 12.3 изображены объем легких и перепад давления Δp по отноше-

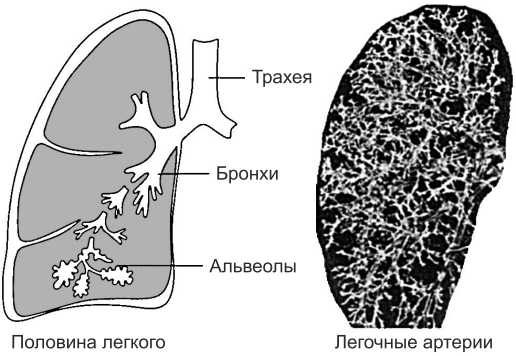


Рис. 12.2. Структура дыхательного тракта

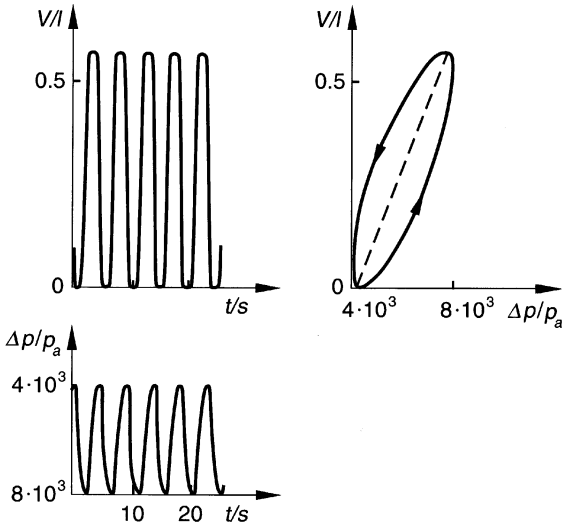


Рис. 12.3. Диаграмма дыхания давление-объем.

нию к атмосферному давлению для нескольких дыхательных циклов. При нормальном дыхании замещается 10 л/мин воздуха. При усиленном дыхании — до 100 л/мин. Цель дыхания такова, чтобы не удалять из крови

диоксид углерода полностью, но поддерживать его на постоянном уровне. Так как атмосферное давление постоянно, то при вдохе необходимо снижение давления в альвеолах, а при выдохе — повышение давления. Падение давления достигается посредством расширения или сужения альвеолярного пространства. Дыхание происходит пассивно или активно при помощи поперечной оболочки.

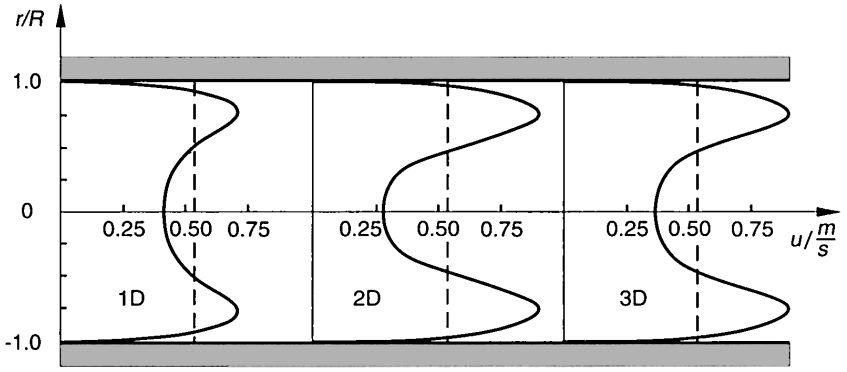


Рис. 12.4. Профили скорости вниз по потоку в бронхиальном разветвлении, $Re_D = 700$

Падение давления в бронхах определяется в основном вторичными течениями в ветвлениях и в меньшей степени потерями давления при течении по дыхательному пути. Отношение длины бронхов к их диаметру составляет в среднем 3,5, так что от одного разветвления бронхов до следующего не может возникнуть формирующийся периодический поток. Рисунок 12.4 изображает типичные профили скоростей в разветвленном бронхе в сечениях на расстоянии 1, 2 или 3 диаметров D от ветвления для числа Рейнольдса $Re_D = 700$ при условии профиля Пуазейля в начальном сечении. Отчетливый скоростной максимум, возникающий из-за вторичных течений разветвления бронхов, имеет место вблизи стенки. В действительности картина течения еще сложнее, так как от разветвления к разветвлению возникает несформировавшееся течение.

12.1.2. Кровообращение

Рисунок 12.1 в начале главы дает схему кровообращения в человеческом теле. В вводной главе на рисунке 1.10 изображено течение в сердце.

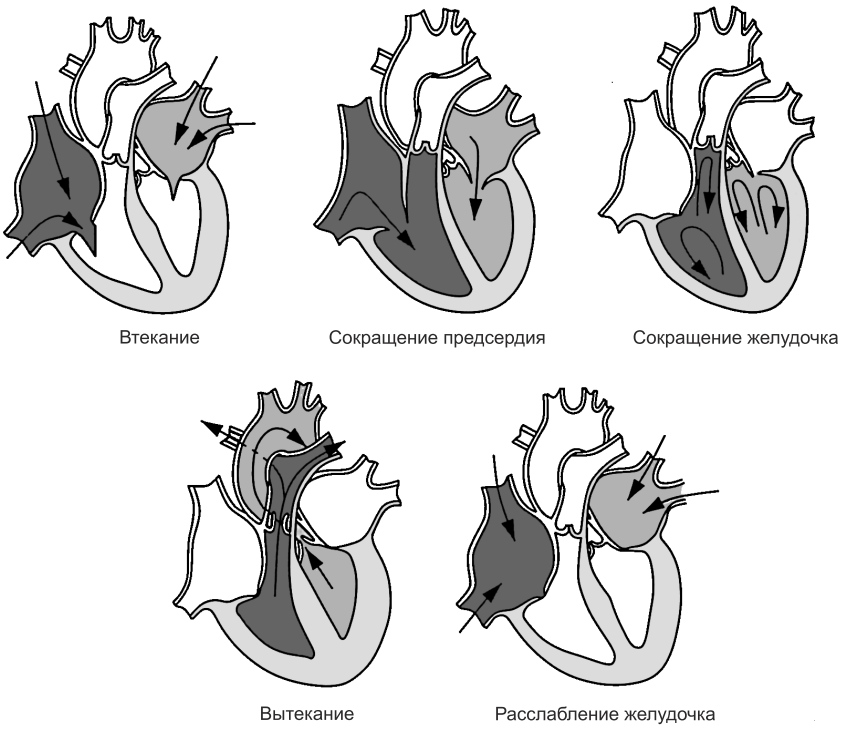


Рис. 12.5. Изображения сердца в разрезе во время четырех фаз сердечного цикла

Сердце состоит из двух разделенных камер, левого и правого желудочков и предсердий, образованных сердечной мышцей (рис. 12.5). Правое предсердие получает обедненную кислородом кровь из большого круга кровообращения. Вслед за этим правый желудочек наполняется кровью из правого предсердия, чтобы при его сокращении выпустить содержимое в малый круг кровообращения. Вторично окислившаяся там кровь достигает левого предсердия и из левого желудочка поступает в большой круг кровообращения. Предсердие и желудочек разделены посредством атриовентрикулярных клапанов, регулирующих наполнение желудочка сердца. Правый клапан имеет три створки, поэтому его называют трехстворчатый клапан сердца. Левый малый клапан имеет две створки и называется митральный

(двустворчатый) клапан сердца. Створчатые клапаны способствуют тому, что предсердия могут наполняться кровью в периоды между сердечными ударами и препятствуют противотоку крови во время сокращения желудочков. Нагнетательный клапан предотвращает обратный ток крови из аорты в левый желудочек во время расслабления желудочка.

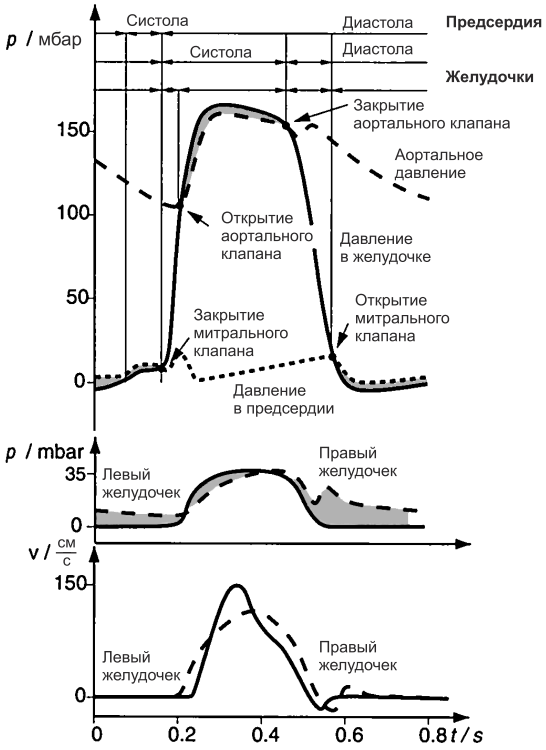


Рис. 12.6. Ход кривой давления в аорте, в левом желудочке и предсердии во время сердечного цикла. Скорость в левом и правом желудочках

Желудочки во время сердечного цикла совершают периодическое сокращение и расслабление. Этот нагнетательный цикл происходит с изменением давления в желудочках и артериях. На рисунке 12.6 представлена кривая давления в левой камере сердца. Весь цикл можно разделить на четыре фазы. Изоволюметрическое сокращение желудочка называют фазой

наполнения (1) и фазой напряжения (2), изоволюметрическое расслабление желудочка — фазой изгнания (3) и фазой расслабления (4). Фазы сокращения желудочка (2) и (3) обозначают как систола, а фазы расслабления желудочка (4) и (1) — как диастола. Наполнение желудочка происходит во время фазы (4). При этом давление в левом предсердии немного выше, чем в левом желудочке. Поэтому митральный клапан открыт и кровь течет из легочной вены в предсердие и далее в левый желудочек. Как только объем наполнения увеличивается и желудочек растягивается (расширяется), так возрастает давление в желудочке. Давление в аорте значительно выше, так что артериальный клапан остается закрытым. Давление в артериях во время запирающейся диастолы непрерывно опускается соответственно оттоку крови в артериальную сосудистую систему. Фаза пассивного наполнения заканчивается при сокращении предсердия. С момента начала сокращения желудочка давление в нем превышает давление в предсердии, вследствие чего закрывается бикуспидальный (малый) клапан. Желудочек при закрытом клапане сокращается на постоянный объем крови. Во время этого давление в желудочке повышается на 166 мбар, а спад давления в артериях продолжается. Аортальный клапан открывается, когда давление в желудочке поднимается выше давления в аорте. Теперь в аорту нагнетается кровь. Во время нагнетания в аорту крови из левого желудочка, давление в ней повышается с минимального значения 107 мбар до максимального значения 160 мбар. После того как началось расслабление желудочка, давление в нем падает ниже артериального, благодаря чему закрываются аортальный и нагнетательный клапаны. Наступает фаза изоволюметрического расслабления. Эта первая фаза диастолы длится до тех пор, пока давление в желудочке не снизится до давления в предсердии. Теперь открывается малый клапан и сердечный цикл начинается заново со следующей фазы наполнения.

Диаграмма давление-объем на рисунке 12.7 показывает наполнение левого желудочка (1) вдоль кривой растяжения в состоянии покоя, изоволюметрическое сокращение (2), а также изгнание крови (3) и изоволюметрическое расслабление (релаксация). Замкнутая, направленная по кругу поверхность представляет систолически совершаемую работу левого желудочка сердца. Под нагрузкой рабочая диаграмма смещается вдоль кривой растяжения к большему объему и более высокому давлению желудочка. Увеличение наполнения сердца приводит к повышению работы сердца. При повышенном артериальном давлении аортальный клапан открывается позже, так что фаза изоволюметрического сокращения достигает более высокого давления.

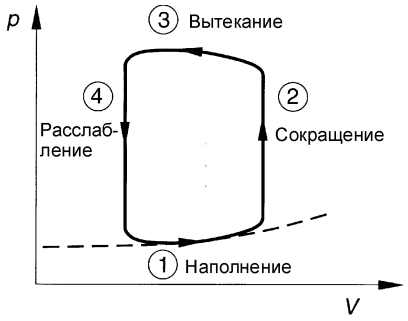


Рис. 12.7. Диаграмма давление-объем в левом желудочке во время сердечного цикла

Кровообращение можно разделить на три главные составляющие: систему распределения крови, состоящую из аорты, большие и маленькие артерии и артериолы (рис. 12.8). Они разветвляются далее на капилляры, в которых посредством микроциркуляции через диффузию осуществляется газообмен и обмен веществ. Обратный ток крови происходит через венолы, маленькие и большие вены и полую вену.

Среднее кровяное давление при освобождении левого желудочка составляет приблизительно 133 мбар. Оно спадает до 13 мбар при возвращении крови в правый желудочек. На рисунке 12.9 представлены среднее распределение давления, а также колебания давления в различных артериальных областях. Благодаря упругим свойствам аорты давление колеблется между 120 и 160 мбар около среднего значения. В крупных артериях амплитуда пульсации (колебаний) возрастает прежде всего вследствие отражения волн, чтобы в области артериол на расстоянии в несколько миллиметров резко снизиться до среднего значения 40 мбар. Падение давления в капиллярах и венах продолжается более плавно. Наконец, при обратном переносе крови в правый желудочек давление остается на уровне 13 мбар. В крупных венах и в полой вене отсутствуют пульсации и достойные упоминания перепады давления. Одновременно встречаются волны давления, возникающие из-за пульсации правого желудочка и двигающиеся против направления течения крови. Систолическое давление в нагнетательных артериях, составляющее приблизительно 20 мбар, незначительно, потому не рассматривается. Для преодоления сопротивления течения в сосудах легкого необходимы перепады давления лишь с 13 до 7 мбар.

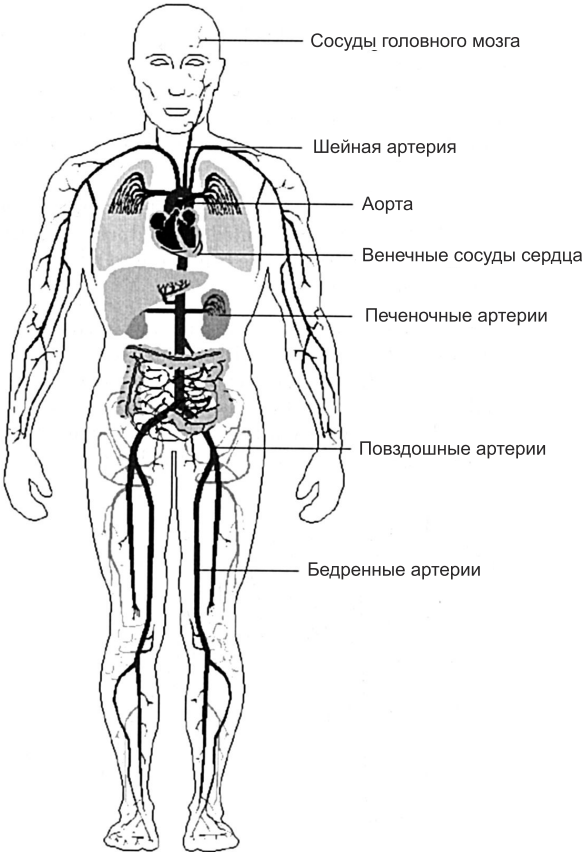


Рис. 12.8. Схематичное изображение аорты и артериальных ветвлений

В связи с этим давление наполнения с 13 до 7 мбар остается для левого желудочка.

Аорта и крупные артерии благодаря их эластичности действуют в качестве так называемых объемных резервуаров. Вследствие этого уменьшается компонента ускорения импульса крови и сохраняется более высокий уровень давления во время диастолы и систолы. Поэтому истечение потока в артериальные ветвления становится равномернее.

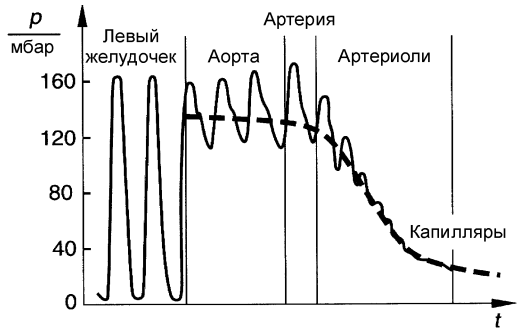


Рис. 12.9. Распределение давления в артериальном кровообращении

Форма волны импульса давления и импульса скорости в артериальных ветвлениях изображена на рисунке 12.10. Во время между каждым сердечным импульсом артерии сужаются примерно на 5% и поэтому поддерживают течение крови. Импульс давления в артериях так же положителен во время диастолы сердца. В крупных артериях, напротив, кратковременно возникает обратное течение. Прохождение скорости течения через ноль происходит при закрытии аортального клапана. Амплитуда импульса потока уменьшается при увеличении артериальных ветвлений и длительность импульса растет, во время чего возникает незначительный противопоток. Поступательное движение импульса давления по артериальным ветвлениям прежде всего связано с ростом амплитуды давления, которая вызывает уменьшение упругости артериальных стенок. Профиль потока в разветвленных артериях будет более равномерным.

Образованные по средней скорости числа Рейнольдса составляют для аорты 3400, для крупных артерий 500, для артериол 0,7, в капиллярах $2 \cdot 10^{-3}$, в венолах 0,01, в крупных венах 140 и в полой вене 3300. Благодаря описанным во введении неустойчивым потокам и вторичным течениям, в изогнутых сосудах устанавливается переходное ламинарное течение в ветвлениях сосудов. Переход к турбулентному потоку происходит кратковременно в точках перегиба профиля скоростей вблизи артериальной стенки.

12.1.3. Реология крови

Кровь состоит из плазмы крови и взвешенных в ней красных кровяных телец (эритроцитов), белых кровяных телец (лейкоцитов) и кровяных пла-

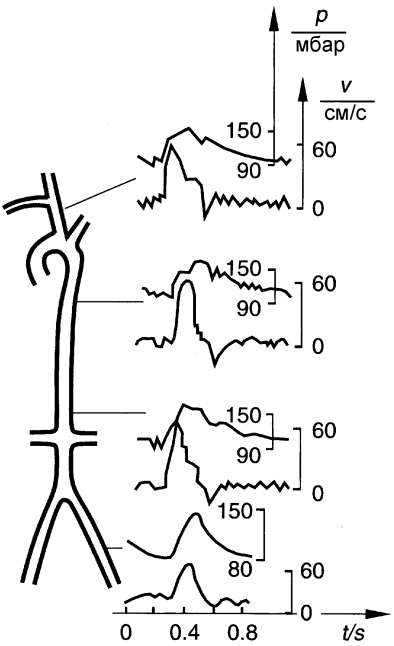


Рис. 12.10. Волны давления и скорости в артериальных ветвлениях, Миллс 1970

стинок (тромбоцитов). Плазма крови — это жидкий носитель, состоящий на 90% из воды, протеинов, антител и фибриногенов. Кровь выполняет задачу обеспечивать снабжение клеток тела питательными веществами, дыхательными газами, минералами, ферментами, гормонами, продуктами обмена веществ, водой и теплом и устранения отходов (шлаков) из них. Она служит транспортной системой для кровяных телец, гарантирующих иммунные реакции тела и защиту системы кровообращения от повреждений. У мужчины объем крови в среднем составляет 5 литров, а у женщины — 4 литра. Из общего объема 84% отделяются в большой круг кровообращения, по существу в вены, и только 9% в малый круг кровообращения и 7% — в сердце.

Для потока в сердце и в кровообращении вообще особое значение имеет текучесть крови. В особенности важно установить, в какой области потока и при каких долях сдвига следует учитывать ньютоновские свойства плазмы крови или неньютоновские свойства взвеси. Они определяют сопро-

тивление крови в кровообращении, которое должно быть скомпенсировано посредством энергии нагнетания.

О вязкости крови следует говорить, если взвесь выступает в качестве однородной (гомогенной) жидкости. Последнее относится к крови в больших сосудах. В маленьких же сосудах, а особенно в капиллярах, следует рассматривать в качестве неоднородности (негомогенности) эластичные эритроциты с диаметром 8 мкм.

Если плазму крови в хорошем приближении можно рассматривать как жидкость, то кровь в целом — это псевдоэластичная тиксотропная суспензия. Вязкость суспензии зависит от относительного объема всех взвешенных частичек. Эритроциты занимают большую объемную долю всех частиц (99%) и 40−45% объемной доли крови (значение гематокрита). Тромбоциты и лецкоциты занимают менее 1% объемной доли и не влияют на реологию крови.

На рисунке 12.11 представлен характер вязкости μ в зависимости от скорости деформации сдвига $\gamma^{\cdot}$. Для потока в сосуде скорость сдвига $\gamma^{\cdot} = \partial u / \partial r$. В ветвлениях сосудов или в аорте или в желудочках для $\gamma^{\cdot}$ следует выбрать доминирующие составляющие тензора скоростей деформации. Следует констатировать уменьшение вязкости в широком спектре изменяющихся градиентов скорости на два порядка. Спектр градиентов скорости в здоровом кровообращении варьируется между 8000 $с^{-1}$ (артериоли)и 100 $с^{-1}$ (полая вена). И так он находится в асимптотической области вблизи постоянной вязкости. В области очень высоких градиентов скорости и поэтому очень значительных касательных напряжений возникает деформация эритроцитов, оказывающих в свою очередь влияние на вязкость кровяной взвеси (суспензии). При касательных напряжениях более 50 n/m^2 эритроциты начинают веретенообразно вытягиваться.

При скорости сдвига меньше 1, как она встречается в области противотечения больного кровообращения, происходит аггрегация эритроцитов. При этом клетки располагаются плотно друг к другу и образуют связные клеточные штапели, сцепляющиеся между собой.

