

LECTURES ON ELASTICITY THEORY

B.E.Pobedria
D.V.Georgievskii



Editorial URSS
Moscow, 1999

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Б.Е.Победря
Д.В.Георгиевский



Эдиториал УРСС
Москва, 1999



Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-14063)

Рецензент: академик И. И. Ворович

Победря Борис Ефимович, Георгиевский Дмитрий Владимирович
Лекции по теории упругости. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 208 с.

ISBN 5-8360-0001-8

Книга ориентирована на широкий круг читателей, знакомых с дифференциальным исчислением в объёме втузовской программы и желающих ознакомиться с курсом теории упругости, читаемым на механико-математических факультетах классических университетов. По ходу изложения материала вводится необходимый дополнительный математический аппарат.



9 785836 000011 >

ISBN 5-8360-0001-8

© Б. Е. Победря,
Д. В. Георгиевский, 1999
© Эдиториал УРСС, 1999

Оглавление

Предисловие	6
Лекция 1. Тензорная алгебра	7
Лекция 2. Задачи по тензорному анализу	17
Лекция 3. Кинематика деформируемой среды	25
Лекция 4. Законы движения деформируемой среды	32
Лекция 5. Задача в перемещениях	42
Лекция 6. Задача в напряжениях	49
Лекция 7. Общие теоремы и фундаментальные решения	58
Лекция 8. Задача Буссинеска—Черрути	67
Лекция 9. Плоская задача. I	74
Лекция 10. Плоская задача. II	79
Лекция 11. Динамические задачи	89
Лекция 12. Техническая теория балок	100
Лекция 13. Растяжение, изгиб и кручение стержня	111
Лекция 14. Функция напряжения при изгибе и кручении	119
Лекция 15. Теория пластин	129
Лекция 16. Кинематика тонких оболочек	137
Лекция 17. Статика оболочек	147
Лекция 18. Контактная задача Герца	157
Лекция 19. Устойчивость равновесия и движения	169
Лекция 20. Устойчивость процессов деформирования	180
Библиография	192
Предметный указатель	194
Именной указатель	202

Предисловие

По теории упругости имеется много учебников. Некоторые из них упомянуты в приведённом списке литературы. В большинстве упомянутых речь идет о приложениях к тому или иному инженерному направлению.

В отличие от них настоящая книга ориентирована на широкий круг читателей, знакомых с дифференциальным исчислением в объёме втузовской программы и желающих ознакомиться с курсом теории упругости, читаемым на механико-математических факультетах классических университетов. По ходу изложения материала вводится необходимый дополнительный математический аппарат.

Условно весь материал разбит на двадцать лекций, что приблизительно соответствует семестровому курсу. Чтобы не выходить за эти рамки, пришлось исключить традиционно читаемые разделы, например, посвящённые численным и экспериментальным методам, теории конечных деформаций. (Впрочем, авторы надеются в будущем восполнить этот пробел.)

Мы уверены, что после изучения книги читатель сможет выйти на передний край науки о теории упругости и свободно читать любую специальную литературу по этому предмету. В книге по многим вопросам отмечаются некоторые «тонкие» моменты, отсутствующие не только в учебной литературе, но и в монографиях.

Отдельные части курса читались авторами в Московском государственном университете на механико-математическом факультете и в Высшем Колледже — Факультете наук о материалах, а также в Гаванском университете. Авторы признательны доктору Рейнальдо Родригесу, представившему свои конспекты наших лекций.

Мы будем благодарны всем читателям за замечания любого характера.

Издание книги осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98–01–14063), а также Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект № 426).

Лекция 1

Тензорная алгебра

В механике сплошной среды наряду со скалярными (плотность, давление, температура) и векторными величинами (скорость частицы, сила, момент) изучаются геометрические объекты и более сложной природы — тензоры. Дело в том, что законы механики должны быть справедливыми в любой системе координат. Для этого их надо сформулировать в терминах объектов, инвариантных относительно изменения системы координат. Например, вектор скорости движения некоторой частицы не должен зависеть от того, что Сидоров выбрал для его изучения одну систему координат, а Родригес другую.

Что же такое «вектор»? Некоторые студенты отвечают на этот вопрос так: «вектор — это отрезок, имеющий определённую длину и точку приложения». В связи с этим представим себе пересечение двух улиц, например, Тверской и Садового кольца в Москве (рис. 1).

Пусть по Тверской улице в направлении центра каждую минуту пробегает 15 машин, а в это же время по Садовому кольцу из тоннеля под Триумфальной площадью выскакивают 20 машин. Имеются определённые отрезки, обладающие длиной и точкой приложения (в точке пересечения улиц). Тогда надо принять, что эти отрезки — векторы. Поэтому, складывая их по правилу параллелограмма, мы придём к выводу, что в Концертный Зал имени П. И. Чайковского ежеминутно врывается $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ машин!? Впрочем, можно дать инвариантные определения вектора, не зависящие от введения той или иной системы координат. Например, можно определить вектор как элемент линейного векторного пространства, как это делается в линейной алгебре. Однако часто требуется координатное описание объекта. Для этого из линейно независимых векторов, число которых, разумеется, совпадает с размерностью пространства, строится базис, или репер. На плоскости его можно ввести так, как показано на рис. 2.



Рис. 1.

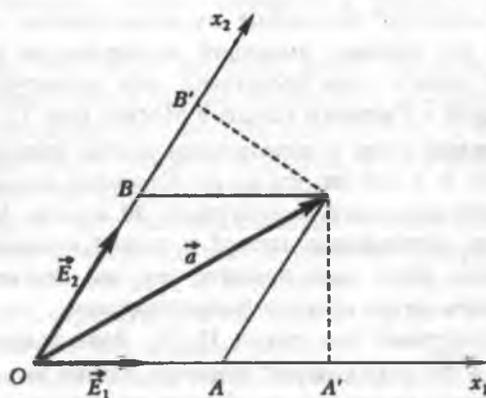


Рис. 2.

Вектор \vec{E}_1 имеет длину $|\vec{E}_1|$, а вектор \vec{E}_2 имеет длину $|\vec{E}_2|$. Тогда всякий вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ может быть представлен разложением

$$\vec{a} = a_1 \vec{E}_1 + a_2 \vec{E}_2. \quad (1.1)$$

Первое слагаемое в правой части (1.1) имеет длину $|OA|$ (рис. 2), а второе — длину $|OB|$:

$$|a_1 \vec{e}_1| = |OA|, \quad |a_2 \vec{e}_2| = |OB|. \quad (1.2)$$

Следовательно, числа a_1 и a_2 можно считать координатами вектора \vec{a} в репере \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Заметим, что полностью определяют вектор \vec{a} и ортогональные проекции $|OA'|, |OB'|$ (рис. 2).

Ради простоты мы всюду далее предположим, что рассматривается только ортогональная система координат (желающим быстро научиться работать с криволинейными координатами мы рекомендуем учебник [19]). В этом случае вектор \vec{a} однозначно представляется через ортонормированный репер \vec{e}_1, \vec{e}_2 (рис. 3):

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \quad |\vec{e}_1| = 1, \quad |\vec{e}_2| = 1, \quad (1.3)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0. \quad (1.4)$$

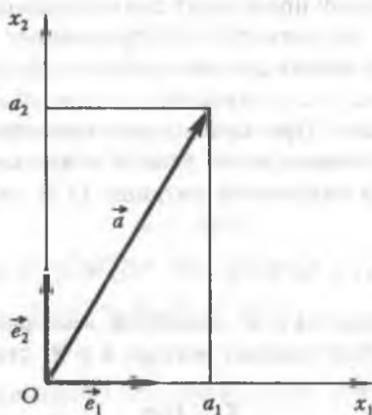


Рис. 3.

Равенства (1.4) можно записать и по-другому, если ввести символы Кронекера (компоненты двумерной единичной матрицы):

$$\delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & \text{если } I = J, \\ 0, & \text{если } I \neq J. \end{cases} \quad (1.5)$$

Тогда (1.4) имеют вид

$$\vec{e}_I \cdot \vec{e}_J = \delta_{IJ}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь трёхмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 с ортонормированным репером \vec{e}_i . Условие его ортонормированности можно

записать с помощью трёхмерных символов Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.7)$$

Аналогично (1.6) имеем

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}. \quad (1.8)$$

Любой вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \equiv a_i \vec{e}_i. \quad (1.9)$$

Условимся всякий раз, когда в одночлене встречается какой-нибудь латинский индекс дважды, считать, что происходит суммирование от 1 до 3, если индекс изображается малой буквой, и от 1 до 2, если эта буква большая. Если же встречается дважды или большее число раз греческий индекс, то суммирование по нему не производится. Например, выражение $a_\alpha \vec{e}_\alpha$ представляет собой составляющую вектора \vec{a} по оси x_α . Индекс, по которому происходит суммирование, называется немым. Его можно, как и переменную интегрирования в подынтегральном выражении, заменить любым другим индексом. Например, $x_i y_i = x_j y_j = x_k y_k$ (1). Индекс, встречающийся в каждом одночлене один раз, называется свободным. При правильном написании любой формулы каждое её слагаемое должно иметь одни и те же свободные индексы.

Заметим, что след единичной матрицы (1.7) равен 3, а единичной матрицы (1.5) — 2:

$$\delta_{ii} \equiv \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3, \quad \delta_{II} \equiv \delta_{11} + \delta_{22} = 2. \quad (1.10)$$

Пусть вектор \vec{b} является в \mathbb{R}^3 линейной векторной функцией (оператором) от вектора \vec{a} , т. е. каждому вектору $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ставится в соответствие вектор $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{b} = \vec{f}(\vec{a}), \quad (1.11)$$

причём, если вектор \vec{a} можно представить в виде

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3, \quad (1.12)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — числа, то

$$\vec{b} = \vec{f}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3) = \alpha_1 \vec{f}(\vec{a}_1) + \alpha_2 \vec{f}(\vec{a}_2) + \alpha_3 \vec{f}(\vec{a}_3). \quad (1.13)$$

¹⁾ Сравните: $\int f(t) dt = \int f(\xi) d\xi$.

Теорема 1. *Всякой линейной вектор-функции (всякому линейному оператору) в \mathbb{R}^3 можно поставить в соответствие квадратную матрицу 3×3 .*

В самом деле, пусть линейный оператор \check{f} переводит каждый вектор из векторов базиса \bar{e}_i в некоторый вектор $\bar{b}_i = \check{f}(\bar{e}_i)$. Так как векторы \bar{b}_i принадлежат \mathbb{R}^3 , то они однозначно разлагаются по векторам базиса \bar{e}_j :

$$\check{f}(\bar{e}_i) \equiv \bar{b}_i = Q_{ij}\bar{e}_j. \quad (1.14)$$

Следовательно, для любого вектора $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$

$$\bar{b} = \check{f}(\bar{a}) = \check{f}(a_i\bar{e}_i) = a_i\check{f}(\bar{e}_i) = a_iQ_{ij}\bar{e}_j. \quad (1.15)$$

С другой стороны, разлагая вектор \bar{b} по векторам базиса, имеем

$$\bar{b} = b_j\bar{e}_j. \quad (1.16)$$

Тогда

$$b_j = Q_{ij}a_i, \quad (1.17)$$

т. е. оператор \check{f} в \mathbb{R}^3 представляется в виде квадратной матрицы Q_{ij} , что и требовалось доказать.

Пусть теперь наряду с базисом \bar{e}_i имеется ещё один базис $\bar{e}_{i'}$, векторы которого выражаются через первый базис с помощью невырожденной матрицы $A_{i'i}$:

$$\bar{e}_{i'} = A_{i'i}\bar{e}_i, \quad (1.18)$$

причём $\bar{e}_{i'} \cdot \bar{e}_{j'} = \delta_{i'j'}$. Из (1.18) и (1.8) имеем

$$\begin{aligned} \delta_{i'j'} = \bar{e}_{i'} \cdot \bar{e}_{j'} &= A_{i'i}\bar{e}_i \cdot A_{j'j}\bar{e}_j = A_{i'i}A_{j'j}\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \\ &= A_{i'i}A_{j'j}\delta_{ij} = A_{i'i}A_{j'i}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

что означает ортогональность матрицы $A_{i'i}$ (её обратная матрица совпадает с транспонированной).

Обратим внимание на мнемоническое правило суммирования любой величины $a_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_n}$ с $\delta_{i_k i_{k'}}$:

$$\delta_{i_k i_{k'}} a_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_n} = a_{i_1 i_2 \dots i_{k'} \dots i_n}, \quad (1.20)$$

т. е. у $a_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_n}$ следует заменить индекс, по которому происходит суммирование с дельтой Кронекера, на её свободный индекс.

Предположим теперь, что у нас имеются старая и новая системы координат и оператор \check{f} . Тогда соотношения (1.17) в новой системе будут иметь вид

$$b_{j'} = Q_{i'j'} a_{i'}. \quad (1.21)$$

Каждый вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ может быть разложен по векторам старого и нового базисов:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_{i'} \vec{e}_{i'}. \quad (1.22)$$

Подставляя в (1.22) выражение (1.18), получим

$$\vec{a} = a_{i'} A_{i'i} \vec{e}_i. \quad (1.23)$$

Сравнивая (1.23) и (1.22), придём к выводу, что

$$a_i = a_{i'} A_{i'i}. \quad (1.24)$$

Умножим теперь левую и правую части (1.24) на $A_{j'i}$ и просуммируем по i :

$$A_{j'i} a_i = a_{i'} A_{j'i} A_{i'i} = a_{i'} \delta_{i'j} = a_{j'}. \quad (1.25)$$

Вернемся к выражению (1.21). Используя (1.25), получим

$$A_{j'j} b_j = Q_{i'j} A_{i'i} a_i. \quad (1.26)$$

Умножим левую и правую части (1.26) на $A_{j'k}$ и просуммируем по j' :

$$A_{j'k} A_{j'j} b_j = A_{j'k} Q_{i'j} A_{i'i} a_i. \quad (1.27)$$

Согласно (1.19) левая часть (1.27) равна b_k . Поменяв свободный индекс k на j , получим

$$b_j = A_{j'j} A_{i'i} Q_{i'j} a_i. \quad (1.28)$$

Сравнивая (1.17) и (1.28), будем иметь

$$Q_{ij} = A_{i'i} A_{j'j} Q_{i'j}. \quad (1.29)$$

Умножим (1.29) на $A_{k'i} A_{i'j}$ и получим

$$Q_{k'j} = A_{k'i} A_{i'j} Q_{ij}. \quad (1.30)$$

Итак, компоненты матрицы Q_{ij} , описывающей согласно теореме 1 линейный оператор \vec{f} , преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по формулам (1.29), (1.30). Однако сам оператор \vec{f} при этом должен быть инвариантным относительно преобразований, так как в его определение не входит никакая система координат.

Для того, чтобы выразить инвариантным образом оператор \vec{f} , введём абстрактные величины $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, т. е. совокупность двух векторов базиса, взятых в определённом порядке. Такая совокупность называется диадой, а символ \otimes — диадным произведением. Всего различных диад будет 9. Используя (1.18), устанавливаем закон перехода составляющих диады от одной системы координат к другой

$$\vec{e}_{i'} \otimes \vec{e}_{j'} = A_{i'i} A_{j'j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \quad (1.31)$$

Если ввести некоторый объект Q по формуле

$$Q = Q_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \quad (1.32)$$

то из (1.31), (1.30) и (1.23) видно, что он инвариантен относительно преобразования координат

$$\underline{Q} = Q_{rj} \bar{e}_r \otimes \bar{e}_j. \quad (1.33)$$

Объект Q называется тензором второго ранга, вектор \bar{a} — тензором первого ранга, а любой скаляр — тензором нулевого ранга.

Аналогично можно построить триаду $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k$ и тензор третьего ранга \underline{M} :

$$\underline{M} = M_{ijk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \quad (1.34)$$

и, вообще говоря, полиаду $\bar{e}_i \otimes \dots \otimes \bar{e}_n$ и тензор n -ого ранга \underline{P} :

$$\underline{P} = P_{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}. \quad (1.35)$$

Подчеркнем, что тензор является инвариантным объектом, не изменяющимся при переходе от одной системы координат к другой. Изменяются по «тензорному» закону при таком переходе только его компоненты [19]. Однако в дальнейшем мы будем иногда для краткости называть тензором совокупность его компонент.

Остановимся теперь несколько подробнее на различных операциях произведения векторов.

1. Скалярное произведение двух векторов.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_i \bar{e}_i \cdot b_j \bar{e}_j = a_i b_j \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = a_i b_i. \quad (1.36)$$

2. Векторное произведение двух векторов.

$$\bar{a} \times \bar{b} = a_i \bar{e}_i \times b_j \bar{e}_j = a_i b_j \bar{e}_i \times \bar{e}_j = a_i b_j \epsilon_{ijk} \bar{e}_k. \quad (1.37)$$

3. Тензорное (диадное) произведение двух векторов.

$$\bar{a} \otimes \bar{b} = a_i \bar{e}_i \otimes b_j \bar{e}_j = a_i b_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j. \quad (1.38)$$

4. Смешанное произведение трёх векторов.

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a_i \bar{e}_i, b_j \bar{e}_j, c_k \bar{e}_k) = a_i b_j c_k (\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = a_i b_j c_k \epsilon_{ijk}. \quad (1.39)$$

Справа в (1.37), (1.39) стоит трёхиндексный символ Леви-Чивиты ϵ_{ijk} , который определяется следующим образом

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если подстановка } (i, j, k) \text{ чётная;} \\ -1, & \text{если подстановка } (i, j, k) \text{ нечётная;} \\ 0, & \text{если не все индексы } i, j, k \text{ различны,} \end{cases} \quad (1.40)$$

т. е. $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321} = 1$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{jl} & \delta_{kl} \\ \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \quad (1.41)$$

Если левую и правую части (1.41) умножить на δ_{kn} , получим

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \quad (1.42)$$

Если же умножить далее обе части (1.42) на δ_{jm} , будем иметь

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}. \quad (1.43)$$

Наконец, умножая обе части (1.43) на δ_{il} , получим

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6. \quad (1.44)$$

С помощью символов Леви-Чивиты можно записать определитель матрицы B_{ij} в виде

$$\det |B_{ij}| \equiv |B| = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}B_{il}B_{jm}B_{kn}. \quad (1.45)$$

Дифференцируя (1.45) по одному элементу, например, по B_{il} , найдем выражение для соответствующего алгебраического дополнения B_{il}^* :

$$B_{il}^* \equiv \frac{\partial |B|}{\partial B_{il}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}B_{jm}B_{kn}. \quad (1.46)$$

Заметим, что первые три из четырёх рассмотренных видов умножений применимы, когда одним из сомножителей является тензор второго ранга (1.32), а другим — вектор (1.9), а также когда оба сомножителя — тензоры второго ранга. Определим следующие виды произведений.

5. Скалярное произведение тензора и вектора.

$$\underline{Q} \cdot \underline{a} = Q_{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot a_k\bar{e}_k = Q_{ij}a_k(\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k)\bar{e}_i = Q_{ik}a_k\bar{e}_i. \quad (1.47)$$

6. Векторное произведение тензора и вектора.

$$\begin{aligned} \underline{Q} \times \underline{a} &= Q_{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \times a_k\bar{e}_k = Q_{ij}a_k\bar{e}_i \otimes (\bar{e}_j \times \bar{e}_k) = \\ &= \epsilon_{jkm}Q_{ij}a_k\bar{e}_i \otimes \bar{e}_m. \end{aligned} \quad (1.48)$$

7. Тензорное (диадное) произведение тензора и вектора.

$$\underline{Q} \otimes \underline{a} = Q_{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes a_k\bar{e}_k = Q_{ij}a_k\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k. \quad (1.49)$$

8. Скалярное произведение двух тензоров.

$$\begin{aligned} \underline{Q} \cdot \underline{P} &= Q_{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot R_{kl}\bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = \\ &= Q_{ij}R_{kl}(\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k)\bar{e}_i \otimes \bar{e}_l = Q_{ij}R_{jl}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_i. \end{aligned} \quad (1.50)$$

9. Полное (двойное) произведение двух тензоров.

$$\underline{Q} : \underline{P} = Q_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j : R_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = Q_{ij} R_{kl} (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_l) = Q_{ij} R_{ji}. \quad (1.51)$$

10. Векторное произведение двух тензоров.

$$\begin{aligned} \underline{Q} \times \underline{P} &= Q_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \times R_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = \\ &= Q_{ij} R_{kl} (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) \bar{e}_i \times \bar{e}_l = Q_{ij} P_{kl} \delta_{jk} \epsilon_{ilm} \bar{e}_m = \\ &= Q_{ij} P_{jl} \epsilon_{ilm} \bar{e}_m. \end{aligned} \quad (1.52)$$

11. Тензорное (диадное) произведение двух тензоров.

$$\underline{Q} \otimes \underline{P} = Q_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes R_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = Q_{ij} R_{kl} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l. \quad (1.53)$$

Умножение (1.50) соответствует произведению двух матриц, а (1.51) — их полной свёртке.

Введём дифференциальный оператор $\bar{\nabla}$ — набла. Его компонентами являются операторы частного дифференцирования

$$\bar{\nabla} = \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \bar{e}_i \partial_i. \quad (1.54)$$

Тогда, применяя рассмотренные выше виды умножения к этому оператору, получим

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{a} = \bar{e}_i \partial_i \cdot a_j \bar{e}_j = \delta_{ij} \partial_i a_j = a_{i,i} \equiv \text{div } \bar{a}, \quad (1.55)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{a} = \bar{e}_i \partial_i \times a_j \bar{e}_j = \epsilon_{ijk} \bar{e}_k \partial_i a_j = \epsilon_{ijk} a_{j,i} \bar{e}_k \equiv \text{rot } \bar{a}, \quad (1.56)$$

$$\bar{\nabla} \otimes c = \bar{e}_i \partial_i \otimes c = c_{,i} \bar{e}_i \equiv \text{grad } c, \quad (1.57)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{Q} = \bar{e}_i \partial_i \cdot Q_{jk} \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k = Q_{jk,i} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) \bar{e}_k = Q_{ik,i} \bar{e}_k \equiv \text{Div } \underline{Q}, \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \times \underline{Q} &= \bar{e}_i \partial_i \times Q_{jk} \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k = \\ &= Q_{jk,i} (\bar{e}_i \times \bar{e}_j) \otimes \bar{e}_k = Q_{jk,i} \epsilon_{ijm} \bar{e}_m \otimes \bar{e}_k \equiv \text{Rot } \underline{Q}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\bar{\nabla} \otimes \bar{a} = a_{j,i} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \equiv \text{Grad } \bar{a}. \quad (1.60)$$

Дифференциальные операторы div и Div называются дивергенцией векторного и тензорного полей соответственно, операторы rot и Rot — ротором векторного и тензорного полей, а операторы grad и Grad — градиентом скалярного и векторного полей. Заметим, что в формулах (1.55)–(1.60) запятой обозначается частная производная по следующей за ней координате.

Приведём в заключение лекции несколько важных сведений из математического анализа, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Известно, что для непрерывных однозначных векторных функций \vec{a} с непрерывными частными производными в ограниченном и пространственно односвязном объёме V евклидова пространства \mathbb{R}^3 и на замкнутой регулярной поверхности Σ , ограничивающей этот объём, справедлива теорема Остроградского—Гаусса (теорема о дивергенции):

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} a_i n_i d\Sigma, \quad (1.61)$$

где \vec{n} — вектор нормали к поверхности Σ .

Пусть Γ — замкнутая кривая, принадлежащая объёму V , а Σ — регулярная поверхность, опирающаяся на эту кривую и также принадлежащая V . Тогда для непрерывных однозначных векторных функций \vec{a} с непрерывными частными производными в V справедлива теорема Стокса (теорема о роторе):

$$\oint_{\Gamma} a_m dx_m = \int_{\Sigma} \epsilon_{klm} a_{m,l} n_k d\Sigma, \quad (1.62)$$

где \vec{n} — единичная нормаль к Σ .

Инвариантами симметричного тензора второго ранга $Q = Q_{ij} e_i \otimes e_j$ или вектора $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ относительно некоторой группы преобразований в пространстве называются скалярные величины, не меняющиеся в результате преобразований из этой группы. Понятно, что каждая компонента тензора Q_{ij} или вектора a_i не является инвариантом относительно группы поворотов в пространстве. У вектора \vec{a} имеется один независимый инвариант — его длина $I_a = (a_i a_i)^{1/2}$, у симметричного тензора второго ранга Q существуют три независимых инварианта: $Q_{ii} \equiv \operatorname{tr} Q$ — след тензора; $Q_{ij} Q_{ji} \equiv \operatorname{tr} Q^2$; $Q_{ij} Q_{jm} Q_{mi} \equiv \operatorname{tr} Q^3$. Часто в качестве независимых инвариантов тензора выбирают величины

$$I_{Q1} = \operatorname{tr} Q, \quad I_{Q2} = \frac{1}{2}(I_{Q1}^2 - \operatorname{tr} Q^2), \quad I_{Q3} = |\operatorname{tr} Q^3|. \quad (1.63)$$

Лекция 2

Задачи по тензорному анализу

Задача 1. Пусть задан переход от одной прямоугольной системы координат $(Ox_1x_2x_3)$ к другой $(Ox'_1x'_2x'_3)$ по формулам

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x'_3 = x_3. \end{cases} \quad (2.1)$$

Требуется ввести базис; построить закон перехода от одного базиса к другому; найти матрицу перехода A_{ij} ; построить вектор $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2$.