Зависимость касательного напряжения крови (напряжения сдвига) τ от скорости сдвига $\gamma^{\cdot}$ с хорошим приближением можно описывать с помощью уравнения Кессона (Casson)

$$\sqrt{\tau} = K \cdot \sqrt{\gamma^{\cdot}} + \sqrt{C} \qquad (12.1)$$

где K — вязкость крови по Кессону и C — напряжение деформации. Между тем, согласование с экспериментальными результатами приводит к следую-

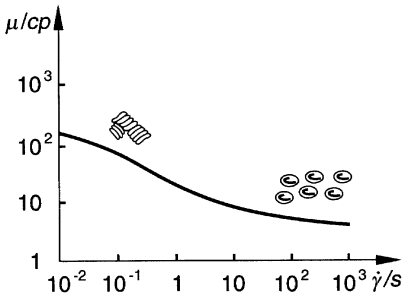


Рис. 12.11. Вязкость крови μ в зависимости от доли сдвига $\dot{\gamma}$

щему уравнению:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\mu_p}} = 1,53 \cdot \sqrt{\dot{\gamma}} + 2 \qquad (12.2)$$

при вязкости крови $\mu_p = 0,012p$. При доле сдвига более 100 кровь ведет себя как ньютоновская среда.

Неньютоновские свойства крови при прохождении сосудов приводят к уменьшению эритроцитов вблизи стенок сосуда и, как следствие, к снижению вязкости, что изменяет профиль скорости крови вблизи стенок, а поэтому также и ее сопротивление. Сепарация вблизи стенки вызывает появление бесклеточной зоны плазмы, которую можно рассчитать посредством вязкости плазмы μ_p. Для устойчивого потока Пуазейля это приводит к профилю скорости, который уже описан рисунком 4.100.

12.2. Течение в сердце

В этой главе, после рассмотрения функций сердца в кровообращении тела (гл. 12.2.1), будут описаны физиология и анатомия человеческого сердца под воздействием электрического возбуждения, электромеханической связи и, в частности, пульсирующего трехмерного течения.

12.2.1. Физиология и анатомия сердца

На рисунке 12.12 показано внутреннее строение сердца, как оно представлено в медицинских учебниках по физиологии. Левое и правое предсердия сердца отделены друг от друга межпредсердной перегородкой. Меж-

желудочковая перегородка разделяет оба желудочка сердца. Мускульную стенку сердца называют миокардом. Изнутри он покрыт эндокардом, а снаружи — эпикардом. Сердце расположено в перикарде — мешочке из соединительной ткани. Три группы мышечных волокон заворачиваются, как показано на рисунке 12.13, вокруг обоих желудочков, а другая группа мышечных волокон обвивается только вокруг левого желудочка. Волокна сердечных мышц располагаются в сердце скорее тангенциально чем радиально. Так как электрическое сопротивление вдоль мышечных волокон меньше, то это расположение влияет на электрическое возбуждение сердечной мускулатуры.

Наполнение правого и левого желудочков кровью из предсердий регулируется с помощью двустворчатого клапана с двумя створками (митральный клапан) и трехстворчатого клапана с тремя створками. Створки клапана очень тонкие, поэтому к началу сокращения желудочка они быстро закрываются.

Они поддерживаются сухожилиями, которые вместе с сосочковой мышцей предотвращают выворот клапана при высоком давлении. Во время релаксации желудочков клапан легочной артерии препятствует обратному току крови из легочных артерий, а аортный клапан — обратному току из аорты. Оба клапана состоят из трех соединительнотканных карманов-сумок. Они, вследствие высокого давления, которому подвергаются клапаны кармана во время длительного биения сердца, выполнены более надежно, чем створчатые клапаны. Механическое сокращение сердечных мышц регулируется периодическим электрическим возбуждением. Оно начинается с возбуждения синусового узла (рис. 12.14), который проходит фазы циклической электрической поляризации и деполяризации.

Он берет на себе первичные функции электростимулятора. Во время фазы деполяризации разряжение идет по проводящим путям со скоростью 1 м/с в окружающие мышцы предсердия, которые затем сокращаются. Электрический сигнал синусового узла замедляется в желудочковом узле. Это замедление позволяет желудочкам полностью наполниться кровью во время сокращения предсердий. По гис-нервным волокнам и ножке желудочка возбуждение со скоростью 1-4 м/с через 110 мсек попадает в мышцы желудочка. Гис-пучки разделяются в направление желудочка на левую и правую ножки желудочка. Оба разветвляются на волокна Пуркинье, которые проходят под эпикардом к соответствующим желудочкам. Они идут сначала через перегородку в направление верхушки сердца и оттуда вдоль стенок желудочка к основанию сердца. С началом сокращения желудочка из-за замедления

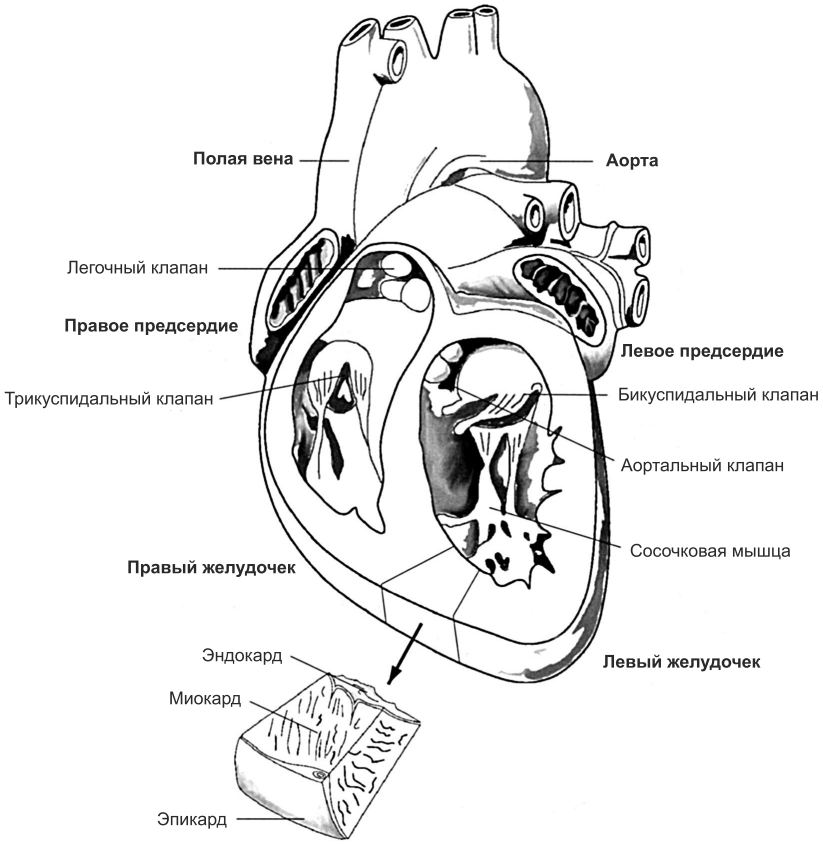


Рис. 12.12. Внутренний вид сердца

проводимости в узле желудочка заканчивается сокращение предсердия. При этом все нервные клетки могут спонтанно деполяризироваться в системе проводящей возбуждение за исключением образующих возбуждение клеток в синусовом и желудочковом узлах. Деполяризация желудочков, показанная на электрокардиограмме на рис. 12.15 продолжается менее чем 0,1 сек.

Нервные клетки и гормональное влияние вне сердца вызывают электрическое возбуждение и обуславливают разные частоты биения сердца. Они модифицируют электропроводимость и этим самым скорость депо-

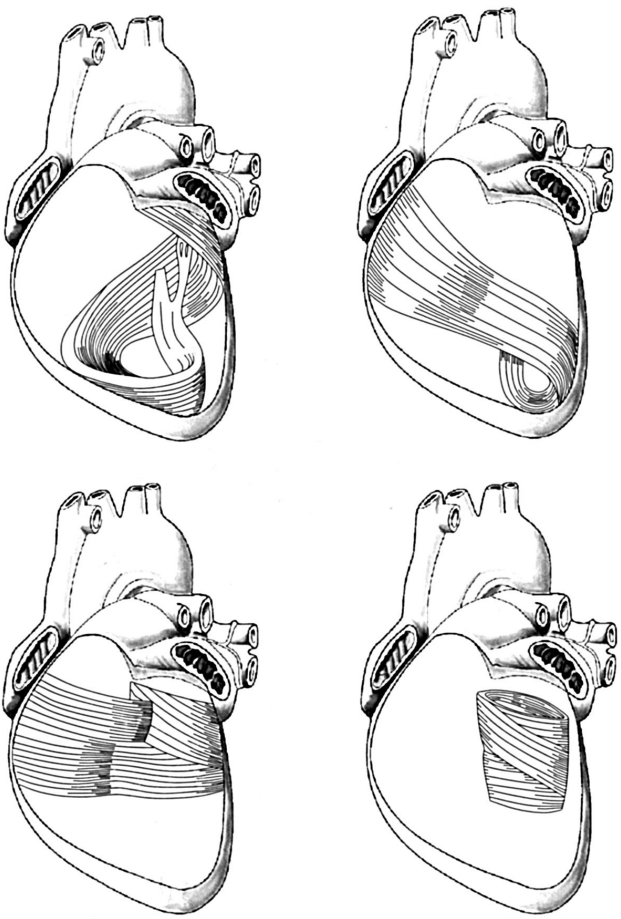


Рис. 12.13. Расположение кардиальных мышечных волокон

ляризационной волны, идущей через сердце. Цикл деполяризации и поляризации производит маленький потенциал, который может приниматься поверхностью тела. Типичная электрокардиограмма (ЭКГ) представлена на рис. 12.15. Деполяризация предсердий вызывает небольшую волну, так называемую Р-волну. Через промежуток примерно 0,2 сек за ней следует более сильная волна, вызванная деполяризацией обоих желудочков (QES). Затем

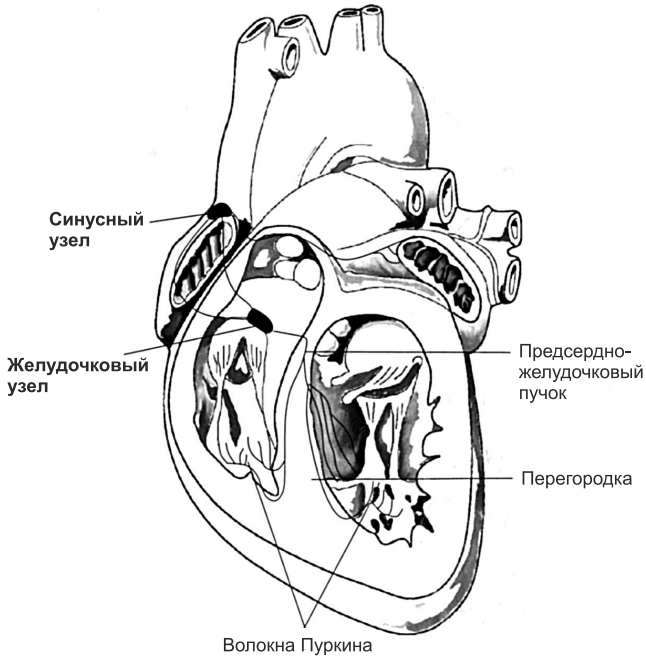


Рис. 12.14. Проводящая система электровозбуждений сердца

следует Т-волна, которая возникает при новой поляризации желудочков. Расположение электрических потенциалов согласно механическому течению процесса и давлению в левом желудочке сердца показано на рис. 12.15.

При закрытии митрального клапана повышается давление в левом желудочке. Это связано со звуковой волной, которая воспринимается как первый сердечный тон. В результате этого начинается систола, т. е. процесс сокращения желудочка.

12.2.2. Структура сердца

Для расчета течения в сердце используют моделирование геометрии желудочков и сердечных клапанов в течение сердечного цикла. Для этого существуют методы структурной механики.

Упрощенная модель движения желудочка (или изменения формы) в го-

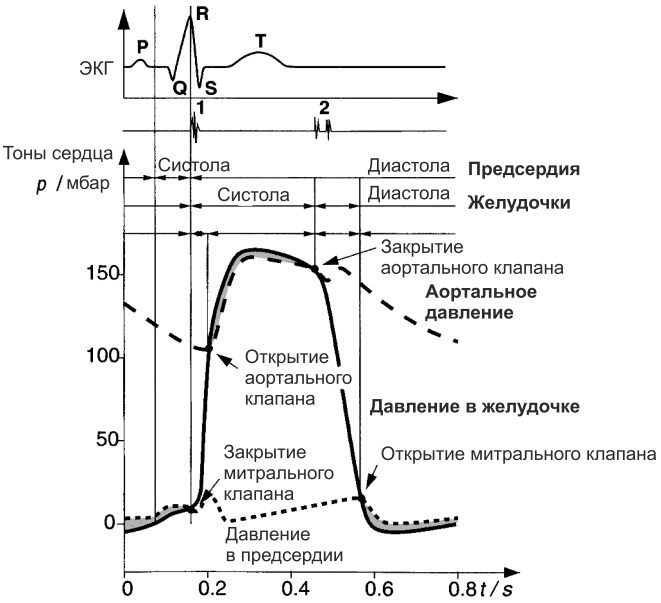


Рис. 12.15. ЭКГ и изменение давления в левом желудочке

ризонтальном разрезе показана на рис. 12.16. Во время фазы сокращения митральный и трехстворчатый клапаны закрыты, а клапан артерии и аорты открыт. Волокна мышц обоих желудочков сокращаются. Левый желудочек качает обогащенную кислородом кровь в аорту, а правый желудочек качает бедную кислородом кровь в легкие. Давление в левом желудочке много больше, чем в правом (рис. 12.16). Поэтому левый желудочек во время фазы сокращения имеет поперечное сечение, похожее на эллипс, а правый желудочек располагается вокруг левого.

Движение (сокращение) стенок желудочка происходит в основном радиально. Оно, вследствие высокого давления в левом желудочке, больше, чем в правом. Радиальное движение сопровождается укорачиванием сердца в продольном направлении. Вследствие расположения части мышечных волокон в форме спирали (рис. 12.13) продольное движение наслаивается на вращательное движение. Вследствие этого расщепление касательного напряжения в желудочках является негомогенным и неизотропным.

На рис. 12.17 представлено изменение внешней геометрии левого желудочка во время сердечного цикла. Толщина сердечной стенки при этом составляет в диастоле 20–30% внешнего радиуса. Во время систолы толщина примерно на 10% толще.

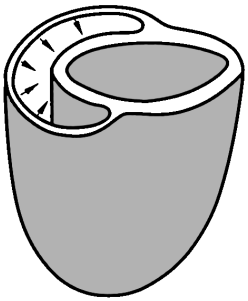


Рис. 12.16. Формы сокращения желудочков

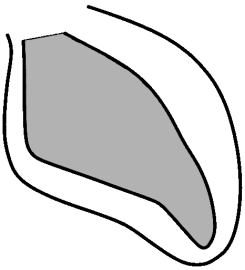


Рис. 12.17. Геометрия левого желудочка в конце диастолы и систолы

Основой математического представления движения желудочка является уравнение движения механики деформированного твердого тела, которое решается методом конечных элементов численным способом. Для вектора деформации $u = (u_1, u_2, u_3)$ получим

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \tag{12.3}$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, F_i — внешняя сила. σ_{ij} можно представить для упругого тела с предположением о малости деформации как линейную функцию тензора деформаций e_{kl}:

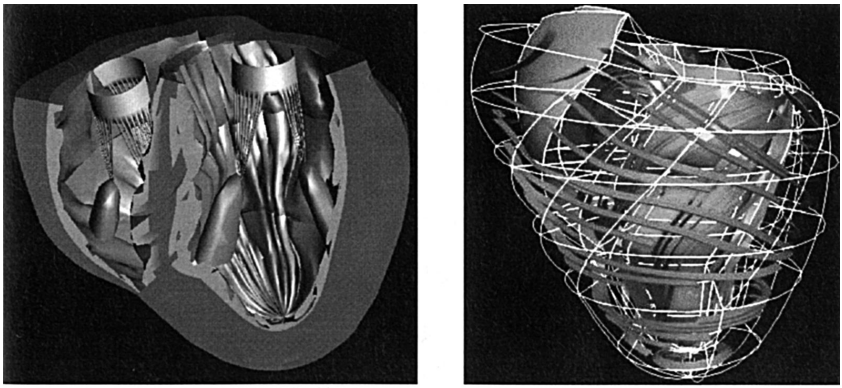
$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot e_{kl}. \tag{12.4}$$

где c_{ijkl} — тензор упругих постоянных, который для сердца нужно определить.

Для биологических тел, включая тело сердца и тело кровяных сосудов, тензор напряжений можно установить способом квазилинейных приближений. Вследствие чего можно определить эластичное отношение каждой точки тела относительно основного (главного) состояния. Подробности определения тензора представлены в книге Фунга 1990.

Для упругого биологического тела, которое подвергается конечной деформации $u_i = x_i - a_i$ (a_i координаты перед и x_i — после деформации), существует функция энергетического расширения $\rho_0 \cdot W \cdot (E_{11}, E_{12}, \dots)$. Через нее определяется тензор напряжений Кирхгофа S_{ij}:

$$S_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 \cdot W)}{\partial E_{ij}}, \tag{12.5}$$



Желудочек Мышечные волокна

Рис. 12.18. Моделирование конечными элементами структуры сердца J. P. Hunter 2001.

При расширении Грина (Greenschen)

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j} \right). \tag{12.6}$$

Тензор напряжений Кирхгофа S_{ij} можно с помощью следующего уравнения представить через тензор напряжений Коши σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(S_{ij} \cdot \left(\delta_{i\beta} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial a_\alpha} + \delta_{j\alpha} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial a_\beta} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial a_\alpha} \right) \cdot S_{\alpha\beta} \right). \tag{12.7}$$

где ρ, ρ_0 — плотность материала в деформированном и начальном состоянии. Для сердца можно использовать упрощенную энергетическую функ-

цию расширения по Фунгу 1993.

$$\rho_0 \cdot W = \frac{c}{2} \cdot (e^Q - Q - 1) + \frac{q}{2}, \tag{12.8}$$

где c — постоянная, а q, Q — квадратичная форма расширения Грина с материальными постоянными $a_1, \ldots, a_9, b_1, \ldots, b_9$

$$Q = a_1 \cdot E_{11}^2 + a_2 \cdot E_{22}^2 + a_3 \cdot E_{33}^2 + 2 \cdot a_4 \cdot E_{11} \cdot E_{22} + 2 \cdot a_5 \cdot E_{22} \cdot E_{33} + \\ + 2 \cdot a_6 \cdot E_{33} \cdot E_{11} + a_7 \cdot E_{12}^2 + a_8 \cdot E_{23}^2 + a_9 \cdot E_{31}^2,$$

$$\dot{q} = b_1 \cdot E_{11}^2 + b_2 \cdot E_{22}^2 + b_3 \cdot E_{33}^2 + 2 \cdot b_4 \cdot E_{11} \cdot E_{22} + 2 \cdot b_5 \cdot E_{22} \cdot E_{33} + \\ + 2 \cdot b_6 \cdot E_{33} \cdot E_{11} + b_7 \cdot E_{12}^2 + b_8 \cdot E_{23}^2 + b_9 \cdot E_{31}^2,$$

величины $c, b_1, \ldots, b_9$ измеряются единицами напряжения, $a_1, \ldots, a_9$ — безразмерны.

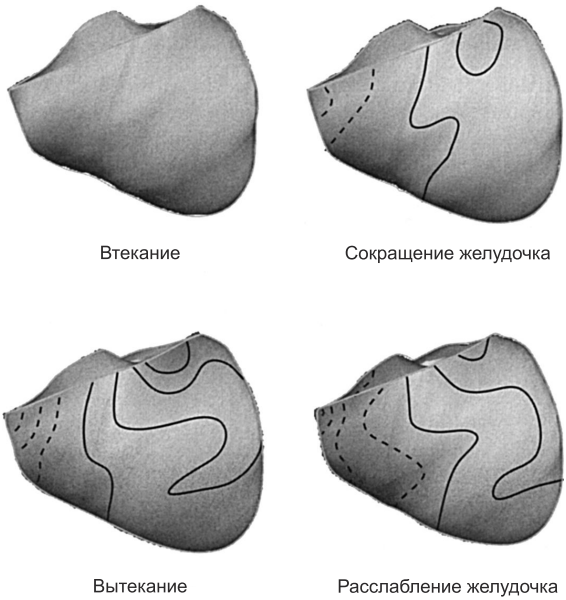


Рис. 12.19. Распределение напряжения мышечных волокон на поверхности сердца. J. P. Hunter 2001

Опубликовано много моделей сердца. Смайл и Хунтер 1991 использовали для своих модельных расчетов упрощенный подход к энергетической функции расширения:

$$W = c_1 \cdot (e^{Q_1} - 1) + c_4 \cdot (e^{Q_2} - 1), \tag{12.9}$$

где

$$Q_1 = c_2 \cdot E_{11}^2 + c_3 \cdot (E_{12}^2 + E_{13}^2),$$
$$Q_2 = c_5 \cdot (E_{22} + E_{33})^2 + c_6 \cdot (E_{22} \cdot E_{33} + E_{23}^2).$$

Оставшиеся постоянные можно определить с помощью медицинских данных для сердца, например, ЭКГ или магнитного резонанса, а также механических измерений (проб) ткани. Подход (12.9) действителен для поперечной изотропии, причем x_1 ориентирован вдоль мышечных волокон. Причем зависимость от времени и вследствие этого переменность упругих постоянных для биологических материалов не учитывались.

Рис. 12.18 показывает конечно-элементную модель элемента сердечного желудочка в разрезе, а также ориентировку мышечных волокон. Эта модель была разработана Хунтером (Hunter) 1991 на основе теории упругости. Измерения напряжения в мышечных волокнах показали, что силы мышечных волокон ведут себя скорее ортогонально, чем поперечно изотропно.

С помощью разработанной модели энергетической функции расширения (12.9) было рассчитано численным способом распределение напряжения на поверхности сердца методом конечных элементов (рис. 12.19). Изолиниями показаны области высокого и малого напряжения мышечных волокон для отдельных фаз сердечного цикла. Сплошные линии показывают высокое напряжение, а штрихи — компрессионное напряжение. Сначала мышца сердца расслабляется и появляется небольшое напряжение. Течение компрессионного напряжения, исходящего от предсердий во время фазы наполнения ясно видно. Далее, во время фазы выталкивания напряжение идет через желудочки.

12.2.3. Физиология возбуждения сердца

Дополняя описание электрофизиологии сердца в главе 12.2.1 на рис. 12.20 представлены формы волн в отдельных областях сердца. Причем потенциал U был измерен микроэлектродами внутри и снаружи мышечных клеток.

К началу электрического возбуждения (0) мышечные клетки сердца деполяризуются и разница потенциалов через клеточные мембраны повышается с -90 мВ до $+20$ мВ (1). Причиной деполяризации является открытие ионных каналов в клеточной мембране. Активизация деполяризации происходит в течение 1 мс. Механическое сокращение мышечных клеток K происходит замедленно по времени. Затем следует быстрый спад активизации и начинается реполяризация. Она замедляется в фазе (2), чтобы устремиться через спад (3) к первоначальному значению. В этой фазе потенциал действия инициируется в мышцу и максимум сокращения мышцы достигается в фазе (3). Реполяризация происходит в течение 0,3 сек, а время пульса — в течение деполяризации 1 мс.

Электрохимические исследования мышечных клеток сердца показывают, что различные области потенциала действия с ионными каналами натрия Na^+ и калия K^+ объединены в клетке. Ионы кальция Ca^{2+} в клеточных мембранах вызывают возбуждение сокращения в мышечных клетках, так как форма потенциалов действия влияют на поведение сокращения мышечных клеток в разных участках сердца.

Деполяризационная волна идет от эндокарда к эпикарду (рис. 12.12). Волна реполяризации движется в обратном направлении.

На рис. 12.21 показан пример распространения электрического возбуждения в продольном разрезе сердца. Активизация начинается от внутренней стенки сердца (белый) и продвигается радиально к эпикарду. В конце активизации фронт волны возбуждения распространяется нарастающе тангенциально.

Математическое моделирование волны деполяризации и ее распространение в мышечных клетках требует моделирования нелинейной связи модели возбуждения деполяризации с моделью распространения возбуждения. Распространение со скоростями от 0,03 (синусовый узел) и до 0,6 м/сек (предсердие и желудочек)можно рассчитать через систему отдельных соединенных клеток или как непрерывность.

Математическое представление распространения возбуждения в сердце описывается с помощью системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(u_1, \ldots, u_n) + D_i \cdot \Delta u_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12.10}$$

где $u_i - n$ количество переменных, $f_i(u_1, \ldots, u_n)$ — нелинейная функция возбуждения, $D_i \cdot \Delta u_i$ — дифференциальный оператор.

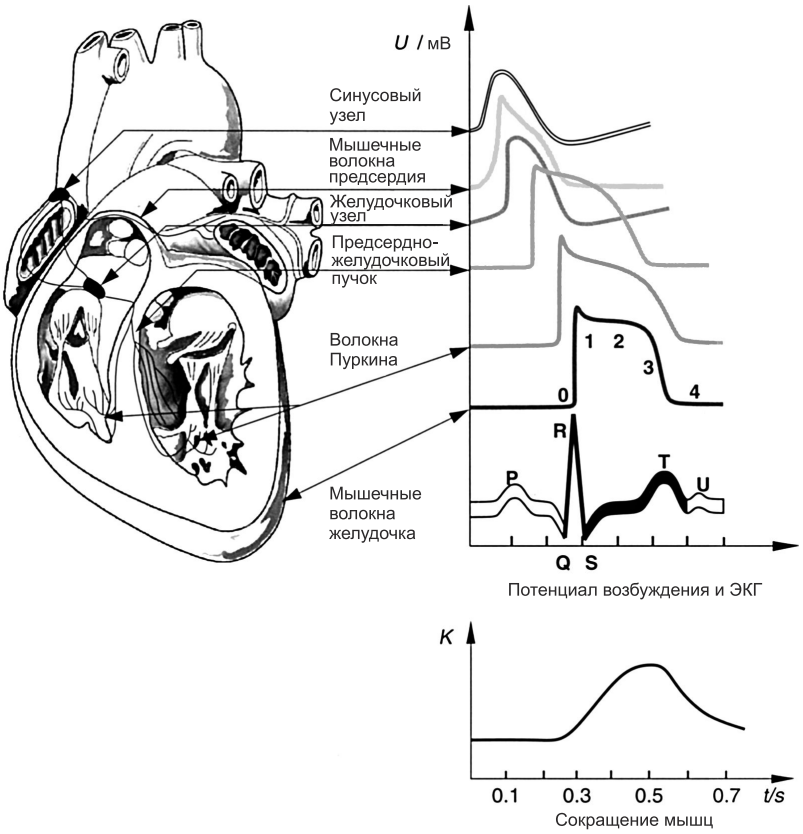


Рис. 12.20. Потенциалы возбуждения и сокращение мышц в сердце

Простая модель с двумя переменными выражается уравнениями Фитца–Хью–Нагумо:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{u_1 - \frac{u_1^3}{3} - u_2}{\varepsilon} + D_1 \cdot \Delta u_1, \qquad (12.11)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon \cdot (u_1 + \beta - \gamma \cdot u_2),$$

где параметры $0 < \beta < \sqrt{3}$ и $\varepsilon \ll 1$.

Для определения функции возбуждения f_i нужно найти соответствующее уравнение моделей потока ионов в отдельных мышечных клетках. Ряд таких уравнений представления, например, у А. Ф. Панфилова, А. Ф. Голдена 1997.

На рис. 12.22 показан результат моделирования распространения потенциала возбуждения по поверхности сердца. Согласно рис. 12.21 возбуждение передается от внутренней стенки наружу. На поверхности сердца оно проявляется большим потенциалом возбуждения (светлые области). Он идет от синусового узла (1) через оба предсердия (2) и возбуждает желудочки, а предсердия в это время снова реполяризуются (3). К концу сердечного цикла реполяризуются желудочки.

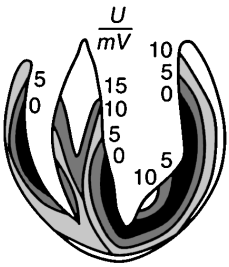


Рис. 12.21. Ход возбуждения в продольном разрезе сердца

12.2.4. Течение в сердце

Расчет несжимаемого потока в сердце осуществляется с помощью уравнения неразрывности (3.4), (5.2):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{12.12}$$

и уравнений Навье–Стокса для ламинарного и переходного течения (5.20):

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \right) = -\nabla \rho + \mu_{eff} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}. \tag{12.13}$$

F — это вектор силы, который выражает воздействие на поток от внутренних стенок сердца.

Неньютоновские свойства крови учитываются приближенно уравнением Гассона (12.1). Это дает формулу для эффективной вязкости:

$$\mu_{eff} = \frac{(K \cdot \sqrt{\dot{\gamma}} + \sqrt{C})^2}{\dot{\gamma}}, \tag{12.14}$$

с постоянными уравнения Гассона (12.1).

Сила F рассчитывается из распределения касательного напряжения внутри сердца, которая представлена в структурной программе главы 12.2.2. Другую формулу для расчета структурного соединения в потоке вывели C.S. Peskin, D.M. McQueen 1997. Они аппроксимировали мышечные волокна сердца и сердечные клапаны методом Лагранжа (глава 3.1) с дискретными эластичными нитями волокон, введенными в поток. Дискретизацию

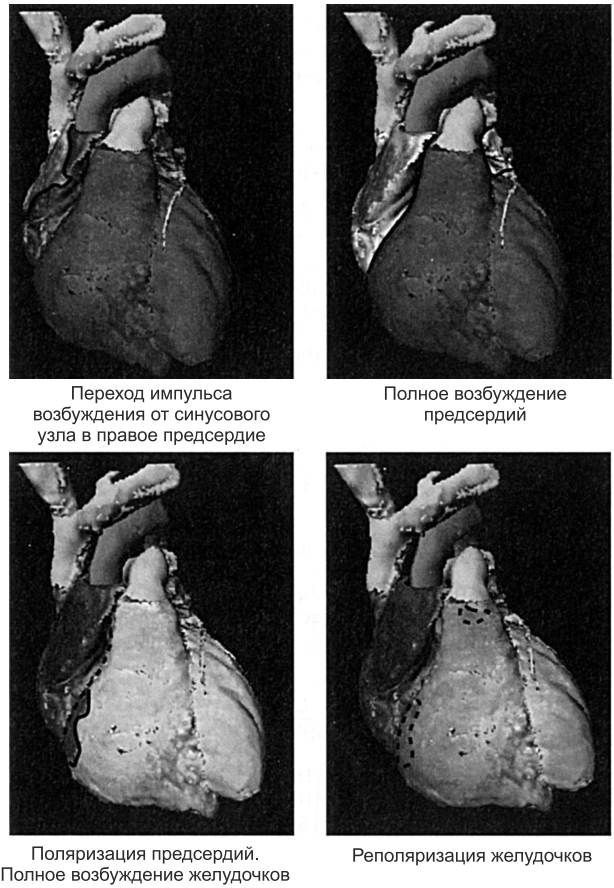


Рис. 12.22. Распределение электрического потенциала по поверхности сердца (Werner 2000)

эластичных нитей следует проводить так, чтобы у них не было объемной доли и массы, но чтобы их можно было использовать для непрерывного механического описания материала эластичной нити. Они ориентируются вдоль потока и принимают скорость v. В каждой точке слияния эластичная нить-поток имеет направление волокон, которое устанавливается единичным вектором e.

Сила F, которую оказывают эластичные волокна на поток, рассчитываются с помощью уравнений системы эластичное волокно-поток:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) = \int\limits_V \boldsymbol{f}(q,r,s,t)\cdot\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(q,r,s,t))\cdot dy\cdot dr\cdot ds. \tag{12.15}$$

где координаты волокон q, r, s, позиции эластичной нити в определенное время $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(q,r,s,t)$. Вектор $e = (\partial\boldsymbol{X}/\partial\boldsymbol{s}/(|\partial\boldsymbol{x}/\partial s|))$, V — объем интегрирования.

Связь с вектором скорости v дается:

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial t}(q,r,s,t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(q,r,s,t),t) = \int\limits_V \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(q,r,s,t))\cdot d\boldsymbol{x}. \tag{12.16}$$

При этом уравнения эластичных волокон будет:

$$\boldsymbol{f} = \frac{\partial(\tau\cdot\boldsymbol{e})}{\partial s}, \tag{12.17}$$

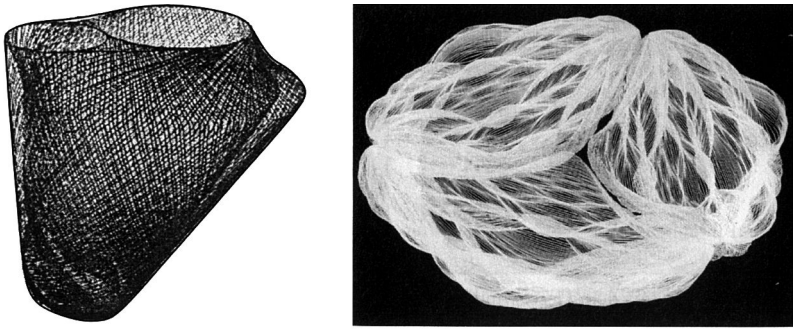
$$\tau = \sigma\cdot\left(\left|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial s}\right|, q,r,s,t\right). \tag{12.18}$$

Следует заметить, что уравнения для потока (12.12, 12.13) записаны в переменных Эйлера. $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3)$ — являются неподвижными декартовыми координатами. Рассчитываемые переменные — это вектор скорости $v(\boldsymbol{x}, z)$, давление $p(\boldsymbol{x}, t)$ и сила элементарных волокон $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$. Постоянные ρ и μ — это плотность и вязкость потока.

Уравнение эластичного волокна (12.17, 12.18) и его связь с течением (12.15, 12.16) представлены способом Лагранжа, при этом q, r, s — это зависящие от времени криволинейные координаты, которые устанавливают местоположение точек эластичных нитей — волокон. Неизвестными в системе уравнений (12.15, 12.16) являются конфигурация волокон $\boldsymbol{X}(q,r,s,t)$, натяжение волокон $\tau(q,r,s,t)$ и лагранжево представление силы волокна $\boldsymbol{f}(q,r,s,t)$. Уравнения (12.15, 12.16) объединяют переменные Лагранжа и Эйлера.

На рис. 12.23 представлена упрощенная модель волокон сердца, которая соответствует структурной модели, показанной на рис. 12.18. Это волокна внутреннего слоя левого желудочка, а так же три кармана аортного клапана.

На рис. 12.24, в дополнение к структуре рис. 12.19 и электрического возбуждения, данного на рис. 12.22, представлен рассчитанный поток. Это пунктирные линии частиц, переносимых потоком. Первый рисунок показывает процесс втекания потока в левый и правый желудочки при открытых митральном и трехстворчатом клапанах. В процессе наполнения образуется вихрь внизу митрального клапана. Частицы делают видимым течения в предсердиях и желудочках.



Левый желудочек Аортальный клапан

Рис. 12.23. Модель волокон внутренней стенки левого желудочка и аортного клапана. C. S. Peskin, D. M. McQueen 1994/1997

Во время сокращения желудочка закрываются митральный и трехстворчатый клапаны, поэтому остается только остаточное течение с малой скоростью, известное уже по рис. 1.11. В процессе вытекания аортальный и клапан легочной артерии открыты и в канале аорты и вены наблюдается реактивное течение с высокой скоростью. Во время релаксации желудочка сердечные клапаны закрыты и снова начинается процесс втекания.

12.2.5. Сердечные клапаны

Функционирование четырех сердечных клапанов уже было описано в главе 12.2.1. В этой главе рассматриваются соотношения для потоков в сердечных клапанах левого желудочка.

На рис. 12.25 показана анатомия митрального и аортального клапанов, управляемых давлением. У левого митрального клапана (двухстворчатого)

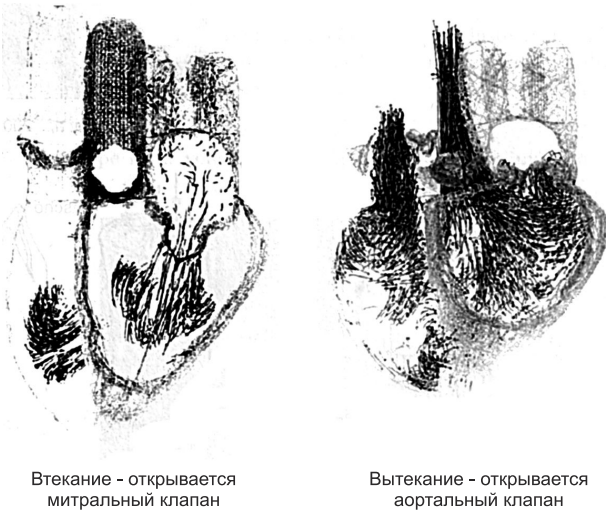


Рис. 12.24. Моделирование потоков в сердце, C. S. Peskin, D. M. McQueen 1997

есть 2 створки. Вследствие работы митрального клапана левое предсердие между ударами имеет возможность наполняться кровью, и в то же время препятствовать обратному току крови во время сокращения желудочков. Открытию митрального клапана во время фазы сокращения сердца при высоком давлении препятствуют сухожилия, ведущие к сосочковым мышцам.

Аортный клапан состоит из трех соединительных карманов (сумок), напоминающих форму полумесяца. Во время фазы релаксации он препятствует обратному току крови из аорты. Из-за высокого давления, которое испытывает аортальный клапан во время фазы сокращения, клапаны карманов функционируют значительно стабильнее, чем створки митрального клапана.

В открытом состоянии карманы аортального клапана, несмотря на высокое давление в аорте, не примыкают к луковице аорты. Углы карманов обтекаются и образуют между карманом клапана и луковицей аорты область возвратного течения, давление в которой препятствует смыканию и прилипанию.

На рис. 12.26 показана модель структуры митрального и аортального клапанов методом эластичных волокон, рассмотренная в предыдущей гла-

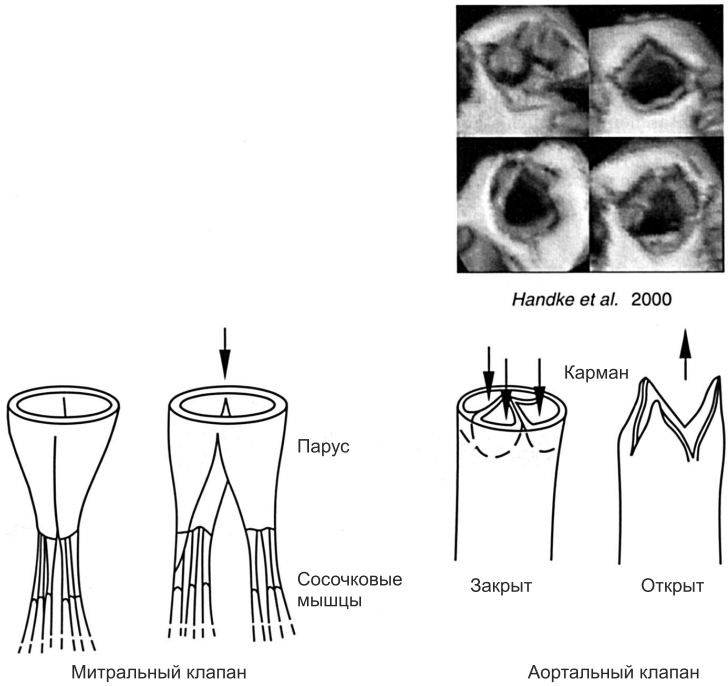


Рис. 12.25. Митральный и аортальный клапаны сердца.

ве 12.24. Стрелками представлены векторы скоростей втекания в диастоле сердца при открытом митральном клапане и вытекания во время систолы сердечного цикла при открытом аортальном клапане. По большей совокупности векторов скорости при протекании по открытому аортальному клапану опознают пульсирующий реактивный поток в направление аорты.

Заболевания сердечных клапанов могут привести к обратному току крови в желудочках или недостаточности сердечных клапанов к турбулентному реактивному потоку в левый желудочек или аорту. На рис. 12.27 показан пример стеноза аортного клапана. Из-за отложения извести на карманах клапанов получается неровный контур аортального клапана, который открывается не полностью.

Вытекание из левого желудочка ламинарно (светло-серая зона на рисунке), а внизу по ходу аортного клапана образуется турбулентный реактив-

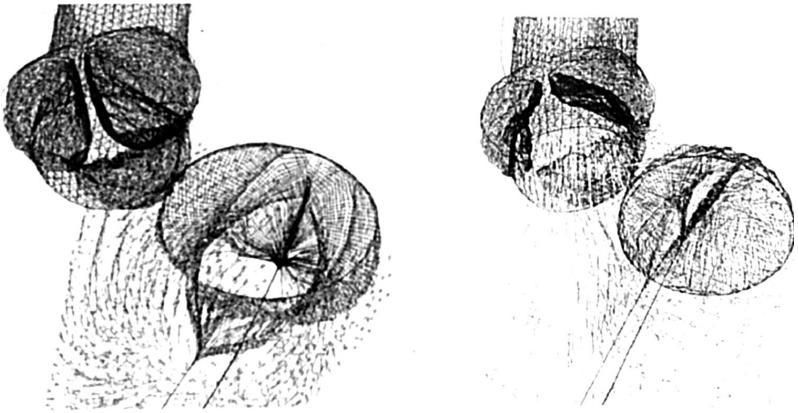


Рис. 12.26. Моделирование течения через митральный и аортальный клапаны методом элементарных волокон, C. S. Peskin, D. M. McQueen 1997

ные поток с повышенными потерями. Поток виден на двухцветном эхокардиографе в горизонтальном разрезе с помощью трехмерной реконструкции снимков.

В результате стеноза левый желудочек должен преодолеть повышенные потери давления. Со временем объем желудочка увеличивается и мышца сердца тоже увеличивается. При этом снабжение выросшей мышцы сердца кислородом возможно только в определенных границах, потому что сосуды сердца не увеличиваются.

Если аортный клапан закрывается не полностью, то это вызывает обратный ток в левом желудочке и вследствие этого повышенные потери.

Они компенсируются сердцем посредством увеличения объема и повышением часты сердцебиения.

При недостаточности митрального клапана высокое давление левого желудочка передается в предсердие. Это ведет к расширению левого предсердия и через легкое повышается нагрузка правого желудочка из-за увеличения минутного объема. Вследствие этого возникает повышенное давление в сосудистой системе легких.

В случае тяжелых заболеваний сердечного клапана когда, со временем они должны компенсироваться увеличением сердечной мышцы, для их устранения остается оперативное лечение (операция на сердце).

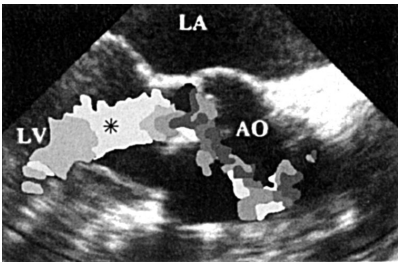


Рис. 12.27. Стеноз аортного клапана, ламинарный поток

Распространенным оперативным методом является имплантация искусственного сердечного клапана. В качестве искусственного аортного клапана долгое время использовали шаровидные или дискообразные клапаны. Они показывали пики давления и выраженные области обратного тока. Это вызывало в областях малых скоростей сдвига (рис. 12.11) агрегацию эритроцитов и, в следствие этого, образование тромбов. В областях высоких скоростей сдвига это приводило к деформации эритроцитов и к их разрушению.