Выберем базис $\vec{e}_1(1, 0, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1, 0)$, $\vec{e}_3(0, 0, 1)$ и построим векторы

$$\vec{e}'_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1}, \quad \vec{e}'_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2}, \quad \vec{e}'_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_3}, \quad (2.2)$$

где $\vec{r} = \vec{r}(x'_1, x'_2, x'_3)$. Тогда из (2.1)

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi, \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi, \\ \vec{e}'_3 = \vec{e}_3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ортогональная матрица перехода определяется из (2.3)

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Пользуясь определением векторного произведения, построим вектор $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2$:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2 &= \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} \vec{e}_k = (\epsilon_{123} A_{11} A_{22} + \epsilon_{213} A_{12} A_{21}) \vec{e}_3 = \\ &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \vec{e}_3 = \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Задача 2. Пусть справедливы соотношения (2.1) и известно, что некоторый тензор в нештрихованной системе координат имеет вид

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Требуется построить компоненты тензора \underline{Q} в штрихованной системе координат; вычислить независимые инварианты \underline{Q} .

Так как $Q_{i'j'} = A_{i'i} Q_{ij} A_{j'j}$, то

$$Q_{i'j'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$Q_{i'j'} = \begin{pmatrix} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Следы и определители матриц Q_{ij} и $Q_{i'j'}$ равны нулю. Квадраты каждой из этих матриц вычисляются следующим образом:

$$Q_{ij}Q_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{i'j'}Q_{j'k'} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След квадрата каждой матрицы равен 2.

Задача 3. Со всяким симметричным тензором второго ранга $\underline{Q} = Q_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ в каждой точке M можно связать центральную поверхность второго порядка (поверхность Коши), рассматривая в точке M квадратичную форму

$$2f \equiv Q_{ij}x_i x_j = \text{const}. \quad (2.8)$$

Требуется найти градиент к этой поверхности и выяснить, когда она превращается в сферу.

Из (2.8) следует, что

$$y_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} = Q_{ij}x_j \quad \text{или} \quad \bar{y} = \text{grad } f. \quad (2.9)$$

Таким образом, поверхность (2.8), соответствующая квадратичной форме, связанной с тензором \underline{Q} , допускает следующее геометрическое толкование. Всякому вектору $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$ поверхность Коши ставит в соответствие вектор $\bar{y} = y_i \bar{e}_i$, определяемый соотношением (2.9).

Если уравнение (2.8) имеет форму

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = F = \text{const}, \quad F = \frac{2f}{q}, \quad q = \text{const}, \quad (2.10)$$

т. е. поверхность Коши — сфера, то тензор, соответствующий этой сфере, можно записать в виде

$$\underline{Q} = q \delta_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad \text{или} \quad Q_{ij} = q \delta_{ij}. \quad (2.11)$$

След тензора \underline{Q} равен

$$\text{tr } \underline{Q} = Q_{ii} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}. \quad (2.12)$$

Девiatorом называется всякий тензор, у которого первый инвариант равен нулю:

$$\text{tr } \bar{Q} = 0. \quad (2.13)$$

В частности,

$$\bar{Q} = \underline{Q} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{Q}) \underline{I}, \quad (2.14)$$

где \underline{I} — единичный тензор.

Разность самого тензора \underline{Q} и его девiatorа \bar{Q} называется шаровой частью тензора \underline{Q} .

Задача 4. Скалярная величина $\sqrt{\text{tr}(\bar{Q}^2)} \equiv \sqrt{\bar{Q}_{ij}\bar{Q}_{ji}}$ называется интенсивностью тензора \underline{Q} и обозначается Q_u . Доказать, что Q_u является инвариантом \underline{Q} .

Действительно,

$$\begin{aligned} Q_u^2 &= \left(Q_{ij} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{Q})\delta_{ij} \right) \left(Q_{ij} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{Q})\delta_{ij} \right) = \\ &= Q_{ij}Q_{ij} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{Q})^2 = \text{tr}(\underline{Q}^2) - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{Q})^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Слагаемые, стоящие в правой части (2.15), выражаются через инварианты I_{Q1}, I_{Q2} (см. (1.63)), поэтому интенсивность Q_u — функция инвариантов, а, следовательно, и сама является инвариантом.

Задача 5. Тензор \underline{S} называется симметричным, если $S_{ij} = S_{ji}$, и антисимметричным (кососимметричным), если $S_{ij} = -S_{ji}$. Показать, что всякий тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров второго ранга.

Действительно, компоненты любого тензора \underline{Q} можно представить в следующем виде

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} (Q_{ij} + Q_{ji}) + \frac{1}{2} (Q_{ij} - Q_{ji}). \quad (2.16)$$

Первое слагаемое в (2.16) — симметричный тензор, второе слагаемое — антисимметричный. Отметим, что представление (2.16) единственно.

Задача 6. Показать, что полная свёртка симметричного \underline{S} и антисимметричного \underline{A} тензоров равна нулю:

$$S_{ij}A_{ij} = 0. \quad (2.17)$$

Так как немой индекс можно изменить на любой другой, то, заменив i на j , а j на i , получим $S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ji}$. По условию $S_{ij} = S_{ji}$, $A_{ij} = -A_{ji}$, поэтому $S_{ij}A_{ij} = -S_{ij}A_{ij}$, что может быть, только если выполнено равенство (2.17).

Задача 7. Пусть тензор \underline{Q} представлен в виде суммы симметричного \underline{S} и антисимметричного \underline{A} тензоров. Показать, что для любого симметричного тензора \underline{P}

$$Q_{ij}P_{ij} = S_{ij}P_{ij}. \quad (2.18)$$

Действительно,

$$Q_{ij}P_{ij} = S_{ij}P_{ij} + A_{ij}P_{ij}. \quad (2.19)$$

Второе же слагаемое в правой части (2.19) равно нулю (см. задачу 6), откуда следует (2.18).

Задача 8. Ввести двухиндексный символ Леви-Чивиты по аналогии с (1.40) и записать формулы свёртки этого тензора по одному и двум индексам (см. (1.41)–(1.44)).

По аналогии с (1.40) запишем

$$\epsilon_{IJ} = \begin{cases} 1, & \text{если } I = 1; J = 2, \\ -1, & \text{если } I = 2; J = 1, \\ 0, & \text{если } I = J. \end{cases} \quad (2.20)$$

Тогда

$$\epsilon_{IJ}\epsilon_{KL} = \begin{vmatrix} \delta_{IK} & \delta_{JK} \\ \delta_{IL} & \delta_{JL} \end{vmatrix} = \delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK}. \quad (2.21)$$

Умножив обе части (2.21) на δ_{JL} , получим

$$\epsilon_{IJ}\epsilon_{KJ} = \delta_{IK}. \quad (2.22)$$

Умножив обе части (2.22) на δ_{IK} , получим

$$\epsilon_{IJ}\epsilon_{IJ} = 2. \quad (2.23)$$

Задача 9. Показать, что для любого тензора второго ранга \underline{Q}

$$\underline{Q}^3 = (\text{tr } \underline{Q})\underline{Q}^2 - \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \underline{Q})^2 - \text{tr}(\underline{Q}^2) \right] \underline{Q} + |\underline{Q}| \underline{I}. \quad (2.24)$$

Используем выражения (1.45), (1.46) для записи определителя $|\underline{Q}|$ и компонент алгебраического дополнения $Q_{ii}^* = \partial|\underline{Q}|/\partial Q_{ii}$ через компоненты Q_{ij} . Кроме того согласно правилу Крамера

$$Q_{ii}^* Q_{lm} = |\underline{Q}| \delta_{im} \quad \text{или} \quad \underline{Q}^* \cdot \underline{Q} = |\underline{Q}| \underline{I}. \quad (2.25)$$

Подставим (1.41) в (1.45) и получим

$$\begin{aligned} |\underline{Q}| &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} Q_{il} Q_{jm} Q_{kn} = \\ &= \frac{1}{6} (Q_{ii} Q_{jj} Q_{kk} + Q_{ml} Q_{nm} Q_{ln} + Q_{nl} Q_{lm} Q_{mn} - \\ &\quad - Q_{ni} Q_{jj} Q_{ln} - Q_{mi} Q_{lm} Q_{nn} - Q_{li} Q_{jk} Q_{kj}) = \\ &= \frac{1}{6} \left[(\text{tr } \underline{Q})^3 + 2 \text{tr}(\underline{Q}^3) - 3 (\text{tr } \underline{Q})(\text{tr } \underline{Q}^2) \right]. \quad (2.26) \end{aligned}$$

Продифференцируем обе части (2.26) по \underline{Q} и примем во внимание, что

$$\frac{\partial(\text{tr } \underline{Q})}{\partial \underline{Q}} = \underline{I}, \quad \frac{\partial[\text{tr}(\underline{Q}^2)]}{\partial \underline{Q}} = 2\underline{Q}, \quad \frac{\partial[\text{tr}(\underline{Q}^3)]}{\partial \underline{Q}} = 3\underline{Q}^2. \quad (2.27)$$

Будем иметь

$$\frac{\partial |Q|}{\partial Q} = Q^2 + \frac{1}{2}(\text{tr } Q)^2 \underline{I} - \frac{1}{2} \text{tr}(Q^2) \underline{I} - (\text{tr } Q) Q. \quad (2.28)$$

С другой стороны из (1.46) следует, что $\partial |Q| / \partial Q = Q^*$. Поэтому, подставляя в (2.25) вместо Q^* правую часть (2.26), после некоторых преобразований получим (2.24) или, согласно обозначениям (1.63),

$$Q^3 - I_{Q1} Q^2 + I_{Q2} Q - I_{Q3} \underline{I} \equiv 0. \quad (2.29)$$

Выражения (2.24) либо (2.29) носят название формулы Гамильтона—Кели и позволяют представить любую целую степень тензора, начиная с третьей, как линейную комбинацию самого тензора, его квадрата, а также единичного тензора.

Предположим теперь, что P является тензорной функцией от Q . По формуле Гамильтона—Кели эту зависимость можно записать так:

$$P_{ij} = f_0(I_{Q1}, I_{Q2}, I_{Q3}) \delta_{ij} + f_1(I_{Q1}, I_{Q2}, I_{Q3}) Q_{ij} + f_2(I_{Q1}, I_{Q2}, I_{Q3}) Q_{ik} Q_{kj}. \quad (2.30)$$

Говорят, что P квазилинейно или тензорно линейно зависит от Q , если $f_2(I_{Q1}, I_{Q2}, I_{Q3}) \equiv 0$, и поэтому один инвариант, например I_{Q3} , функционально выражается через два другие. Квазилинейную тензорную функцию можно представить в виде

$$P_{ij} = \bar{f}_0(I_{Q1}, I_{Q2}) \delta_{ij} + \bar{f}_1(I_{Q1}, I_{Q2}) Q_{ij}. \quad (2.31)$$

Задача 10. Доказать, что девиатор \bar{Q} тензора Q имеет только два независимых инварианта.

В силу (2.13) первый инвариант девиатора равен нулю. Поэтому число независимых инвариантов \bar{Q} равно двум. Из формулы Гамильтона—Кели (2.24) следует, что

$$\bar{Q}^3 = \frac{1}{2} Q_u^2 \bar{Q} + |Q| \underline{I}. \quad (2.32)$$

Задача 11. Показать, что для двумерного симметричного тензора $\underline{a} = a_{1j} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_j$ формула Гамильтона—Кели имеет вид

$$\underline{a}^2 = \underline{a} \text{tr } \underline{a} + \frac{1}{2} \underline{I} (\text{tr } \underline{a}^2 - \text{tr}^2 \underline{a}), \quad (2.33)$$

так что изотропная тензорная функция $\underline{b} = f(\underline{a})$ в общем случае является квазилинейной:

$$\underline{b} = \alpha_0(\text{tr } \underline{a}, \text{tr } \underline{a}^2)\underline{I} + \alpha_1(\text{tr } \underline{a}, \text{tr } \underline{a}^2)\underline{a}. \quad (2.34)$$

В самом деле, определитель двумерного тензора \underline{a} имеет вид

$$\begin{aligned} |\underline{a}| &= \frac{1}{2} \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} a_{IK} a_{JL} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \delta_{IK} & \delta_{IL} \\ \delta_{JK} & \delta_{JL} \end{vmatrix} a_{IK} a_{JL} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{IK} \delta_{JL} - \delta_{IL} \delta_{JK}) a_{IK} a_{JL} = \frac{1}{2} (\text{tr } \underline{a}^2 - \text{tr}^2 \underline{a}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Тензор алгебраических дополнений \underline{A} для тензора \underline{a} имеет вид

$$\underline{A} = \frac{\partial |\underline{a}|}{\partial \underline{a}} = \underline{I} \text{tr } \underline{a} - \underline{a}. \quad (2.36)$$

Согласно формуле Крамера

$$\underline{A} \cdot \underline{a} = |\underline{a}| \underline{I} \quad (2.37)$$

имеем

$$\underline{a} \text{tr } \underline{a} - \underline{a}^2 = |\underline{a}| \underline{I}. \quad (2.38)$$

Из (2.38), (2.35) следует (2.33). Следовательно, любая изотропная тензорная функция не может содержать степени тензора \underline{a} выше первой. Отсюда и следует (2.34).

Задача 12. Доказать, что, если один симметричный двумерный тензор \underline{b} является линейной изотропной тензорной функцией другого двумерного симметричного тензора \underline{a}

$$b_{IJ} = \lambda \text{tr } \underline{a} \delta_{IJ} + 2\mu a_{IJ}, \quad (2.39)$$

где λ и μ — некоторые постоянные, то справедливы соотношения

$$b_{IJ} = \lambda \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} a_{KL} + (\lambda + 2\mu) a_{IJ}. \quad (2.40)$$

В самом деле, из (2.21) следует, что

$$\delta_{KL} \delta_{IJ} = \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} + \delta_{KJ} \delta_{IL}. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.39), получим

$$\begin{aligned} b_{IJ} &= \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} a_{KL} + 2\mu a_{IJ} = \\ &= \lambda \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} a_{KL} + [(\lambda + \mu) \delta_{KJ} \delta_{IL} + \mu \delta_{IK} \delta_{JL}] a_{KL}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

откуда и следует (2.40).

Задача 13. Доказать, что соотношения (2.39) и (2.40) могут быть разрешены относительно a_{IJ} в виде

$$a_{IJ} = \lambda' \operatorname{tr} b \delta_{IJ} + 2\mu' b_{IJ}, \quad (2.43)$$

$$a_{IJ} = \lambda' \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} b_{KL} + (\lambda' + 2\mu') b_{IJ}, \quad (2.44)$$

где

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad \mu' = \frac{1}{4\mu}. \quad (2.45)$$

В самом деле, подставляя (2.44) в (2.40), получим

$$\begin{aligned} b_{IJ} &= \lambda \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} [\lambda' \epsilon_{KM} \epsilon_{LN} b_{MN} + (\lambda' + 2\mu') b_{KL}] + \\ &\quad + (\lambda + 2\mu) [\lambda' \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} b_{KL} + (\lambda' + 2\mu') b_{IJ}] = \\ &= [\lambda \lambda' + (\lambda + 2\mu)(\lambda' + 2\mu')] b_{IJ} + [\lambda(\lambda' + 2\mu') + \\ &\quad + (\lambda + 2\mu)\lambda'] \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} b_{KL}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

откуда

$$\begin{cases} \lambda \lambda' + (\lambda + 2\mu)(\lambda' + 2\mu') = 1, \\ \lambda(\lambda' + 2\mu') + (\lambda + 2\mu)\lambda' = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Решением алгебраической системы двух уравнений (2.47) относительно λ' и μ' и является (2.45).

Задача 14. Доказать, что для трёхмерных векторов $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = b_i \vec{e}_i$, $\vec{c} = c_i \vec{e}_i$ справедливо тождество*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (2.48)$$

Действительно, если $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}$, то согласно (1.37) $d_k = \epsilon_{ijk} b_i c_j$, и векторное произведение, стоящее в левой части (2.48), можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{d} &= \epsilon_{ikn} a_i d_k \vec{e}_n = \epsilon_{ikn} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_j \vec{e}_n = \\ &= (\delta_{ij} \delta_{ni} - \delta_{ij} \delta_{nj}) a_i b_j c_j \vec{e}_n = b_n \vec{e}_n a_j c_j - c_n \vec{e}_n a_i b_i. \end{aligned} \quad (2.49)$$

* Часто это полезное тождество называют формулой «БАЦ минус ЦАБ».

Лекция 3

Кинематика деформируемой среды

Пусть тело в некоторый момент времени $t = t_0$ занимает объём $V \in \mathbb{R}^3$, ограниченный замкнутой поверхностью Σ (недеформированное состояние). Пусть это же тело в другой момент $t > t_0$ занимает объём V' (деформированное состояние) (рис. 4).

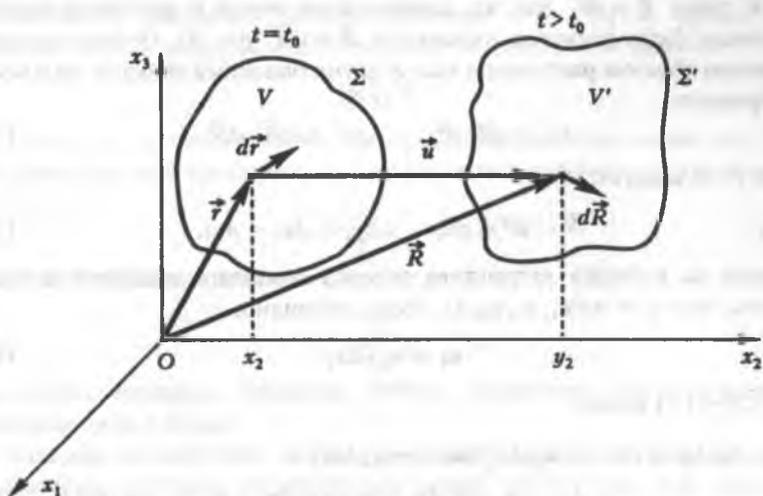


Рис. 4.

Положение произвольной материальной точки, находящейся внутри объёма V , в момент времени t_0 можно описать радиусом-вектором \vec{r}

$$\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3, t_0). \quad (3.1)$$

Каждой такой точке можно придумать «имя». Будем называть её точкой с координатами x_1, x_2, x_3 . В момент $t > t_0$ эта же материальная точка занимает новое пространственное положение \vec{R}

$$\vec{R} = \vec{R}(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3.2)$$

или в координатах

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (3.3)$$

«Имя» точки, т. е. тройка (x_1, x_2, x_3) , называется лагранжевыми координатами, а тройка (y_1, y_2, y_3) носит название эйлеровых координат.

Разность между двумя пространственными положениями точки в моменты t_0 и $t > t_0$ называется вектором перемещения

$$\vec{u} = \vec{R} - \vec{r}, \quad u_i = y_i - x_i. \quad (3.4)$$

В зависимости от того, функцией каких пространственных координат — x_i или y_i — является перемещение \vec{u} (а также и другие скалярные, векторные и тензорные характеристики), различают соответственно лагранжев и эйлеров способы описания движения сплошной среды.

Рассмотрим теперь в момент t_0 наряду с точкой \vec{r} другую, близкую к ней точку $\vec{r} + d\vec{r}$. Эта же материальная точка в деформированном состоянии будет занимать положение $\vec{R} + d\vec{R}$ (рис. 4). Определим естественным образом расстояния между двумя близкими точками до и после деформации

$$ds_0^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \quad ds^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) следует, что

$$\vec{R} = d\vec{r} + d\vec{u}, \quad dy_i = dx_i + du_i. \quad (3.6)$$

Встанем на позиции лагранжева способа описания движения и будем считать, что $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Тогда, очевидно,

$$u_i = u_{i,j} dx_j. \quad (3.7)$$

Из (3.5)–(3.7) имеем

$$\begin{aligned} ds^2 &= dy_i dy_i = (dx_i + u_{i,j} dx_j)(dx_i + u_{i,k} dx_k) = \\ &= ds_0^2 + u_{i,j} dx_j dx_i + u_{i,k} dx_k dx_i + u_{i,j} u_{i,k} dx_j dx_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заменяя немые индексы в (3.8), получим

$$ds^2 = ds_0^2 + (u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j} u_{i,k}) dx_k dx_j. \quad (3.9)$$

Обозначив

$$\epsilon_{k,j} = \frac{1}{2}(u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j} u_{i,k}), \quad (3.10)$$

перепишем (3.9) в виде

$$ds^2 = ds_0^2 + 2\epsilon_{k,j} dx_k dx_j. \quad (3.11)$$

Из (3.11) имеем

$$\frac{ds}{ds_0} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{kj}l_k l_j}, \quad (3.12)$$

где $\vec{l} = d\vec{r}/ds_0$ — единичный вектор, составленный из направляющих косинусов.

Из (3.12) видно, что относительное удлинение исследуемого волокна d равно

$$d \equiv \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \sqrt{1 + \varepsilon_{kj}l_k l_j} - 1. \quad (3.13)$$

Желающих ознакомиться с теорией конечных (больших) деформаций более подробно мы отсылаем к замечательным книгам [6, 11, 18, 22, 25, 30]. Здесь же мы будем рассматривать только малые деформации. Это означает, что перемещения точек являются незначительными по сравнению с размерами рассматриваемого тела [20] и, кроме того, в любой точке в каждый момент времени выполняются условия

$$|u_{i,j}| \ll 1. \quad (3.14)$$

Объект $u_{i,j}$ носит название тензора дисторсии. Как видно из (3.14), его симметричной составляющей является тензор малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.15)$$

а антисимметричная часть

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.16)$$

называется тензором вращения. Шесть уравнений (3.15) называются соотношениями Коши.

Выясним физический смысл компонент тензора деформаций ε_{ij} . Рассмотрим волокно, направленное вдоль оси (Ox_1) , т.е. положим в (3.13) $l_i = \delta_{1i}$. Тогда получим

$$d = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1 = 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot (2\varepsilon_{11}) + O(\varepsilon_{11}^2)\right) - 1 = \varepsilon_{11} + O(\varepsilon_{11}^2). \quad (3.17)$$

Таким образом, компоненту ε_{11} можно трактовать как относительное удлинение волокна, направленного вдоль оси (Ox_1) . Аналогичный физический смысл имеют и две другие диагональные компоненты ε_{22} , ε_{33} .

Составим теперь параллелепипед со сторонами, параллельными в начальный момент времени координатным волокнам. Его объём до деформации обозначим dV_0 ($dV_0 = ds_0^{(1)} ds_0^{(2)} ds_0^{(3)}$). После деформации этот

параллелепипед занимает объём dV :

$$dV = ds^{(1)} ds^{(2)} ds^{(3)} \quad (3.18)$$

или, согласно (3.13), (3.17),

$$\begin{aligned} dV &= (1 + \varepsilon_{11}) ds_0^{(1)} \cdot (1 + \varepsilon_{22}) ds_0^{(2)} \cdot (1 + \varepsilon_{33}) ds_0^{(3)} = \\ &= (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) dV_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В силу малости деформаций их произведениями и квадратами можно пренебречь по сравнению с самими компонентами. Поэтому

$$\frac{dV}{dV_0} = 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \equiv 1 + \theta, \quad (3.20)$$

где $\theta = \varepsilon_{ii} = \text{div } \vec{u}$ — линейный инвариант тензора $\underline{\varepsilon}$ (его след), отвечающий, как следует из (3.20), за изменение объёма параллелепипеда.

Выясним теперь физический смысл недиагональных компонент $\underline{\varepsilon}$. Для этого рассмотрим два волокна, которые до деформации были направлены вдоль координатных осей (Ox_1) , (Ox_2) . После деформации эти волокна будут иметь длины $|d\vec{R}^{(1)}|$ и $|d\vec{R}^{(2)}|$, а угол между ними уже не будет прямым (его мы обозначим $\pi/2 - \alpha$). Будем иметь

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{d\vec{R}^{(1)} \cdot d\vec{R}^{(2)}}{|d\vec{R}^{(1)}||d\vec{R}^{(2)}|} = \frac{dy_i^{(1)} dy_i^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}} = \\ &= \frac{(u_{i,j} + \delta_{ij})(u_{i,k} + \delta_{ik}) dx_j^{(1)} dx_k^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Учитывая, что с точностью до малых второго порядка $\cos(\pi/2 - \alpha) \approx \alpha$, из (3.21) получим

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(u_{j,k} + u_{k,j} + \delta_{jk}) dx_j^{(1)} dx_k^{(2)}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22}) ds_0^{(1)} ds_0^{(2)}} = \frac{(u_{j,k} + u_{k,j} + \delta_{jk}) \delta_{j1} \delta_{k2}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})} = \\ &= \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})} = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})} \approx 2\varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Следовательно, ε_{12} представляет собой половину угла α , на который уменьшится прямой угол между волокнами, направленными до деформации по осям (Ox_1) и (Ox_2) . Аналогичный физический смысл имеют и две другие недиагональные компоненты тензора деформаций ε_{23} и ε_{13} .

Чтобы из соотношений (3.15) по известным ε_{ij} найти три компоненты u_i , надо решить шесть дифференциальных уравнений. В случае

произвольного задания ε_{ij} эта система может быть неразрешимой. Выведем условия интегрируемости системы (3.15).