Улучшили положение маятниковые клапаны (Бьорк–Шили), которые, однако, из-за износа ведущей скобы и шумов не оправдали себя. Дальнейшие разработки привели к маятниковым клапанам, разделенным на 2 части или три части, а также к естественным клапанам, пики давлений и области обратного тока в которых стало значительно меньше, но полностью устранить их все же не смогли. Будущее, предполагают, за гентехнически изготовленными естественными сердечными клапанами, потери тока крови в которых минимальны. На рис. 12.28 представлен маятниковый клапан, разделенный на две части и экспериментальная визуализация потока в сердечной камере высокого давления.

Визуализация течения в открытом аортном клапане выполнена с помощью лазера. Штрихи показывают области высоких скоростей и больших скоростей сдвига, а также области обратного тока. Если угол наклона клапанов в открытом состоянии слишком большой, то поток отрывается на переднем крае клапана и образуется обширная область обратного тока (рис. 6.11, глава 6.2.1), которая из-за неустойчивости сдвигового течения становится турбулентной (гл. 7.3.3) и имеет высокие потери. При оптимальном открытом угле предотвращаются отрыв потока на переднем крае, хотя

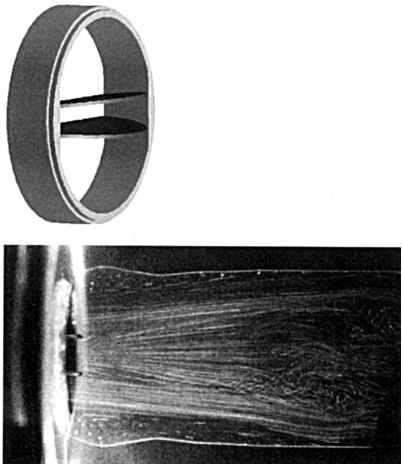


Рис. 12.28. Искусственный аортный клапан и экспериментальное моделирование потока, F. Хирт (Hirt) 1994

последующая неустойчивость (гл. 7.3.4) ведет к периодическому обратному току внизу по течению. Чтобы это предотвратить, нужно в области клапанов избегать появления неустойчивого течения.

12.3. Течение в кровеносных сосудах

Кровообращение человека уже рассматривалось в главе 12.1.2 и было представлено на рис. 12.1. Давление в разветвленных артериях, идущих от сердца изображено на рис. 12.10. Соотношение величин диаметров и толщин стенок артерий и вен даны на рис. 12.29. При биении пульса артерии расширяются, а толщина стенок уменьшается. Причем расширение на внутренней стенке больше чем на внешней. Отношение напряжение/деформация для стенок артерии (сосуда, вены) можно выразить экспоненциальной функцией. Напряжение на внутренней стенке из-за нелинейности этой кривой будет значительно больше.

В этой главе рассматриваются подробно соотношения потока в артериях, артериальных искривлениях и разветвлениях.

На рис. 12.30 показаны профили скорости образовавшегося артериаль-

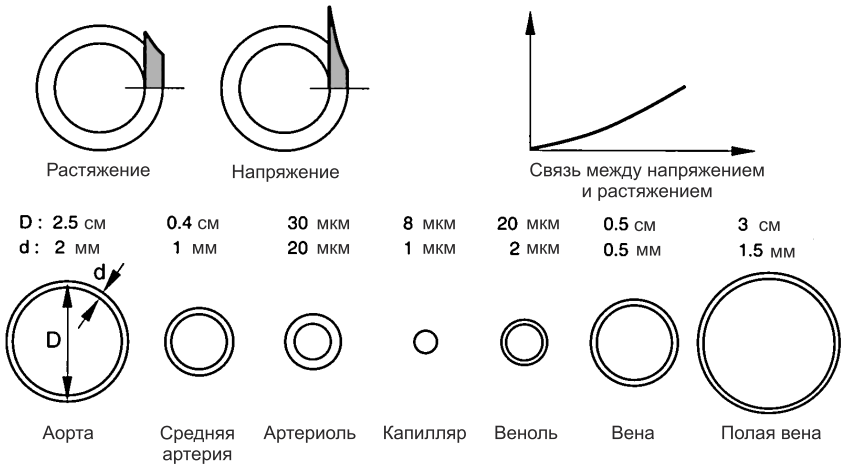


Рис. 12.29. Растяжение, напряжение, диаметры, толщины стенок артерий и вен

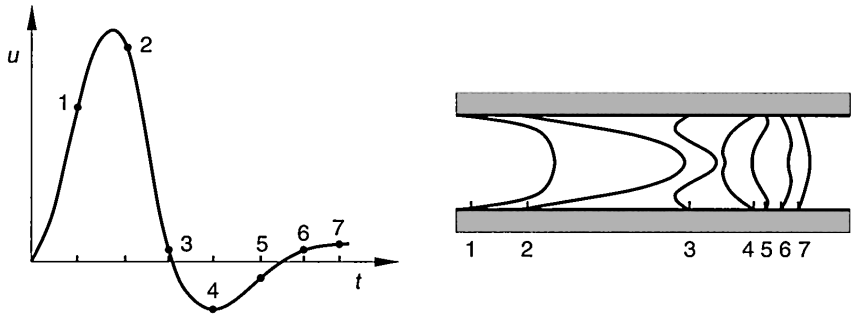


Рис. 12.30. Распространение скоростей волны в различные моменты времени и скоростные профили в средней артерии

ного потока в различные моменты времени, а также временное прохождение скоростной волны.

Периодичный импульс сердца вызывает в средних и малых артериях при числах Рейнольдса от нескольких сотен до тысячи ламинарный неустойчивый поток. В образовавшемся потоке, который не испытывает влияния

втекающего потока или артериального разветвления, для осредненного по времени скоростного профиля получается параболический профиль Пуазейля, описанный в главе 4.2.7. Поток в восходящей аорте превышает критическое число Рейнольдса, и происходит ламинарно-турбулентный переход во время релаксации сердца вблизи аортной стенки в профилях с поворотами. До того как в аорте образуются турбулентное течение, вторичный поток в изгибе аорты действует стабилизирующе и вызывает тем самым реламинаризацию потока.

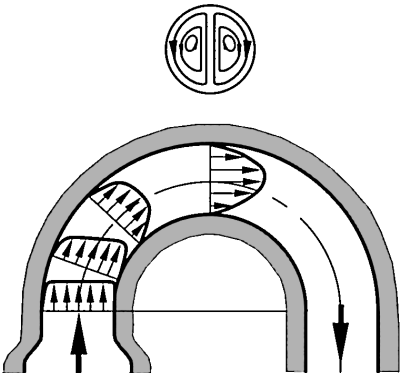


Рис. 12.31. Развитие профилей средних скоростей а также вторичный поток в аортной дуге (изгибе)

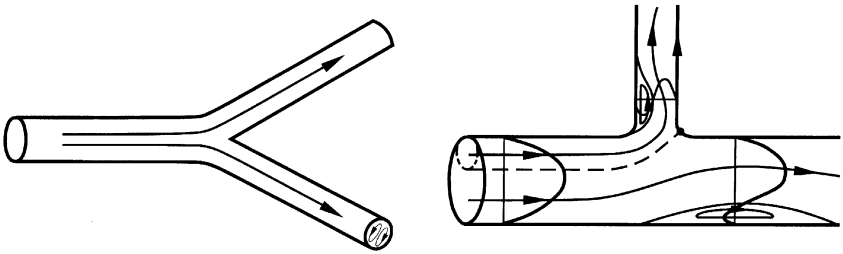


Рис. 12.32. Отрыв вторичного потока внизу по течению в разветвлениях артерий

На рис. 12.31 показаны средние скоростные профили в аортной дуге без учета артериальных ответвлений. В области втекания на внутренней и

внешней стенке аорты образуются сначала пограничные слои. Поскольку изгиб внутри больше чем внешний, то течение в пограничном слое из-за малого давления все больше ускоряется. Вследствие действия центробежной силы внизу по течению образуется вторичное течение, как оно уже рассматривалось в гл. 4.2.7. При этом по нормали к линиям тока возникает компонента (составляющая) скорости, следствием которой является два вторичных потока, вращающихся противоположно и наложенных на основной поток. А если наложить пульсирующий скоростной профиль, показанный на рис. 12.30, на средние профили в изогнутом участке аорты, то возникает сложный по структуре трехмерный вторичный поток с обратными токами в области стенок.

Подобные вторичные потоки появляются внизу по ходу артериальных разветвлений вследствие искривления линий тока в разветвлении (рис. 12.32). Картина общего поля течения зависит от соотношения диаметра артерий, геометрии отверстия, а так же от минутного объема потока. При вертикальных разветвлениях артерии наступает отрыв потока. На рис. 12.32 представлены линии отрыва и присоединения а также точка трможения. В области отрыва появляются на стенках малые скорости сдвига, а на противоположной стенке — высокие. Поток обрывается на внутренней стенке ответвления. Вследствие изгиба линий тока вторичный поток внизу по его течению снова возникает.

Если вследствие заболевания артерий выявляется стеноз артерии, то внизу по ходу сужения точно так же поток отрывается. Рис. 12.33 показывает средние скоростные профили и зоны отрыва внизу по ходу сужения артерии.

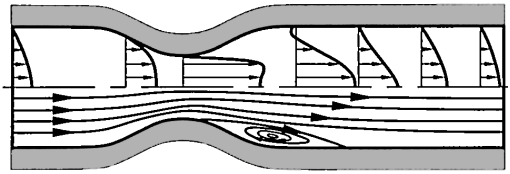


Рис. 12.33. Отрыв потока из-за стеноза артерии

В области сужения поток ускоряется. Следствием отрыва потока с соответствующими малыми скоростями деформации сдвига на стенке является замедление в начавшемся расширении артерии и связанное с этим повышение давления. В артериях с числами Рейнольдса меньше 100 ток крови по ответвлению идет без отрыва.

12.3.1. Нестационарное течение в сосудах

Для пульсирующего сосудистого течения ньютоновской жидкости существует точное решение уравнения Навье-Стокса. В цилиндрических координатах уравнение Навье-Стокса для осесимметричного потока будет:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), \tag{12.19}$$

где r — радиальная координата, R — радиус сосуда. Основное условие на стенке сосуда — $u(R,t) = 0$, а на оси трубы — $\partial u(0,t)/\partial r = 0$. Другим условием предполагается периодичность процесса по времени. Объемный расход потока — $\dot{V}(t)$. Его можно выразить рядом Фурье (Fourier):

$$\dot{V}(t) \sim -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = a_0 \cdot \sum_{\omega=1}^{\infty} (a_\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) = F(t). \tag{12.20}$$

Используя метод разделения переменных и полагая

$$u(r,t) = \sum_i g_i(t) \cdot f_i(r) \tag{12.21}$$

получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$f'' + \frac{1}{r} \cdot f' + \lambda^2 \cdot f = 0, \tag{12.22}$$

где $f(R) = 0, f'(0) = 0$ и

$$\dot{g} + \nu \cdot \lambda^2 \cdot g = c, \tag{12.23}$$

где $g(t)$ — периодическая функция времени, $F(t)$ — выражается через $f_i(r)$:

$$F(t) = \sum_i c_i(t) \cdot f_i(r). \tag{12.24}$$

Решение задачу Штурма–Лиувилля для (12.21) (задачи на собственные значения) представляется с помощью функций Бесселя нулевого порядка. Аналитическое решение задачи на собственные значения запишется так:

$$u(r,t) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \cdot \left(\frac{a_0}{\sigma_i} + \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{a_\omega}{\sigma_i^2 + \omega^2} \cdot (\sigma_i \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)) \right) \cdot I_0 \left(k_i \cdot \frac{r}{R} \right), \tag{12.25}$$

где собственное значение – это $\lambda_i = k_i/R - i, \sigma_i = r \cdot \lambda_i, q_i = 2/(k_i \cdot I_1(k_i))$. В простом случае периодического течения в трубе подставляют следующий градиент давления, зависящий от времени:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = a_\omega \cdot \cos(\omega \cdot t). \tag{12.26}$$

В качестве характерной скорости $U_{\max}$ берется максимальная скорость стационарного потока Гагена–Пуазейля на оси трубы (гл. 4.2.10)

$$U_{\max} = \frac{R^2 \cdot a_\omega}{4 \cdot \nu} = \frac{R^2}{4 \cdot \nu} \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right). \tag{12.27}$$

Решение рассматриваемой задачи будет представляться наложением стационарного течения Гагена–Пуазейля на периодически изменяющееся (колеблющееся) течение. Характерным коэффициентом для периодичной части решения является число Вомерслея W_0:

$$W_0 = k \cdot R = \sqrt{\frac{\omega}{r} \cdot R}, \tag{12.28}$$

$\omega = 2 \cdot \pi f$ с частотой сердцебиения f. $\sqrt{\omega/\nu}$ – это характерная толщина пограничного слоя. Таким образом, при очень малом W_0 и при небольших частотах устанавливается стационарное течение. Оно колеблется в равных фазах как вызывающее периодичное распределение давления. При числах Вомерслея порядка 30, что соответствует пульсирующему току крови, устанавливается пульсирующее течение, показанное на рис. 12.30. На рис. 12.34 представлено аналитическое решение для $W_0 = 27$. Во время фазы релаксации это вызывает моментные профили обратного тока, вопреки появившимся градиентам давления. Относительная скорость при этом является максимальной скоростью (11.27).

12.3.2. Непостоянное артериальное течение или непостоянный артериальный поток

При расчете потока в артериях следует учитывать эластичность артерии. В противоположность сердцу, у которого сокращение мышц вызывает поток в желудочках, расширения артерии происходит за счет импульса произведенного сердцем.

На рис. 12.35 представлены распространения волны давления и скорости в аорте и в нисходящих артериях. Отраженные волны в артериальных

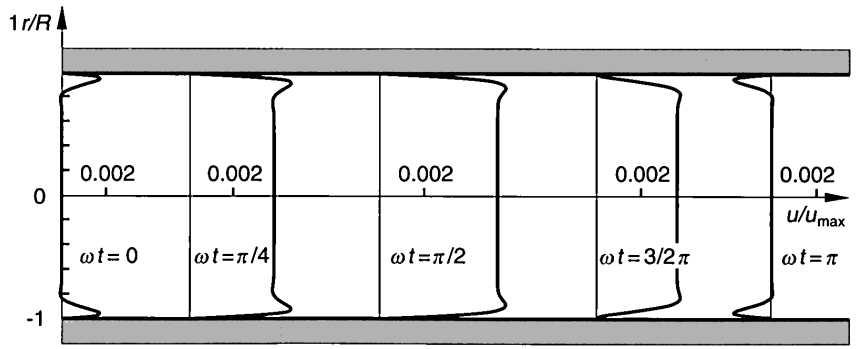


Рис. 12.34. Распределение скорости пульсирующего сосудистого потока по времени в периоде колебания

ответвлениях аорты удваивают амплитуду длины волны. Увеличение амплитуды продолжается до третьего артериального ответвления, чтобы за тем понизится в следующих артериальных ответвлениях, соответственно рис. 12.9. На рис. 12.36 показано распространение профиля скорости во времени в модели аорты с продолжительностью биения пульса 0,8 сек. Осевые скорости с их максимальным значением $u_{max} = 0,77$ м/с безразмерны. По сравнению с принципиальным эскизом на рис. 12.30 здесь учитывают неньютоновское состояние крови.

Для расчета распространения волны скорости и давления, с учетом податливости стенок сосудов и в предположении малости потока, справедливы линеанизированные уравнения Навье-Стокса для ньютоновского потока крови и линеанизированное уравнение Навье для стенки, а также уравнение неразрывности. Для несжимаемого потока в цилиндрических координатах характерно осесимметричное распространение волны

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right), \tag{12.29}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right), \tag{12.30}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0. \tag{12.31}$$

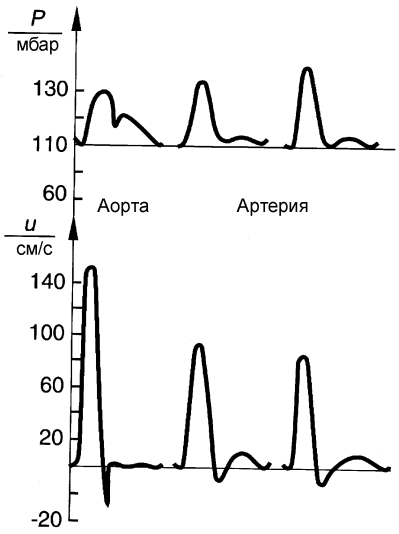


Рис. 12.35. Распространение волны давления и скорости в аорте и в нисходящей артерии

Для вязкоупругой стенки артерии действительно:

$$\frac{\rho_w}{\mu_w}\cdot\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu_w}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \tag{12.32}$$

$$\frac{\rho_w}{\mu_w}\cdot\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu_w}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \tag{12.33}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}=0. \tag{12.34}$$

Для течения u_r и u_x — являются компонентами скорости, а для стенки u_r и u_x — компонентами перемещения стенки, μ_w — коэффициент жесткости, ρ_w — плотность материала стенки. Ω — давление, которое нужно ввести в уравнение (12.32) и (12.33), потому что стенка предполагается абсолютно твердой. Граничными условиями для связи поток – стенка являются непрерывность касательных напряжения и скоростей на пограничной поверхности между жидкостью и твердым телом. На внешней стенке артерии действительны соответствующие граничные условия.

Задачу на собственные значения можно решить численным способом методами анализа устойчивости, данными в главе 7.

До сих пор рассматривались линеанизированные основные уравнения (12.29)–(12.34) для маленьких амплитуд распространяющихся волн. Кровь — это неньютоновская среда с нелинейной зависимостью вязкости крови от скорости деформации сдвига.

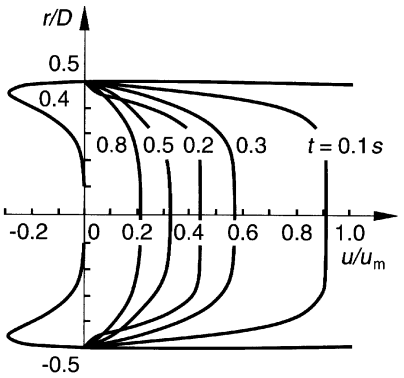


Рис. 12.36. Профили осевой скорости в различные моменты времени в модели аорты

Следует учитывать ее влияние на пульсирующее течение особенно в области отрыва течения. В уравнениях для стенок артерии учитываются нелинейный эффект конечного распространения и нелинейная вязкоэластичность.

При расчете распространения волны в крупных артериях можно пренебречь конвективными членами $u_i \cdot (\partial u_i/\partial x_j)$ по отношению к локальному ускорению $\partial u_i/\partial t$.

Допустим, что u' это характерная скорость потока, ω — частота кругооборота, c — фазовая скорость волны относительно среднего потока (течения). Период колебания (осцилляции) составляет $2\pi/\omega$ и длина волны $2\cdot\pi\cdot c/\omega$. В результате чего для локального ускорения $\partial u_i/\partial t$ получается порядок величин $u'/(2\cdot\pi\cdot c/\omega)$, а для конвективного ускорения $(u_j\cdot\partial u_i)/\partial x_j$ — порядок величин $u'\cdot u'/(2\cdot\pi\cdot c/\omega)$. Условием, при котором не учитывается конвективное ускорения, будет

$$\frac{u'}{c} \ll 1. \tag{12.35}$$

Для крупных артерий максимальным значением, влияющем незначительно на нелинейность, будет $u'/c - 0{,}25$. Для периферийных малых артерий выполняется условие (12.35).

12.3.3. Артериальное разветвление

Импульс давления сердца отражается в разветвлениях артерий. На рис. 12.37 показан эскиз такого разветвления. Втекающая под давлением в артерию волна с объемным расходом $\dot{V}$ в разветвлении артерии разделяется на протекающие волны 1 и 2 с объемными расходами $\dot{V}_1$ и $\dot{V}_2$. Получающиеся при этом средние по времени профили скорости представлены на рис. 12.38.

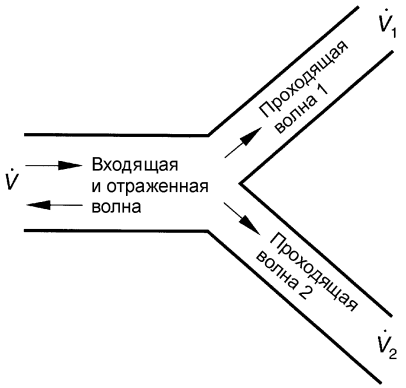


Рис. 12.37. Разветвление артерии

На противоположной артериальной стенке разветвления видна средняя по времени область обратного тока крови.

Искривление линий тока идет снова по спиральному вторичному потоку, как оно рассматривалось для устойчивого потока в главе 4.2.7. В средней по времени области обратного тока появляются профили с точкой перегиба, которые являются, следуя соображениям, данным в главе 7.3, неустойчивыми и поэтому начинается переход к турбулентному течению. Но такой неустойчивый переходный процесс сдвигового течения сдерживается вторичным потоком, как в искривленной артерии. Такой вторичный поток, однако, в эластичных артериальных разветвлениях образуется в меньшей степени, чем в жестких трубопроводах.

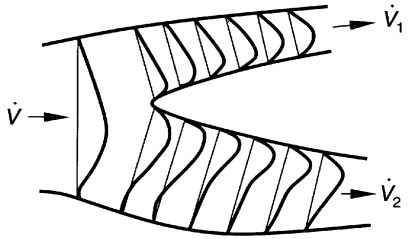


Рис. 12.38. Профили осредненных скоростей в артериальном разветвлении $Re_D = 600$, $\dot{V}_2/\dot{V}_1 = 0,6$ Motomiya, Kerino 1984

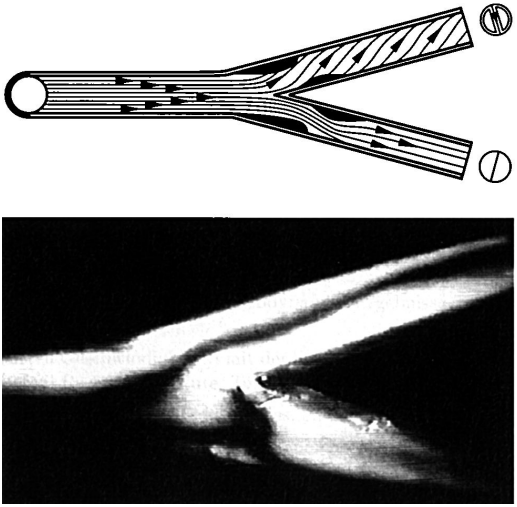


Рис. 12.39. Линии тока в артериальном разветвлении с наслоением и оптической визуализацией

Если наслоение на стенках артерии приводят к атеросклерозу и вследствие этого к предрасположенности к отрыву потока в артериальных разветвлениях, то при выраженных профилях с точкой перегиба начинается турбулентное течение с повышенными потерями, не смотря на образовавшееся вторичное течение. На рис. 12.39 показана картина такого течения в упругой модели разветвления. Оптическая визуализация потока делает видимым отрыв на модели.

Литература

Литература о Л. Прандтле

A. Sommerfeld. Zu L. Prandtls 60. Geburtstag am 4. Februar 1935. ZAMM, 15, 1–2, 1935.

W. Tollmien. Zu L. Prandtls 70. Geburtstag. ZAMM, 24, 185–188, 1944.

Scventy-Fifth Anniversary of Ludwig Prandtl. J. Aeronautical Sei., 17, 121-122, 1950.

I. Flügge-Lotz, W. Flügge. Ludwig Prandtl in the Nineteen-Thirties. Ami. Rev. Fluid Mech., 5, 1–8, 1973.

Gedächtnisveranstaltung für Ludwig Prandtl aus Anlass seines 100. Geburtstags. Braunschweig, 1975.

H. Sortier. Ludwig Prandtl — Persönlichkeit und Wirken. ZFW, 23, 5, 153–162, 1975.

H. Schlichting. Ludwig Prandtl und die Aerodynamische Versuchsanstalt (AVA). ZFW, 23, 5, 162–167, 1975.

K. Oswaütsch, K. Wieghardt. Ludwig Prandtl and his Kaiser-Wilhelm-Institut. Ann. Rev. Fluid Mech., 19, 1–25, 1987.

J. Vogel-Prandtl. Ludwig Prandtl — Ein Lebensbilcl, Erinnerungen, Dokumente., MPI, Göttingen, 1993.

L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandig. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg, 574–584. Teubner, Leipzig, 1905.

Neue Untersuchungen über die strömende Bewegung der Gase und Dämpfe. Physikalische Zeitschrift, 8, 23, 1907.

Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 177–190, 1914.

Tragflügeltheorie. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 451–477, 1918.

Experimentelle Prüfung der Umrechnungsformeln. Ergebnisse der AVA zu Göttingen, l, 50–53, 1921.

Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. R. Oldenbourg, München, Berlin, 1923.

The Generation of Vortices in Fluids of Small Viscosity. Journal of the Royal Aeronautical Society, 31, 720–741, 1927.

Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Ergebnisse der AVA zu Göttingen, 3, 1927.

LIber Strömungen, deren Geschwindigkeiten mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind. Report of the Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University, 5, 65, 1930.

Über Tragflügel kleinsten induzierten Widerstandes. ZFM, 24, 305, 1933.

Allgemeine Betrachtungen über die Strömung zusammendrückbarer Flüssigkeiten. ZAMM, 16, 129, 1936.

Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium. Luftfahrtforschung, 13, 313, 1936.

Über Schallausbreitung bei rasch bewegten Körpern. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, 7, 1938.

Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. MoS RT 64, Betz Festschrift, Göt- tingen, 1945.

Mein Weg zu hydrodynamischen Theorien. Physikalische Blätter, 4, 89–92, 1948.

L. Prandtl, O. G. Tietjens. Applied Hydro- and Aeromechanics, Based on Lectures of L. Prandtl. McGraw-Hill, New York, 1934.

W. Tollmien, H. Schltchting, H. Görtier, L. Prandtl. Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, 1–3. Springer, Berling, Göttingen, Heidelberg, 1961.

Общая литература

W. Albring. Angewandte Strömungslehre. Steinkopff, Dresden, 1966.

G. K. Batchelor. The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge University Press, Cambridge, 1956.

G. K. Batchelor. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

E. Becker. Technische Strömungslehre. Teubner, Stuttgart, 1982.

R. Betchov, W. O. Crimmale Jr. Stability of Parallel Flows. Academic Press, New York, 1967.

G. Böhme. Strömungsmechanik nicht Newtonscher Fluide. Teubner, Stuttgart, 1981.

E. C. Bingham. Fluidity and Plasticity. McGraw-Hill, New York, 1922.

T. Cebeci, A. M. O. Smith. Analysis of Turbulent Boundary Layers. Academic Press, New York, 1974.

T. Cebeci, P. Bradshaw. Momentum Transfer in Boundary Layers. McGraw-Hill, New York, 1977.

T. E. Faber. Fluid Dynamics for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

K. Gersten, H. Herwig. Strömungsmechanik. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1992.

J. O. Hinze. Turbulence. McGraw-Hill, New York, 1976.

H. Lamb. Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.

L. D. Landau, E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. Pergamon Press, London, 1959.

H. W. Liepmann, A. Roshko. Elements of Gasdynamics. John Wiley & Sons, New York, 1957.

J. Lighthill. Waves in Fluids. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

L. M. Milne-Thomson. Theoretical Hydrodynamics. Macmillan, New York, 1955.

H. Oertel jr. Introduction to Fluid Mechanics. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2001.

H. Oertel jr., M. Böhle. Strömungsmechanik. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

H. Oertel jr., J. Delfs. Strömungsmechanischeinstabilitäten. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

K. Oswaütsch. Grundlagen der Gasdynamik. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Wien, 1967.

S. J. Pai. Viscous Flow Theory. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1956, 1957.

J. Piquet. Turbulent Flows. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

J. C. Rotta. Turbulente Strömungen. Teubner, Stuttgart, 1972.

H. Schlichting, K. Gersten. Grenzschicht-Theorie. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

H. Schlichtmg, K. Gersten. Boundary Layer Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

A. H. Shapiro. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. Ronald Press, New York, 1953.

S. L. Soo. Fluid Dynamics of Multiphase Systems. Blaisdell Publication, Waltham, Mass., 1967.

J. H. Spurk. Strömungslehre. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

J. H. Spurk. Fluid Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

M. B. Squire. Modern Development in Fluid Dynamics. Oxford University Press, New York, 1938.

K. Strauß. Strömungsmechanik. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1991.

O. Tietjens. Strömungslehre. Springer, Berlin, Heidelberg, 1960.

W. G. Vincenü, C. H. Kruger. Introduction to Physical Gas Dynamics. Huntington, New York, 1967.

F. M. White. Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill, New York, 1974.

K. Wieghardt. Theoretische Strömungslehre. Teubner, Stuttgart, 1974.

C. Yih. Fluid Mechanics. McGraw-Hill, New York, 1969.

J. Zierep. Grundzüge der Strömungslehre. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

Глава 5. Основные уравнения аэродинамики

D. A. Andersen, J. C. Tannehül, R. H. Pletcher. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. McGraw-Hill, New York, 1984.

D. A. Anderson jr. Computational Fluid Dynamics. McGraw-Hill, New York, 1995.

R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot. Transport Phenomena. John Wiley & Sons, New York, 1960.

J. Boussinesq. Essai sur la theorie des eaux courantes. Memoires presentes par divers savant ä l'Academie des Sciences de l'Institut de France, 23, l, 1872.

D. Drew, G. Wallis. Fundamentals of Two-Phase Flow Modeling. Multiphase Science and Technology, 8, 1–67, 1994.

J. H. Fertiger, M. Peric. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

M. Lesieur. Turbulence in Fluids. Kluwer, Dordrecht, 1997.

M. Plesset, S. A. Zwick. The Growth of Vapour Bubbles in Superheated Liquids. J. of Applied Physics, 25, 4, 493–501, 1954.

C. L. M. H. Navier. Memoire sur les lois du mouvement des fluides. Memoires de l'Academie des Sciences, 6, 389–416, 1823.

Sir I. Newton. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, II. Innys, London, 1726.

H. Oertel jr., M. Bohle. Strömungsmechanik. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

H. Oertel, E. Launen. Numerische Strömungsmechanik. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2002.

J. W. S. Rayieigh. The Solution for the Motion of a Bubble under Constant Pressure Conditions. Phil. Mag., 34, 94, 1917.

G. Stokes. On the Theories of the Infernal Friction of Fluids in Motion. Transactions of the Cambridge Philosphical Society, 8, 287–305, 1845.

J. Warnatz, U. Maas, R. W. Dibble. Combustion. Springer, Berlin, Heildelberg, New York, 2001.

Глава 6. Аэродинамика несущей поверхности

J. Ackeret. Luftkäfte auf Flügel, die mit größerer Geschwindigkeit als Schallgeschwindigkeit bewegtwerden. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 16, 72–74, 1925.

J. Ackeret. Handbuch der Physik, 7. Springer, Berlin, Heidelberg, 1927.

J. Ackeret, F. Feldmann, N. Rott. Untersuchungen an Verdichtungsstößen und Grenzschichten in schnell bewegten Gasen. Mitteilungen 10, Institut für Aerodynamik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, 1946.

J. D. Anderson. Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics. McGraw-Hill, New York, 1989. E. Becker. Gasdynamik. Teubner, 1965.

A. Busemann. Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit. Convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, tema: le alte velocita in aviazione, 315–347, Roma, 1936.

A. Busemann. Infinitesimale kegelige Überschallströmung. Jahrbuch der cleutschen Akademie der Luftfahrtforschung, 455–470, 1942.

E. Carafoli. Wing Theory in Supersonic Flow. Pergamon Press, 1969.

T. Cebeci, A. M. O. Smith. Analysis of Turbulent Boundary Layers. Academic Press, New York, 1975.

G. G. Cernij. Introduction to Hypersonic Flow. Academic Press, New York, 1961.

R. Courant, K. O. Friedrichs. Supersonic Flow and Shock Waves. Springer, Heidelberg, Berlin, 1976.

R. N. Cox, L. F. Crabtree. Elements of Hypersonic Aerodynamics. Academic Press, New York, 1965.

G. A. Crocco. Sui corpi aerotermodinamici portanti. Rendiconti della Accademia Nazionale dci Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 14 of 6, 161–166. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1931.

G. A. Crocco. Flying in the Stratosphere. Aircraft Engineering, 4, 171–175, 204–209, 1932. W. D. Dayes, R. F. Probatem. Hypersonic Flow Theory. Academic Press, New York, 1966. U. Ganzer. Gasdynamik. Springer, Berlin, Heidelberg, 1988.

H. Glauert. The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory. Cambridge University Press, Cam- bridge, 1926.

H. Glauert. The Effect of Compressibility on the Lift of an Aerofoil. Proceedings of the Royal Society of London, 118 of A, 113–119, 1928.

H. Hugomot. Memoire sur la propagation du mouvement dans les corps et specialement dans los gases parfaits. Journal de l'Ecole Polytechnique Paris, 57, 1–97, 1887.

H. Hugomot. Memoire sur la propagation du mouvement dans les corps et specialement dans les gases parfaits. Journal de l'Ecole Polytechnique Paris, 59, 1–25, 1889.

R. D. Joslin. Aircraft Laminar Flow Control. Ann. Rev. Fluid Mech., 30, 1–29, 1998.

N. Joukowski. Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschifiahrt, l, 281–284, 1910.

J. D. Anderson jr. Introduction to Flight. McGraw-Hill, New York, 1989. D. Küchemann. The Aerodynamic Design of Aircraft. Pergamon Press, Oxford, 1978.

M. W. Kutta. Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Illustrierte Aeronautische Mitteilungen, 6, 133–135,1902.

M. W. Kutta. Ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen, 3 of Mathematisch-Physikalische Klasse, 65–125. Verl. d. K. B. Akad. d. Wiss, München, 1911.

F. W. Lanchester. Aerodynamics: Constituting the First Volume of a Complete Work of Aerial Flight. A. Constable & Co, London, 1907.

H. W. Liepmann. The Interaction between Boundary Layer and Shock Waves in Transonic Flow. Journal of Aeronautical Sciences, 13, 623–637, 1946.

H. W. Liepmann, A. Roshko. Elements of Gasdynamics. John Wiley fe Sons, New York, 1957.

M. J. Lighthill. Supersonic Flow Fast Bodies of Revolution. Report ARC-R/M-2003, Aeronautical Research Councii, London, 1945.

M. J. Lighthill. The Wave Drag at Zero Lift of Siender Delta Wings and Similar Configurations. JFM, l, 337, 1956.

M. J. Lighthill. On Displacement Thickness. JFM, 4, 383, 1958.

M. J. Lighthill. On the Weis-Fogh Mechanism of Lift Generation. JFM, 60, 1–17, 1973.

M. J. Lighthill. Mathematical Bionuidmechanics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1975.

O. Lilwnthal. Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Gaertner, Berlin, 1889.

K. Oswatitsch. Gas Dynamics, l of Applied mathematics and mechanics. Academic Press, New York, 1956.

K. Oswatitsch, ed. Symposium Transsonicum I. Springer, Berlin, Heidelberg, 1964.

K. Oswatitsch. Grundlagen der Gasdynamik. Springer, New York, Wien, 1967.

K. Oswatitsch, ed. Symposium Transsonicum II. Springer, Berlin, Heidelberg, 1976.

K. Oswatitsch. Spezialgebiete der Gasdynamik. Springer, New York, Wien, 1977.

W. J. M. Rankine. On the Thermodynamik Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 160 of A, 277–286. Royal Society, London, 1870.

B. Riemann. Die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, 8, 43–65. Weidmann, Berlin, 1858/59.

R. Robinson, J. A. Laurmann. Wing Theory. Cambridge LIniversity Press, Cambridge, 1956.

H. Schlichtmg, E. Truckenbrodt. Aerodynamik des Flugzeuges. Springer, Berlin, Heidelberg, 1969.

H. Schlichting, E. Truckenbrodt. Aerodynamics of the Airplane. McGraw-Hill, New York, 1979.

H. Schlichtmg, K. Gersten. Grenzschicht-Theorie. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

H. Sciilichting, K. Gersten. Boundary Layer Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

A. H. Shapiro. Shape and Flow. Anchor Books, New York, 1961.

J. L. Stollery. Laminar and Turbulent Boundary-Layer Separation at Supersonic and Hypersonic Speeds, 1975.

I. Tarn, S. Miiuisi. Contributions to the Design of Aerofoils Suitable for High Speeds. Report 198, Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo, 1940.

W. G. Vincenti, C. H. Kruger. Introduction to Physical Gas Dynamics. John Wiley & Sons, New York, 1965.

H. von Helmholtz. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 55, 25–55, 1858.

E. von Holst, D. Küchemann. Biologische und aerodynamische Probleme des Tiernuges. Naturwissenschaften, 29, 348, 1941.

T. von Kármán. Compressibility Effects in Aerodynamics., 8, 337–356, 1941.

T. von Kármán. The Similarity Law of Transonic Flow. Journal of Mathematics and Physics, 16, 182–190, 1947.

T. von Kármán. Aerodynamik. Interavia, Genf, 1956.

T. von Kármán. Collected Works of Theodore von Kärmän, 1–4. Butterworths Scientific Publ., London, 1956.

T. von Kármán, C. B. Millikan. A Theoretical Investigation of the Maximum-Lift Coefficient. Journal of Applied Mechanics, 2, 21–27, 1935.

R. von Mises. Theory of Flight. Dover Publications, New York, 1959.

J. Williams. Aircraft Performance- Prediction Methods and Optimization. Report LS-56, AGARD, 1972.

J. Zierep, H. Oertel, ed. Symposium Transsonicum III. Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.

Глава 7. Гидроэродинамическая неустойчивость

D. Arnal. Predictions based on Linear Theory. Report 793, AGARD, 1994.

H. Benard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Rev. Gen. Sei. Pures Appl., 11, 1261–1268, 1900.

F. P. Bertolotti, T. Herbert, T. R. Spalart. Linear and Nonlinear Stability of the Blasius Boundary Layer. JFM, 242, 441–474, 1992.

R. Betchov, W. 0. Criminale jr. Stability of Parallel Flows. Academic Press, New York, 1967.

E. Bodenschatz, W. Pesch, G. Ahlers. Developments in RayIeigh-Benard Convection. Ann. Rev. Fluid Mech., 32, 709–777, 2000.

F. Busse. Benard Convection in Particular. Rep. Prog. Phys., 41, 1929, 1978.

F. Busse. Nonlinear Properties of Thermal Convection. Rep. Prog. Phys., 41, 1929–1967, 1978.

S. Chandrasekhar. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, Oxford, 1961.

D. Coles. Transition in Circular Couette Flow. JFM, 21, 385–425, 1965.

S. H. Dams. Thermocapillary Instabilities. Ann. Rev. Fluid Mech., 19, 403–435, 1987.

P. G. Drazm, W. H. Reid. Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, 1981.

C. Egbers, G. Pßster. Physics of Rotating Fluids. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

T. M. Fischer, U. Dalimann. Theoretical Investigation of Secondary Instability of Three-Dimensional Boundary Layer Flows. DFVLR-FB84, DVFLR, 1987.

Al. Gaster. The Development of Three-Dimensional Wave Packets in a Boundary Layer. JFM, 32, 173–184, 1968.

M. Gaster. On the Effects of Boundary-Layer Growth on Flow Stability. JFM, 66, 465–480, 1974.

G. Gershuni, E. Zhukovitskii. Convective Stability of Incompressible Fluids. Keter Publishing House, Jerusalem, 1976.

P. Hall. The Linear Development of Görtier Vortices in Growing Boundary Layers. JFM, 130, 41–58, 1983.

K. Hannemann, H. Oertel jr. Numerical Simulation of the Absolutely and Convectively Unstable Wake. JFM, 199, 55–88, 1989.

T. Herbert. Secondary Instability of Boundary Layers. Ann. Rev. Fluid Mech., 20, 487–526, 1988.

P. Huerre, P. Monkewitz. Absolute and Convective Instabilities in Free Shear Layers. JFM, 159, 151–168, 1985.

P. Huerre, P. Monkewitz. Local and Global Instabilities in Spatially Developing Flows. Ann. Rev. Fluid Mech., 22, 473–537, 1990.

J. Masad, A. Nayfeh. Effect of Heat Transfer on the Subharmonic Instability of Compressible Boundary Layers. Phys. Fluids, A3, 2148–2163, 1991.

B. J.Bayly, S. A. Orszag. Instability Mechanism in Shear-Flow Transition. Ann. Rev. Fluid Mech., 20, 359–391, 1988.

D. Joseph. Stability of Fluid Motions, Bd.I+II, 27+28 of Springer Tracts in Natural Philosophy. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

R. Kirchartz, H. Oertel. Three-Dimensional Thermal Cellular Convection in Rectangular Boxes. JFM, 192, 249–286, 1988.

R. Kirchariz, U. Müller, H. Oertel Jr., J. Zierep. Axisymmetric and Non-Axisymmetric Convection in a Cylindrical Container. Acta Mech., 40, 181–194, 1981.

E. Koschmieder. Benard Cells and Tayior Vortices. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge University Press, 1993.

R. Krishnamurtt. Some Further Studios on the Transition to Turbulent Convection. JFM, 60, 285–303, 1973.

C. Lin. The Theory of Hydrodynamic Stability, 5. Cambridge University Press, Cambridge, 1955.

L. M. Mack. On the Stabilization of Three-Dimensional Boundary Layers by Suction and Cooling. R. Eppler, H. Fasel, ed., Laminar-Turbulent Transition, 223–238. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

L. M. Mack. Boundary Layer Linear Stability Theory. Special Course in Stability and Transition of Laminar Flow, 709, 1–81, 1984.

L. M. Mack. Stability of Three-Dimensional Boundary Layers on Swept Wings at Transonic Speeds. J. Zierep, H. Oertel, ed., IUTAM Symp. Transsonicum III, 209–223. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.

M. Morkovin. Bypass-Transition Research: Issues and Philosophy, Instabilities and Turbulence in Engineering Flows. Kluwer Academic, 1993.

L. Ngo, G. Erlebacher. Secondary Instabilities in Compressible Boundary Layers. Phys. Fluids, A4, 710–726, 1992.

H. Oertel. Bereiche der reibungsbehafteten Strömung. ZFW, 1912, 119–128, 1995.

H. Oertel. Onset of turbulence. H. Schlichting, K. Gersten, ed., Boundary Layer Theory, 415–493. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

H. Oertel jr. Wakes Behind Blunt Bodies. Ann. Rev. Fluid Mech., 22, 539–564, 1990.

H. Oertel jr., E. Launen. Numerische Strömungsmechanik. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.

H. Oertel jr., J. Delfs. Mathematische Analyse der Bereiche reibungsbehafteter Strömungen. ZAMM, 75, 491–505, 1995.

H. Oertel fr., J. Delfs. Strömungsmechanische Instabilitäteil. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

H. Oertel, R. Stank. Dynamics of Localized Disturbances in Transonic Wing Boundary Layers. 99–0551, AIAA, 1999.

W. M. F. Orr. Tlie Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and a Viscous Liquid. Proc. R. Ir. Acad., A 27, 69–138, 1907.

S. A. Orszag, A. T. Patera. Secondary Instability of Wall-Bounded Shear Flows. JFM, 128, 347–385, 1983.

J. W. Rayieigh. On the Stability, or Instability of Certain Fluid Motions, l of Scientific Papers of Lord Rayieigh. Dover Publications, New York, 1964.

H. L. Reed, W. S. Saric. Linear Stability Theory Applied to Boundary Layers. Ann. R.ev. Fluid Mech., 28, 389–428, 1996.

E. Reshotko. Boundary Layer Stability and Transition. Ann. Rev. Fluid Mech., 8, 311–349, 1976.

E. Reshotko. Boundary Layer Instability, Transition and Control. 94–0001, AIAA, 1994.

O. Reynolds. An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinouos, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 935. Royal Society, London, 1883.