Рассмотрим односвязную область V и в ней точку M_0 с координатами x_i^0 . Пусть в этой точке известны перемещения u_i^0 и компоненты тензора поворота ω_{ij}^0 . Тогда перемещение в любой другой точке M можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} u_i(M) &= u_i^0 + \int_{M_0}^M du_i = u_i^0 + \int_{M_0}^M \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} d\xi_j = \\ &= u_i^0 + \int_{M_0}^M \varepsilon_{ij}(\bar{\xi}) d\xi_j + \int_{M_0}^M \omega_{ij}(\bar{\xi}) d\xi_j. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В последнем интеграле проведём интегрирование по частям

$$\int_{M_0}^M \omega_{ij} d\xi_j = \omega_{ij} x_j - \omega_{ij}^0 x_j^0 - \int_{M_0}^M \xi_j \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi_m} d\xi_m. \quad (3.24)$$

Добавляя и вычитая в правой части (3.23) выражение $\omega_{ij}^0 x_j$ и подставляя туда (3.24), получим

$$\begin{aligned} u_i(M) &= u_i^0 + (\omega_{ij} - \omega_{ij}^0) x_j + \omega_{ij}^0 (x_j - x_j^0) + \\ &+ \int_{M_0}^M \left(\varepsilon_{im} - \xi_j \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi_m} \right) d\xi_m = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j - x_j^0) + \\ &+ \int_{M_0}^M \left[\varepsilon_{im} + (x_j - \xi_j) \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi_m} \right] d\xi_m. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Воспользуемся далее тождеством $\omega_{ij,m} \equiv \varepsilon_{im,j} - \varepsilon_{mj,i}$, которое легко проверяется с помощью (3.15) и (3.16), и в итоге получим формулы Чезаро

$$\begin{aligned} u_i(M) &= u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j - x_j^0) + \\ &+ \int_{M_0}^M \left[\varepsilon_{im} + (x_j - \xi_j) \left(\frac{\partial \varepsilon_{im}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \varepsilon_{mj}}{\partial \xi_i} \right) \right] d\xi_m. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Эти формулы позволяют в данной точке M односвязной области однозначно выразить перемещения по заданным деформациям в этой же точке и по известным перемещениям и поворотам в любой другой точке M_0 .

Перемещение в точке M не должно зависеть от пути интегрирования от M_0 до M , поэтому интеграл в (3.26) по любому замкнутому контуру Γ должен обращаться в нуль. Пусть Σ — некоторая поверхность с границей Γ , лежащая внутри тела. Тогда по теореме Стокса (1.62)

$$\oint_{\Gamma} P_{im}(\vec{\xi}) d\xi_m = \int_{\Sigma} \epsilon_{pqt} \frac{\partial P_{im}}{\partial \xi_q}(\vec{\xi}) n_p d\Sigma, \quad (3.27)$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности Σ , а P_{im} — выражение, стоящее в квадратных скобках в (3.26).

Так как интеграл в левой части (3.27) по замкнутому контуру равен нулю, то в силу произвольности выбора поверхности Σ необходимо потребовать в каждой точке

$$\epsilon_{pqt} \frac{\partial P_{im}}{\partial \xi_q} = 0. \quad (3.28)$$

Подставим P_{im} из (3.26) в (3.28) и запишем

$$\epsilon_{pqt} \left[(x_j - \xi_j) \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{im}}{\partial \xi_j \partial \xi_q} - \frac{\partial^2 \epsilon_{mj}}{\partial \xi_i \partial \xi_q} \right) + \frac{\partial \epsilon_{mq}}{\partial \xi_i} \right] = 0. \quad (3.29)$$

Свертка антисимметричного по индексам m, q объекта ϵ_{pqt} с симметричным тензором $\epsilon_{mq,i}$ равна нулю (см. задачу 6 лекции 2). Далее, $\epsilon_{im,j} - \epsilon_{mj,i} = (\delta_{ik}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jk})\epsilon_{mk,s} = \epsilon_{ijl}\epsilon_{ksl}\epsilon_{mk,s}$ в силу формулы (1.42). Поэтому из (3.29) будем иметь

$$\epsilon_{pqt}\epsilon_{ijl}\epsilon_{ksl}(x_j - \xi_j) \frac{\partial^2 \epsilon_{mk}}{\partial \xi_s \partial \xi_q} = 0. \quad (3.30)$$

Равенство (3.30) заведомо выполняется, если

$$\eta_{ps} \equiv \epsilon_{pqt}\epsilon_{skl}\epsilon_{mk,ql} = 0. \quad (3.31)$$

Шесть соотношений (3.31) представляют собой искомые условия совместности деформаций. В случае односвязной области они необходимы и достаточны для интегрируемости соотношений Коши (3.15), для многосвязной же только необходимы. Тензор $\underline{\eta}$ называется тензором несовместности деформаций и обозначается $\underline{\eta} = \text{Ink } \underline{\epsilon}$. Нетрудно показать, что три равенства (3.31) $\eta_{\alpha\alpha} = 0$ означают, что*

$$\epsilon_{\beta\beta,\gamma\gamma} + \epsilon_{\gamma\gamma,\beta\beta} = 2\epsilon_{\beta\gamma,\beta\gamma}, \quad (3.32)$$

* Напоминаем, что по греческим индексам суммирование нет!

а три равенства $\eta_{\alpha\beta} = 0$ эквивалентны условиям

$$\epsilon_{\gamma\gamma,\alpha\beta} = (\epsilon_{\alpha\gamma,\beta} + \epsilon_{\beta\gamma,\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta,\gamma}), \quad (3.33)$$

В (3.32), (3.33) тройка индексов (α, β, γ) принимает значения $\{(1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2)\}$.

Заметим, что если деформации линейно зависят от координат, то они всегда удовлетворяют уравнениям (3.31). Если же деформации в теле равны нулю, то из формул Чезаро (3.26) следует, что перемещения линейны по координатам:

$$u_i = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j - x_j^0). \quad (3.34)$$

Построим на основе антисимметричного тензора вращения $\underline{\omega}$ вектор поворота $\bar{\omega}$ по формулам

$$\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{kj}. \quad (3.35)$$

Умножим далее обе части равенства (3.35) на ϵ_{lmi} , тем самым обратив его:

$$\omega_{ml} = \epsilon_{lmi} \omega_i. \quad (3.36)$$

Тогда (3.34) можно записать следующим образом

$$u_i = u_i^0 + \epsilon_{jik} \omega_k^0 (x_j - x_j^0). \quad (3.37)$$

или, используя формулу (1.37) векторного произведения, в виде

$$\bar{u} = \bar{u}^0 + \bar{\omega}^0 \times (\bar{r} - \bar{r}^0). \quad (3.38)$$

Формула (3.38) показывает, что в случае отсутствия деформаций тело ведет себя как жёсткое целое, т. е. смещается на вектор \bar{u}^0 и совершает поворот, описываемый вторым слагаемым.

В заключении лекции введём, наряду с перемещениями, другие кинематические характеристики деформируемой среды. Дифференцированием по времени определим вектор скорости

$$\bar{v} = \frac{d\bar{u}}{dt} \equiv \dot{\bar{u}} \quad (3.39)$$

и вектор ускорения

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} \equiv \ddot{\bar{u}}. \quad (3.40)$$

При лагранжевом подходе полные производные по времени совпадают с частными, поэтому $\bar{v} = \partial\bar{u}/\partial t$; $\bar{w} = \partial^2\bar{u}/\partial t^2$.

Лекция 4

Законы движения деформируемой среды

Для удобства использования математического аппарата предположим, что материя в объёме, занимаемом сплошной средой (континуумом), распределена непрерывно. Тем самым не учитывается наличие молекул и атомов, а также кристаллической структуры. Чтобы построить так называемую феноменологическую теорию, описывающую макроявления в деформируемом теле, необходимо аксиоматически наделить континуум некоторыми свойствами (макросвойствами). Это и призваны сделать основные законы механики сплошной среды [7, 20, 22].

Пусть материя распределена по деформируемому объёму V с некоторой плотностью $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$, так что масса M всего объёма V определяется интегралом

$$M = \int_V \rho dV. \quad (4.1)$$

Первый закон механики сплошной среды, называемый законом сохранения массы, записывается в виде

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

и утверждает, что масса движущегося объёма, состоящего в каждый момент времени из одних и тех же физических частиц, остаётся постоянной и равной массе этого объёма $V|_{t=0} \equiv V_0$ в начальный момент. Из (4.2) следует, что

$$\rho(x_1, x_2, x_3, 0) dV_0 = \rho(x_1, x_2, x_3, t) dV. \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) называется уравнением неразрывности в лагранжевых координатах. Обозначая $\rho_0 = \rho(x_1, x_2, x_3, 0)$ и пользуясь соотношением (3.20), запишем

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \theta} = \rho_0 (1 - \theta + O(\theta^2)). \quad (4.4)$$

Следовательно, если известна плотность в недеформированном состоянии, то она может быть найдена и в деформированном состоянии по известной кинематике движения. Из (4.4) видно, что для несжимаемого материала ($\rho = \rho_0$) изменение объёма в окрестности каждой точки равно нулю ($\theta = 0$).

Второй постулат механики сплошной среды — закон об изменении количества движения — по существу является вторым законом Ньютона применительно к континууму. Как и в формулировке второго закона Ньютона, в нем фигурирует понятие силы. В механике сплошной среды различают два вида сил: массовые и поверхностные.

Массовая сила $\bar{F}(x_1, x_2, x_3, t)$ — сила, действующая на единицу массы — имеет размерность ускорения. Обычно в качестве примера массовой силы приводят силу тяжести \bar{g} , зависящую лишь от внешнего объекта (Земли, Солнца и т. д.) и не зависящую от объекта приложения силы (его плотности, формы и т. д.). Часто вместо массовой используют понятие объёмной силы ($\rho\bar{F}(x_1, x_2, x_3, t)$), т. е. силы на единицу объёма, имеющей уже, как видно, другую размерность и зависящей от свойств объекта своего приложения.

Поверхностные силы $\bar{S}^n(x_1, x_2, x_3, t)$ действуют на единицу регулярной поверхности с единичной нормалью \bar{n} и имеют размерность давления или напряжения. Следует подчеркнуть, что вектор \bar{S}^n , называемый вектором напряжения, зависит не только от координат, но и в каждой точке пространства от расположения площадки, на которой он действует. На это указывает индекс n сверху.

Закон об изменении количества движения формулируется следующим образом. Для произвольного объёма среды V , ограниченного замкнутой поверхностью Σ ,

$$\int_V \rho \bar{w} dV = \int_V \rho \bar{F} dV + \int_{\Sigma} \bar{S}^n d\Sigma, \quad (4.5)$$

т. е. изменение количества движения в объёме сплошной среды в каждый момент времени равно сумме объёмных и поверхностных сил, приложенных к этому объёму.

При тех же предположениях формулируется и третий закон механики сплошной среды — закон об изменении момента количества движения:

$$\int_V \rho \bar{r} \times \bar{w} dV = \int_V \rho \bar{r} \times \bar{F} dV + \int_{\Sigma} \bar{r} \times \bar{S}^n d\Sigma, \quad (4.6)$$

т.е. изменение момента количества движения в объёме сплошной среды в каждый момент времени равно сумме моментов объёмных и поверхностных сил, приложенных к этому объёму.

Перейдём теперь к дифференциальным следствиям (условиям в каждой точке среды) интегральных формулировок (4.5), (4.6).

Возьмем в качестве объёма V тетраэдр с вершиной в некоторой точке среды M , три грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 5). Пусть точка D — точка пересечения луча, исходящего из M и ортогонального плоскости (ABC) , с этой плоскостью. Обозначим высоту тетраэдра $|MD| = h$, а площади его граней $\triangle ABC$, $\triangle MAB$, $\triangle MBC$, $\triangle MCA$ через Σ , Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 соответственно. Объём тетраэдра V равен $\Sigma h/3$.

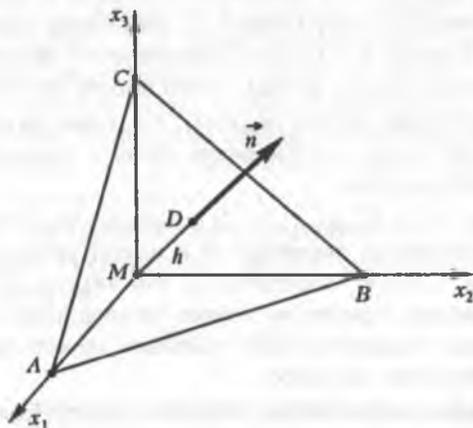


Рис. 5.

Обозначим единичный вектор нормали к плоскости (ABC) через \vec{n} . Тогда

$$\Sigma_i = \Sigma n_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

Пусть далее \vec{S}_i — векторы напряжений на боковых гранях тетраэдра, параллельных координатным плоскостям. Тогда применительно к тетраэдру $MABC$ закон об изменении количества движения (4.5) запишется следующим образом

$$\int_V \rho(\vec{w} - \vec{F}) dV = \int_{\Sigma} \vec{S}^n d\Sigma - \int_{\Sigma_1} \vec{S}_1 d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \vec{S}_2 d\Sigma - \int_{\Sigma_3} \vec{S}_3 d\Sigma. \quad (4.8)$$

В последних трёх слагаемых правой части (4.8) стоит знак минус из-за того, что внешняя нормаль на боковых гранях направлена в сторону,

противоположную положительному направлению соответствующей координатной оси.

Умножим теперь обе части (4.8) на $h/(3V)$ и учтём, что из (4.7) следует

$$\frac{h}{3V} = \frac{1}{\Sigma} = \frac{n_\alpha}{\Sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{h}{3V} \int_V \rho(\bar{w} - \bar{F}) dV &= \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \bar{S}^n d\Sigma - \frac{n_1}{\Sigma_1} \int_{\Sigma_1} \bar{S}_1 d\Sigma - \\ &- \frac{n_2}{\Sigma_2} \int_{\Sigma_2} \bar{S}_2 d\Sigma - \frac{n_3}{\Sigma_3} \int_{\Sigma_3} \bar{S}_3 d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Стягивая тетраэдр $MABC$ к точке M так, чтобы оставались конечными пределы

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V} \int_V \rho(\bar{w} - \bar{F}) dV \right], \quad \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \bar{S}^n d\Sigma \right], \\ \lim_{\Sigma_\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Sigma_\alpha} \int_{\Sigma_\alpha} \bar{S}_\alpha d\Sigma_\alpha \right], \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.11)$$

мы придём к тому, что левая часть (4.10) стремится к нулю (поскольку $h \rightarrow 0$), а правая к конечному пределу. Таким образом, в точке M имеем

$$\bar{S}^n = n_i \bar{S}_i. \quad (4.12)$$

Итак, если в некоторой точке известны векторы напряжений на координатных площадках, то по формуле (4.12) можно определить вектор напряжений в этой же точке на любой наклонной площадке. Разложим теперь векторы напряжений в ортонормированном базисе:

$$\bar{S}^n = S_i^n \bar{e}_i, \quad \bar{S}_i = \sigma_{ij} \bar{e}_j. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.12), найдем, что

$$S_j^n = \sigma_{ij} n_i. \quad (4.14)$$

Видно, что девять величин σ_{ij} являются компонентами тензора $\underline{\sigma}$, называемого тензором напряжений Коши или просто тензором напряжений.

Запишем закон об изменении количества движения (4.5) по координатно для произвольного объёма V и воспользуемся введёнными обозначениями (4.13), (4.14). Заменяя, согласно формуле Остроградского—Гаусса (1.61), поверхностный интеграл объёмным, получим

$$\int_V (\rho w_i - \rho F_i - \sigma_{ji,j}) dV = 0. \quad (4.15)$$

В силу произвольности объёма V необходимо потребовать, чтобы подинтегральное выражение равнялось нулю в каждой точке. Отсюда следует искомая формулировка закона об изменении количества движения в дифференциальной форме

$$\sigma_{ji,j} + \rho F_i = \rho w_i. \quad (4.16)$$

Соотношения (4.16) также называются уравнениями движения сплошной среды. Если инерционные члены равны нулю (статика) либо ими можно пренебречь по сравнению с остальными слагаемыми (квазистатика), то из (4.16) получаются уравнения равновесия сплошной среды

$$\sigma_{ji,j} + \rho F_i = 0. \quad (4.17)$$

Уравнения (4.16), (4.17) можно записать и в векторной форме, учитывая обозначение (1.58) $\vec{S}_{i,j} \equiv \text{Div } \underline{\sigma}$,

$$\text{Div } \underline{\sigma} + \rho \vec{F} = \rho \vec{w}, \quad \text{Div } \underline{\sigma} + \rho \vec{F} = 0. \quad (4.18)$$

Перейдём теперь к закону об изменении момента количества движения (4.6). Используя формулу (4.12), можно записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{S}^n d\Sigma &= \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{S}_i n_i d\Sigma = \int_V (\vec{r} \times \vec{S}_i)_{,i} dV = \\ &= \int_V \vec{r}_i \times \vec{S}_i dV + \int_V \vec{r} \times \vec{S}_{i,i} dV = \\ &= \int_V \vec{e}_i \times \vec{S}_i dV + \int_V \vec{r} \times \text{Div } \underline{\sigma} dV. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\vec{r}_{,i} = x_{j,i} \vec{e}_j = \delta_{ji} \vec{e}_j = \vec{e}_i$.

Подставим в правую часть (4.6) формулу (4.19) и получим

$$\int_V \vec{r} \times (\rho \vec{w} - \rho \vec{F} - \text{Div } \underline{\sigma}) dV = \int_V \vec{e}_i \times \vec{S}_i dV. \quad (4.20)$$

В силу уравнений движения (4.18) левая часть (4.20) равна нулю. Поэтому в каждой точке среды и подынтегральное выражение в правой части (4.20) есть нуль, т. е.

$$\bar{e}_i \times \bar{S}_i = 0. \quad (4.21)$$

По формуле векторного произведения (1.37) равенство (4.21) можно переписать так:

$$\epsilon_{ilm} \sigma_{il} = 0, \quad (4.22)$$

что означает симметрию тензора $\underline{\sigma}$ (см. задачу 6 лекции 2): $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Это и есть дифференциальная формулировка закона об изменении момента количества движения деформируемой среды.

Следовательно, напряжённое состояние в точке полностью определяется шестью компонентами тензора напряжений $\underline{\sigma}$. Если они известны, то на любой площадке с единичной нормалью \bar{n} компоненты вектора \bar{S}^n выражаются с помощью (4.14).

Проекция N^n вектора напряжений \bar{S}^n на некоторой площадке на нормаль \bar{n} к этой площадке называется нормальным напряжением и равна

$$N^n = S_i^n n_i = \sigma_{ij} n_j n_i, \quad (4.23)$$

т. е. является квадратичной формой, построенной на векторе \bar{n} с помощью матрицы тензора напряжений.

Проекция τ^n вектора напряжений \bar{S}^n на саму площадку называется касательным напряжением. По теореме Пифагора модуль её равен

$$|\tau^n| = \sqrt{|\bar{S}^n|^2 - (N^n)^2} = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ik} n_j n_k - (\sigma_{ij} n_i n_j)^2}. \quad (4.24)$$

Тензор напряжений, как и всякий тензор второго ранга, можно разбить на девиатор \underline{s} и шаровой тензор $\sigma \underline{I}$:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \text{tr } \underline{\sigma}. \quad (4.25)$$

Первый инвариант σ тензора напряжений носит название гидростатического давления или среднего напряжения. Это название вполне естественно, поскольку согласно (4.13) σ — среднее арифметическое величин $\bar{S}_\alpha \bar{e}_\alpha$.

В качестве квадратичного инварианта тензора напряжений чаще всего используют его интенсивность $\sigma_u = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$ — чрезвычайно важную характеристику напряжённого состояния в деформируемом теле¹⁾.

¹⁾ Тот факт, что σ_u , действительно, инвариант, доказывается в задаче 4 лекции 2.

Зная теперь три закона механики сплошной среды как в интегральной, так и в дифференциальной формах, перейдём к формулировке аналога теоремы о кинетической энергии (теоремы живых сил) в классической механике применительно к континууму. Для этого умножим обе части уравнений движения (4.16) на вектор скорости v_i и проинтегрируем по всему объёму V с границей Σ :

$$\int_V \sigma_{ij,j} v_i dV + \int_V \rho F_i v_i dV = \int_V \rho w_i v_i dV. \quad (4.26)$$

Первый интеграл в левой части преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij,j} v_i dV &= \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV = \\ &= \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j v_i d\Sigma - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{\Sigma} S_i^n v_i d\Sigma - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой Остроградского—Гаусса (1.61) и результатом задачи 7 лекции 2.

Обозначим dK изменение кинетической энергии тела

$$dK = dt \int_V \rho w_i v_i dV = \frac{1}{2} dt \int_V \rho |v|^2 dV, \quad (4.27)$$

$\delta \mathcal{A}_1^{(e)}$ — изменение работы массовых сил

$$\delta \mathcal{A}_1^{(e)} = dt \int_V \rho F_i v_i dV = \int_V \rho F_i du_i dV, \quad (4.28)$$

$\delta \mathcal{A}_2^{(e)}$ — изменение работы поверхностных сил

$$\delta \mathcal{A}_2^{(e)} = dt \int_{\Sigma} S_i^n v_i d\Sigma = \int_{\Sigma} S_i^n du_i d\Sigma, \quad (4.29)$$

$\delta \mathcal{A}^{(i)}$ — изменение работы внутренних сил²⁾

$$\delta \mathcal{A}^{(i)} = -dt \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = - \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV. \quad (4.30)$$

²⁾ Индекс (e) означает "external" (внешний), а (i) — "internal" (внутренний).

В результате равенство (4.26) переписывается в виде

$$dK = \delta A_1^{(e)} + \delta A_2^{(e)} + \delta A^{(i)} \equiv \delta A^{(i)} + \delta A^{(e)} \quad (4.31)$$

и представляет собой теорему живых сил для сплошных сред: изменение кинетической энергии объёма среды равно сумме изменения работ внутренних и внешних сил.

Обозначение вариации δ отличается от обозначения полного дифференциала d . Действительно, если dK является, согласно (4.27), полным дифференциалом кинетической энергии, то $dA_1^{(e)}$ и $dA_2^{(e)}$ будут полными дифференциалами только в случае потенциальности массовых и поверхностных сил, т. е. существовании скалярных потенциалов χ_F, χ_S таких, что

$$F_i = \frac{\partial \chi_F}{\partial u_i}, \quad S_i^n = \frac{\partial \chi_S}{\partial u_i}. \quad (4.32)$$

Для того, чтобы величина $dA^{(i)}$ была полным дифференциалом, положим, что существует упругий потенциал $W(\underline{\epsilon})$:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ji}} \right). \quad (4.33)$$

Тогда подынтегральное выражение в правой части (4.30) — полный дифференциал от W . Отметим, что интеграл по объёму V от упругого потенциала W называется потенциальной энергией $\varphi(\underline{\epsilon})$ деформации среды, заключенной в этом объёме, т. е. $A^{(i)} = -\varphi$.

В линейной теории упругости функция W представляет собой квадратичную форму, построенную на тензоре деформаций $\underline{\epsilon}$ с помощью тензора четвёртого ранга $\underline{\underline{C}}$, называемого тензором модулей упругости:

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}. \quad (4.34)$$

Из условий симметрии ϵ_{ij} и σ_{ij} , а также равенства смешанных производных следуют равенства

$$C_{ijm} = C_{jim} = C_{ijlk} = C_{klij}. \quad (4.35)$$

С учётом (4.33) число независимых компонент C_{ijkl} в самом общем случае анизотропии материала совпадает с числом независимых компонент симметричной матрицы 6×6 и равно 21.

Можно также построить тензор четвёртого ранга J_{ijkl} , называемый тензором упругих податливостей, обратный к C_{ijkl} , так что $\epsilon_{ij} = J_{ijkl} \sigma_{kl}$ и

$$C_{ijkl} J_{klmn} = \Delta_{ijmn}, \quad (4.36)$$

где $\Delta_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2$ — единичный тензор четвёртого ранга. Подробней об определяющих соотношениях анизотропной упругой среды можно узнать в [19, 20]. Теории упругости анизотропного тела посвящена замечательная книга [10]. Здесь мы будем рассматривать только изотропную среду, для которой упругие свойства одинаковы во всех направлениях. Такой материал характеризуется лишь двумя независимыми константами λ и μ , называемыми постоянными Ламе, а тензор модулей упругости является комбинацией единичных тензоров \underline{I}

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.37)$$

Подставляя (4.35) в (4.32), получим вид упругого потенциала для изотропного тела

$$W = \frac{1}{2} (\lambda \theta^2 + 2\mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \left[\left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \theta^2 + 2\mu \epsilon_u^2 \right]. \quad (4.38)$$

В свою очередь, подставляя (4.38) в (4.33), будем иметь связь напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (4.39)$$

называемую законом Гука для изотропного упругого тела.

Исходя из (4.37), можно отдельно связать между собой девиаторы, шаровые части и интенсивности тензоров напряжений и деформаций:

$$s_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij}, \quad \sigma = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \theta \equiv K\theta, \quad \sigma_u = 2\mu \epsilon_u, \quad (4.40)$$

где K — модуль объёмного расширения-сжатия материала. Так как коэффициент μ связывает девиаторы тензоров, отвечающие за сдвиговые напряжения и деформации, то он называется модулем сдвига материала.

Вместо постоянных Ламе в задачах часто используют так называемые технические постоянные: коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E , которые связаны с λ , μ соотношениями

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = 2\mu(1 + \nu). \quad (4.41)$$

Так с помощью технических постоянных можно обратить соотношение (4.39) и выразить деформации через напряжения в изотропном упругом теле (обратный закон Гука). Будем иметь

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [-3\nu \sigma \delta_{ij} + (1 + \nu) \sigma_{ij}]. \quad (4.42)$$

Итак, из пяти упругих постоянных λ , μ , K , ν , E независимы только любые две. Заметим, что размерности величин λ , μ , K , E совпадают

с размерностью напряжения или давления, тогда как коэффициент Пуассона — величина безразмерная. Из (4.38) следует, что функция W положительна для любого тензора деформаций, если одновременно выполняются два неравенства: $\mu > 0$ и $\lambda + 2\mu/3 > 0$. Из этих неравенств вытекает:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}. \quad (4.43)$$

Для реальных же материалов ν изменяется в пределах между нулем (пробка) и 1/2 (резина).

Лекция 5

Задача в перемещениях

Рассмотрим задачу о квазистатическом равновесии изотропного упругого тела. Как было установлено ранее, компоненты тензора напряжения σ_{ij} должны удовлетворять трём уравнениям равновесия (4.17), а компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями шестью соотношениями Коши (3.15). Чтобы замкнуть систему уравнений в области V , занимаемой телом, необходимо учесть определяющие соотношения изотропного упругого материала (4.39) (закон Гука). Тогда, действительно, относительно пятнадцати неизвестных функций u_i , ϵ_{ij} , σ_{ij} мы имеем пятнадцать перечисленных выше уравнений в V .

Подставим в (4.39) деформации ϵ_{ij} , выраженные из (3.15). Получим следующую связь тензора напряжений и вектора перемещений

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (5.1)$$

Если же далее подставить (5.1) в уравнения равновесия (4.17), то нетрудно прийти к трём уравнениям, называемым уравнениями Ламе:

$$(\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \rho F_i = 0, \quad (5.2)$$

которые мы будем также записывать в виде $\sigma_{ij,j}(\bar{u}) + \rho F_i = 0$, подразумевая под $\underline{\sigma}(\bar{u})$ связь (5.1).

В векторном виде уравнения Ламе можно представить следующим образом:

$$\text{grad div } \bar{u} + \mu \Delta \bar{u} + \rho \bar{F} = 0 \quad (5.3)$$

либо

$$\frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \bar{u} + \Delta \bar{u} + \frac{\rho}{\mu} \bar{F} = 0. \quad (5.4)$$

Система дифференциальных уравнений (5.2) (или (5.3), (5.4)) является эллиптической по Петровскому в области V при всех коэффициентах Пуассона, кроме $\nu = 1/2$ и $\nu = 1$.

Дифференцируя (5.2) по x_i и проводя суммирование по i , мы получим, что первый инвариант тензора деформаций θ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\theta = -\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} \vec{F}, \quad (5.5)$$

а каждая компонента u_i является решением неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u_i = \frac{\rho}{\mu} \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\operatorname{div} \vec{F})_{,i} - \Delta F_i \right]. \quad (5.6)$$

Согласно (5.5), (4.38), (4.39), первый инвариант σ тензора напряжений также удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\sigma = -\frac{(1 + \nu)\rho}{3(1 - \nu)} \operatorname{div} \vec{F}. \quad (5.7)$$

Для постановки квазистатической краевой задачи в перемещениях необходимо еще сформулировать граничные условия на замкнутой поверхности Σ , ограничивающей область V . Если на Σ всюду заданы перемещения u_i° , то

$$u_i|_{\Sigma} = u_i^\circ. \quad (5.8)$$

Если же на всей поверхности Σ даны нагрузки S_i° , то

$$\sigma_{ij}(\vec{u})n_j|_{\Sigma} = S_i^\circ, \quad (5.9)$$

причём $\sigma_{ij}(\vec{u})n_j = \lambda u_{j,j}n_i + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}n_j)$.

Может случиться, что вся граница Σ разбивается на две непересекающиеся части Σ_1 и Σ_2 , так что на одной из них заданы перемещения, а на другой нагрузки. Тогда

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad \sigma_{ij}(\vec{u})n_j|_{\Sigma_2} = S_i^\circ. \quad (5.10)$$

Итак, квазистатическая краевая задача теории упругости в перемещениях заключается в решении уравнений Ламе при выполнении граничных условий одного из трёх типов: (5.8), (5.9) или (5.10). Если выбираются условия (5.8), то задача называется первой краевой задачей, если (5.9), то второй краевой задачей, если же (5.10), то третьей краевой задачей или смешанной задачей. В случае неограниченной области Σ на бесконечности дополнительно задаются условия стремления к нулю всех компонент вектора перемещений.

Уравнения движения (4.16) отличаются от уравнений равновесия наличием инерционного слагаемого ρw_i в правой части. Поэтому уравнения

движения в перемещениях (динамические уравнения Ламе), учитывая (5.2) (или (5.3), (5.4)), можно записать в одном из следующих видов

$$(\lambda + \mu)u_{j,i;j} + \mu u_{i;j;j} + \rho \bar{F}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (5.11)$$

$$\text{grad div } \bar{u} + \mu \Delta \bar{u} + \rho \bar{F} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad div } \bar{u} + \Delta \bar{u} + \frac{\rho}{\mu} \bar{F} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (5.13)$$

Следовательно, динамическая краевая задача теории упругости в перемещениях состоит в решении динамических уравнений Ламе при выполнении одного из трёх типов граничных условий (5.8), (5.9) или (5.10), а также начальных условий

$$t = 0: \quad u_i = U_i; \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = V_i, \quad (5.14)$$

где U_i и V_i — заданные функции координат. В зависимости от выбора граничных условий эта задача также называется первой, второй либо третьей (смешанной) динамической краевой задачей. Заметим, что система трёх уравнений (5.11) принадлежит к гиперболическому классу при условиях (4.43) принадлежности системы (5.2) к эллиптическому.

Функциональные пространства, в которых разыскиваются решения как квазистатической, так и динамической краевых задач, должны особо оговариваться при исследовании каждой конкретной проблемы.

Теоремой существования решения задачи теории упругости в перемещениях занимались многие математики и механики в прошлом и нынешнем столетии. Мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе, а рассмотрим теорему единственности динамической задачи.

Предположим, что существует два решения $\bar{u}^{(1)}$ и $\bar{u}^{(2)}$, а разность их $\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)}$ обозначим \bar{u} . В силу (5.14) u_i удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$t = 0: \quad u_i = 0; \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad (5.15)$$

а также однородным уравнениям равновесия и однородным граничным условиям. Поэтому изменения работ массовых и поверхностных сил, построенных на перемещении \bar{u} , согласно (4.28) и (4.29) равны нулю, т. е.

$$\delta A^{(e)}(\bar{u}) = 0. \quad (5.16)$$

Обратимся к теореме живых сил для сплошных сред (4.31), которую в случае (5.16) и наличия упругого потенциала можно записать в следующем виде

$$K + \varphi = \text{const.} \quad (5.17)$$

Согласно определению кинетической энергии (4.27) величина K квадратично зависит от скоростей, а потенциальная энергия $\varphi(\underline{\varepsilon})$ — положительно определённая скалярная функция деформаций. В силу однородных начальных условий (5.15) для \bar{u} эти функции в начальный момент времени нулевые, т. е. константа, входящая в (5.17), равна нулю. Следовательно, в любой момент времени $K \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ и $\partial u / \partial t \equiv 0$. Опять же, пользуясь начальными условиями (5.15), заключаем, что $\bar{u}(\bar{x}, t) \equiv 0$, и решения $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(2)}$ совпадают.

Если рассматривается квазистатическая задача, то начальные условия использованы быть не могут. Но в этом случае для разности двух решений $\bar{u}^{(1)}$ и $\bar{u}^{(2)}$ справедливо равенство

$$\varphi[\underline{\varepsilon}(\bar{u})] = 0. \quad (5.18)$$

Отсюда и из (4.38) следует, что $\varepsilon_{ij}(\bar{u}) \equiv 0$ для любых i и j . При этом объём V движется как твёрдое целое.

Если мы имеем первую или третью краевые задачи, т. е. существует часть границы, где заданы перемещения, то тело жёстко смещаться не может, и теорема единственности имеет место. Для второй краевой задачи с условиями (5.9) решение не единственно, а \bar{u} имеет вид (3.38). Исключить жёсткое смещение можно, закрепив какую-нибудь точку тела M вместе с её сколь угодно малой окрестностью, т. е. потребовать

$$\bar{x} = \bar{x}_M : \bar{u}_M = 0; \quad \bar{\omega}_M = 0. \quad (5.19)$$

Наряду с постановкой квазистатической краевой задачи теории упругости в перемещениях рассмотрим эквивалентную ей вариационную постановку. Назовём кинематической системой произвольное непрерывно дифференцируемое векторное поле $\bar{u}(\bar{x})$. Кинематически допустимой назовём кинематическую систему, удовлетворяющую условиям (5.10) на части границы Σ_1 .

Построим для данной краевой задачи функционал \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \varphi - \mathcal{A}^{(e)} = \int_V W dV - \int_V \rho F_i u_i dV - \int_{\Sigma_2} S_i^o u_i d\Sigma, \quad (5.20)$$

называемый лагранжианом системы.

Вариационный принцип Лагранжа (теорема Лагранжа) состоит в следующем. Из всех кинематически допустимых систем действительная система (точное решение краевой задачи) отличается тем, что для неё и только для неё лагранжиан принимает стационарное значение, т. е.

$$\delta \mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}, \delta \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (5.21)$$

или

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \rho F_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i^o \delta u_i d\Sigma, \quad (5.22)$$

где $\delta \bar{\mathbf{u}}$ — разность между произвольными двумя кинематическими допустимыми системами, и $2\delta \varepsilon_{ij} \equiv (\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}$.

Необходимость теоремы Лагранжа следует из теоремы живых сил для сплошных сред (4.31), в которой надо положить $K \equiv 0$ и учесть условия (5.10) на части границы Σ_1 .

Пусть теперь выполняется соотношение (5.22). Преобразуем его левую часть следующим образом

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \\ &= \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = \\ &= \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Sigma - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь мы снова учли условия (5.10) на Σ_1 . Подставляя (5.23) в (5.22), окончательно получим

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) \delta u_i dV - \int_{\Sigma_2} (\sigma_{ij} n_j - S_i^o) \delta u_i d\Sigma = 0,$$

откуда в силу произвольности вариаций δu_i следуют три уравнения равновесия (4.17) в области V , а также условия (5.10) на части границы Σ_2 . Таким образом, достаточность утверждения теоремы Лагранжа и эквивалентность краевой и вариационной формулировок задачи теории упругости в перемещениях установлены.

Возьмем вторую вариацию лагранжиана \mathcal{L} (5.20). Поскольку массовые и поверхностные силы в данной задаче фиксированы и не варьируются,

то

$$\delta^2 \mathcal{L} = \int_V \delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V (\lambda \delta \theta \delta_{ij} + 2\mu \delta \epsilon_{ij}) \delta \epsilon_{ij} dV = \\ = \int_V \left(\lambda (\delta \theta)^2 + 2\mu \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} \right) dV \geq 0. \quad (5.24)$$

Последнее неравенство имеет место при $\mu > 0$ и выполнении условий (4.43).

Итак, в положении равновесия ($\delta \mathcal{L} = 0$) вторая вариация лагранжиана положительна, а, следовательно, он в этом положении имеет минимум.

Непосредственно на использовании вариационного принципа Лагранжа основан метод Ритца приближённого решения задач теории упругости. Выберем некоторую полную систему координатных вектор-функций $\{\bar{\phi}^{(n)}(\bar{x}), n = 0, 1, 2, \dots\}$, удовлетворяющих следующим кинематическим условиям

$$\bar{x} \in \Sigma_1: \quad \phi_i^{(0)} = u_i^0; \quad \phi_i^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

Перемещения ищутся в виде ряда по координатным функциям

$$\bar{u} = \bar{\phi}^{(0)}(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}^{(n)} \bar{\phi}^{(n)}(\bar{x}) \quad (5.26)$$

с неизвестными диагональными матрицами $\underline{A}^{(n)}$, не зависящими от \bar{x} .

Выражения (5.26) можно подставить в соотношения Коши (3.15) и определить компоненты тензора деформаций, по которым, в свою очередь, из определяющих соотношений среды находятся компоненты тензора напряжений. Тогда в аналитическом виде можно построить и лагранжиан (5.20) системы. Если в бесконечном ряду (5.26) оставить только первые N членов*, то лагранжиан \mathcal{L} превратится в функцию $3N$ переменных $A_{\alpha\alpha}^{(n)}$, где $n = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, 2, 3$. Для отыскания минимума нужно приравнять нулю все производные от \mathcal{L} по $A_{\alpha\alpha}^{(n)}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha\alpha}^{(n)}} = 0. \quad (5.27)$$

Из системы (5.27) $3N$ алгебраических уравнений каким-либо образом определяются $3N$ неизвестных коэффициентов $A_{\alpha\alpha}^{(n)}$, после чего

* Тем самым вместо точного решения \bar{u} разыскивается приближенное \bar{u}^N .

приближённое решение \vec{u}^N находится с помощью ряда (5.26), где суммирование надо проводить от 1 до N . Если изучается линейная упругая среда, то система (5.27) является линейной, и для её решения можно использовать широко апробированные численные методы.

В заключение лекции рассмотрим систему уравнений Ламе (5.13) для несжимаемых материалов при отсутствии массовых сил. Этот вырожденный случай соответствует граничной точке $\nu = 1/2$ интервала (4.43) и значению $\theta = 0$, поэтому первое слагаемое в (5.13) имеет неопределённость типа $0/0$. Обозначим предел

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0; \\ \nu \rightarrow 1/2}} \frac{\theta}{1 - 2\nu} = P, \quad (5.28)$$

и подставим (5.28) в (5.13) при $\nu \rightarrow 1/2$ и $\rho \vec{F} = 0$. Получим

$$\text{grad } P + \Delta \vec{u} = 0. \quad (5.29)$$

Таким образом, для несжимаемой среды имеем три уравнения равновесия (5.29), но к трём неизвестным компонентам вектора \vec{u} добавляется четвёртая неизвестная величина P . Для замыкания системы уравнений в области к (5.29) следует добавить условие несжимаемости

$$\theta \equiv \text{div } \vec{u} = 0. \quad (5.30)$$

Как уже было отмечено, краевая задача (5.29), (5.30), (5.8) теряет эллиптичность при $\nu = 1/2$, и её решение может быть неединственным. Значения коэффициента Пуассона, при которых однородная задача (5.4), (5.10) (с нулевыми входными данными) имеет нетривиальное решение, составляют так называемый спектр Коссера по имени братьев Коссера, которые впервые этот спектр исследовали.

Лекция 6

Задача в напряжениях

Задача теории упругости может быть сформулирована не только в перемещениях, но и в напряжениях. Это бывает более удобно, если на границе тела заданы нагрузки.

Рассмотрим, как и ранее, область V , занимаемую линейно упругим телом, с замкнутой границей Σ . Трёх уравнений равновесия (4.17) в V относительно шести компонент тензора напряжений $\underline{\sigma}$ недостаточно для замыкания системы. Попытаемся её замкнуть. Для этого преобразуем условия совместности в компонентах тензора деформаций (3.31). Используя формулу (1.41), можно показать, что тензор несовместности $\underline{\eta}$ (3.31) может быть записан в виде

$$\eta_{ij} = (\epsilon_{kl,kl} - \Delta\theta)\delta_{ij} + \theta_{,ij} + \Delta\epsilon_{ij} - \epsilon_{ik,kj} - \epsilon_{jk,ki}, \quad (6.1)$$

так что его шаровая часть равна $(\epsilon_{kl,kl} - \Delta\theta)/3$. Поскольку справедливы уравнения (3.31), то справедливо и уравнение

$$\epsilon_{kl,kl} = \Delta\theta, \quad (6.2)$$

а, следовательно, и уравнения

$$\theta_{,ij} + \Delta\epsilon_{ij} = \epsilon_{ik,kj} + \epsilon_{jk,ki}. \quad (6.3)$$

Подставим теперь в (6.3) выражения обратного закона Гука (4.42) для изотропной среды и после некоторых преобразований придём к шести уравнениям совместности уже в компонентах тензора напряжений

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + 3\sigma_{,ij} = 3\nu\Delta\sigma\delta_{ij} + (1 + \nu)(\sigma_{ik,kj} + \sigma_{jk,ki}). \quad (6.4)$$

Из уравнений равновесия (4.17) следует, что $\sigma_{ik,kj} = -\rho F_{i,j}$; $\sigma_{jk,ki} = -\rho F_{j,i}$. Учитывая также соотношение (5.7), правую часть (6.4) можно выразить через \vec{F} :

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{3}{1 + \nu}\sigma_{,ij} = -\frac{\rho\nu}{1 - \nu}\operatorname{div} \vec{F}\delta_{ij} - \rho(F_{i,j} + F_{j,i}). \quad (6.5)$$

Таким образом, получены недостающие для замыкания системы уравнения в области. Они носят название уравнения Бельтрами—Мичелла¹⁾.

Постановка квазистатической задачи теории упругости в напряжениях состоит в решении трёх уравнений равновесия (4.17) и шести уравнений Бельтрами—Мичелла (6.5) в области V относительно шести компонент σ_{ij} при удовлетворении трёх граничных условий

$$u_i(\underline{\sigma})|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0. \quad (6.6)$$

Так же, как в предыдущей лекции, приведём вариационную постановку задачи в напряжениях, эквивалентную краевой. Назовём статической системой произвольное тензорное поле $\sigma_{ij}(\bar{x})$, а статически допустимой системой поле напряжений, удовлетворяющее уравнениям равновесия (4.17) и статическим граничным условиям (6.6) на Σ_2 .

Поставим в соответствие потенциалу деформаций $W(\underline{\varepsilon})$ скалярный оператор $w(\underline{\sigma})$, называемый потенциалом напряжений, так что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial w}{\partial \sigma_{ji}} \right). \quad (6.7)$$

Аналогично потенциальной энергии деформации введём потенциальную энергию напряжения Φ :

$$\Phi = \int_V w dV \quad (6.8)$$

и построим для задачи в напряжениях кастильяниан \mathcal{K} :

$$\mathcal{K} = -\Phi + \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij}n_j u_i^0 d\Sigma. \quad (6.9)$$

Вариационный принцип Кастильяно (теорема Кастильяно) заключается в том, что из всех статически допустимых систем действительная система та и только та, для которой кастильяниан принимает стационарное значение, т.е.

$$\delta\mathcal{K}(\underline{\sigma}, \delta\underline{\sigma}) = 0 \quad (6.10)$$

или

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV = \int_{\Sigma_1} \delta\sigma_{ij}n_j u_i^0 d\Sigma, \quad (6.11)$$

где $\delta\underline{\sigma}$ — разность двух статически допустимых систем.

¹⁾ Так же, как и (6.4), в литературе их часто называют уравнениями совместности в напряжениях. При отсутствии массовых сил уравнения (6.4) часто называют уравнениями Бельтрами.

Необходимость условия (6.11) следует из равенства (4.31) (теоремы живых сил), в котором надо положить $K = 0$, $\sigma_{ij} = \delta\sigma_{ij}$ и учесть, что $\delta\sigma$ — разность статически допустимых полей напряжений.

Для установления достаточности вариационного принципа Кастильяно введём обобщённые множители Лагранжа $\kappa_i^{(V)}(\bar{x})$, $\bar{x} \in V$ и $\kappa_i^{(\Sigma)}(\bar{y})$, $\bar{y} \in \Sigma$ и построим функционал $I(\sigma)$:

$$I = \mathcal{K} - \int_V \kappa_i^{(V)} (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) dV - \int_{\Sigma_2} \kappa_i^{(\Sigma)} (\sigma_{ij} n_j - S_i^o) d\Sigma. \quad (6.12)$$

Применяя формулу Остроградского—Гаусса к выражению

$$\int_V \kappa_i^{(V)} \sigma_{ij,j} n_j dV$$

в (6.12), получим

$$\begin{aligned} \delta I(\sigma, \delta\sigma) = & \int_V \left[-\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\kappa_{i,j}^{(V)} + \kappa_{j,i}^{(V)}) \right] \delta\sigma_{ij} dV + \\ & + \int_{\Sigma_1} \delta\sigma_{ij} n_j (u_i^o - \kappa_i^{(V)}) d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \delta\sigma_{ij} n_j (\kappa_i^{(V)} + \kappa_i^{(\Sigma)}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Отсюда в силу произвольности $\delta\sigma_{ij}$ получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\kappa_{i,j}^{(V)} + \kappa_{j,i}^{(V)}), \quad \kappa_i^{(V)} \Big|_{\Sigma_1} = u_i^o. \quad (6.14)$$

Для того, чтобы существовало непрерывное поле $\bar{x}(\bar{x})$, как следует из первого соотношения (6.14), необходимо выполнение уравнений совместности деформаций, которые можно написать и в напряжениях в виде (6.4) или (6.5). Следовательно, \bar{x} имеет смысл вектора перемещений, и второе соотношение (6.14) определяет кинематические граничные условия. Достаточность вариационного принципа Кастильяно доказана.

Рассмотрим теперь вторую вариацию $\delta^2 \mathcal{K}$ кастильяниана (6.9)

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{K} = & - \int_V \delta\varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV = \\ = & - \frac{1}{E} \int_V [-3\nu\delta\sigma\delta_{ij} + (1+\nu)\delta\sigma_{ij}] \delta\sigma_{ij} dV = \\ = & - \frac{3}{E} \int_V [(1-2\nu)(\delta\sigma)^2 + (1+\nu)\delta s_{ij} \delta s_{ij}] dV. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Если выполняются неравенства (4.41), то последний интеграл в (6.15) неотрицательно определен, и $\delta^2 \mathcal{K} \leq 0$. Таким образом стационарная точка кастильяниана ($\delta \mathcal{K} = 0$) является точкой максимума.

Вариационная постановка задачи в напряжениях позволяет использовать метод, предложенный М. М. Филоненко-Бородичём. Решение задачи (4.17), (6.5), (6.6) ищется в виде ряда

$$\underline{\sigma} = \underline{\tau}^{(0)}(\underline{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{B}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}(\underline{x}), \quad (6.16)$$

где $\{\underline{\tau}^{(n)}, n = 0, 1, \dots\}$ — полная система координатных тензор-функций, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \tau_{ij,j}^{(0)} + \rho F_i &= 0, & \tau_{ij} n_j |_{\Sigma_2} &= S_i^0, \\ \tau_{ij,j}^{(n)} &= 0, & \tau_{ij} n_j |_{\Sigma_2} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.17)$$

т.е. поле $\underline{\tau}^{(0)}$ статически допустимо. Неизвестные постоянные матрицы $\underline{B}^{(n)}$ подлежат определению из условия стационарности (6.11) кастильяниана \mathcal{K} .

Подставляя деформации из обратного закона Гука (4.42) в (6.8), (6.9) с учётом (6.16), мы придём к тому, что \mathcal{K} будет зависеть только от неизвестных коэффициентов $\underline{B}^{(n)}$. Условие стационарности (6.11) эквивалентно бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial B_{\alpha\beta}^{(n)}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial B_{\alpha\beta}^{(n)}} = \int_{\Sigma_1} \tau_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta u_\alpha^0 d\Sigma, \quad (6.18)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \dots$. Если в ряду (6.16) оставить только первые N слагаемых, то система (6.18) превратится в систему $6N$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\underline{B}^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$. После её решения напряжённое состояние определяется из (6.16), где суммирование надо проводить от 1 до N .

Обратимся снова к классической постановке задачи теории упругости в напряжениях (4.17), (6.5), (6.6). Уравнения Бельтрами—Мичелла (6.5) были получены в начале лекции для замыкания трёх уравнений равновесия (4.17) в области V относительно шести компонент σ_{ij} . Однако самих уравнений (6.5) всего шесть, и, таким образом, в V имеются теперь девять уравнений относительно тех же шести неизвестных функций. На границе области Σ выполняются всего три условия (6.6). Кроме того, в отличие от лагранжиана (постановка в перемещениях), кастильяниан

(постановка в напряжениях) имеет в положении равновесия лишь условный экстремум. Это делает классическую постановку часто неудобной при решении.

Один из авторов создал новую постановку задачи в напряжениях, которая лучше приспособлена для использования численных методов. В ней для разыскания шести независимых компонент тензора напряжений решается шесть обобщённых уравнений совместности. При этом граничных условий для них оказывается тоже шесть: к трём условиям (6.6) добавляются три уравнения равновесия (4.17), снесённые на границу области Σ .

Легко проверить, что, если выполнено хотя бы одно из условий (3.31) или (6.3), то справедливы и условия (6.2). Поэтому, если выполняются условия совместности (3.31), то будут равны нулю все компоненты симметричного тензора второго ранга \underline{H} :

$$H_{ij} \equiv (\varepsilon_{kl,kl} - \Delta\theta)\xi_{ij} + \theta_{,ij} + \Delta\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} = 0, \quad (6.19)$$

где ξ — произвольный симметричный тензор-константа второго ранга. Если, например, $\xi_{ij} = \delta_{ij}$, то, как следует из (6.1), $H_{ij} = \eta_{ij}$; если $\xi_{ij} = 2\delta_{ij}/3$, то $H_{ij} = \bar{\eta}_{ij}$. Для дальнейшего нам достаточно рассмотреть случай

$$\xi_{ij} = \frac{(1 + \nu)e - \nu}{1 - \nu} \delta_{ij}, \quad (6.20)$$

где ν — коэффициент Пуассона, а e — пока неизвестная постоянная.

Обозначим теперь

$$q_i = \sigma_{ij,j}, \quad X_i = \rho F_i \quad (6.21)$$

и введём вектор \bar{R} :

$$R_i(\bar{q}) = \frac{1+a}{2\mu} q_i, \quad R_i(\bar{X}) = \frac{1+a}{2\mu} \rho F_i, \quad (6.22)$$

где a — ещё одна произвольная постоянная.

Образуем симметричный тензор второго ранга \underline{Y} :

$$Y_{ij} = R_{i,j}(\bar{X}) + R_{j,i}(\bar{X}) - \xi_{ij} R_{k,k}(\bar{X}), \quad (6.23)$$

где тензор ξ имеет вид (6.20).