W. Saric. üörtler Vortices. Ann. Rev. Fluid Mech, 26, 379–409, 1994.

H. Schlichüng. Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., 181–208, 1933.

H. Schlichüng, K. Gersten. Grenzschicht-Theorie. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

H. Schlichting, K. Gersten. Boundary Layer Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

G. Schubauer, H. Skramstad. Laminar Boundary Layer Oscillations and Transition on a Fiat Plate. J. Aero. Sei., 14, 69–78, 1947.

F. Sherman. Viscous Flow. McGraw-Hill, New York, 1990.

A. Sommerfeld. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung. G. Castelnuovo, ed., Atti del IV Congresso intemazionale dei matematici, 116–124, Roma, 1908.

H. B. Squire. On the Stability for Three-Dimensional Disturbances of Viscous Fluid Betwccn Parallel Walls. Proceedings of the Royal Society of London, 142 of A, 621–628, 1933.

K. Stark, U. Müller. Convection in Boxes: Experiments. JFM, 54, 599–611, 1972.

P. Strykowski, K. Sreenwasan. The Control of Transitional Flows. 85–0559, AIAA, 1985.

D. J. Tritton. Physical Fluid Dynamics. Clarendon Press, Oxford, 1988.

J. S. Turner. Boyancy Effects in Fluids. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

J. S. Turner. Multicomponent Convection. Ann. Rev. Fluid Mech., 17, 11–44, 1985.

F. M. White. Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill, New York, 1974.

J. Zierep, H. Oertel jr. Convective Transport and Instability Phenomena. Braun, Karlsruhe, 1982.

Глава 8. Конвективная теплопередача и массоперенос

H. D. Baehr, K. Stephan. Heat arid Mass Transfer. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

C. O. Bennet, J. E. Myers. Momentum, Heat and Mass Transfer. McGra.w-Hill, New York, 1966.

R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot. Transport Phenomena. John Wiley & Sons, New York, 1960.

T. Cebeci, P. Bradshaw. Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Sprin- ger, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.

E. Eckert. Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. Springer, Berlin, Heidelberg, 1959.

E. R. G. Eckert, R. U. Drohe. Analysis of Heat. and Mass Transfer. McGraw-Hill, New York, 1972.

B. Gebhart. Heat Transfer. McGraw-Hill, New York, 1971.

B. Gebhart, Y. Jaluwma, R. L. Mahayan, B. Sammakia. Boyancy induced Flows and Transport. Hemisphere Publishers, Washington, 1988.

H. Gröber, S. Erk, U. Grigull. Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer, Berlin, Heidelberg, 1961.

J. O. Hirschfelder, C. F. Curtis, R. B. Bird. Molecular Theory of Gases and Liquids. J. Wiley fe Sons, New York, 1967.

J. P. Holman. Heat Transfer. McGraw-Hill, New York, 1976. M. Jacob. Heat Transfer. J. Wiley fe Sons, New York, 1959.

M. Jischa. Konvektiver Impuls-, Wärme und Stoffaustausch. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1982.

J. G. Knudsen, D. L. Katz. Fluid Dynamics and Heat Transfer. McGraw-Hill, New York, 1958.

G. P. Merker. Konvektive Wärmeübertragung. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.

A. Mersmann. Stoffübertragung. Springer, Berlin, Heidelberg, 1986.

U. Müller, P. Erhard. Freie Konvektion und Wärmeübertragung. Müller, Heidelberg, 1999.

J. A. Reynolds. Turbulent Flows in Engineering. J. Wiley & Sons, New York, 1974.

W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, E. N. Gamic. Handbook of Heat Transfer Fundamentals. McGraw-Hill, New York, 1985.

H. Schlichtmg, K. Gersten. Grenzschicht-Theorie. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

H. Schltchting, K. Gersten. Boundary Layer Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

E. K. Schlünder. Einführung in die Wärmeübertragung. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1981.

E. Schmidt, W. Beckmann. Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von einer wärmeabgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion. Technische Mechanik und Thermodynamik l, 341–391. VDI, Berlin, 1930.

W. Schneider. Konvektive Wärme- und Stoffübertragung. L. Prandtl, K. Oswatitsch, K. Wieghardt, ed., Führer durch die Strömungslehre, 293–342. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1990.

J. Unger. Konvektionsströmungen. Teubner, Stuttgart, 1988. A. Walz. Strömungs- und Temperaturgrenzschichten. Braun, Karlsruhe, 1966.

J. R. Welty, R. E. Wüson, C. E. Wicks. Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer. J. Wiley & Sons, New York, 1976.

K. Wilde. Wärme- und Stoffübertragung in Strömungen. Stcinkopff, Darmstadt, 1978.

Глава 9. Многофазные течения

A. J. Acosta, B. R. Parkm. Cavitation Inception - a Selective Review. J. Ship Res., 19, 193–205, 1975.

W. Archer. Experimental Determination of Loss of Heat due to Sudden Enlargement in Circular Pipes. Trans. Am. Soc. Civil Eng., 76, 999–1026, 1913.

E. A. Arndt. Cavitation in Fluid Machinery and Hydraulic Structures. Ann. Rev. Fluid Mech., 13, 273–328, 1981.

R. E. A. Arndt, V. H. Arakeri. Some Observations of Tip-Vortex Cavitation. JFM, 229, 269–289, 1991.

B. J. Azzopardi, E. Hervieu. Phase Separation in T-Junctions. Multiphase Science and Technology, 8, 645–713, 1994.

J. P. Best. The Formation of Torroidal Bubbles upon the Collapse of Transient Cavities. JFM, 251, 79–107, 1993.

J. R. Blake, B. B. Taib, G. Doherty. Transient Cavities Near Boundaries, Pt I. Rigid Boundaries. JFM, 170, 479–497, 1986.

L. Bolle, J. C. Moureau. Spray Colling of Hot Surfaces. Multiphase Science and Technology, l, 1–97, 1982.

C. E. Brennen. Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford University Press, Oxford, 1995. S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford Univ. Press, 1968.

Y. Chen, S. D. Heister. A Numerical Treatment for Attached Cavitation. Journal of Fluids Eng., 116, 613–618, 1994.

B. Chexal, J. Horowitz, G. Leilouche. An Assessment of Eight Void Fraction Models for Vertical Flows. 5949, NSAC, Electric Power Research Institute, Palo Alto, Ca., 1986.

D. Chtsholm. Pressure Losses in Bends and T's during Steam-Water Flow. Report 318, N. E. L., 1967.

D. Chisholm. A Theoretical Basis for the Lockhart-Martinelli Correlation for Two-Phase Flow. Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 1767–1678, 1967.

A. Cicchitti, C. Lombardi, M. Silvestri, G. Soldaini, R. Zavattarelli. Two-Phase Cooling Experiment — Pressure Drop, Heat Transfer and Burnout Measurements. Energia Nucleare, 7, 6, 407–425, 1960.

R. Citft, J. R. Grace, M. E. Weber. Bubbles, Drops and Particies. Academic Press, New York, 1978.

J. G. Collier, J. R. Thome. Convective Boiling and Heat Transfer. Clarendon Press, Oxford, 1994.

R. Collins. The Effect of a Containing Cylindrical Boundary on the Velocity of a Large Gas Bubble in a Liquid. JFM, 28, l, 97–112, 1967.

C. Crowe, M. Sommerfeld, Y. TSUJI. Multiphase Flows with Droplets and Particies. CRS Press, Boca Raton, Boston, New York, London, 1998.

J. Delhaye, M. Giot, M. Rtethmüller. Thermodynamics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering. Hemisphere Publishing, New York, 1981.

A. A. Dukler. Pressure Drop and Hold-Up in Two-Phase Flow. AlChE, 10, l, 38–51, 1964.

H. K. Fauske. Contribution to the Theory of Two-Phase, One-Component Critical Flow. Technical Report ANL-6633, Argonne National Laboratory, 1963.

J. P. Franc, J. M. Michel. Attached Gravitation and the Boundary Layer: Experimental Investiga- tion and Numerical Treatment. JFM, 154, 63–90, 1985.

L. Friedel. Druckabfall bei der Strömung von Gas-Dampf-Flüssigkeitsgemischen in Rohren. Chem. Ing. Tech., 50, 167–180, 1978.

G. Govier, K. Aziz. The Flow of Complex Mixtures in Pipes. Reinhold Van Nostrand Co., 1972.

H. Henry, H. Fauske. Two-Phase Critical Flow of One-Component Mixtures in Nozzles, Orifices and Short Tubes. Trans. ASME, J. Heat Transfer, 95, 179–187, 1971.

R. Henry, M. Grolmes, H. Fauske. Pressure-Pulse Propagation in Two-Phase One- and Two- Component Mixtures. Technical Report ANL-7792, Argonne National Laboratory, 1971.

W. Idsinga, N. Todreas, R. Bowring. An Asscssment of Two-Phase Pressure Drop Correlations for Steam-Water Systems. Int. J. Multiphase Flow, 3, 401–413, 1977.

M. Ishii. Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. Eyrolles, Paris, 1975.

M. Ishii. One-Dimensional Drift-Flux Model and Constitutive Equations for Relative Motion Between Phases in Various Two-Phase Flow Regimes. Technical Report ANL-7747, Argonne National Laboratory, 111., USA, 1977.

T. Knapp, J. W. Daily, F. G. Hammit. Cavitation. MvGraw-Hill, New York, 1970.

W. Lauterborn, H. Bolle. Experimental Investigation of Cavitation Bubble Collapse in the Neighbourhood of a Solid Boundary. JFM, 72, 391–399, 1975.

Y. Lecoffre. Cavitation: Bubble Trackers. Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1999.

M. Ledmegg. Instabilität der Strömung bei natürlichem und Zwangsumlauf. Wärme, 61, 891–908, 1938.

H. Lemonnier, Z. Bilicki. Steady Two-Phase Choked Flow in Channels of Variable Cross Sectional Area. Multiphase Science and Tcchnology, 8, 257–353, 1994.

S. P. Lm, R. D. Reitz. Drop and Spray Formation from a Liquid Jet. Ann. Rev. Fluid Mech., 30, 85–105, 1998.

R. Lockhart, R. Martmellt. Proposed Correlation of Data for Isothermal Two-Phase Two-Component Flow in Pipes. Chem. Eng. Prog., 45, 39–48, 1947.

P. A. Lottes. Expansion Losses in Two-Phase Flow. Nucl. Sei. Engng., 9, 26–31, 1961.

J. M. Mandhane, G. A. Gregory, K. Aziz. A Flow Pattern Map for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes. Int. J. of Multiphase Flow, l, 537–553, 1974.

R. Martinelli and D. Nelson. Prediction of Pressure Drop During Forced Circulation Boiling of Water. Trans. ASME, 79, 695–702, 1948.

F. J. Moody. Maximum Flow Rate of a Single-Component, Two-Phase Mixture. ASME J. Heat Transfer, 86, 134–142, 1965.

F. N. Peebles, H. J. Garber. Studios on the Motion ofGas Bubbles in Liquids. Chem. Eng. Progress, 49, 88–97, 1953.

A. Phillipp, W. Lauterborn. Cavitation Erosion by Single Laser-Produced Bubbles. JFM, 361, 75–116, 1998.

M. Pilch, C. A. Erdman. Use of Breakup Time Data and Velocity History Data to Predict the Maximum Size of Stahle Fragments for Acceleration-Induced Breakup of a Liquid Drop. Int. J. Multiphase Flow, 13, 714–757, 1987.

M. S. Plesset, R. B. Chapman. Collapse of an Initially Spherical Vapour Cavity in the Neighbourhood of a Solid Boundary. JFM, 47, 283–290, 1971.

A. Premoli, D. Francesco, A. Prino. An Empirical Correlation for Evaluating Two-Phase Mixture Density under Adiabatic Conditions. European Two-Phase Flow Group Meeting, Milano, Italy, 1970.

B. Rtchardson. Some Problems in Horizontal Two-Phase Two-C'omponent Flow. Technical Report ANL-5949, Argonne National Laboratory, 1958.

E. P, Rood. Review — Mechanisms of Cavitation Inception. Journal of Fluids Eng., 113, 163–175, 1991.

J. Sauer. Instationär kavitierende Strömungen. Ein neues Modell basierend auf Front Capturing und Blasendynamik. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.

W. Shyy, H. S. Udaykumar, M. M. Rao, R. W. Smith. Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries. Tayior & Francis, Washington, D.O., London, 1996.

W. A. Sirignano. Fluid Dynamics and Transport of Droplets and Sprays. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

Y. Taitel. Flow Pattern Transition in Two-Phase Flow. Proc. of the 9th Int. Heat Transfer Conf., 237–254, Jerusalem, 1990.

Y. Taitel, A. Dukler. A Model for Prediction of Flow Regime Transitions in horizontal and Near Horizontal Gas-Liquid Flow. AlChE J., 22, 47–55, 1976.

Y. Taitel, D. Bornea, A. E. Dukler. Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes. AlCh. E. J., 26, 345–354, 1980.

L. Velasco. L'ecoulement Biphasique A Travers un Elargissement Brusque. PhD Thesis, Universite Catholique de Louvain, Dep. Thermodyn. et Turbomach., 1975.

G. Wallis. One-Dimensional Two-Phase Flow. McGraw-Hill, 1969. G. B. Wallis. Critical Two-Phase Flow. Int. J. Multiphase Flow, 6, 97–112, 1980.

J. Weismann, A. Husain, B. Harshe. Two-Phase Pressure Drop Across Area Changes and Restrictions. Two-Phase Transport and Reactor Safety, 4, 1281–1316, 1976.

P. B. Whalley. Data Bank for Pressure Loss Correlations, a Comparative Study. Unveröffentlicht, zitiert in Short Courses on Modelling and Computation of Multiphase Flows, ETH Zürich, 1999, 1981.

G. Yadigaroglou. Two-Phase Flow Instabilities and Propagation Phcnomena. J. M.Delhaye, M. Giot, M. L. Riethmüller, ed., Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering, 353–403. Hemishpere Publishing, Washington, 1981.

G. Yadigaroglou. Short Course on Modelling and Computation of Multiphase Flows. Swiss Föderal Institute of Technology, ETH, Zürich, Switzerland, 1999.

G. Yadigaroglou, J. R. T. Lahey. On the Various Forms of the Conservation Equations in Two- Phase Flow. Int. J. of Multiphase Flow, 2, 477–494, 1976.

C. H. Yih. Stratified Flows. Academic Press, New York, 1975.

H. Zuber, J. A. Findlay. Average Volumetrie Concentration in Two-Phase Flow Systems. J. Heat Transfer, 87, 453–468, 1965.

Глава 10. Течения с химическими реакциями

R. G. Abdel-Gayed, D. Bradley, N. M. Hamid, M. Lawes. Lewis Number Effects on Turbulent Burning Velocity. Proceedings of the Combustion Institute, 20, 505, 1984.

A. A. Amsden, P. J. O'Rourke, T. D. Butter. KIVA II: A Computer Program for Chemically Re- active Flows With Sprays. Technischer Bericht LA-11560-MS, Los Alamos National Laboratory, 1989.

W. T. Ashurst. Modelling Turbulent Flame Propagation. Proceedings ofthe Combustion Institute, 25, 1075, 1995.

W. P. Atkms. Physical Chemistry. Freeman, New York, 1990.

R. W. Bilger. Turbulent Flows with Nonpremixed Reactants. P. A. Libby, F. A. Williams, ed., Turbulent reactive flows. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

E. S. Bish, W. J. A. Dahm. Strained Dissipation and Reaction Layer Analysis of Nonequilibrium Chemistry in Turbulent Reacting Flows. Combustion and Flame, 100, 457, 1995.

H. Bockhorn, C. Chevalier, J. Warnatz, V. Weyrauch. Bildung von promptem NO in Kohlenwasserstoff-Luft-Flammcn. 6. TECFLAM-Seminar. DLR, Stuttgart, 1990.

R. Borghi, ed. Recent Advances in Aeronautical Science. Pergamon, London, 1984.

D. Bradley. How Fast Can we Burn. Proceedings of the Combustion Institute, 24, 247, 1993.

K. N. C. Bray. Turbulent Flows with Premixed Reactants. P. A. Libby, F. A. Williams, ed., Turbulent reacting flows. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

S. Candel, D. Veynante, F. Lacas, N. Darabiha. Current Progress and Future Trends in Turbulent Combustion. Combustion Science and Technology, 98, 245, 1994.

M. E. Coltrm, R. J. Kee, F. M. Rupley. SURFACE CHEMKIN (Version 4.0): A Fortune Package for Analysing Heterogeneous Chemical Kinetics at a Solid-Surface-Gas-Phase Interface. Report SAND 90–8003B, Sandia National Laboratories, 1990.

W. J. A. Dahm, E. S. Bish. High Resolution Measurements of Molecular Transport and Reaction Processes in Turbulent Combustion. T. Takeno, ed., Turbulence and molecular processes in combustion. Eisevier, New York, 1993.

W. J. A. Dahm, G. Tryggvason, M. M. Zhuang. Integral Method Solution of Time-Dependent Strained Diffusion-Reaction Equations with Multi-Step Kinetics. Journal of Applied Mathematics, 1995.

G. Damköhler. Z. Elektrochem, 46, 601, 1940.

O. Deutschmann, F. Behrendt, J. Warnatz. Modelling and Simulation of Heterogeneous Oxidation of Methane an a Platinum Foil. Catal. Today, 21, 461–470, 1994.

O. Deutschmann, F. Behrendt, J. Warnatz. Numerical Modelling of Catalytic Combustion. Proceedings ofthe Combustion Institute, 26, 1747–1754, 1996.

O. Deutschmann, U. Riedel, J. Warnatz. Modelling of Nitrogen and Oxygen Recombination on Partial Catalytic Surfaces. Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME), 117, 495–501, 1995.

R. W. Dibble, A. R. Marsi, R. W. Bilger. The Spontaneous Raman Scattering Technique Applied to Non-Prcmixed Flames of Methane. Combustion and Flame, 67, 189, 1987.

C. Dopazo, E. E. O'Brian. An Approach to the Description of a Turbulent Mixture. Acta Astron., l, 1239, 1974.

T. Dreier, B. Lange, J. Wolfrum, M. Zahn, F. Behrendt, J. Warnatz. CARS Measurements and Computations of the Structure of Laminar Stagnation-Point Methane-Air Counterflow Diffusion Flames. Proceedings of the Combustion Institute, 21, 1729, 1987.

D. X. Du, R. L. Axelbaum, C. K. Law. Experiments on the Sooting Limits of Aerodynamically Strained Diffusion Flames. Proceedings of the Combustion Institute, 22, 387, 1989.

R. Günther. 50 Jahre Wissenschaft und Technik der Verbrennung, 39. BWK, 1987.

E. Gutheil, H. Bockhorn. The Effect of Multi-Dimensional PDFs in Turbulent Reactive Flows at Moderate Damköhler Number. Physicochemical Hydrodynamics, 9, 525, 1987.

J. B. Heywood. Internal Combustion Engine Fundamentals. McGraw-Hill, New York, 1988.

K. H. Homann. Reaktionskinetik. Steinkopff, Darmstadt, 1975.

K. Homann, W. C. Solomon, J. Warnatz, H. G. Wagner, C. Zetzsch. Eine Methode zur Erzeugung von Fluoratomen in inerter Atmosphäre. Berichte der Bunsengesellschaft für Physikalische Chemie, 74, 585, 1970.

W. P. Jones, J. H. Whitelaw. Modelling and Measurement in Turbulent Combustion. Proceedings ofthe Combustion Institute, 20, 233, 1985.

J. H. Kent, R. W. Bilger. The Prediction of Turbulent Diffusion Flame Fields and Nitric Oxide Formation. Proceedings ofthe Combustion Institute, 16, 1643, 1976.

A. R. Kerstem. Linear-Eddy Modelling of Turbulent Transport — Part 7: Finite-Rate Chemistry and Multi-Stream Mixing. JFM, 240, 289–313, 1992.

B. E. Launder, D. B. Spalding. Mathematical Models of Turbulence. Academic Press, London, New York, 1972.

C. K. Law. Dynamics of Streched Flames. Proceedings of the Combustion Institute, 22, 1381, 1989.

P. A. Libby, F. A. Williams. Fundamental Aspects of Turbulent Reacting Flows.

P. A. Libby, F. A. Williams, ed. Turbulent reacting flows. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

P. A. Libby, F. A. Williams. Turbulent Reacting Flows. Academic Press, New York, 1994.

Y. Liu, B. Lenze. The Influence of Turbulence on the Burning Velocity of Premixed CI-Ha Flames with Different Laminar Burning Velocities. Proceedings of the Combustion Institute, 22, 747, 1988.

M. B. Long, M. D. Smooke, Y. Xu, R. M. Zürn, P. Lin, J. H. Frank. Computational and Experimental Study of OH and CH Radicals in Axisymmetric Laminar Diffusion Flames. Proceedings of the Combustion Institute, 24, 813, 1993.

P. Magre, R. W. Dibble. Finite Chemical Kinetic Effects in a Subsonic Turbulent Hydrogen Flame. Combustion and Flame, 73, 195, 1988.

A. R. Marsi, R. W. Bilger, R. W. Dibble. Turbulent Nonpremixed Flames of Methane Near Extinction: Probability Density Function. Combustion and Flame, 73, 261, 1988.

P. A. McMurtry, S. Menon, A. R. Kerstem. A Linear Eddy Sub-Grid Model for Turbulent Reacting Flows: Application to Hydrogen-Air Combustion. Proceedings of the Combustion Institute, 24, 271, 1992.

U. Metka, M. G. Schweizer, H.-R. Volpp, J. Wolfrum, J. Warnatz. In-Situ Detection of NO Chemisorbed on Platinum Using Infrared-Visible Sum-Frequency Generation SFG. Zeitschr. f. Phys. Chem., 214, 865–888, 2000.