Рассмотрим теперь тензор третьего ранга \underline{E} :

$$E_{ijk} = \varepsilon_{ij,k} + \delta_{ki} \left(\frac{1}{2} \theta_{,j} - \varepsilon_{j,l,l} \right) + \delta_{kj} \left(\frac{1}{2} \theta_{,i} - \varepsilon_{i,l,l} \right) + \xi_{ij} (\varepsilon_{kl,l} - \theta_{,k}) + R_i(\bar{q}) \delta_{jk} + R_j(\bar{q}) \delta_{ik} - \xi_{ij} R_k(\bar{q}). \quad (6.24)$$

Назовём обобщёнными уравнениями совместности уравнения

$$H_{ij} + R_{i,j}(\bar{q} + \bar{X}) + R_{j,i}(\bar{q} + \bar{X}) - \xi_{ij}R_{k,k}(\bar{q} + \bar{X}) = 0, \quad (6.25)$$

которые, используя (6.23) и (6.24), можно записать в дивергентном виде

$$E_{ijk,k} + Y_{ij} = 0. \quad (6.26)$$

Назовём симметричный тензор второго ранга χ , определённый на поверхности Σ односвязного тела V , тензором потоков:

$$\chi_{ij} = E_{ijk}n_k. \quad (6.27)$$

Воспользовавшись обратным законом Гука (4.40), тензор E , определяемый равенствами (6.24), можно выразить через напряжения следующим образом

$$E_{ijk} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij,k} + \frac{3\omega}{2} (\sigma_{,i}\delta_{kj} + \sigma_{,j}\delta_{ki} - e\sigma_{,k}\delta_{ij}) + b\delta_{ij}q_k + a(q_i\delta_{kj} + q_j\delta_{ki}) \right], \quad (6.28)$$

где

$$\omega = \frac{1}{1 + \nu}, \quad b = a \frac{\omega + e - 1}{1 - 2\omega}. \quad (6.29)$$

«Новая» постановка задачи в напряжениях заключается в решении шести обобщённых уравнений совместности (6.26) с учётом (6.28) относительно компонент тензора напряжений σ_{ij} при удовлетворении граничным условиям (6.6) и

$$q_i|_{\Sigma} = -\rho F_i|_{\Sigma}. \quad (6.30)$$

Покажем, что, если обобщённые уравнения совместности (6.25) или (6.26) удовлетворяются, и справедливы соотношения (6.30) на границе Σ , то уравнения равновесия (4.17) выполняются во всей области V . Для этого умножим уравнения (6.25) на δ_{ij} :

$$(2 - \xi)(\Delta\theta - \epsilon_{ij,i,j}) + (2 - \xi)R_{k,k}(\bar{q} + \bar{X}) = 0, \quad (6.31)$$

где, разумеется, $\xi = 3[(1 + \nu)e - \nu]/(1 - \nu)$.

Продифференцируем теперь соотношения (6.25) по x_i :

$$(\delta_{ij} - \xi_{ij})(\Delta\theta - \epsilon_{kl,kl})_{,j} + \Delta R_i(\bar{q} + \bar{X}) + (\delta_{ij} - \xi_{ij})R_{k,k,j}(\bar{q} + \bar{X}) = 0. \quad (6.32)$$

Из (6.31), (6.32) следует, что при $\xi \neq 2$ вектор $\bar{R}(\bar{q} + \bar{X})$ является гармонической функцией:

$$\Delta R_i(\bar{q} + \bar{X}) = 0. \quad (6.33)$$

При этом выполняются граничные условия (6.30), откуда с учётом (6.22) имеем

$$R_i(\bar{q} + \bar{X})|_{\Sigma} = 0. \quad (6.34)$$

Следовательно, всюду в области V тела справедливо равенство

$$R_i(\bar{q} + \bar{X}) = 0, \quad (6.35)$$

откуда и следует утверждение: уравнения равновесия (4.14) удовлетворяются всюду в V .

Так как уравнения Бельтрами—Мичелла (6.5) получаются из уравнений (6.25) или (6.26), (6.28) при

$$a = e = 0, \quad (6.36)$$

а в этом случае $\xi \neq 2$, то полученный результат относится и к ним.

Преимущество «новой» постановки заключается лишь в том, что, если уравнения (6.25), (6.26), (6.28) записать в операторном виде

$$L_{ijkl}\sigma_{kl} + Y_{ij} = 0, \quad (6.37)$$

где

$$\begin{aligned} L_{ijkl} = & \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\Delta + \frac{1}{1+\nu}\delta_{kl}\partial_i\partial_j - \\ & - \frac{a[(1+\nu)e - \nu]}{1-\nu}\delta_{ij}\partial_k\partial_l - e\delta_{ij}\delta_{kl}\Delta + \\ & + \frac{a}{2}(\delta_{ik}\partial_j\partial_l + \delta_{jl}\partial_i\partial_k + \delta_{il}\partial_j\partial_k + \delta_{jk}\partial_i\partial_l), \end{aligned} \quad (6.38)$$

то оператор (6.30) будет симметричен по парам индексов $\{ij\}$ и $\{kl\}$:

$$L_{ijkl} = L_{klij} \quad (6.39)$$

при выполнении условия

$$a = \frac{1-\nu}{(1+\nu)[\nu - e(1+\nu)]}. \quad (6.40)$$

Очевидно, что уравнения Бельтрами—Мичелла (6.5), записанные в виде (6.37), свойством (6.39) не обладают, ибо для них выполняются

равенства (6.36), которые противоречат (6.32). Условия (6.39) позволяют дать вариационную постановку задачи (6.26), (6.28), (6.6), (6.30). Для этого вводится функционал

$$I = \int_V \left(\frac{1}{2} E_{ijk}(\underline{\sigma}) \sigma_{ij,k} - Y_{ij} \sigma_{ij} \right) dV - \int_{\Sigma} \chi_{ij} \sigma_{ij} d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} (A q_i q_i + B \sigma_{ij} n_j \sigma_{ik} n_k) + A X_i q_i - B S_i^{\circ} \sigma_{ij} n_j \right] d\Sigma, \quad (6.41)$$

где A и B — некоторые размерные постоянные. Вариационный принцип формулируется в виде

$$\delta I(\sigma_{ij}, \delta \sigma_{ij}) = 0, \quad (6.42)$$

причём при варьировании функционала (6.41) потоки χ не варьруются (считаются «замороженными») и подставляются их выражения по формуле (6.27). Форма $E_{ijk}(\underline{\sigma}) \sigma_{ij,k}$ будет положительно определённой, если выполняются неравенства

$$\frac{2}{3} < \omega < 1, \quad e \leq 1 - \omega. \quad (6.43)$$

Мы не будем здесь останавливаться на подробном анализе эллиптичности «новой» постановки задачи, её преимуществе при численных решениях, отсылая читателя к монографии [21].

Заметим только, что в литературе давно предпринимались попытки сократить число независимых дифференциальных уравнений совместности в напряжениях с шести до трёх. К сожалению, такие попытки предпринимаются и теперь, причём некоторые авторы²⁾ настроены весьма агрессивно к истине, которая заключается в следующем. Для односвязного тела в трёхмерном евклидовом пространстве существует шесть функционально независимых дифференциальных уравнений совместности деформаций (а значит, и напряжений) для существования однозначного поля перемещений. Этот чисто геометрический факт и связан с тем, что тензор кривизны Римана [19] в трёхмерном пространстве имеет шесть независимых компонент.

Наверно, именно здесь уместно сказать несколько слов о литературе, посвящённой классической теории упругости. Энциклопедией математической теории упругости начала XX столетия является уникальная

²⁾ Вряд ли в учебнике уместно называть их имена...

книга [12]. В маленькой книжечке [27] приводятся основания математической теории упругости и описываются логические основы прикладных теорий. Университетскими курсами теории упругости можно считать книги [2, 3, 17]. Сюда можно отнести и курсы механики сплошной среды [7, 22].

Лекция 7

Общие теоремы и фундаментальные решения

Пусть, как и ранее, упругое тело занимает объём V , ограниченный замкнутой поверхностью Σ . Заданы массовые силы ρF_i , перемещения u_i^0 на части Σ_1 и напряжения S_i^0 на части Σ_2 . Совокупность этих векторов $\{\rho F_i; u_i^0; S_i^0\}$ будем называть входными данными квазистатической задачи. Решением этой задачи являются зависимости от координат векторное поле u_i и тензорные поля ε_{ij} и σ_{ij} , т.е. $\{u_i; \varepsilon_{ij}; \sigma_{ij}\}$. При других входных данных $\{\rho F_i'; u_i^0'; S_i^0'\}$ решение задачи для того же тела другое: $\{u_i'; \varepsilon_{ij}'; \sigma_{ij}'\}$.

Если σ_{ij} — непрерывно дифференцируемое поле, то из формулы Остроградского—Гаусса следует тождество

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dV = \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j u'_i d\Sigma - \int_V \sigma_{ij,j} u'_i dV. \quad (7.1)$$

Согласно закону Гука (4.39) левую часть (7.1) можно записать в виде

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dV = \int_V (\lambda \theta \theta' + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon'_{ij}) dV \equiv 2 \int_V W(\bar{u}, \bar{u}') dV, \quad (7.2)$$

где $W(\bar{u}, \bar{u}')$ — симметричная билинейная форма. Подставим (7.2) в (7.1) и получим так называемую первую формулу Бетти

$$\int_V u'_i \sigma_{ij,j} dV = \int_{\Sigma} u'_i \sigma_{ij} n_j d\Sigma - 2 \int_V W(\bar{u}, \bar{u}') dV. \quad (7.3)$$

Полагая в ней $\bar{u}' = \bar{u}$ и учитывая, что $W(\bar{u}, \bar{u})$ — упругий потенциал (см. (4.34)), придём ко второй формуле Бетти

$$\int_V u_i \sigma_{ij,j} dV = \int_{\Sigma} u_i \sigma_{ij} n_j d\Sigma - 2\varphi(\varepsilon). \quad (7.4)$$

Можно проделать те же выкладки, начиная с (7.1), если вместо свёртки $\sigma_{ij}\epsilon'_{ij}$ взять свёртку $\sigma'_{ij}\epsilon_{ij}$. Тогда вместо (7.3) будем иметь

$$\int_V u_i \sigma'_{ij,j} dV = \int_{\Sigma} u_i \sigma'_{ij} n_j d\Sigma - 2 \int_V W(\bar{u}', \bar{u}) dV. \quad (7.5)$$

Воспользуемся далее симметричностью билинейной формы $W(\bar{u}, \bar{u}')$ и вычтем (7.5) из (7.3). Получим третью формулу Бетти

$$\int_V (u'_i \sigma_{ij,j} - u_i \sigma'_{ij,j}) dV = \int_{\Sigma} (u'_i \sigma_{ij} n_j - u_i \sigma'_{ij} n_j) d\Sigma. \quad (7.6)$$

Рассмотрим вторую краевую задачу теории упругости и будем считать, что на всей поверхности Σ заданы статические граничные условия (5.9). Так как $\sigma_{ij,j} = -\rho F_i$, $\sigma'_{ij,j} = -\rho F'_i$, из (7.6) следует

$$\int_V \rho(u_i F'_i - u'_i F_i) dV + \int_{\Sigma} (u'_i S_i^o - u_i S_i^{o'}) d\Sigma = 0. \quad (7.7)$$

Получим некоторые важные следствия соотношения (7.7). Пусть массовые силы отсутствуют, а на поверхности тела в точках \bar{y}_0 и \bar{y}_1 действуют сосредоточенные силы

$$\bar{S}^o(\bar{x}) = \bar{S} \delta(\bar{x} - \bar{y}_0), \quad \bar{S}^{o'}(\bar{x}) = \bar{S}' \delta(\bar{x} - \bar{y}_1). \quad (7.8)$$

Тогда, подставляя (7.8) в (7.7) и используя основные свойства δ -функций

$$\int_{\Sigma} f(\bar{y}) \delta(\bar{y} - \bar{\eta}) d\Sigma_y = \begin{cases} f(\bar{\eta}), & \text{если } \bar{\eta} \in \Sigma, \\ 0, & \text{если } \bar{\eta} \notin \Sigma, \end{cases} \quad (7.9)$$

$$\int_V F(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) dV_x = \begin{cases} F(\bar{\xi}), & \text{если } \bar{\xi} \in V, \\ 0, & \text{если } \bar{\xi} \notin V, \end{cases} \quad (7.10)$$

придём к теореме взаимности:

$$\bar{u}'(\bar{y}_0) \cdot \bar{S} = \bar{u}(\bar{y}_1) \cdot \bar{S}'. \quad (7.11)$$

В (7.9), (7.10) символы $d\Sigma_y$ и dV_x означают, что интегрирование ведется по переменным \bar{y} и \bar{x} соответственно.

Вторым важным следствием является формула для изменения объёма тела ΔV под действием массовых и поверхностных сил. Для её получения возьмём $\sigma'_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij}$. Тогда $F'_i = 0$, $S_i^{o'} = \sigma_0 n_i$, $u'_i = \sigma_0 x_i / (3K)$. Подставим

выбранное «штрихованное» решение в (7.7) и получим

$$3K \int_{\Sigma} \underline{u}_i \underline{n}_i d\Sigma = \int_V \rho F_i \underline{x}_i dV + \int_{\Sigma} S_i^* \underline{x}_i d\Sigma. \quad (7.12)$$

С другой стороны,

$$\int_{\Sigma} \underline{u}_i \underline{n}_i d\Sigma = \int_V \operatorname{div} \underline{u} dV = \int_V \theta dV = \Delta V. \quad (7.13)$$

Поэтому

$$\Delta V = \frac{1}{3K} \left(\int_V \rho F_i \underline{x}_i dV + \int_{\Sigma} S_i^* \underline{x}_i d\Sigma \right). \quad (7.14)$$

Формулы Бетти служат источником получения многих важных формул. Рассмотрим, например, задачу о действии сосредоточенной силы в неограниченном упругом пространстве (задачу Кельвина). Пусть в точке $\tilde{\xi}$ среды в направлении оси \underline{x}_k действует сосредоточенная массовая сила интенсивности p :

$$\rho \underline{\tilde{F}}^{(k)} \equiv \underline{\tilde{X}}^{(k)} = p \delta(\underline{x} - \tilde{\xi}) \underline{e}_k. \quad (7.15)$$

Требуется решить уравнения Ламе (5.3) с массовой силой (7.15) с условием обращения в нуль вектора перемещений при $r \rightarrow \infty$. Назовём решение $\underline{\tilde{U}}^{(k)}(\underline{x}, \tilde{\xi})$ такой задачи вектором Кельвина, а объект с двумя индексами $U_i^{(k)}(\underline{x}, \tilde{\xi})$ — тензором перемещений Кельвина. Верхний индекс обозначает направление действия сосредоточенной силы, а нижний — компоненту перемещения, возникающего при этом действии.

Докажем теорему Максвелла о симметричности тензора перемещений Кельвина:

$$U_k^{(l)}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}') = U_l^{(k)}(\tilde{\xi}', \tilde{\xi}). \quad (7.16)$$

Для этого приложим в точке $\tilde{\xi}'$ неограниченного упругого пространства сосредоточенную массовую силу в направлении оси \underline{x}_l :

$$\rho \underline{\tilde{F}}^{(l)} \equiv \underline{\tilde{X}}^{(l)} = p \delta(\underline{x} - \tilde{\xi}') \underline{e}_l. \quad (7.17)$$

Соответствующий вектор перемещений $\underline{\tilde{u}}'$, полученный из решения уравнений Ламе (5.3), обозначим $\underline{\tilde{U}}^{(l)}(\underline{x}, \tilde{\xi}')$. Подставляя $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{u}}'$, а также (7.15) и (7.17) в следствие формулы Бетти (7.7) и пользуясь свойством (7.10) δ -функции, устанавливаем справедливость теоремы Максвелла (7.16).

Определим теперь тензор напряжений Кельвина $P_i^{(k)}$ следующим образом:

$$P_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi}) = \sigma_{ij} \left(\bar{U}^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi}) \right) n_j. \quad (7.18)$$

У полученного тензора второй векторный аргумент — любая точка, принадлежащая телу ($\bar{\xi} \in V$), а первый векторный аргумент принадлежит некоторой поверхности Σ с нормалью \bar{n} .

Воспользуемся снова формулой (7.7), положив в ней $u_i' = U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$, $S_i^{\circ'} = P_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi})$, $\rho F_i' = \delta_{ki} \delta(\bar{x} - \bar{\xi})$. После некоторых преобразований получим формулу Соммильяны:

$$u_k(\bar{\xi}) = \int_V \rho F_i(\bar{x}) U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) dV_x + \\ + \int_{\Sigma} \left[S_i^{\circ}(\bar{y}) U_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi}) - u_i^{\circ}(\bar{y}) P_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi}) \right] d\Sigma_y. \quad (7.19)$$

С помощью (7.19) вектор перемещения в любой точке $\bar{\xi} \in V$ может быть найден, если на поверхности Σ , ограничивающей объем V , известны одновременно и вектор перемещений, и вектор напряжений. Поскольку одновременно эти векторы на границе заданы быть не могут, формула Соммильяны непосредственного практического применения не имеет. Но она может использоваться для получения многих важных теоретических результатов.

Обратимся к бигармоническим уравнениям (5.6) и обозначим M дифференциальный оператор второго порядка над ρF_i , стоящий в правой части, так что

$$\Delta \Delta u_i = \rho M_{ij} F_j, \quad (7.20)$$

где

$$M_{ij} \equiv \frac{1}{\mu} \left[\lambda + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right]. \quad (7.21)$$

Ищем решение уравнений (7.20) в виде

$$u_i = M_{ij} \Gamma_j \quad (7.22)$$

(представление Галёркина). Вектор $\bar{\Gamma}$ носит название вектор Галёркина, а дифференциальный тензор-оператор M — оператор Галёркина. Подставим (7.22) в (7.20) и получим уравнение $\Delta^2(M_{ij} \Gamma_j) = \rho M_{ij} F_j$, которое удовлетворится при достаточном условии

$$\Delta^2 \Gamma_i = \rho F_i. \quad (7.23)$$

Заметим, что в случае отсутствия массовых сил вектор $\bar{\Gamma}$ — бигармоническая функция координат.

Пусть теперь массовая сила в (7.23) представляет собой линейную комбинацию трёх сосредоточенных нагрузок (7.15), приложенных в начале координат ($\bar{\xi} = 0$), т. е.

$$\rho F_i \equiv X_i = -p_i \delta(\bar{x}). \quad (7.24)$$

Таким образом, для нахождения вектора Галёркина в задаче Кельвина необходимо решить уравнения

$$\Delta^2 \Gamma_i = -p_i \delta(\bar{x}). \quad (7.25)$$

Будем разыскивать решения уравнений (7.23) в виде

$$\Gamma_i = C p_i r, \quad r = \sqrt{x_i x_i}. \quad (7.26)$$

Предварительно выпишем вторые производные по координатам от r и $1/r$:

$$r_{,i} = \frac{x_i}{r}, \quad r_{,ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}, \quad \Delta r = \frac{2}{r}; \quad \left(\frac{1}{r}\right)_{,i} = -\frac{x_i}{r^3},$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{,ij} = -\frac{\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3x_i x_j}{r^5}, \quad \Delta \left(\frac{1}{r}\right) = 0, \quad \text{если } r \neq 0.$$

Объёмный же интеграл от функции $\Delta(1/r)$ по шару V_a любого радиуса $a > 0$ с центром в начале координат равен

$$\int_{V_a} \Delta \left(\frac{1}{r}\right) dV = \int_{\Sigma_a} \left(\frac{1}{r}\right)_{,i} n_i d\Sigma =$$

$$= - \int_{\Sigma_a} \frac{x_i n_i}{r^3} d\Sigma = - \int_{\Sigma_a} \frac{n_i n_i}{r^2} d\Sigma = - \frac{1}{a^2} \int_{\Sigma_a} 1 \cdot d\Sigma = -4\pi.$$

Поэтому можно утверждать, что

$$\Delta \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta(\bar{x}), \quad \Delta \Delta r = -8\pi \delta(\bar{x}). \quad (7.27)$$

Таким образом, для удовлетворения уравнений (7.25) надо положить в (7.26) $C = 1/(8\pi)$, и вектор Γ в задаче Кельвина будет полностью известен:

$$\Gamma_i = \frac{p_i r}{8\pi}. \quad (7.28)$$

Подставим найденные Γ_i в представление Галёркина (7.22) и вычислим компоненты вектора перемещений, возникающих в неограниченном упругом пространстве при действии сосредоточенной силы в начале координат. Будем иметь

$$u_i = -\frac{p_j(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)} \left[\frac{x_i x_j}{r^3} + (3-4\nu) \frac{\delta_{ij}}{r} \right]. \quad (7.29)$$

Выражение для тензора перемещений Кельвина $U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ следует из (7.29), если положить $\bar{p} = p\bar{e}_k$ и считать, что $r = [(x_k - \xi_k)(x_k - \xi_k)]^{1/2}$:

$$U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) = -\frac{p(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)} \left[\frac{(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)}{r^3} + (3-4\nu) \frac{\delta_{ik}}{r} \right]. \quad (7.30)$$

Чтобы получить тензор напряжений Кельвина $P_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi})$, надо подставить (7.30) в (7.18). После некоторых преобразований, можно показать, что

$$P_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi}) = \frac{p}{8\pi(1-\nu)R^3} \left\{ (1-2\nu)[\delta_{ik}(y_j - \xi_j) + \delta_{jk}(y_i - \xi_i) - \delta_{ij}(y_k - \xi_k)] + \frac{3(y_i - \xi_i)(y_j - \xi_j)(y_k - \xi_k)}{R^2} \right\} n_j, \quad (7.31)$$

где $R = [(y_k - \xi_k)(y_k - \xi_k)]^{1/2}$.

Мы построили фундаментальное решение уравнений Ламе в виде матрицы Кельвина $U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) = U_i^{(k)}(\bar{x} - \bar{\xi})$. Характерной чертой каждой компоненты этой матрицы является то, что она удовлетворяет однородным уравнениям Ламе во всех точках $\bar{x} \in V$, кроме точки $\bar{x} = \bar{\xi}$. Пользуясь решением (7.30), можно получить и другие особые решения. Для этого продифференцируем (7.15) по ξ_l и образуем векторы

$$\bar{X}_{(i)}^{(k)} \equiv \bar{X}_{,l}^{(k)} = p \left[\delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \right]_{,l} \bar{e}_k, \quad (7.32)$$

образующие квадратную матрицу. Назовём её матрицей источников. Каждый диагональный элемент этой матрицы $\bar{X}_{(a)}^{(\alpha)}$ представляет собой так называемую двойную силу без момента. Данная особенность схематически изображена на рис. 6.

Каждый недиагональный член матрицы источников $\bar{X}_{(\beta)}^{(\alpha)}$ представляет собой двойную силу с моментом (рис. 7). След матрицы $\bar{X}_{(i)}^{(i)}$ называется

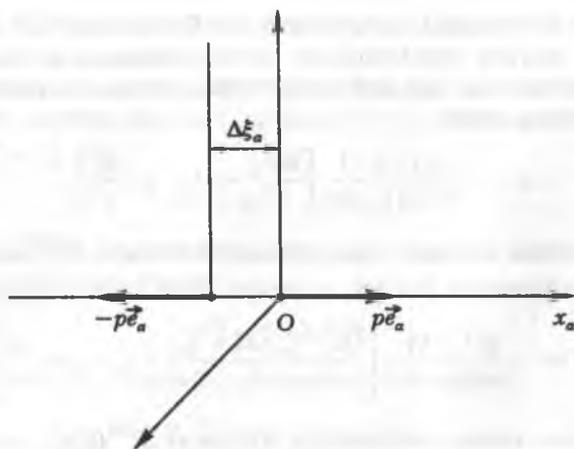


Рис. 6.

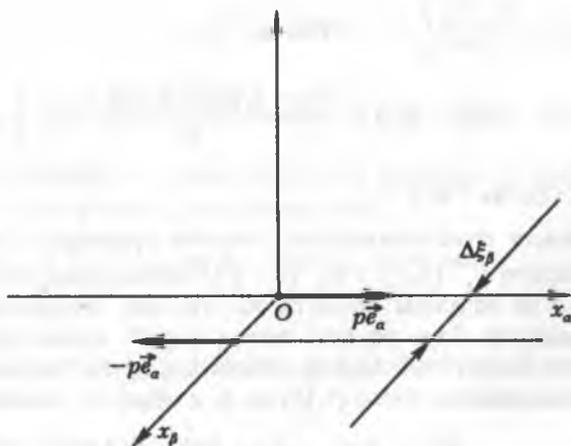


Рис. 7.

центром расширения-сжатия или центром дилатации (рис. 8), а вектор $\epsilon_{i1n} X_{n(l)}^{(k)} \vec{e}_i = \text{rot } \vec{X}^{(k)}$ — центром вращения (рис. 9). Если же каждая точка некоторой кривой является центром дилатации, то такая кривая носит название линии центров расширения-сжатия или линии центров дилатации.

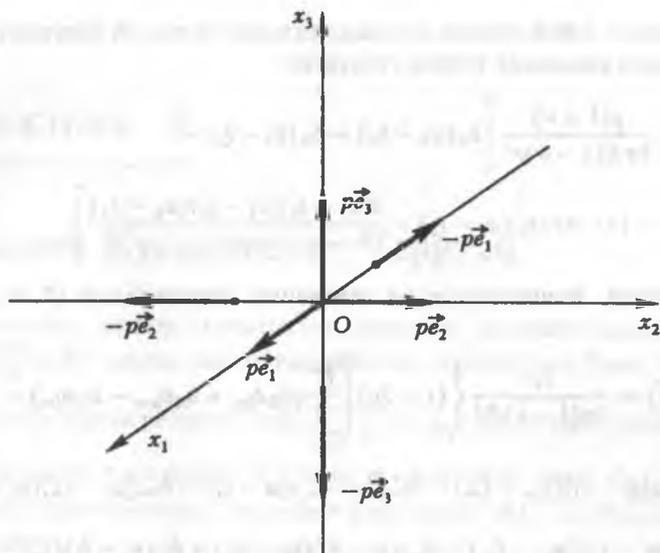


Рис. 8.