J. B. Moss. Simultaneous Measurements of Concentration and Velocity in an open Premixed Turbulent Flame. Combustion Science and Technology, 22, 115, 1979.

U. Nowak, J. Warnatz. Sensitivity Analysis in Aliphatic Hydrocarbon Combustion. A. L. Kühl,

J. R. Bowen, J.-C. Leyer, A. Borisov, ed. Dynamics of reactive Systems. American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, 1988.

J. Orlandmi, U. Riedel. Chemical Kinetics of NO-Removal by Pulsed C'orona Discharges. Journal of Physics D (Applied Physics), 33, 2467–2474, 2000.

N. Peters. Laminar Flamelet Concepts in Turbulent Combustion. Proceedings of the Combustion Institute, 21, 1231, 1987.

N. Peters, J. Warnatz. Numerical Methods in Laminar Flame Propagation. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1982.

T. Pomsot, D. Veynante, S. Candel. Diagrams of Premixed Turbulent Combustion Based on Dircct Numerical Simulation. Proceedings ofthe Combustion Institute, 23, 613, 1991.

S. B. Pope. PDF Methods for Turbulent Reacting Flows. Progress in Encrgy and Combustion Science, 11, 119, 1986.

S. B. Pope. Computations of Turbulent Combustion: Progress and Challenges. Proceedings of the Combustion Institute, 23, 591, 1991.

W. C. Reynolds. The Potential and Limitations of Direct and Large Eddy Simulation. Whither Turbulence. Turbulence at Crossroads, 313. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

R. P. Rhodes, ed. Turbulent Mixing in Non-Reactive and Reactive Flows. Plenum Press, New York, 1979.

U. Riedel. Numerische Simulation reaktiver Hyperschallströmungen mit detaillierten Reaktionsmechanismen. Doktorarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1992.

U. Riedel, U. Maas, J. Warnatz. Detailed Numerical Modelling of Chemical and Thermal Nonequilibrium in Hypersonic Flows. Impact of Computing in Science and Engineering, 5, 20–52, 1993.

U. Riedel, U. Maas, J. Warnatz. Simulation of Nonequilibrium Hypersonic Flows. Computers and Fluids, 22, 285–294, 1993.

P. J. Robinson, K. A. Holbrook. Unimolecular reactions. Wiley-Interscience, New York, 1972.

B. Rogg, F. Behrendt, J. Warnatz. Turbulent Non-Premixed Cumbustion in Partially Premixed Diffusion Flamelets with Detailed Chemistry. Proceedings ofthe Combustion Institute, 21, 1533, 1987.

V. Sick, A. Arnold, E. Diessel, T. Dreier, W. Ketterle, B. Lange, J. Wolfrum, K. U. Thiele, F. Behrendt, J. Warnatz. Two-Dimensional Laser Diagnostics and Modelling of Counterflow Diffusion Flames. Proceedings ofthe Combustion Institute, 23, 495, 1991.

M. D. Smooke, R. E. Mitchell, D. E. Keyes. Numerical Solution of Two-Dimensional Axisymmetric Laminar Diffusion Flames. Combustion Science and Technology, 67, 85, 1989.

D. B. Spalding. Mixing and Chemical Reaction in Steady Confined Turbulent Flames. Proceedings of the Combustion Institute, 13, 649, 1970.

G. Stahl, J. Warnatz. Numerical Investigation of Strained Premixed CH4-Air Flames up to High Pressures. Combustion and Flame, 85, 285, 1991.

H. Tsuii, I. Yamaoka. The Counterflow Diffusion Flame in the Forward Stagnation Region of a Porous Cylinder. Proceedings ofthe Combustion Institute, 11, 979, 1967.

J. Warnatz. The Structure of Laminar Alkane-, Alkene-, and Acetylene Flames. Proceedings of the Combustion Institute, 18, 369, 1981.

J. Warnatz. The Mechanism of High Temperature Combustion of Propane and Butane. Combustion Science and Technology, 34, 177, 1983.

J. Warnatz. Critical Survey ofElementary Roaction Rate Coefficients in the C/H/0-System. W. C. Gardiner Jr., ed., Combustion chemistry. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

J. Warnatz. Production and Homogencous Selective Reduction of NO in Combustion Processes. R. Zellnor, ed., Formation, Distribution and Chemical Transformation of Air Pollutants. Dechema, Frankfurt, 1987.

J. Warnatz. Detailed Studies of Combustion Chemistry. Proceedings of the Contractors Meeting on EC Combustion Research, 172, Bruxelles, 1988.

J. Warnatz. Resolution of Gas Phase and Surface Chemistry into Elementary Reactions. Proceedings of the Combustion Institute, 24, 553, 1993.

J. Warnatz, U. Maas, R. W. Dibble. Verbrennung. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.

J. Warnatz, U. Riedel, R. Schmidt. Different Levels of Air Dissociation Chemistry and its Coupling with Flow Models. J. J. Bertin, J. Periaux, J. Ballmann, ed., Advances in Hypersonics: Modelling of Chemical and Thermal Nonequilibrium in Hypersonic Flows, 2, 223–232. Birkhäuser, 1992.

C. K. Westbrook, F. L. Dryer. Chemical Kinetics and Modelling of Combustion Processes. Proceedings of the Combustion Institute, 18, 749, 1981.

F. A. Williams. Combustion Theory. The Benjamin Cummings Publishing Company, Menlo Park, Reading, Don Mills, 1985.

Y. B. Zeldovich, D. A. Frank-Kamenetskü. The Theory of Thermal Propagation of Flames. Zh Fiz Khim, 12, 100, 1938.

D. K. Zerkle, M. D. Allendorf, M. Wolf, O. Deutschmann. Understanding Homogeneous and Hoterogeneous Contributions to the Platinum-Catalyzed Partial Oxidation of Ethane in a Short-Contact-Time Reactor. J. Catal, 196, 18–39, 2000.

Глава 11. Течения в атмосфере и океане

B. W. Atkmson. Meso-scale Atmospheric Circulations. Academic Press, London, 1981.

B. W. Atkinson, J. W. Zhang. Mesoscale Shallow Convection in the Atmosphere. Reviews of Geophysics, 34, 403–432, 1996.

K. Balzer, W. Enke, W. Wehry. Wettervorhersage. Springer, Berlin, Heidelberg, 1998.

J. Church, D. Burgess, C. Doswell, R. Davies-Jones. The Tornado: Its Structure, Dynamics, Prediction and Hazards. Geophysical Monograph 79, American Geophysical Union, Washington, 1993.

B. Cushman-Roisin. Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. Prentice Hall, London, 1994. Discovcry Channel, ed. Naturkatastrophen: Tornados, Hurricanes, Flut. VCL, München, 1997.

J. B. Eisner. Hurricanes of the North Atlantic. Oxford University Press, Oxford, 1999.

K. A. Emanuel. Atmospheric Convection. Oxford University Press, Oxford, 1994.

D. Etling. Theoretische Meteorologie. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1996.

D. Etling, R. A. Brown. Vortices in the Planetary Boundary Layer: a Review. Boundary Layer Meteorology, 65, 215–248, 1993.

P. Fabian. Atmosphäre und Umwelt. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.

J. R. Garratt. The Atmospheric Boundary Layer. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

A. E. Gilt. Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press, London, 1982.

E. E. Gossard, W. H. Hooke. Waves in the Atmosphäre. Eisevier, Amsterdam, 1975.

T. E. Graedel, P. J. Crutzen. Chemie der Atmosphäre. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994.

R. Grotjahn. Global Atmospheric Ciculations: Observations and Theory. Oxford University Press, Oxford, 1993.

H. Häckel. Meteorologie. Eigen Ulmer, Stuttgart, 1999.

J. Houghton. (Globale Erwärmung. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

IPCC (Internagovernmental Panel on Climate Change, ed. Climate Change 1995: The Science of Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

J. C. Kaimal, J. J. Fmmgan. Atmospheric Boundary Layer Flows. Oxford University Press, Oxford, 1994.

H. Kraus. Die Atmosphäre der Erde. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2000.

E. B. Kraus, J. Businger. Atmosphere-Ocean Int.eraction. Oxford University Press, Oxford, 1994.

K. Lahitzke. Die Stratosphäre. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999.

J. Lighthtil. Waves in Fluids. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

G. H. Liljequits, K. Cehak. Allgemeine Meteorologie. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1987.

J. Pedlosky. Geophysical Fluid Dynamics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

J. Pedlosky. Ocean Circulation Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

J. P. Peixotot, A. H. Oort. Physics of Climate. American Institute of Physics, New York, 1992.

H. Pichler. Dynamik der Atmosphäre. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1997.

S. Pond, G. L. Pickard. Introductary Dynamical Oceanography. Pergamon Press, Oxford, 1991.

E. Roeckner, L. Bengtsson, J. Feichter, J. Leiieveld, H. Rodhe. Transient Climate Change Simulations with a Coupled Atmosphere-Ocean üCM Including the Tropospheric Sulfur Cycle. Journal of Climate, 12, 3004–3032, 1999.

R. S. Scorer. Cloud Investigation by Satellite. Ellis Horwood, Ltd., Chichester, 1986.

J. E. Simpson. Sea Breeze and Local Winds. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

J. E. Simpson. Gravity Currents in the Environment and the Laboratory. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

S. Solomon. Stratospheric Ozone Depletion: A Review of Concepts and History. Rev. Geophys., 37, 275–316, 1999.

C. Timmreck, H.-F. Cfraf, J. Feichter. Simulation of Mt. Pinatubo Volcanic Aerosol with the Hamburg Climate Model ECHAM 4. Theoretical and Applied Climatology, 62, 85–108, 1999.

K. E. Trcnberth, ed. Climate System Modelling. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

M. G. Würfele, R. D. Sharman, A. Datta. Atmospheric Lee Waves. Ann. Rev. Fluid Mech., 28, 129–176, 1996.

J. R. Young. Wind-Generated Ocean Waves. Eisevier, Amsterdam, 1999.

Глава 12. Биоаэрогидродинамика

D. M. Bushnell. Drag Reduction in Nature. Ann. Rev. Fluid Mech., 23, 65–79, 1991.

C. G. Caro, T. J. Pedley, W. A. Seed. The Mechanism of the Circulation. Oxford University Press, Oxford, 1978.

R. T. W. L. Conroy, J. N. Mills. Human Circadian Rhythms. Churchill, London, 1970.

R. de Simone. Three-Dimensional Color Doppier. Futura Publishing, Armonk, New York, 1999.

O. Dössel. Bildgebende Verfahren in der Medizin. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.

M. H. Friedman, C. B. Bargeron, D. D. Duncan, G. M. Hutchms, F. F. Mark. Effects of Arterial Compliance and Non-Newtonian Rheology on Correlations between Internal Thickness and Wall Shear. J. of Biomechanical Engineering, 114, 317–320, 1992.

Y. C. Fung. Biomechanics — Motion, Flow, Stress and Growth. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.

Y. C. Fung. Biomechanics — Mechanical Properties of Living Tissues. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

Y. C. Fung. Biomechanics: Circulation. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

L. Glass, P. J. Hunter, A. D. McCulloch, ed. Theory of Heart: Biomechanics, Biophysics and Nonlinear Dynamics of Cardiac Function. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

J. Gray. Animal Locomotion. Weidenfeld & Nicolson, London, 1968.

M. Handke, D. M. Schäfer, G. Müller, A. Schöchlin, E. Magosaki, A. Geibel. Dynamic Changes of Atrial Septal Defect Area: New Insights by Three-Dimensional Volume-Rendered Echocardiography with High Temporal Resolution. Eur. J. Echocardiography, 2, 46–51, 2001.

K. Hayashi, Y. Yanai, T. Nmkt. A 3D-LDA Study of the Relation between Wall Shear Stress and Intimal Thickness in a Human Aortic Bifurcation. J. of Biomechanical Engineering, 118, 273–279, 1996.

P. J. Hunter, B. H. Smaill, P. M. F. Nielsen, J. J. le Grice. A Mathematical Model of Cardiac Anatomy. Computational Biology of the Heart. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

J. P. Keener, A. V. Panfilov. The Effects of Geometry and Fibre Orientation on Propagation and Extracular Potentials in Myocardium. A. V. Panfilov, A. V. Holden, ed., Computational Biology of the Heart. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

U. Kertzscher, K. Affeid. Messung der Wandschubspannung in Modellen von Blutgefäßen. Biomedizinische Technik, 45, 75–126, 2000.

D. N. Ku. Blood Flow in Arteries. Ann. Rev. Fluid Mech., 29, 399–434, 1997.

D. Liepsch. Flow in Tubes and Arteries — A Comparison. Biorheology, 23, 395–433, 1986.

D. Liepsch, ed. Biofluid Mechanics, Proceedings of the 3rd International Symposium, 17 of Fortschritt-Berichtc/VDI. VDI Verlag, Düsseldorf, 1994.

D. Liepsch. The Dynamics of Pulsatile Flow in Distensible Model Arteries. Technology and Health Care, 3,185–199,1995.

D. Liepsch, G. Thurston, M. Lee. Studies of Fluids Simulating Blood-like Rheological Properties and Applications in Models of Arterial Branches. Biorheology, 39–52, 1991.

D. Liepsch, S. Moravec. Pulsatile Flow of Non-Newtonian Fluid in Distensible Models of Human Arteries. Biorheology, 571–586, 1984.

M. J. Lighthill. Mathematical Biofluidmechanics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1975.

J. Malmivuo, R. Plonsey. Bioelectromagnetism. Oxford University Press, New York, 1995.

J. N. Mazumdar. Biofluid Mechanics. World Scientific, Singapore, London, 1992.

D. A. McDonald. Blood Flow in Arteries. Edward Arnold, London, 1960.

Motomiya. Flow Patterns in the Human Carotid Artery Bifurcation. Stroke: A Journal of Corebral Circulation, 15, 50–56, 1984.

M. P. Nash, P. J. Hunter. Computational Mechanics of the Heart. J. of Elasticity, 2001.

A. V. Panßlov, A. V. Holden. Computational Biology of the Heart. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

D. J. Patel, R. N. Vaishnav. Basic Hemodynamics and its Role in Disease Processes. University Park Press, Baltimore, 1980.

T. J. Pedley. The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

K. Perktold, G. Rappitsch. Mathematical Modelling of Arterial Blood Flow and Correlation to Art. erioscierosis. Technology and Health Care, 3, 139–151, 1995.

K. Perktold, M. Resch, H. Florian. Pulsatile Non-Newtonian Flow Characteristics in a Three- Dimensional Human Catroid Bifurcation Model. J. of Biomechanical Engineering, 113, 464–475, 1991.

C. S. Peskm, D. M. McQueen. Mechanical Equilibrium Determines the Fractal Fiber Ar-

chitecture of Aortic Heart Valve Leaflets. American Journal of Physiology, 363–6135, 1994.

C. S. Peskm, D. M. McQueen. Fluid Dynamics of the Heart and its Valves. Mathematical Modelling, Ecology, Physiology and Cell Biology. Prentice Hall, New Jersey, 1997.

A. Poll, D. Liepsch, C. Weigand, J. McLean. Two and Three-Dimensional LDA Measurements and Shear Stress Caiculations for a True Scale Elastic Model of a Dog Aorta with Stenosis. Automedica, 18, 163–210, 2000.

L. Schauf, D. F. Moffet, S. B. Moffet. Medizinische Physiologie. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.

E. Schubert, ed. Medizinische Physiologie. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.

R. Skalak, N. Özkaya. Biofluid Mechanics. Ann. Rev. Fluid Mech., 21, 167–204, 1989.

M. Sugawara, F. Katya, A. Kitabatake, H. Matmo. Blood Flow in the Heart and Large Vessels. Springer, Tokyo, Berlin, Heidelberg, 1989.

C. D. Werner, F. B. Sachse, C. Baltes, O. Dössei. The Visible Man Dataset in Medical Education: Electrophysiologie of the Human Heart. Proc. Third Users Conference of the National Library of Medcine's Visible Human Project, 1–81, 2000.

G. E. W. Wolstenholme. Circulatory and Respiratory Mass Transport. Churchill, London, 1969.

M. Zacek, E. Krause. Numerical Simulation of the Blood Flow in the Human Cardiovascular System. J. of Biomechanics, 29, 13–20, 1996.

Предметный указатель

Абсолютная
— завихренность, 508
— неустойчивость, 295, 297, 353
Адиабата Гюгонио, 180
Адиабатическое
— расслоение , 27
— расширение, 21
— сжатие, 21
Адиабатная стенка, 223
Адиабатное ограничение, 301
Аккомодация энергии, 500, 501
Алифатический углеводород, 448, 452
Анализ
— Флоке, 336
— влияния реакции, 460
— устойчивости, 300, 311, 328, 330, 354
— чувствительности, 446, 447, 460
Аналогия
— Кармана, 379
— Прандтля, 378
— Рейнольдса, 374, 378
Аортная дуга, 581
Аппроксимация Буссинеска, 226, 300
Артериальное разветвление, 581
Артериальный поток, 580, 584
Артериола, 557
Артерия, 557
Асимптотическая стабильность, 296
Атмосфера, 8, 25
Аэродинамика, 1, 43, 241
Аэродинамическая труба, 266
Аэрозольные течения, 424

Бароклинная неустойчивость, 508, 527, 532
Барометр, 20, 30
Барометр-анероид , 20
Барометрическая формула для измерения высот, 26
Баротропное течение, 511
Баффтинг, 276
Безразмерные показатели, 222
Бензиновые двигатели (двигатели Отто), 491
Бета-параметр, 508
Биение, 99
Бимолекулярные реакции, 439
Брутто-реакция, 435

Вал воды, 102
Вектор
— импульса, 220
— скорости, 221
Вектор-решение, 220
Вена, 558
Вертикальная пластинка, 357, 361
Вертолет, 91
Ветер суша-море, 517

Взаимодействие
— газа и стенки, 499, 501
— скачка-пограничного слоя, 274
Взаимодействующие уравнения, 573
Вибрационная неустойчивость, 308
Вибрирующие формы возмущения, 307
Вискозиметр Куэтта, 321
Вихревая дорожка Кармана, 134, 157, 290
Вихревое кольцо, 64, 86
Вихревой слой, 87
Вихревые нити, 84, 85
Вихрь, 525
— Тейлора, 289, 320
— поперечного потока, 340, 344
Внешние силы, 14, 15
Внутреннее течение, 549
Внутренние силы, 14
Внутренняя энергия, 178, 221, 234, 539
Водяная турбина, 95
Возвышение, 104
Воздушное течение, 503
Воздушные корабли (дирижабли), 163
Возмущения, 328
Волна, 97
— Толмина–Шлихтинга, 117, 290, 326
— плотности, 410
Волновая неустойчивость, 330
Волновое сопротивление, 156, 252
Волнообразная стенка, 193
Волноплан, 285
Волны
— Гельмгольца, 101
— Росби, 509, 536
— давления, 171
— на поверхности моря, 536
— от движения корабля, 100
Вращающийся
— сосуд, 139
— цилиндр, 136
Временная
— неустойчивость, 294
— устойчивость, 294
Встречные скачки уплотнения, 189
Вторичная нестабильность, 307, 335, 354
Вторичное течение/потоки, 138, 550, 581
Выброс углеводорода, 491
Вынужденная конвекция, 6, 357–361, 368
Выпрямитель, 266
Вязкие жидкости, 106
Вязкий нижний подслой, 127, 128
Вязкость, 13, 106

Газ, 13, 19, 39, 51, 169
Гашение пламени, 480, 490
Геометрическая высота, 53
Геострофиса , 506
Геострофная скорость, 506
Геофизическая гидродинамика, 503
0-Герц-моды, 334
Гетерогенный катализ, 462
Гидравлика, 43
Гидравлически гладкий, 129
Гидродинамика, 1, 43, 53, 54, 67, 79
Гидрометрическая трубка Прандтля, 67
Гидростатика, 22
Гидростатическое напряжение, 17

Гиперзвуковой полет, 283
Главное напряжение, 16
Глубинные волны, 537
Головной скачок уплотнения, 194, 198
Гольфстрим, 5, 9, 535, 536
Гомогенная
— модель, 395
—— равновесия, 416, 417
Гомогенный реактор, 487
Горелка Бунзена, 154, 456
Горение смешанных партий, 465
Горизонтальный цилиндр, 367
Градиентное образование, 467
Градирня, 6
Граница
— дальнего поля, 223
— поверхности, 101, 227
Граничная поверхность/пограничный слой, 291, 328, 340
Граничные условия, 222, 301, 311, 322, 329
Грануляция, 288
Групповая скорость, 99, 332
Группы волн, 99

Давление, 17, 221
— жидкости, 17
— торможения, 58
Движение жидкостей в каналах, 149
Двойная
— диффузионная конвекция, 317
— диффузионная неустойчивость, 314
Двухжидкостная модель, 391
Двухфазный поток, 384, 427
Дельта-крыло, 50, 277, 279
Десорбция, 500
Диаграмма
— Берджи (Borghi), 485, 487
— Никурадзе, 151
— поляры крыла, 249, 250
— разветвления, 298
— устойчивости, 121, 303, 318, 324
Диастола, 556
Динамика, 51, 106, 169
— вихрей, 83
— газа, 169
Динамическая вязкость, 106
Динамическое давление, 58
Дисперсионное отношение, 330
Дисперсия, 99, 476
— по Фавре, 477
Дисперсный пузырьковый поток, 390
Диссипативные потоки, 221
Диссипация, 375
Диссоциация, 493, 495
Диссоционная реакция, 493
Дифференциальные уравнения возмущений, 219, 312
Диффузионная
— конвекция, 313, 357
— скорость, 234
Диффузионное число Релея, 360
Диффузия, 360
Диффузное пламя, 464
Диффузор, 91, 154
Длина, 220
— Монина–Обухова, 515
— Экмана, 512
Длинные волны, 538
Dobson-единица, 544
Дозвуковая