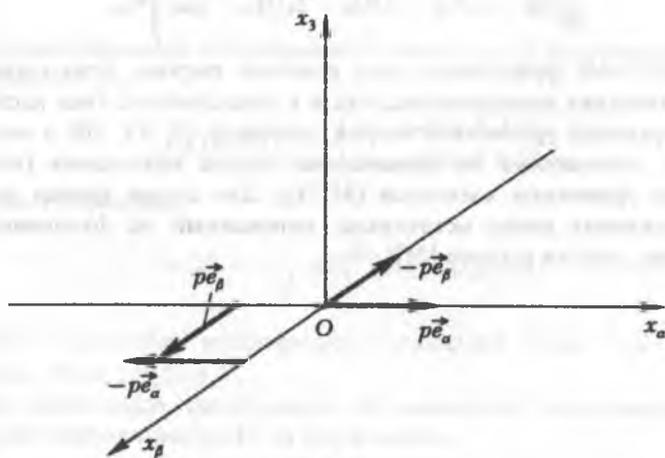


Рис. 9.

Решение $\vec{U}_{(l)}^{(k)} \equiv \vec{U}_{,l}^{(k)}$ уравнений Ламе

$$\left[\sigma_{ij} \left(\vec{U}_{(l)}^{(k)} \right) \right]_j + X_{(l)i}^{(k)} = 0 \quad (7.33)$$

представляет собой тензор фундаментальных решений (матрицу фундаментальных решений) теории упругости:

$$U_{(l)i}^{(k)} = -\frac{p(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)r^3} \left[\delta_{il}(x_k - \xi_k) + \delta_{lk}(x_i - \xi_i) - \right. \\ \left. - (3-4\nu)\delta_{ki}(x_l - \xi_l) - \frac{3(x_i - \xi_i)(x_l - \xi_l)(x_k - \xi_k)}{r^2} \right]. \quad (7.34)$$

Напряжения, вычисленные на основании перемещений (7.34), имеют вид

$$P_{(l)i}^{(k)}(\vec{y}, \vec{\xi}) = \frac{3p}{8\pi(1-\nu)R^3} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{R^2}{3} (\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{lk}\delta_{im}) - \right. \right. \\ \left. - \delta_{ik}(y_l - \xi_l)(y_m - \xi_m) - \delta_{km}(y_i - \xi_i)(y_l - \xi_l) + \delta_{im}(y_k - \xi_k)(y_l - \xi_l) \right] + \\ \left. + \delta_{il}(y_k - \xi_k)(y_m - \xi_m) + \delta_{ml}(y_i - \xi_i)(y_k - \xi_k) + \delta_{kl}(y_i - \xi_i)(y_m - \xi_m) - \right. \\ \left. - \frac{5}{R^2}(y_i - \xi_i)(y_l - \xi_l)(y_k - \xi_k)(y_m - \xi_m) \right\} n_m. \quad (7.35)$$

Полученные фундаментальные решения широко используются как в теоретических исследованиях, так и в приложениях. Они необходимы в интегральных уравнениях теории упругости [9, 13, 16] и численных методах, основанных на применении теории потенциала (например, в методе граничных элементов (МГЭ)). Для задачи теории упругости в напряжениях метод источников, основанный на фундаментальных решениях, описан в книге [21].

Лекция 8

Задача Буссинеска—Черрути

Поскольку каждая компонента матрицы фундаментальных решений $\bar{U}_{(i)}^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ удовлетворяет однородным уравнениям Ламе, то в силу линейности сумма решений вида $\sum_{i=1}^N \bar{U}_{(i)}^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}_{(i)})$ также удовлетворяет этим уравнениям во всех точках $\bar{x} \in V$ за исключением точек $\bar{\xi}_{(i)}$. Если распределить особенности с некоторой плотностью $\bar{p}(\bar{\xi})$ по области $\Omega \subset V$, то функции

$$u_i(\bar{x}) = \int_{\Omega} U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) p_k(\bar{\xi}) dV_{\xi}, \quad (8.1)$$

называемые объёмным потенциалом с плотностью \bar{p} , будут удовлетворять уравнениям Ламе

$$[\sigma_{ij}(\bar{u}(\bar{x}))]_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{x} \notin \Omega, \\ p_i, & \text{если } \bar{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (8.2)$$

В частности, функции

$$u_i(\bar{x}) = - \int_V \rho U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) F_k(\xi) dV_{\xi} \quad (8.3)$$

являются решениями неоднородных уравнений Ламе при заданных массовых силах $\rho \bar{F}(\bar{x})$ в V .

Если особенности распределены по некоторой поверхности Σ или вдоль некоторого контура Γ , то будем иметь

$$u_i(\bar{x}) = \int_{\Sigma} U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\eta}) p_k(\bar{\eta}) d\Sigma_{\eta}, \quad (8.4)$$

$$u_i(\bar{x}) = \int_{\Gamma} U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\gamma}) p_k(\bar{\gamma}) d\Gamma_{\gamma}. \quad (8.5)$$

соответственно, причём решение (8.4) называется потенциалом простого слоя с плотностью $\bar{p}(\bar{\eta})$.

Если в подынтегральных выражениях (8.1), (8.4), (8.5) тензор перемещений Кельвина $U_i^{(k)}$ заменить на тензор фундаментальных решений теории упругости (7.34), то можно получать новые решения уравнений Ламе, удовлетворяющие тем или иным граничным условиям. Для многих практических приложений бывает нужным найти решение в случае, когда источники располагаются непрерывно вдоль некоторой кривой либо по поверхности в пространстве. Например, если такой кривой является отрицательная полуось оси x_3 , т. е. $\xi_k = \xi \delta_{k3}$, $-\infty < \xi < 0$, и плотность распределения постоянна, то согласно (7.34)

$$U_{(0)i}^{(k)\{3\}}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^0 U_{(0)i}^{(k)\{3\}}(\bar{x}, \xi \bar{e}_3) d\xi = \frac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi E(1-\nu)} \frac{x_i + \tau \delta_{i3}}{r(\tau + x_3)} \delta_{ik}, \quad (8.6)$$

где $\tau = |\bar{x}|$.

В частности, если положить $l = k$ и просуммировать по k , то получим решение, соответствующее полуоси центров расширения-сжатия:

$$u_i^{\{3\}}(\bar{x}) = \frac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi E(1-\nu)} \frac{x_i + \tau \delta_{i3}}{r(\tau + x_3)}. \quad (8.7)$$

При $l = k = 3$ из (8.6) следует решение, соответствующее полуоси двойных сил без момента в плоскости (Ox_1x_2) :

$$u_i^{\{3\}}(\bar{x}) = \frac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi E(1-\nu)} \frac{\delta_{i3}}{r}. \quad (8.8)$$

Вспомним также решение (7.29) задачи Кельвина о действии сосредоточенной силы в начале координат и подставим в него $p_j = p\delta_{j3}$:

$$u_i^{\{3\}} = -\frac{p(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)} \left[\frac{x_i x_3}{r^3} + (3-4\nu) \frac{\delta_{i3}}{r} \right]. \quad (8.9)$$

Умножим соотношение (8.7) на -2 , (8.8) на 2ν , (8.9) на $-4(1-\nu)$ и сложим их. Левую часть получившегося равенства обозначим $V_i^{\{3\}\{3\}}(\bar{x})$. Верхний индекс {3} означает, что сосредоточенная сила в (8.9) направлена вдоль оси (Ox_3) , а верхний индекс {3} означает, что линия особенностей совпадает с отрицательной полуосью оси (Ox_3) . После некоторых преобразований можно показать, что

$$V_j^{\{3\}\{3\}}(\bar{x}) = \frac{p(1+\nu)x_j}{2\pi E} \left[\frac{x_3}{r^3} - \frac{1-2\nu}{r(\tau+x_3)} \right],$$

$$V_3^{(3)(3)}(\bar{x}) = \frac{p(1+\nu)}{2\pi E} \left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{2(1-\nu)}{r} \right]. \quad (8.10)$$

Построим теперь на векторе перемещений (8.10) тензор напряжений $\sigma_{ij} \left(V_i^{(3)(3)}(\bar{x}) \right)$. Его компонентами будут следующие выражения

$$\sigma_{IJ} = -\frac{3p}{2\pi} \left[\frac{x_I x_J x_3}{r^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{r^2 + r x_3 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} \delta_{IJ} - \frac{x_I x_J (2r+x_3)}{r^3(r+x_3)^2} \right) \right], \quad (8.11)$$

$$\sigma_{i3} = -\frac{3p}{2\pi} \frac{x_i x_3^2}{r^5}. \quad (8.12)$$

Так как перемещения (8.10) были получены как линейная комбинация решений уравнений Ламе (8.7)–(8.9), в силу линейности они также удовлетворяют этим уравнениям. Постараемся выяснить физический смысл полученных решений (8.10), или, другими словами, понять, решением какой физической задачи они служат. Для этого обратимся к напряжённому состоянию (8.11), (8.12).

Как видно из (8.12), все компоненты σ_{i3} равны нулю во всех точках плоскости $x_3 = 0$ за исключением начала координат. Согласно (4.14) в этих же точках равны нулю и все компоненты вектора напряжений \bar{S}^n на площадках с нормальми $\bar{n} = \{0; 0; \pm 1\}$. Следовательно, при напряжённом состоянии (8.11), (8.12) граница $x_3 = 0$ полупространств $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$ свободна от напряжений везде, кроме точки приложения сосредоточенной силы (начала координат).

Проинтегрируем вектор напряжений $S_i^n = \sigma_{ij} n_j$, вычисленный на основании поля (8.11), (8.12), по поверхности Σ_a полушара $V_a = \{|\bar{x}| < a, x_3 > 0\}$. Интеграл по плоской части $\{0 < |\bar{x}| < a, x_3 = 0\}$ этой поверхности, как было сказано выше, равен нулю. Вычислим интеграл по оставшейся сферической части Σ'_a , компоненты внешней нормали n_i в каждой точке которой равны x_i/r . Получим

$$\int_{\Sigma'_a} S_i^n d\Sigma = \int_{\Sigma'_a} \left(\frac{\sigma_{IJ} x_J}{r} + \frac{\sigma_{I3} x_3}{r} \right) d\Sigma = -\frac{3p}{2\pi a^4} \int_{\Sigma'_a} \left[\frac{x_I x_J x_J x_3}{a^2} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{a^2 + a x_3 + x_3^2}{a+x_3} x_I - \frac{x_I x_J x_J (2a+x_3)}{(a+x_3)^2} \right) + \frac{x_I x_3^2}{a^2} \right] d\Sigma = 0, \quad (8.13)$$

$$\int_{\Sigma'_a} S_3^n d\Sigma = \int_{\Sigma'_a} \frac{\sigma_{3j} x_j}{r} d\Sigma = -\frac{3p}{2\pi a^4} \int_{\Sigma'_a} x_3^2 d\Sigma = -p. \quad (8.14)$$

Интеграл в (8.13) равен нулю, поскольку подынтегральное выражение нечётным образом зависит от x_I^* , а поверхность Σ'_a симметрична относительно плоскостей $x_I = 0$.

Итак, проинтегрированный по поверхности полусферы Σ'_a вектор напряжений не зависит от a и имеет компоненты $\{0; 0; -p\}$. Это означает, что соотношения (8.10)–(8.12) суть решения задачи о действии сосредоточенной силы p на границе упругого полупространства $x_3 > 0$, причём линия действия силы ортогональна его границе. Такая задача носит название задачи Буссинеска.

Согласно формулам (8.10) перемещения в плоскости $x_3 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} V_J^{(3)\{3\}}|_{x_3=0}(\bar{x}) &= -\frac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E r^2} x_J, \\ V_3^{(3)\{3\}}|_{x_3=0}(\bar{x}) &= \frac{p(1-\nu^2)}{\pi E r}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

В цилиндрических координатах (R, φ, x_3) , где $x_1 = R \cos \varphi$, $x_2 = R \sin \varphi$, радиальная компонента перемещений $V_R^{(3)\{3\}}(\bar{x})$ записывается следующим образом

$$V_R^{(3)\{3\}}(\bar{x}) = \frac{p(1+\nu)}{2\pi E} \left[\frac{R x_3}{r^3} - (1-2\nu) \left(\frac{1}{R} - \frac{x_3}{R r} \right) \right]. \quad (8.16)$$

В сферических координатах (r, θ, φ) , где $x_3 = r \cos \theta$, $R = r \sin \theta$, компонента перемещений $V_R^{(3)\{3\}}(\bar{x})$ согласно (8.16) имеет вид

$$V_R^{(3)\{3\}}(\bar{x}) = \frac{p(1+\nu) \sin \theta}{2\pi E r} \left(\cos \theta - \frac{1-2\nu}{1+\cos \theta} \right). \quad (8.17)$$

Из (8.17) видно, что в полупространстве $x_3 > 0$ существует конус, внутри которого перемещения $V_R^{(3)\{3\}}(\bar{x})$ положительны, а вне его отрицательны. Половина угла раствора этого конуса равна

$$\theta = \arccos \frac{(\sqrt{5-8\nu}-1)}{2}.$$

* Действительно, свёртка $x_j x_j$ в подынтегральном выражении (8.13) на поверхности Σ'_a равна $a^2 - x_3^2$ и от x_I не зависит.

В случае же несжимаемого материала конус превращается в плоскость $x_3 = 0$, и во всех точках рассматриваемого полупространства $V_R^{(3)(3)}(\vec{x}) > 0$.

Выпишем также в сферических координатах (r, θ, φ) компоненты $V_r^{(3)(3)}$ и $V_\theta^{(3)(3)}$:

$$\begin{aligned} V_r^{(3)(3)}(\vec{x}) &= \frac{p(1+\nu)}{2\pi E r} [4(1-\nu) \cos \theta - (1-2\nu)], \\ V_\theta^{(3)(3)}(\vec{x}) &= \frac{p(1+\nu) \sin \theta}{2\pi E r} \left[-(3-4\nu) + \frac{1-2\nu}{1+\cos \theta} \right], \end{aligned} \quad (8.18)$$

а также ненулевые компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p}{2\pi r^2} [1-2\nu - 2(2-\nu) \cos \theta], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p(1-2\nu)}{2\pi r^2} \frac{\cos^2 \theta}{1+\cos \theta}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{p(1-2\nu) \sin \theta \cos \theta}{2\pi r^2 (1+\cos \theta)}, \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \frac{p(1-2\nu) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2\pi r^2 (1+\cos \theta)}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Комбинируя аналогичным образом выражения (8.6) для других индексов l, i, k , можно получать решения других задач теории упругости. К ним относится и задача о действии сосредоточенной силы $\vec{p} = \{p; 0; 0\}$ на границе упругого полупространства $x_3 > 0$ (задача Черрути). Решение её в перемещениях естественно обозначить $V_i^{(1)(3)}(\vec{x})$ ($x_3 > 0$):

$$\begin{aligned} V_1^{(1)(3)}(\vec{x}) &= \frac{p(1+\nu)}{2\pi E} \left[\frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3} + \frac{1-2\nu}{r+x_3} \left(1 + \frac{x_1^2}{r(r+x_3)} \right) \right], \\ V_2^{(1)(3)}(\vec{x}) &= \frac{p(1+\nu)x_1x_2}{2\pi E} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1-2\nu}{r(r+x_3)^2} \right], \\ V_3^{(1)(3)}(\vec{x}) &= \frac{p(1+\nu)x_1}{2\pi E} \left[\frac{x_3}{r^3} + \frac{1-2\nu}{r(r+x_3)} \right]. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Напряжения, вычисленные по полю перемещений (8.20), имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{3x_1^3}{r^5} + (1-2\nu)x_1 \left[\frac{3}{r(r+x_3)^2} - \frac{x_1^2(3r+x_3)}{r^3(r+x_3)^3} - \frac{1}{r^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{3x_1^2x_2}{r^5} + (1-2\nu)x_2 \left[\frac{1}{r(r+x_3)^2} - \frac{x_1^2(3r+x_3)}{r^3(r+x_3)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{22} &= -\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{3x_1x_2^2}{r^5} + (1-2\nu)x_1 \left[\frac{1}{r(r+x_3)^2} - \frac{x_2^2(3r+x_3)}{r^3(r+x_3)^3} - \frac{1}{r^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{i3} &= -\frac{3p}{2\pi} \frac{x_1x_3x_i}{r^5}.\end{aligned}\quad (8.21)$$

Как и в задаче Буссинеска, проинтегрируем вектор напряжений $S_i^n = \sigma_{ij}n_j$, вычисленный на основании тензорного поля (8.21), по поверхности Σ_a полушара $V_a = \{|\bar{x}| < a, x_3 > 0\}$. Интеграл по плоской части $\{0 < |\bar{x}| < a, x_3 = 0\}$ этой поверхности равен нулю. Имеем далее

$$\int_{\Sigma_a} S_3^n d\Sigma = \int_{\Sigma_a} \frac{\sigma_{i3}x_i}{r} d\Sigma = -\frac{3p}{2\pi a^4} \int_{\Sigma_a} x_1x_3 d\Sigma = 0. \quad (8.22)$$

Последний интеграл равен нулю в силу того, что подынтегральное выражение нечётным образом зависит от x_1 , а поверхность Σ_a' симметрична относительно плоскости $x_1 = 0$. По аналогичным причинам равен нулю интеграл по Σ_a' и от компоненты S_2^n .

Интегрирование по Σ_a' от $S_1^n = \sigma_{i1}n_i$ даст ненулевой результат. После некоторых вычислений получим, что этот интеграл не зависит от a и равен $-p$, т. е., действительно, поле напряжений (8.21) служит решением задачи Черрути.

Линейная комбинация решений задач Буссинеска и Черрути является решением задачи о действии сосредоточенной силы на границе упругого полупространства $x_3 > 0$, причём линия действия силы — произвольная прямая, проходящая через начало координат. Такая задача носит название задачи Буссинеска—Черрути.

Пользуясь выражениями (8.10), (8.20), можно выписать решение любой задачи теории упругости с заданной нагрузкой $S_k^0(\bar{\eta})$ на границе Σ_3 полупространства $x_3 > 0$:

$$u_i(\bar{x}) = \int_{\Sigma_3} V_i^{(k)\{3\}}(\bar{x}, \bar{\eta}) S_k^0(\bar{\eta}) d\Sigma, \quad (8.23)$$

где $V_i^{(k)\{3\}}(\bar{x}, \bar{\eta})$ — решение задачи Буссинеска—Черрути в случае, когда сосредоточенная сила приложена не в начале координат, а в точке $\bar{\eta} \in \Sigma_3$. Оно следует из (8.10), (8.20):

$$V_J^{(3)\{3\}}(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{p(1+\nu)(x_J - \eta_J)}{2\pi E} \left[\frac{x_3}{r_\eta^3} - \frac{1-2\nu}{r_\eta(r_\eta + x_3)} \right],$$

$$V_3^{(3)\{3\}}(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{p(1+\nu)}{2\pi E} \left[\frac{x_3^2}{r_\eta^3} + \frac{2(1-\nu)}{r_\eta} \right],$$

$$V_1^{(1)\{3\}}(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{p(1+\nu)}{2\pi E} \times \\ \times \left[\frac{1}{r_\eta} + \frac{(x_1 - \eta_1)^2}{r_\eta^3} + \frac{1-2\nu}{r_\eta + x_3} \left(1 + \frac{(x_1 - \eta_1)^2}{r_\eta(r_\eta + x_3)} \right) \right],$$

$$V_2^{(1)\{3\}}(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{p(1+\nu)(x_1 - \eta_1)(x_2 - \eta_2)}{2\pi E} \left[\frac{1}{r_\eta^3} - \frac{1-2\nu}{r_\eta(r_\eta + x_3)^2} \right],$$

$$V_3^{(1)\{3\}}(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{p(1+\nu)(x_1 - \eta_1)}{2\pi E} \left[\frac{x_3}{r_\eta^3} + \frac{1-2\nu}{r_\eta(r_\eta + x_3)} \right].$$

Здесь $r_\eta = \sqrt{(x_J - \eta_J)(x_J - \eta_J) + x_3^2}$ — расстояние между точками \bar{x} и $\bar{\eta}$.

Лекция 9

Плоская задача. I

Говорят, что имеет место плоское деформированное состояние, если в одном из направлений, например, x_3 , компонента вектора перемещений $u_3 = w$ имеет вид

$$w = C_1 x_3 + C_2, \quad (9.1)$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные, а две другие компоненты вектора перемещений u_I зависят только от координат x_1 и x_2 :

$$u_I = u_I(x_1, x_2). \quad (9.2)$$

Чаще всего при плоском деформированном состоянии полагают в (9.1) постоянную C_1 равной нулю. В этом случае имеем

$$\varepsilon_{13} = 0, \quad \theta = \varepsilon_{II}. \quad (9.3)$$

Из обратного закона Гука (4.42)

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}, \quad \Theta = 3\sigma, \quad (9.4)$$

в соответствии с (9.3) имеем

$$\begin{cases} \varepsilon_{1J} = -\frac{\nu}{E} \Theta \delta_{1J} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{1J}, \\ 0 = \varepsilon_{I3} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{1J}, \\ 0 = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{II} + \sigma_{33}) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33}. \end{cases} \quad (9.5)$$

Из второго и третьего соотношений системы (9.5) следует

$$\sigma_{I3} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu \sigma_{II}(x_1, x_2). \quad (9.6)$$

Подставляя (9.6) в первое соотношение (9.5), получим

$$\varepsilon_{1J} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{1J} - \nu \sigma_{KK} \delta_{1J}). \quad (9.7)$$

Сравнивая (9.7) с (2.39) и (2.40), получим

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{IJ} - \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \sigma_{KL} \right). \quad (9.8)$$

Обращая соотношения (9.8) относительно деформаций в соответствии с (2.43), (2.44), имеем

$$\sigma_{IJ} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\epsilon_{IJ} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \epsilon_{KL} \right). \quad (9.9)$$

Согласно традиции, введём обозначения

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (9.10)$$

Тогда (9.8) и (9.9) соответственно могут быть записаны в виде

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1}{E'} (\sigma_{IJ} - \nu' \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \sigma_{KL}), \quad (9.11)$$

$$\sigma_{IJ} = \frac{E'}{1-\nu'^2} (\epsilon_{IJ} + \nu' \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \epsilon_{KL}). \quad (9.12)$$

Уравнения равновесия (4.17) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ,J} + \sigma_{I3,3} + \rho F_I = 0, \\ \sigma_{3J,J} + \sigma_{33,3} + \rho F_3 = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

Из второго соотношения системы (9.13), а также (9.6) следует, что условием существования плоского деформированного состояния является отсутствие массовых сил в направлении x_3 :

$$F_3 = 0. \quad (9.14)$$

Из первого соотношения системы (9.13) и (9.6) следуют уравнения равновесия для плоского случая:

$$\sigma_{IJ,J} + \rho F_I = 0. \quad (9.15)$$

Граничные условия в напряжениях (6.6) для этого случая имеют вид

$$\sigma_{IJ} n_J \mathbf{e}_I = S_I^\sigma, \quad (9.16)$$

где Γ — контур (рис. 10). На контуре Γ наряду с единичным вектором нормали \bar{n} можно ввести единичный вектор $\bar{\tau}$, касательный к этому контуру. При этом

$$\tau_I = -\epsilon_{IJ} n_J, \quad n_I = \epsilon_{IJ} \tau_J, \quad (9.17)$$

где, очевидно,

$$\tau_I = \frac{dx_I}{ds},$$

а s — длина дуги контура Γ .

В силу того, что все компоненты тензора деформаций, имеющие индекс 3, согласно (9.3) равны нулю и все производные деформаций по x_3 также равны нулю, все уравнения совместности деформаций (3.31), кроме одного, тождественно удовлетворяются. Это одно уравнение можно записать в виде

$$\epsilon_{IM}\epsilon_{JN}\epsilon_{IJ,MN} = 0. \quad (9.18)$$

Подставляя теперь выражение (9.11) в (9.18) и используя свойства двумерных символов Леви-Чивиты (2.21), получим

$$\Delta\sigma_{II} = (1 + \nu')\sigma_{KL,KL}. \quad (9.19)$$

Если массовые силы обладают потенциалом

$$f_{,I} \equiv -\rho F_{I,} \quad (9.20)$$

то, воспользовавшись уравнениями равновесия (9.15), из соотношения (9.19) получим

$$\Delta[\sigma_{II} - (1 + \nu')f] = 0. \quad (9.21)$$

Введём в рассмотрение функцию напряжений Эри Φ :

$$\sigma_{IJ} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\Phi_{,KL} + f\delta_{IJ}. \quad (9.22)$$

Тогда, подставляя (9.22) в уравнения равновесия, мы видим, что последние удовлетворяются тождественно. Свернем с δ_{IJ} левую и правую части соотношения (9.22):

$$\sigma_{II} = \Delta\Phi + 2f. \quad (9.23)$$

Подставляя (9.23) в (9.21), получим уравнение для функции Эри

$$\Delta^2\Phi = -(1 - \nu')\Delta f. \quad (9.24)$$

Таким образом, если f является гармонической функцией (в частности, при отсутствии массовых сил), то функция Эри бигармонична:

$$\Delta^2\Phi = 0. \quad (9.25)$$

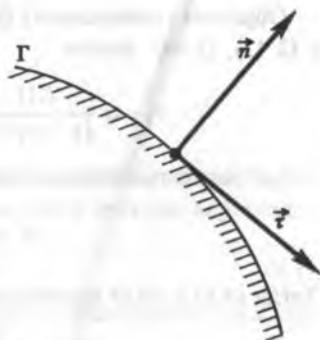


Рис. 10.