— аэродинамическая труба, 266
— передняя кромка, 279
Дозвуковое обтекание, 254
Дозвуковой поток, 191
Дозвуковый поток, 194
Доля, 384
— времени, 384
— массы, 386
— объема, 384
— расширения, 330, 331
— смеси, 458, 474, 479
Дробь элемент-массы, 235, 458, 475
Дроссель (вентиль), 176
Дроссельная шайба, 153
Дыхание, 549

E^N-метод, 348

Желудочек, 555
Жидкости, 13

Зависимость от давления, 440
Зависимые переменные, 220
Завихренность, 508
Зажатое равновесие, 415
Зазор (щель), 79
Закон
— Био-Савара, 85, 257
— Блазиуса, 151
— Бойля–Мариотта, 20, 21, 25
— Гагена-Пуазейля, 107, 166
— Гей-Люссака, 26
— Ламба, 163
— Мариотта-Гей-Люссака, 20
— Ньютона, 14
— Стокса, 163
— действия масс, 433, 437
— для внешнего потока, 130
— о количестве движения, 88, 95
— сопротивления Ньютона, 154
— сохранения
—— импульса, 202
—— энергии, 178, 215
Заместительная реакция, 493
Замкнутая линия, 68
Замораживание, 197
Замороженная модель равновесия, 417
Зигзагообразная неустойчивость, 308

Идеальная жидкость, 51, 156
Идеальный газ, 216, 217
Изменение контура, 275
Изображение, получаемое с помощью окрашивания стенки (дна), 139
Изотермическая стенка, 222
Изотермическое
— изменение состояния, 21
— ограничение, 301, 303, 305
Изоэнтропный, 224
Импульс в крови, 551
Ингибиторы, 435
Индуцированное сопротивление, 252
Интегральная мера длины, 465
Интегральный метод Лагранжа, 476
Испытания, 266
Истечение, 55, 56, 61, 79
Источник, 74
Источниковый член, 234, 447
Итоговое
— уравнение, 539
—— для водной фазы, 539

Кавитация, 7, 419, 420
Кажущееся (мнимое) касательное напряжение, 96
Канал, 140
Капиллярность, 34
Капиллярные волны, 98
Каприолы, 558
Карты потоков, 387
Касательная плоскость, 504
Катализатор, 462
Квазистационарность, 442, 443
Кильватерный поток, 50, 130, 351
Кинематика, 39
Кинематическая вязкость, 110
Кинетическая энергия, 178
Климат, 541
Ключевая проблема, 467, 482
Колебание, 61
Колебательная степень свободы, 492, 498
Колеблющиеся тела, 140
Колено, 138
Кольцево-капельный поток, 388
Кольцевой поток, 387, 390
Конвективная
— неустойчивость, 294, 297
— передача
—— вещества, 357
—— тепла, 357
Конвективные потоки, 221
Конвективный поток, 5, 226
Конвекционная ячейка, 306
Конвекционные цилиндры, 305
Конвекция, 358, 360
— Марангони, 310, 313
— Релея-Бенара, 5, 298, 357
Конвергенция (схождение) линий обтекания стенки, 276
Конкорд, 282
Консервативная
— переменная, 221
— форма, 221
Константа равновесия, 435
Контрольная поверхность, 89
Конус Маха, 171
Концентрация массы, 227
Координаты жидкости, 39
Кориолисова сила, 503
Короткие волны, 537
Косо-варикозная (наклонно-расширенная) неуйсточивость, 308
Косой скачок уплотнения, 184
Коэффициент
— вязкости, 467
— захвата, 499
— подъемной силы, 247
— расширения, 20
— скорости, 433, 440
— сопротивления, 163, 247, 534
—— давления, 157
— теплового расширения, 226
— трения, 148
— чувствительности, 446
Краевой угол, 36
Крестообразный цилиндр, 497, 498
Кривые «насыщения-распада», 441
Критерий отрыва, 276
Критическая точка, 44
Критический поток массы, 410, 412
Критическое
— давление, 175
— число Рейнольдса, 115, 118, 121

Кровеносный сосуд, 579
Кровообращение, 555, 557
Кровь, 552
Кровяные тельца, 552
Кругооборот дыхания, 552
Крыло, 81, 87, 241, 244, 245, 257, 263
— подветренной стороны, 511
— стреловидной формы, 270

λ-структуры, 335
Ламинарная конвекция, 361
Ламинарно-турбулентный переход, 121
Ламинарное
— движение, 114
— крыло, 273
— течение в трубе, 151
Ламинарные пограничные слои, 111
Лейкоциты, 560
Летательные аппараты при входе в атмосферу, 499
Линейное газодинамическое уравнение, 190
Линия
— подъемной силы, 258
— равновесия, 478
— тока, 40, 69
Логарифмический закон ветра, 515
Логарифмический закон стенки, 128
Локальная
— неустойчивость, 296, 346
— устойчивость, 294
Локальные возмущения, 478
Лямбда-структура, 326

Мак-возмущения (мак-моды), 342
Манометр, 20
— высокого давления, 29
— низкого давления, 29
Массообмен, 357, 380
Масштаб
— длины, 465
—— Колмогорова, 465
Математическое выражение Рейнольдса, 116, 209
Математическое выражение Флоке, 337
Мгновенное состояние, 68
Меандры, 139
Место отрыва, 113
Метод
— Монте-Карло, 470, 484
— сечений, 15
Методы
— многократных шкал, 328
— травления, 461
Механизм
— Линдемана, 441
— реакции, 437, 498
Механика биотечений, 9, 549
Микроциркуляция, 551
Минимальная поверхность, 34
Митральный (двустворчатый) клапан сердца, 555
Многофазное течение, 6, 231, 383
Модели
— «линейных вихрей», 474
— «разрушения вихрей», 473
— потоков, 390
— турбулентности, 467, 474
Моделирование
— «Большого вихря», 474
— PDF/турбулентная модель, 485
— процессов в двигателе внутреннего сгорания, 474

Модель
— $k-\epsilon$, 474
— «диссипации вихря», 485
— Муди, 417
— Линдемана, 440
— дрейфующего потока, 396
— турбулентности $k-\epsilon$, 467
Модельные уравнения, 219, 223
Молекулярность, 436
Момент, 245
— количества движении, 94
Мономолекулярная реакция, 439, 441
Морской спектр, 538
Мышечные волокна, 562

Набегающий поток, 152, 551
Нагнетательный клапан, 556
Напряжение, 15, 17, 222
Напряженное состояние, 14–16
Насадка Борда, 90
Начальное условие, 223
Начальный вихрь, 64, 82, 253
Негармоничный осциллятор, 495
Независимая переменная, 220
Неньютоновские
— жидкости, 108
— среды, 164
Неоднородная жидкость, 23, 33
Неполная модель равновесия, 416
Непосредственное численное моделирование, 465
Непрерывное течение, 43, 179, 201, 492, 539
Неразрывность, 368
Несмешанное лучевое пламя, 464, 474, 477
Неустойчивое расслоение, 299
Неустойчивость, 4, 287, 293, 427, 430
— Гертлера, 324
— Релея-Бенара, 288
— Релея–Тейлора, 427
— Тейлора, 319
— Толмина–Шлихтинга , 333
— волн плотности, 431
— потока сдвига, 326
— слоев, 297
Неустойчивый пограничный слой, 120
Ньютоновские
— жидкости, 108
— среды, 106

Область
— Flamelet, 486
— высокого давления, 441
— низкого давления, 440
Область/фронт низкого давления, 527
Облачная кавитация, 420
Образование
— вихрей, 62, 132
— воды, 435
— окиси азота, 469
— формальдегида, 448
Обратная реакция, 434
Обтекание, 57, 549
— автомобиля, 1, 49
— двугранника, 155
— крыла, 1, 2, 251, 268
— пластинки, 158
— пластинки по Кирхгофу, 157
— пограничного слоя, 159
— профиля, 192, 194, 245
— угла, 127

— цилиндра, 379
— шара, 162
Общая энергия, 221
Объемный резервуар, 551, 558
Однородная жидкость, 23
Одноточечная PDF (PDF по одной точке), 484
Одношаговая модель, 451
Озоновая дыра, 544
Океан, 9
Окисление алкана, 448
Окислитель, 455
Околозвуковый поток, 196
Орографический вихрь, 530
Основное состояние, 300, 317
Основной поток, 327
Основные
— уравнения, 300, 322, 495
—— кинематики, 40
Относительная скорость, 386
Отрыв, 276, 277
Отрыв потока, 132, 136
Отсасывание, 136
Очищение отходящего газа , 459

Pdf-моделирование, 482
Pdf-уравнение движения, 470
Пальчиковая неустойчивость, 317, 318
Пара вихрей, 85
Параллельная струя, 188
Параметр
— Аррениуса, 493, 495
— Кориолиса, 504
— Мартинелли, 386
— релаксации времени, 419
Парниковый эффект, 541, 542, 544
Парциальная плотность, 227
Пассатный ветер, 532
Пенистый поток, 387
Первичная неуйсточивость, 335
Передача
— вещества, 5, 357
— тепла, 5, 226, 357
— энергии, 495
Перемешивание Прандтля, 1, 125, 126
Переход, 115, 326, 344, 348
— Толмина–Шлихтинга, 344
Переходный поток, 549
Пик-плоскость (уровень), 340
Пиролиз (горение) углеводорода, 449
Плазма крови, 552, 560
Плазматические процессы, 459
Плазменный реактор, 460
Пламя
— Бунзена, 456
— воздуха и метана, 478, 485
— пропан-кислород, 449
План скоростей, 187
Плоская пластинка, 380
Плоские волны, 538
Плоский пограничный слой, 326
Плотность, 220
— диффузионного потока, 234
— массы, 234
Поверхностное натяжение, 34
Поверхность
— моря, 33
— раздела, 62
— уровня, 33
Пограничный слой Экмана, 513
Подветренные волны, 524
Подвод тепла, 501

Подковообразный вихрь, 50, 140, 257
Подложка, 462
Подъем, 50, 81, 83, 245, 252
Подъемная сила, 23, 226
Полая вена, 558
Полет
— при входе в плотные слои атмосферы , 491
— птиц, 242
Ползущее течение, 110, 141
Политропное расслоение, 28
Полное давление, 58
Полый вихрь, 81
Поперечная неустойчивость, 270, 333
Порядок реакции, 433
Постоянная
— Бернулли, 190
— Кармана, 128
Потенциал скоростей, 69
Потенциальная
— завихренность, 508, 510
— температура, 506
— функция, 224
— энергия, 178
Потенциальное течение, 67, 69, 74, 80, 156, 224
Потенциальное уравнение, 219, 224
Потенциальный барьер завихрения, 547
Потеря
— давления
—— на удар, 91
—— ускорения, 405
Поток, 39
— Хеле–Шоу, 142
— в критической точке, 73, 77
— в трубе, 114, 149, 164, 326, 582
— грунтовых вод, 141
— диффузии, 234
— крови, 12
— пограничного слоя, 3, 116, 130, 327
— с волной пропуска, 388
— сдвига, 106, 313
Правило
— Аккерета, 247, 279–281
— Прандтля, 192
— Прандтля-Глауэрта, 247, 279–281
— фаз, 494
Предкрылок, 137
Предсердие, 555
Представление Flamelet, 490
Предэкспонентный множитель, 438
Преобразование
— Гастлера, 333
— Сквайера, 332
Прерывание, 471
Прерывистый поток, 390
Приближение пограничного слоя, 455
Приближение среднего поля, 463
Приведенная
— скорость, 385
— фазовая скорость, 386
Прием параллельного потока, 118, 329
Принцип
— д’Аламбера, 88
— отвердевания, 14
Пробковый поток, 387, 388
Проблема
— двух потоков, 458
— нейстойчивости, 115

— собственного значения, 120, 330
Прогноз погоды, 474
Прогнозирование погоды, 540
Пропеллер, 92
Противоизлучение, 542
Противоположное потоку пламя, 454, 479, 481
Противопоток (поток в обратном направлении), 455
Протравливающий реактор, 461
Профиль, 244, 245
— крыла, 79
Прямая реакция, 434
Прямой скачок уплотнения, 179
Пузырчатая кавитация, 420
Пузырьковый поток, 387, 388
Пульсирующие волны, 97
Пылевой вихрь, 530
Пьзометрическая высота, 53

Равновесие, 13, 24, 477
Равновесная химия/равновесные реакции, 476
Развитие возмущений, 294
Разделительный слой, 133
Распределение
— давления, 281
— подъемной силы, 255
Распространение возмущений давления, 169
Растяжение, 480
Расчет крыла, 263
Расширение
— Прандтля-Майера, 183
— артерий, 551
— струи жидкости, 168
Реактивные течения, 234, 464
Реактивный поток, 532
Реакции
— второго порядка, 434
— третьего порядка, 434
Реакционная зона, 487
Реакция
— вызывающая колебание, 495
— на внешней поверхности, 462, 499
— первого порядка, 434
Резонанс, 353
Реология, 560
Решение Стокса, 110, 163
Решетка из крыльев, 92
Ротора Флеттнера, 83
Русло, 103, 150

Сверхзвуковая
— аэродинамика, 277
— передняя кромка, 279
— свободная газовая струя, 175, 185
Сверхзвуковое течение, 491
Сверхзвуковой
— воздушный поток, 279
— самолет, 282
Свободная
— конвекция, 6, 357, 360, 361, 364
— поверхность жидкости, 97, 301
— струя, 126, 183
— энтальпия, 494
Свободное молекулярное течение, 491
Свободные поверхности, 303, 318
Свободный от вращения, 69, 224
Свойства вещества (материала), 222
Сегнерово колесо, 90
Седловая точка, 48
Сенсорность (чувствительность), 446

Сепаратная модель, 402
Сердечный
— клапан, 575
— цикл, 9
Сечение соударения, 439
Сжимаемость, 376
Сигарета, 287
Сила
— вихря, 466
— давления, 51
— подъема, 37
— реакции, 89, 90
— тяжести, 51
Система
— вихря, 254
— волн, 100, 101
— масс, 14, 15
Систола, 556
Скалярная диссипация, 479
Скалярная скорость диссипации/скалярная диссипационная скорость, 476
Скалярная сохраняющая величина, 475
Скачок уплотнения, 2, 173, 223, 270, 492
Скорости пламени/скорость горения пламени, 451, 489, 490
Скоростная высота, 53
Скорость, 220
— диссипации , 467
— дрейфа (сноса), 386
— звука, 169, 170, 410
— образования, 437
— реакции, 433, 468
— смеси, 396
— смешивания, 477
— струи, 478
— травления, 462
Скрученная (цилиндрическая) неустойчивость, 308
Следующая реакция, 443
Слияние, 62
Слияние вихря, 351
Сложная реакция, 435
Слоистый поток, 390
Слой
— Прандтля, 515
— Экмана, 513
— жидкости, 226
Слойная кавитация, 420
Смазка подшипников, 143
Смерч, 530
Смерчь, 8
Смешанное
— пламя, 448, 464
—— метана, 466
Смешанное пламя, 485, 488
Смешанные модели, 394
Смешанный слой, 471
Совершенный реактор, 487
Совокупность средних значений, 232
Сокращение, 56
Сопло Лаваля, 175, 177
Сопротивление, 154, 160, 245
— давления, 155
— жидкости, 156
— трения, 155, 158
Сохранение массы, 201
Спадание турбулентного пламени, 481
Спираль Экмана, 512
Спиральная камера, 60

Спокойное течение, 104
Среднее значение, 95
Среднее значение по Фавре, 477
Средняя продолжительность, 439
Средняя свободная длина пробега, 492
Статическое давление, 58
Стационарное течение, 88
Степень
— возбуждения, 495
— диссоциации, 492
— свободы вращения, 492, 495
Сток, 74
Столб жидкости, 61
Стохастическая частица, 484
Стратосфера, 544
Стремительное течение, 104
Струйки пламени, 479
Струйное пламя, 456, 475
Струйное пламя метана, 479
Струйный насос, 154
Струйный поток, 532
Структура «пик-впадина», 340
Структура пламени, 449, 488
Суперкавитация, 420

Тангенциальная продувка, 137
Тангенциальный слой, 50, 127
Твердые поверхности, 301, 305
Температура, 222
— восстановления, 376
— перехода, 492, 493
Температурная зависимость, 438, 439
Температурная неравновесность, 494, 495
Температурные стенки, 369
Теорема
— В. Томсона, 68, 71
— Гельмгольца, 84, 85, 258
— Кутта–Жуковского, 92, 94, 253
— момента количества движения, 94
Теория
— крыла, 1, 253
— крыла Прандтля, 259, 261
— пограничного слоя, 1, 112
— устойчивости, 117, 118
Тепловая энергия, 178
Тепловой поток, 222, 364
Теплозащита, 499
Теплообмен, 357, 380
Теплопроводность, 358
Термическая ячеистая конвекция, 4
Термические системы ветров, 517
Термическое уравнение ветра, 507
Термокапиллярная конвекция, 310
Течение
— в круглой трубе, 164
— в сердце, 561, 573
— в щели, 145
— с высокой скоростью, 492
— с высокой энтальпией, 492
Течения в океане, 503
Толщина
— вытеснения, 113
— пограничного слоя, 113, 551
— потери количества движения, 113
Топология, 44
Торнадо, 527, 530
Точка торможения (критическая точка), 57
Траектория частиц, 40
Трансзвуковая аэродинамика, 267
Трение жидкости, 51, 107

Трехмерный пограничный слой крыла, 268
Трехстворчатый клапан сердца, 555
Тромбоциты, 560
Тропический циклон, 528
Трубка Пито, 58, 67
Трубки Вентури, 153
Трубки тока, 41
Турбина, 92, 94
Турбулентная кинетическая энергия, 231
Турбулентное
— движение, 114, 467
— пламя, 464
— смешанное пламя, 8
— смешивание, 474
— течение в трубе, 151, 371
— установившееся течение, 95
— число Дамкёллера, 486
— число Карловитца, 486
— число Рейнольдса, 465, 486
Турбулентность, 114, 124
Турбулентность на стенке, 127
Турбулентные возмущения, 123
Турбулентные пятна, 117, 123, 326
Турбулентный процесс смешивания, 474
Тяжелые волны, 98, 523, 536

U-Образный жидкостный манометр, 28
Угол
— Маха, 171
— атаки, 249
— скольжения, 244
Удлиненный профиль, 257
Узел, 48
Уменьшение NO_x, 459
Уравнение
— Аккерта, 248
— Аррениуса, 438
— Бернулли, 51, 53, 55, 161, 190
— Буссинеска, 219, 240
— Лапласа, 73, 76
— Навье-Стока, 106–108, 573
— Ньютона, 51
— Орра-Зоммерфельда, 120, 332
— Релея-Плессета, 228
— Сатерленда, 237
— Фитца–Хью–Нагумо, 571
— Эйлера, 54, 71, 219, 223
— Эйлера для турбины, 94
— движения, 170, 483, 539, 567
— для колебаний струны, 190
— импульса (количества движения), 179
— неразрывности (непрерывности), 42, 170
— пограничного слоя, 3, 219, 230, 362
— пограничного слоя Прандтля, 113
— скоростей, 440
— состояния, 20
— сохранения, 219
— элемент-сохранения, 235
— энергии, 180, 209, 213, 216, 217
Уравнения
— Буссинеска, 226
— Кессона, 561
— Навье-Стока, 3, 207, 465
— Рейнольдса, 209, 212, 219, 230
Ураган, 5
Условие

— неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, 350, 389
— обтекания Кутта—-Жуковского, 86
— прилипания, 106, 222
— скольжения, 223
Условный коэффициент переменной, 483
Усреднение по времени (по Фавре), 209
Усредненная по плотности энтальпия, 397
Установившееся течение в трубе, 152, 368
Устойчивое течение пограничного слоя, 120
Устойчивость, 24, 287, 293
Участок успокоения потока, 267

Фаза, 329
Фазовая
— доля, 385
— скорость, 385
Фазосвязанное состояние, 339
Физическая атмосфера, 30
Физические переменные, 221
Flamelet-модель, 487, 488
Фокус, 48
Форма сохранения, 219, 221, 230
Формула
— Сатерленда, 222
— Шези, 150
— истечения Торричелли/теорема Торричелли, 55
Формы потоков, 387
Фронт смешанного пламени, 487
Функция
— β, 471
— Гаусса, 471
— вероятной плотности, 469

Хвостовой скачок уплотнения, 194
Химическая неравновесность, 493, 494
Химическое равновесие, 493

Центробежная сила, 139, 503
Циклон, 527
Циркуляция, 68, 80
— Бревера-—Добсона, 549
— Хедли, 531, 532
— крови, 549

Частичное равновесие, 442, 444
Частота
— Брента-—Вяйсяла, 536
— колебания, 493
Число
— Вебера, 428
— Вомерслея, 583
— Гертлера, 324
— Грасхофа, 360
— Дамкёллера, 486
— Карловитца, 486
— Кнудсена, 492
— Льюиса, 316
— Марангони, 312
— Маха, 171, 190, 196
— Мортона, 399
— Нуссельта, 298, 359
— Релея, 298, 359
— Росби, 505
— Тейлора, 322
— Фруда, 156
— Шмидта, 360
— Этвоса, 399

— столкновений, 439

Шайба Сера, 66
Шероховатая
— поверхность, 160
— труба, 152

Щель Хеле-Шоу, 143

Эквипотенциальные поверхности, 33
Экокардиография, 10
Эластичные нити, 573
Электрическое возбуждение, 563
Элементарная
— нить вихря, 257
— реакция, 435, 437
Эллиптическое уравнению Лапласа, 190
Энергия
— активации, 438
Энтальпия, 179, 235
— диссоциации, 501
Эритроциты, 560
Эффект
— Вайсенберга, 166
— Магнуса, 81, 83

Ячеистая конвекция, 288, 298, 520

Герберт Эртель мл. (ред.)

Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 13.08.2007. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 45,11. Уч. изд. л. 45,12.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №29.

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295

Переплет выполнен в ГУП УР «Ижевский полиграфический комбинат»
426039, г. Ижевск, Воткинское шоссе, 180.