Задачей Дирихле для бигармонической функции называется уравнение (9.25) при заданных на контуре Γ значениях этой функции

$$\Phi|_{\Gamma} = \Phi_0 \quad (9.26)$$

и её нормальной производной

$$\left. \frac{d\Phi}{dn} \right|_{\Gamma} = \Psi_0. \quad (9.27)$$

Покажем, что граничные условия (9.16) могут быть приведены к условиям (9.26), (9.27). Подставим в (9.16) выражения (9.22) при $f \equiv 0$:

$$\epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \Phi_{,KL} n_J |_{\Gamma} = S_I^{\circ}. \quad (9.28)$$

Согласно (9.17) условия (9.28) можно переписать в виде

$$\epsilon_{IK} \tau_L \Phi_{,KL} |_{\Gamma} = S_I^{\circ}. \quad (9.29)$$

Следовательно, существует такая вектор-функция \vec{T} :

$$T_I = \epsilon_{IK} \Phi_{,K}, \quad (9.30)$$

для которой

$$\frac{dT_I}{ds} = S_I^{\circ}. \quad (9.31)$$

Интегрируя эту функцию по длине дуги s контура Γ , получим T_I , а, следовательно, и частные производные $\Phi_{,K}$, и саму функцию Φ , выраженную через S_I° . В самом деле, из (9.30) следует, что

$$\Phi_{,K} = T_I \epsilon_{IK}. \quad (9.32)$$

Так как

$$T_I = \int_{\Gamma} S_I^{\circ} ds, \quad (9.33)$$

то

$$\Phi_{,K} = \epsilon_{IK} \int_{\Gamma} S_I^{\circ} ds. \quad (9.34)$$

Поэтому

$$\Phi = \int dx_K \left[\epsilon_{IK} \int_{\Gamma} S_I^{\circ} ds \right]. \quad (9.35)$$

Кроме того, нормальная производная от функции Φ имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dn} \equiv \Phi_{,K} n_K = \epsilon_{IK} n_K \int_{\Gamma} S_I^{\circ} ds. \quad (9.36)$$

Из сравнения (9.35) и (9.26), а также (9.36) и (9.27) вытекает, что

$$\Phi_0 = \int dx_K \left[\epsilon_{IK} \int_{\Gamma} S_I^{\circ} ds \right], \quad (9.37)$$

$$\Psi_0 = \epsilon_{IK} n_K \int_{\Gamma} S_I^{\circ} ds. \quad (9.38)$$

Заметим, что произвольная постоянная, возникающая при интегрировании по контуру Γ в (9.37), (9.38), значения не имеет, ибо напряжения определяются двукратным дифференцированием функции Φ .

Заметим также, что постановка плоской задачи теории упругости в виде (9.25)–(9.27) справедлива для односвязных областей, так как уравнение совместности деформаций, следствием которого являются уравнения (9.24), (9.25), — только необходимое условие для существования поля перемещений. Поэтому в случае многосвязных тел решение, полученное на основе задачи (9.25)–(9.27), нуждается в дополнительном исследовании.

Легко установить физический смысл функции Эри. Пусть отсчёт длины дуги происходит от некоторой точки O , лежащей на контуре (рис. 10), и нас интересует значение функции Φ в точке $M(x_K^1)$ при $s = s_1$. Применяя к (9.35) интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{s_1} dx_K \left[\epsilon_{IK} \int_0^s S_I^{\circ} ds \right] = \\ &= x_K \epsilon_{IK} \int_0^{s_1} S_I^{\circ} ds \Big|_{s=0}^{s=s_1} - \int_0^{s_1} \epsilon_{IK} x_K S_I^{\circ} ds = \epsilon_{IK} \int_0^{s_1} S_I^{\circ} (x_K^1 - x_K) ds. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Таким образом, значение Φ в точке $M(x_K^1)$ — момент относительно этой точки от нагрузок, распределённых по контуру от $s = 0$ до $s = s_1$.

Плоское деформированное состояние практически осуществляется в длинных цилиндрических телах под действием нагрузок, ортогональных к оси цилиндра и не изменяющихся по его длине.

Лекция 10

Плоская задача. II

В качестве типичного примера плоской задачи теории упругости рассмотрим задачу о бесконечно длинной упругой трубе под внутренним и (или) внешним давлением (задачу Ламе). Сечение такой трубы показано на рис. 11. Пусть a — внутренний, а b — внешний радиусы трубы. Последняя находится под действием внутреннего равномерно распределённого давления p_a и наружного p_b . Введём цилиндрическую систему координат (r, θ) и физические компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_r, \quad \sigma_{22} = \sigma_\theta, \quad \sigma_{12} = \sigma_{r\theta}. \quad (10.1)$$

и вектора перемещений

$$u_1 = u_r \equiv u, \quad u_2 = u_\theta. \quad (10.2)$$

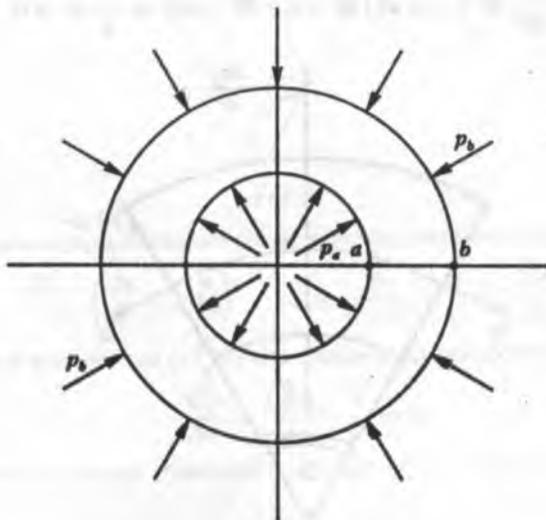


Рис. 11.

В силу осевой симметрии задачи, очевидно,

$$\sigma_{r\theta} \equiv 0, \quad u_\theta \equiv 0. \quad (10.3)$$

Граничные условия (9.16)

$$\sigma_r n_r + \sigma_{r\theta} n_\theta = S_r^\circ, \quad (10.4)$$

в силу того, что $n_r = 1$ при $r = b$ и $n_r = -1$ при $r = a$, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= -p_a, \\ \sigma_r|_{r=b} &= -p_b, \end{aligned} \quad (10.5)$$

ибо

$$\begin{aligned} S_r^\circ|_{r=a} &= p_a, \\ S_r^\circ|_{r=b} &= -p_b. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Чтобы записать уравнения равновесия (9.15) и соотношения Коши (3.15) для физических компонент тензора напряжений и вектора перемещений, требуется проделать длинные выкладки. Мы выберем другой путь. Вырежем элементарный элемент трубы (рис. 12) и запишем условия его равновесия. Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент, на ось, перпендикулярную оси x :

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} dr = 0. \quad (10.7)$$

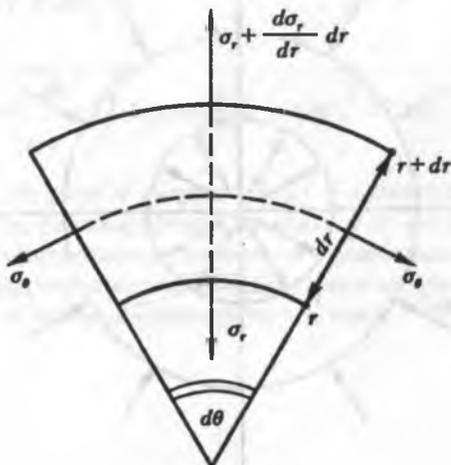


Рис. 12.

Отбрасывая в (10.7) бесконечно малые члены третьего порядка и заменяя $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$, получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (10.8)$$

Для вывода соотношений Коши (3.15) в цилиндрической системе координат вспомним физический смысл компонент тензора малых деформаций $\epsilon_r = \epsilon_{11}$ и $\epsilon_\theta = \epsilon_{22}$ как относительных удлинений соответствующих координатных волокон (рис. 13):

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{[(u + (du/dr) dr) - u]}{dr} = \frac{du}{dr}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

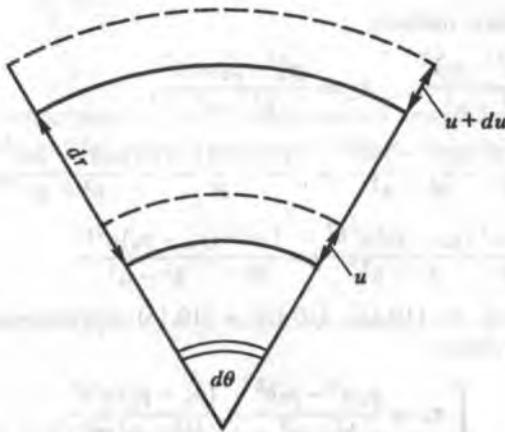


Рис. 13.

Подставим теперь значения (10.9) в определяющие соотношения (9.12)

$$\sigma_r = \frac{E'}{1 - \nu'^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu' \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E'}{1 - \nu'^2} \left(\frac{u}{r} + \nu' \frac{du}{dr} \right). \quad (10.10)$$

Полученные выражения (10.10) подставим в уравнения равновесия (10.8)

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (10.11)$$

Дифференциальное уравнение Эйлера (10.11) решается подстановкой $u = r^\alpha$:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (10.12)$$

Подставляя (10.12) в (10.10), получим соответственно

$$\sigma_r = A_1 - \frac{A_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = A_1 + \frac{A_2}{r^2}, \quad (10.13)$$

где

$$A_1 = \frac{E' C_1}{1 - \nu'}, \quad A_2 = \frac{E' C_2}{1 + \nu'}. \quad (10.14)$$

Используя граничные условия (10.5), приходим к системе двух уравнений для определения неизвестных постоянных A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} A_1 - \frac{A_2}{a^2} = -p_a, \\ A_1 - \frac{A_2}{b^2} = -p_b. \end{cases} \quad (10.15)$$

Решив эту систему, найдем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad A_2 = \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \\ C_1 &= \frac{1 - \nu' p_a a^2 - p_b b^2}{E'} \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu) p_a a^2 - p_b b^2}{E} \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \\ C_2 &= \frac{1 + \nu' (p_a - p_b) a^2 b^2}{E'} \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{1 + \nu (p_a - p_b) a^2 b^2}{E} \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Таким образом, из (10.12), (10.13) и (10.16) получаем окончательное решение задачи Ламе:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}, \\ \sigma_\theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}; \end{cases} \quad (10.17)$$

$$u = \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - 2\nu) \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r} \right]. \quad (10.18)$$

Из решения (10.17) вытекают важные частные случаи. Так, если положить $p_b = 0$ (случай расчёта ствола орудия при стрельбе), то имеем (рис. 14)

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (10.19)$$

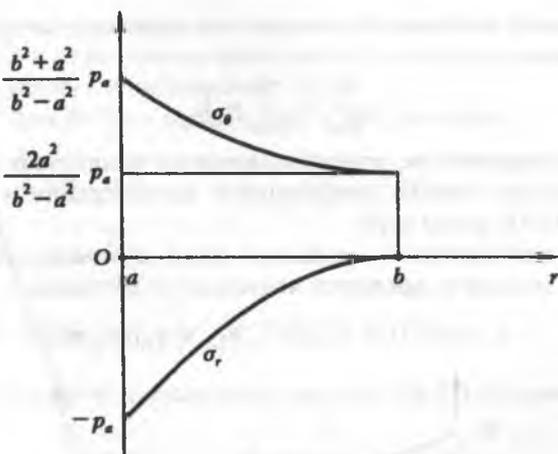


Рис. 14.

Если теперь осуществлять в (10.19) предельный переход при $b \rightarrow \infty$ (случай цилиндрической полости в неограниченном упругом пространстве), то получим (рис. 15)

$$\sigma_r = -p_a \frac{a^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = p_a \frac{a^2}{r^2}. \quad (10.20)$$

Заметим, что при $p_a = p_b = p$ из (10.17) имеем

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p. \quad (10.21)$$

Если же в (10.17) положить $p_a = 0$, $p_b = -p_\infty$ и осуществить предельный переход при $b \rightarrow \infty$, то получим случай растяжения упругого пространства с цилиндрическим вырезом (рис. 16)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= p_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Из рис. 16 и формул (10.22) видно, что при $r = a$ величина σ_θ/p_∞ достигает максимального значения, равного двум. При отсутствии отверстия ($a = 0$), т. е. в случае упругого пространства под действием давления p_∞ ,

распределённого по боковой поверхности цилиндра бесконечного радиуса, имеем

$$\frac{\sigma_r^0}{p_\infty} = \frac{\sigma_\theta^0}{p_\infty} = 1. \quad (10.23)$$

Поэтому цилиндрическое отверстие является концентратором кольцевых напряжений, причём коэффициент концентрации $k = \sigma_{\theta|r=a}/\sigma_\theta^0$ в решении (10.22) равен двум.

Плоским напряжённым называется такое состояние, при котором компоненты тензора напряжений подчиняются условиям

$$\sigma_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma_{IJ} = \sigma_{IJ}(x_1, x_2). \quad (10.24)$$

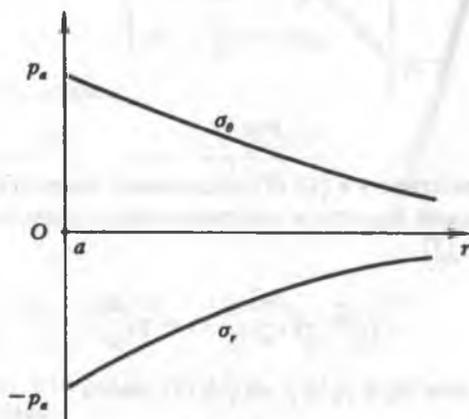


Рис. 15.

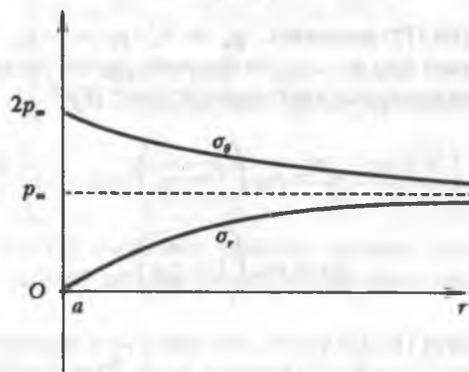


Рис. 16.

Очевидно, что и в этом случае условием существования состояния (10.24) будет (9.14). При этом должны выполняться уравнения равновесия (9.15) и граничные условия в напряжениях (9.16).

Из закона Гука (4.39) в соответствии с (10.24) имеем

$$\begin{cases} \sigma_{IJ} = \lambda\theta\delta_{IJ} + 2\mu\epsilon_{IJ} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu}\theta\delta_{IJ} + \epsilon_{IJ} \right], \\ 0 = \sigma_{I3} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{I3}, \\ 0 = \sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\epsilon_{II} + (1-\nu)\epsilon_{33}]. \end{cases} \quad (10.25)$$

Из второго и третьего соотношений системы (10.25) следует:

$$\epsilon_{I3} = 0, \quad \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}\epsilon_{II}(x_1, x_2). \quad (10.26)$$

Подставляя (10.26) в первое соотношение системы (10.25), получим

$$\sigma_{IJ} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-\nu}\epsilon_{KK}\delta_{IJ} + \epsilon_{IJ} \right]. \quad (10.27)$$

Сравнивая (10.27) с (2.39) и (2.40), запишем

$$\sigma_{IJ} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{IJ} + \nu\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\epsilon_{KL}). \quad (10.28)$$

В соответствии с (2.43), (2.44) обратим уравнения (10.28) относительно напряжений:

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1}{E}(\sigma_{IJ} - \nu\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\sigma_{KL}). \quad (10.29)$$

Соотношения (10.28), (10.29) отличаются от (9.11), (9.12) только заменой упругих постоянных E', ν' на E, ν соответственно.

Заметим, что в случае плоского напряжённого состояния уравнения совместности, которые уже не удовлетворяются тождественно, представляют собой помимо (9.18) ещё и уравнения

$$\epsilon_{33, IJ} = 0. \quad (10.30)$$

Напряжённые состояния, которым соответствуют деформации, удовлетворяющие (10.30), редко осуществимы практически. Поэтому обычно вводится понятие обобщённого плоского напряжённого состояния. Для его осуществления поверхностные S_I^0 и объёмные ρF_I силы должны

быть распределены симметрично относительно срединной плоскости тела¹⁾ и являться чётными функциями от координаты x_3 . Кроме того,

$$S_3^o = 0, \quad \rho \bar{F}_3 = 0. \quad (10.31)$$

Такое тело называется диском. Заметим, что это название дано не по геометрической характеристике тела, а по типу распределения нагрузки. Если в том же теле силы действуют ортогонально срединной плоскости, то оно называется пластинкой.

Введём усреднённые по толщине диска характеристики. Напомним, что σ_{IJ} — симметричные по x_3 функции, а σ_{I3} — антисимметричные. Получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3, & \rho \bar{F}_I &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \rho F_I dx_3, \\ \rho \bar{F}_3 &= 0, & \bar{u}_I &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_I dx_3, \end{aligned} \quad (10.32)$$

причём компоненту \bar{u}_3 мы пока не определяем.

Будем считать плоскости $x_3 = \pm h/2$ ненагруженными. Тогда

$$\sigma_{I3}|_{x_3=\pm h/2} = 0, \quad (10.33)$$

а из второго уравнения (9.13) вытекает, что

$$\sigma_{33,3}|_{x_3=\pm h/2} = 0. \quad (10.34)$$

Характер распределения напряжений σ_{33} и σ_{I3} по толщине диска показан на рис. 17. Из него видно, что $\bar{\sigma}_{I3} = 0$, и можно принять с достаточной степенью точности, что $\bar{\sigma}_{33} = 0$. Тогда уравнения равновесия (9.13) имеют вид

$$\bar{\sigma}_{IJ,J} + \rho \bar{F}_I = 0. \quad (10.35)$$

Условия Коши (3.15) могут быть теперь записаны в виде

$$\bar{\epsilon}_{IJ} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{I,J} + \bar{u}_{J,I}), \quad (10.36)$$

¹⁾ Срединной плоскостью мы называем плоскость, проходящую посередине между двумя плоскостями, ограничивающими рассматриваемое тело, причём расстояние h между этими плоскостями считается существенно меньше других линейных размеров тела.

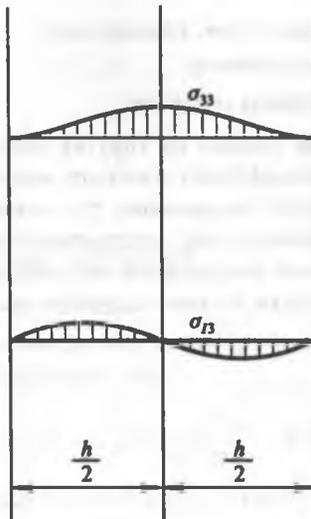


Рис. 17.

а компоненту $\bar{\epsilon}_{33}$ можно определить следующим образом

$$\bar{\epsilon}_{33} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_{3,3} dx_3 = \frac{1}{h} \left[u_3 \left(x_1, x_2, \frac{h}{2} \right) - u_3 \left(x_1, x_2, -\frac{h}{2} \right) \right]. \quad (10.37)$$

Тогда условия совместности (10.30) для усреднённых величин будут выполнены

$$\bar{\epsilon}_{33,II} = 0, \quad (10.38)$$

если положить, что

$$u_{3,II} \left(x_1, x_2, \frac{h}{2} \right) = u_{3,II} \left(x_1, x_2, -\frac{h}{2} \right). \quad (10.38)$$

Очевидно, что и для этого случая можно ввести функцию напряжения (9.22). Уравнения равновесия (10.35) будут тогда удовлетворяться тождественно, а уравнение совместности (9.18) примет вид (9.24) или, при отсутствии массовых сил, (9.25). Граничные условия, как и в случае плоской деформации, имеют вид (9.26), (9.27), (9.37), (9.38).

Отметим, что ни в уравнение (9.25), ни в граничные условия (9.26), (9.27), (9.37), (9.38) не входят упругие постоянные. Это означает, что если

- а) область, занимаемая телом, односвязна;
- б) массовые силы отсутствуют;
- в) на всей границе заданы нагрузки,

то тензор напряжений не зависит от упругих постоянных для плоского деформированного и обобщённого плоского напряжённого состояний. Это утверждение составляет содержание так называемой теоремы Мориса Леви. Она применяется при экспериментальных исследованиях, в частности, при изучении напряжений оптическим методом. О плоской задаче теории упругости можно подробнее узнать в замечательных книгах [2, 16, 26].



Лекция 11

Динамические задачи

Рассмотрим уравнения движения изотропной упругой среды (5.11), которые запишем в следующем виде

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu\Delta u_i + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \theta = \text{tr } \underline{\epsilon} = \text{div } \vec{u}. \quad (11.1)$$

Воспользуемся теоремой Гельмгольца, по которой всякое однозначное и непрерывное векторное поле \vec{a} , обращающееся в нуль на бесконечности, может быть представлено в виде суммы градиента некоторой скалярной функции φ и ротора векторной функции \vec{A} , дивергенция которой равна нулю:

$$\vec{a} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A}, \quad \text{div } \vec{A} = 0. \quad (11.2)$$

Функция φ называется скалярным потенциалом поля \vec{a} , а \vec{A} — векторным потенциалом.

Разобьём поле перемещений \vec{u} на два слагаемых:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}, \quad \text{div } \vec{\psi} = 0 \quad (11.3)$$

или, в компонентах,

$$u_i = \varphi_{,i} + \epsilon_{ijk} \psi_{k,j}, \quad \psi_{i,i} = 0. \quad (11.4)$$

Разобьём также массовые силы на два слагаемых:

$$\vec{F} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}, \quad \text{div } \vec{\Psi} = 0. \quad (11.5)$$

Тогда

$$\theta = \Delta \varphi. \quad (11.6)$$

Подставляя (11.4)–(11.6) в уравнения движения (11.1), запишем последние в векторной форме:

$$\text{grad} \left[(\lambda + 2\mu)\Delta \varphi + \rho \Phi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \text{rot} \left[\mu \Delta \vec{\psi} + \rho \vec{\Psi} - \rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (11.7)$$

невозмущённую часть среды и уже деформированную часть, и задний фронт волны, впереди которого находится деформированная среда, а сзади среда, испытывавшая возмущение и уже находящаяся в недеформированном состоянии. Скорость каждой точки волновой поверхности направлена по нормали к волновой поверхности. Иногда плоскую монохроматическую волну описывают в комплексном виде, имея в виду, что на заключительном этапе исследования необходимо взять действительную и мнимую части от полученного выражения. Например,

$$\vec{u} = \vec{u}_0(\vec{x})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}, \quad \varphi = \varphi_0e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}, \quad (11.17)$$

где $\vec{k} = 2\pi\vec{n}/\lambda$ — волновой вектор, λ — длина волны, \vec{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности, $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$. Подставим второе из соотношений (11.17) в волновое уравнение (11.12) и предположим, что $\vec{x} = x_\alpha \vec{e}_\alpha$. Получим

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (11.18)$$

где c — скорость распространения волны. Одна из возможных форм распространения волн называется модой. Так, например, соотношения (11.17) описывают синусоидальные моды. Вообще же, можно представить соотношение между частотой и волновым числом (вектором) в виде кривой $\omega = \omega(k)$. Скорость волны есть тангенс угла наклона этой кривой в каждой точке. Дисперсная мода — это мода, для которой скорость зависит от частоты. Если же для всех частот скорость одинакова, то дисперсия отсутствует. Если мода бездисперсионна, т. е. скорость всех синусоидальных составляющих с разными частотами одинакова, то они перемешаются вместе, и начальное возмущение сохраняет форму. Скорость

$$v = \frac{d\omega}{dk} \quad (11.19)$$

называется групповой.

В ограниченной упругой изотропной среде могут возникать и другие типы волн, кроме перечисленных выше. Рассмотрим одномерную динамическую задачу. Будем считать, что в однородном упругом стержне распространяется продольная волна, например, в направлении $x_1 = x$. Из уравнений движения видно, что в случае, если осуществляется одномерное напряжённое состояние, т. е. тензор напряжений записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma(x, t)\delta_{i1}\delta_{j1} \quad (11.20)$$

и справедлива связь $\sigma = E u_{,x}$, то для σ имеет место волновое уравнение

$$c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (11.21)$$

где E — модуль Юнга материала. Однако из уравнений совместности Бельтрами—Мичелла (6.5) следует, что напряжённое состояние (11.20) осуществляется только при $\nu = 0$.

Уравнения движения (5.12) в силу введенных обозначений (11.8), (11.9) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \bar{u} - (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \bar{u} = \bar{F}. \quad (11.22)$$

Задача Коши для уравнений движения упругой среды заключается в определении поля перемещений для неограниченного тела при удовлетворении начальных условий (5.14).

М. В. Остроградский предложил искать решение уравнений (11.22) в виде

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\Omega} \bar{\chi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t) f d\Omega, \quad (11.23)$$

где $\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$ — радиусы-векторы трёх точек пространства \mathbb{R}^3 с координатами x_j, ξ_j, η_j ($j = 1, 2, 3$),

$$f \equiv e^{i\bar{\xi} \cdot (\bar{x} - \bar{\eta})}. \quad (11.24)$$

Под \int_{Ω} мы будем понимать шестикратный интеграл по неограниченной области переменных ξ_j, η_j , причём

$$d\Omega = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \quad (11.25)$$

Массовые силы \bar{F} также представим в виде интеграла Фурье

$$\bar{F}(\bar{x}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{\eta}, t) f d\Omega. \quad (11.26)$$

Из (11.23) следуют очевидные соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \bar{u} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\Omega} i\bar{\xi} \cdot \bar{\chi} f \, d\Omega, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\Omega} \bar{\xi}(\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}) f \, d\Omega, \\ \Delta \bar{u} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\Omega} \xi^2 \bar{\chi} f \, d\Omega, \end{array} \right. \quad (11.27)$$

где

$$\xi^2 = \xi_i \xi_i. \quad (11.28)$$

Подставляя (11.23), (11.26), (11.27) в (11.22), получим уравнение для вектора $\bar{\chi}$:

$$\frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial t^2} + c_2^2 \xi^2 \bar{\chi} + (c_1^2 - c_2^2) \bar{\xi}(\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}) = \bar{F}(\bar{\eta}, t). \quad (11.29)$$

Умножая обе части уравнений (11.29) векторно на $\bar{\xi}$, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\xi} \times \bar{\chi}) + c_2^2 \xi^2 (\bar{\xi} \times \bar{\chi}) = \bar{\xi} \times \bar{F}(\bar{\eta}, t). \quad (11.30)$$

Теперь умножим обе части уравнений (11.29) скалярно на $\bar{\xi}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}) + c_1^2 \xi^2 (\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}) = \bar{\xi} \cdot \bar{F}(\bar{\eta}, t). \quad (11.31)$$

Если функции $\bar{U}(\bar{x})$ и $\bar{V}(\bar{x})$ в начальных условиях (5.14) представить в виде интегралов Фурье, то можно записать начальные данные для вектора $\bar{\chi}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi}(\bar{\chi}, \bar{\eta}, t) = \bar{U}(\bar{\eta}), \\ \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t}(\bar{\chi}, \bar{\eta}, t) = \bar{V}(\bar{\eta}). \end{array} \right. \quad (11.32)$$

Уравнения (11.30) и (11.31) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Их решения с учётом условий (11.32) запишем соответственно следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \times \bar{\chi} &= (\bar{\xi} \times \bar{U}) \cos(c_2 \xi t) + (\bar{\xi} \times \bar{V}) \frac{\sin(c_2 \xi t)}{c_2 \xi} + \\ &+ \int_0^t \bar{\xi} \times \bar{F}(\bar{\eta}, \tau) \frac{\sin(c_2 \xi(t - \tau))}{c_2 \xi} d\tau, \end{aligned} \quad (11.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{\xi} \cdot \vec{\chi} = \vec{\xi} \cdot \vec{U} \cos(c_1 \xi t) + \vec{\xi} \cdot \vec{V} \frac{\sin(c_1 \xi t)}{c_1 \xi} + \\ + \int_0^t \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}, \tau) \frac{\sin(c_1 \xi(t - \tau))}{c_1 \xi} d\tau. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Из формулы (2.48) следует, что

$$\vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{\chi}) = \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{\chi}) - \xi^2 \vec{\chi}, \quad (11.35)$$

$$\vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{U}) = \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{U}) - \xi^2 \vec{U}. \quad (11.36)$$

Формулы (11.35), (11.36) показывают, что векторы $\vec{\chi}$ и \vec{U} могут быть найдены, если известны их векторные и скалярные произведения с вектором $\vec{\xi}$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \vec{\chi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t) = \vec{U}(\vec{\eta}) \cos(c_2 \xi t) + \vec{V}(\vec{\eta}) \frac{\sin(c_2 \xi t)}{c_2 \xi} + \\ + \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{U}) \frac{\cos(c_1 \xi t) - \cos(c_2 \xi t)}{\xi^2} + \int_0^t \vec{F}(\vec{\eta}, \tau) \frac{\sin(c_2 \xi(t - \tau))}{c_2 \xi} d\tau + \\ + \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{V}) \frac{\sin(c_1 \xi t)/(c_1 \xi) - \sin(c_2 \xi t)/(c_2 \xi)}{\xi^2} + \\ + \int_0^t \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}, \tau)) \frac{\sin(c_1 \xi(t - \tau))/(c_1 \xi) - \sin(c_2 \xi(t - \tau))/(c_2 \xi)}{\xi^2} d\tau. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Подставляя (11.37) в (11.23), получим искомое решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \vec{u}(\vec{x}, t) = \int_{\Omega} \vec{U}(\vec{\eta}) \cos(c_2 \xi t) f d\Omega + \int_{\Omega} \vec{V}(\vec{\eta}) \frac{\sin(c_2 \xi t)}{c_2 \xi} f d\Omega + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \vec{F}(\vec{\eta}, \tau) \frac{\sin(c_2 \xi(t - \tau))}{c_2 \xi} f d\Omega d\tau + \int_{\Omega} \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{U}) \frac{\cos(c_1 \xi t) - \cos(c_2 \xi t)}{\xi^2} f d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{V}) \frac{\sin(c_1 \xi t)/(c_1 \xi) - \sin(c_2 \xi t)/(c_2 \xi)}{\xi^2} f d\Omega + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{F}) \frac{\sin(c_1 \xi(t - \tau))/(c_1 \xi) - \sin(c_2 \xi(t - \tau))/(c_2 \xi)}{\xi^2} f d\Omega d\tau. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Заметим, что М. В. Остроградский преобразовал решение (11.38) так, что оно представлялось в виде суммы так называемых запаздывающих потенциалов, которые удобны при объяснении физического смысла (11.38).

В связи с тем, что уравнения движения теории упругости (5.12) относятся к гиперболическому типу, наряду с непрерывными их решениями допускаются и разрывные. Поэтому в упругой среде возникают движущиеся поверхности, называемые поверхностями разрыва, при переходе через которые испытывают разрывы производные от вектора перемещений по координатам и по времени. При этом сами перемещения являются непрерывными функциями. Если терпят разрыв их первые производные, то говорят о поверхности сильного разрыва. Если же разрывны производные только порядка выше первого, то имеются в виду поверхности слабого разрыва.

Если упругая среда является неоднородной (композитом), то граница раздела между компонентами композита, имеющими разные физические свойства, — поверхность разрыва, которая сохраняет свое положение в пространстве. В однородной упругой среде поверхности разрыва распространяются с определённой скоростью, о которой речь пойдет ниже.

Пусть поверхность разрыва Σ_0 , являющаяся передним фронтом волны, распространяется со скоростью c в направлении своей нормали \vec{n} (рис. 18).

Перемещения в любой точке Q поверхности Σ_0 равны нулю, а позади фронта в любой точке P отлично от нуля. Пусть $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$ — два взаимно ортогональных вектора, лежащих в касательной к Σ_0 плоскости, и

$$\vec{n} = n_i \vec{e}_i, \quad \vec{\tau} = \tau_i \vec{e}_i, \quad \vec{\beta} = \beta_i \vec{e}_i. \quad (11.39)$$

Тогда $\{\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{\beta}\}$ — ортогональная система координат, и производная вектора \vec{u} по любому направлению может быть представлена в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} n_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \tau_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \beta_i. \quad (11.40)$$

Однако в силу непрерывности вектора \vec{u} имеем

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} = 0. \quad (11.41)$$

Поэтому из (11.40) следует

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_\alpha} \frac{1}{n_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (11.42)$$

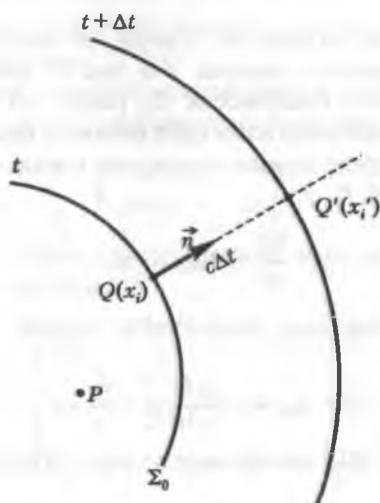


Рис. 18.

За время δt поверхность Σ_0 переместится на расстояние $c \delta t$ в направлении \vec{n} (точка Q')

$$x'_i = x_i + n_i c \delta t. \quad (11.43)$$

При этом вновь должно соблюдаться условие

$$\vec{u}(x'_i, t') = 0, \quad (11.44)$$

где $t' = t + \delta t$.

Разлагая (11.44) в ряд и удерживая только члены с δt в первой степени, получим

$$c \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad (11.45)$$

или, согласно (11.40) и (11.41),

$$c \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0. \quad (11.46)$$

Из (11.46) и (11.42) имеем

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_\alpha} \frac{1}{n_\alpha} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (11.47)$$

Равенства (11.37) называются кинематическими условиями на поверхности разрыва. При их выводе не использовались свойства среды, а только тот факт, что перемещения являются непрерывными функциями.

Рассмотрим теперь внутренние усилия, возникающие в среде при прохождении поверхности разрыва. На рис. 18 расстояние $QQ' = \delta l$ в результате движения поверхности Σ_0 равно $c \delta t$. В силу того, что векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$ были выбраны нами произвольно в касательной плоскости к поверхности Σ_0 , предположим теперь, что вектор скорости в точке Q лежал в плоскости $(\vec{n}, \vec{\tau})$, т. е.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{n} v_n + \vec{\tau} v_\tau. \quad (11.48)$$

Относительное удлинение физического отрезка QQ' за время δt , очевидно, равно

$$\epsilon_{nn} = -\frac{v_n \delta t}{c \delta t} = -\frac{v_n}{c}. \quad (11.49)$$

Кроме того, отрезок QQ' испытывает поворот, в результате чего деформация сдвига равна

$$\epsilon_{n\tau} = -\frac{v_\tau \delta t}{c \delta t} = -\frac{v_\tau}{c}. \quad (11.50)$$

С деформациями (11.49), (11.50) связаны нормальные σ_{nn} и касательные $\sigma_{n\tau}$ напряжения в точке Q на площадке с нормалью \vec{n} . Если на поверхности разрыва выделить элемент с площадью $\delta \Sigma$, то за время δt масса материала $\rho c \delta t \delta \Sigma$ под действием усилий $\sigma_{nn} \delta \Sigma$ и $\sigma_{n\tau} \delta \Sigma$ приобретает скорость $\partial \vec{u} / \partial t$. Поэтому по теореме об изменении количества движения имеем

$$\rho c \delta t \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\sigma_{nn} \vec{n} + \sigma_{n\tau} \vec{\tau}) \delta t, \quad (11.51)$$

откуда

$$\begin{cases} \rho c v_n + \sigma_{nn} = 0, \\ \rho c v_\tau + \sigma_{n\tau} = 0. \end{cases} \quad (11.52)$$

Соотношения (11.52) носят название динамические условия на поверхности разрыва. Они связывают напряжения со скоростями частиц и справедливы для любой сплошной среды.

Кинематические и динамические условия на поверхности сильного разрыва будут иметь следующий вид

$$\frac{1}{n_\alpha} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial n} - \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial n} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} - \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \right), \quad (11.53)$$

$$\begin{cases} \rho c (v_{n1} - v_{n2}) + \sigma_{nn1} - \sigma_{nn2} = 0, \\ \rho c (v_{\tau 1} - v_{\tau 2}) + \sigma_{n\tau 1} - \sigma_{n\tau 2} = 0, \end{cases} \quad (11.54)$$

где нижним индексом 1 помечены величины до фронта волны, а нижним индексом 2 — за фронтом.

Независимо от того, имеется сильный разрыв или слабый, полученные условия допускают запись в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \rho c dv_n = -d\sigma_{nn}, \\ \rho c dv_\tau = -d\sigma_{n\tau}. \end{cases} \quad (11.55)$$

В силу (11.41) и специального выбора направления $\vec{\tau}$ имеем для компонент тензора деформаций:

$$\begin{cases} \epsilon_{nn} = -\frac{v_n}{c}, & \epsilon_{\tau\tau} = \epsilon_{\beta\beta} = 0, \\ \epsilon_{n\tau} = -\frac{v_\tau}{2c}, & \epsilon_{n\beta} = \epsilon_{\tau\beta} = 0, \\ \theta \equiv \epsilon_{nn} + \epsilon_{\tau\tau} + \epsilon_{\beta\beta} = -\frac{v_n}{c}. \end{cases} \quad (11.56)$$

Согласно закону Гука из (11.56) следует

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{nn} = -(\lambda + 2\mu)\frac{v_n}{c}, \\ \sigma_{n\tau} = 2\mu\epsilon_{n\tau} = -\mu\frac{v_\tau}{c}. \end{cases} \quad (11.57)$$

Подставляя выражения (11.57) в (11.52), получим

$$\begin{cases} \left(\rho c - \frac{\lambda + 2\mu}{c}\right) v_n = 0, \\ \left(\rho c - \frac{\mu}{c}\right) v_\tau = 0. \end{cases} \quad (11.58)$$

Из (11.58) следует, что поверхность разрыва в упругой среде может двигаться либо со скоростью $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, и тогда $v_\tau = 0$, либо со скоростью $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, и тогда $v_n = 0$. В первом случае направление движения частиц совпадает с направлением волны (продольная волна). Во втором случае частицы движутся перпендикулярно распространению волны (поперечная волна). Других скоростей распространения поверхностей разрыва в неограниченной упругой среде, как видно, нет.

Некоторые другие вопросы динамической задачи теории упругости можно найти в книгах [12, 17, 20].

Лекция 12

Техническая теория балок

Призматическое тело, размер которого вдоль образующей (длина) существенно больше двух других размеров, называется стержнем или балкой в зависимости от вида нагрузки на это тело (рис. 19).

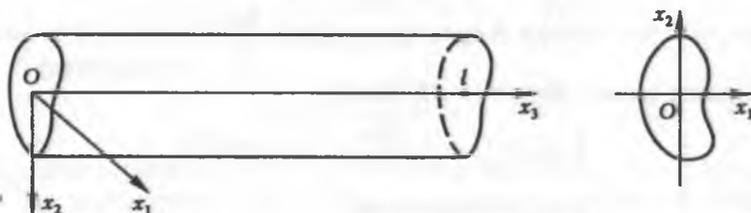


Рис. 19.

Определим далее главный вектор и главный момент сил на некоторой поверхности Σ с единичной нормалью $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$. Главным вектором $\vec{P} = P_i \vec{e}_i$ на Σ назовём вектор с компонентами

$$P_i = \int_{\Sigma} S_i^{\circ} d\Sigma. \quad (12.1)$$

Главным моментом сил на той же поверхности Σ назовём вектор $\vec{M} = M_i \vec{e}_i$ с компонентами

$$M_i = \epsilon_{ijk} \int_{\Sigma} x_j S_k^{\circ} d\Sigma. \quad (12.2)$$

Здесь \vec{S}° — вектор напряжений или вектор плотности сил, действующих на площадке Σ :

$$S_i^{\circ} = \sigma_{ij} n_j. \quad (12.3)$$

Если в качестве Σ принять торцы $x_3 = 0$, $x_3 = l$ призматического тела (рис. 19), то $n_j = \pm \delta_{3j}$. В этом случае, если вектор \vec{P} направлен по

оси (Ox_3) , то призматическое тело называется стержнем. Если $\vec{P} = 0$, а вектор \vec{M} параллелен оси (Ox_3) , то говорят, что имеет место кручение стержня. Если же по-прежнему $\vec{P} = 0$, а вектор \vec{M} ортогонален оси (Ox_3) , то призматическое тело называется балкой, и имеет место её изгиб.

Назовём моментом инерции стержня величину

$$I = \int_{\Sigma} B(x_1, x_2) d\Sigma, \quad (12.4)$$

где $B(x_1, x_2)$ — некоторый полином. В частности, величины

$$S_I = \int_{\Sigma} x_I d\Sigma \quad (12.5)$$

называются статическими моментами инерции или моментами инерции первого порядка относительно оси $\epsilon_{IJ}x_J$. Интегралы

$$I_{IJ} = \int_{\Sigma} x_I x_J d\Sigma \quad (12.6)$$

называются моментами инерции второго порядка. При этом I_{11} и I_{22} носят название осевых моментов инерции, а I_{12} — центробежного момента. Величина

$$I_p = I_{KK} = \int_{\Sigma} x_K x_K d\Sigma \quad (12.7)$$

называется полярным моментом инерции стержня или моментом инерции относительно начала координат.

Очевидно, что координаты центра масс x_I^c однородного тела в сечении $x_3 = \text{const}$ определяются через статические моменты инерции следующим образом

$$x_I^c = \frac{S_I}{\Sigma}, \quad (12.8)$$

где Σ — площадь сечения: $\Sigma = \int_{\Sigma} d\Sigma$.

В качестве примера определим осевые моменты инерции для прямоугольного сечения (рис. 20):

$$I_{11} = \int_{\Sigma} x_1^2 d\Sigma = \int_0^a x_1^2 \int_{-b/2}^{b/2} dx_2 dx_1 = \frac{a^3 b}{3}, \quad (12.9)$$

$$I_{22} = \int_{\Sigma} x_2^2 d\Sigma = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} x_2^2 dx_2 dx_1 = \frac{ab^3}{12}. \quad (12.10)$$

Полярный момент инерции для круглого сечения радиуса R равен

$$I_p = \int_{\Sigma} r^2 dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (12.11)$$

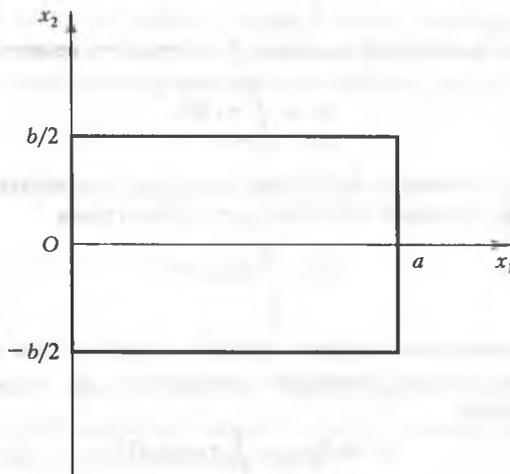


Рис. 20.

Будем считать далее, что центры тяжести всех сечений призматического тела находятся на оси x_3 , и, кроме того, оси $(Ox_1), (Ox_2)$ — главные оси сечения (рис. 19). Тогда

$$I_I = 0, \quad I_{12} = 0. \quad (12.12)$$

Задача теории упругости в напряжениях для такого тела заключается в решении шести уравнений (6.5) с нулевыми массовыми силами (уравнений Бельтрами)

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu} \sigma_{,ij} = 0 \quad (12.13)$$

и трёх уравнений равновесия (4.17) с нулевыми массовыми силами

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (12.14)$$

При этом на всей границе должны быть выполнены условия (6.6)

$$\sigma_{ij}n_j = S_i^0. \quad (12.15)$$

Заметим, что поле напряжений

$$\sigma_{ij} = Cx_2\delta_{i3}\delta_{j3}, \quad \sigma = \frac{Cx_2}{3}, \quad (12.16)$$

где C — некоторая постоянная, удовлетворяет уравнениям (12.13) и (12.14). Представим C в виде

$$C = \frac{E}{R}, \quad (12.17)$$

где E — модуль Юнга, а R — постоянная, имеющая размерность длины.

На боковой поверхности призматического тела удовлетворяются и граничные условия (12.15), а на торцах согласно (12.16) имеем

$$S_i^0 = \frac{Ex_2}{R}\delta_{i3}n_3. \quad (12.18)$$

Подставим (12.18) в (12.1) и (12.2), получим

$$P_i = \frac{E}{R}\delta_{i3} \int_{\Sigma} x_2 d\Sigma = 0, \quad (12.19)$$

$$M_i = \frac{E}{R}\epsilon_{ij3} \int_{\Sigma} x_j x_2 d\Sigma. \quad (12.20)$$

Из (12.20) видно, что только первая компонента M_1 главного момента сил отлична от нуля:

$$M \equiv M_1 = \frac{E}{R} \int_{\Sigma} x_2^2 d\Sigma = \frac{EI_{22}}{R} \equiv \frac{EI}{R}. \quad (12.21)$$

Следовательно, главный момент является вектором изгиба, и рассматриваемое призматическое тело может быть названо балкой.

Подставим поле напряжений в обратный закон Гука (4.42):

$$\epsilon_{ij} = \frac{x_2}{R}[-\nu\delta_{ij} + (1 + \nu)\delta_{i3}\delta_{j3}], \quad (12.22)$$

т. е. отличны от нуля три диагональные компоненты тензора деформаций:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\frac{\nu x_2}{R}, \quad \epsilon_{33} = \frac{x_2}{R}. \quad (12.23)$$

Для того, чтобы по значениям (12.22) или (12.23) найти вектор перемещений, можно использовать формулы Чезаро (3.26) или применить другой способ интегрирования соотношений Коши (3.15), рассматривая их как систему уравнений в частных производных первого порядка относительно компонент вектора перемещений u_i . Считая, что в начале координат перемещения отсутствуют, будем иметь

$$u_1 = -\frac{\nu x_1 x_2}{R}, \quad u_2 = -\frac{\nu(x_2^2 - x_1^2) + x_3^2}{2R}, \quad u_3 = \frac{x_2 x_3}{R}. \quad (12.24)$$

Решение (12.24) получено с использованием предположений о малости деформаций, т. е. с учётом того, что

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1, \quad \frac{x_i}{R} \ll 1. \quad (12.25)$$

Если какая-либо частица до деформации имела координаты x_i , то после деформации она будет иметь координаты $x'_i = x_i + u_i$, т. е. с учётом (12.25)

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \left(1 - \frac{\nu x_2}{R} \right), \\ x'_2 = x_2 \left(1 - \frac{\nu x_2}{2R} \right) - \frac{x_3^2 - \nu x_1^2}{2R}, \\ x'_3 = x_3 \left(1 + \frac{x_2}{R} \right). \end{cases} \quad (12.26)$$

Ось балки (Ox_3) ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), называемая упругой линией балки, после деформации будет описываться уравнениями

$$x'_1 = 0, \quad x'_2 = -\frac{x_3^2}{2R}, \quad x'_3 = x_3, \quad (12.27)$$

откуда

$$x'_2 = -\frac{x_3'^2}{2R}. \quad (12.28)$$

Первая производная от x'_2 по x'_3 описывает угол наклона упругой линии балки, а вторая производная — кривизну κ :

$$\frac{\partial x'_2}{\partial x_3'} = -\frac{x_3'}{R}, \quad \kappa = -\frac{1}{R}. \quad (12.29)$$

Каждая плоскость $x_3 = \text{const}$ согласно (12.25) и (12.26) будет описываться уравнениями

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2 - \frac{A^2}{2R}, \quad x'_3 = A \left(1 + \frac{x_2}{R} \right). \quad (12.30)$$

Выражая x_2 из второго соотношения (12.30) и подставляя в третье соотношение, получим

$$x_3' = A \left(1 + \frac{x_2'}{R} + \frac{A^2}{2R^2} \right) \approx A \left(1 + \frac{x_2'}{R} \right). \quad (12.31)$$

Соотношение (12.31) представляет собой уравнение плоскости, параллельной оси (Ox_1) или (Ox_1'). Следовательно, каждая плоскость $x_3 = A$ остаётся плоскостью и после деформирования, но поворачивается на угол

$$\beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{A}{R}. \quad (12.32)$$

Обозначим \vec{w} вектор перемещений упругой линии балки:

$$\vec{w} = \vec{u}|_{x_1=x_2=0}. \quad (12.33)$$

Тогда из (12.24) имеем

$$w_1 = 0, \quad w \equiv w_2 = -\frac{x_3^2}{2R}, \quad w_3 = 0. \quad (12.34)$$

Величина w называется прогибом балки. Из (12.34), учитывая (12.29), получим

$$w'' = \kappa = -\frac{1}{R}, \quad (12.35)$$

где штрих означает дифференцирование по x_3 . Подставляя выражение R из (12.35) в (12.21), имеем

$$M = -EIw''. \quad (12.36)$$

Следовательно, судить об изгибе балки можно по поведению её упругой линии. Зная момент M , легко находим из (12.16) и единственную компоненту тензора напряжений:

$$\sigma_{33} = \frac{E}{R}x_2 = \frac{M}{I}x_2. \quad (12.37)$$

Если воспользоваться только решением дифференциального уравнения (12.36)

$$w = -\frac{M}{EI} \frac{x_3^2}{2} + C_1x_3 + C_2, \quad (12.38)$$

где постоянные C_1 и C_2 следует положить равными нулю в силу симметрии задачи относительно оси (Ox_2), то получим

$$w_1 = 0, \quad w = -\frac{M}{EI} \frac{x_3^2}{2}, \quad w_3 = 0. \quad (12.39)$$

Примем гипотезу плоских сечений [8] (гипотезу Бернулли), согласно которой все сечения $x_3 = A$ остаются плоскими и после деформирования, но поворачиваются на угол β (12.32). Тогда вектор перемещений w^* в любой точке, не лежащей на упругой линии балки, имеет вид

$$w_1^* = 0, \quad w^* = -\frac{M x_2^2}{EI} z, \quad w_3^* = w_3 + x_2 \operatorname{tg} \beta = w_3 + \frac{x_2 x_3}{R}. \quad (12.40)$$

Решение (12.40) совпадает с точным решением задачи теории упругости (12.24) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка (12.25). Поэтому естественно применить гипотезу плоских сечений для нагрузки более общей, чем условия (12.15) или (12.18).

Рассмотрим теперь вместо балки только её упругую линию. Обозначим ось (Ox_3) через z . Пусть на эту упругую линию действует распределённая нагрузка $q(z)$ (рис. 21).

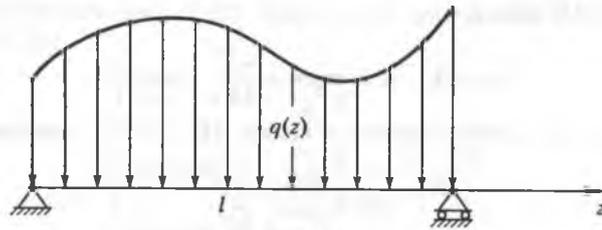


Рис. 21.

Предположим, что при $z = 0$ и $z = l$ прогибы отсутствуют:

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \quad (12.41)$$

Применим к балке вариационный принцип Лагранжа (5.22), причём лагранжиан \mathcal{L} (5.20) запишем в виде

$$\mathcal{L} = \int_0^l W^0 dz - \int_0^l q(z)w(z) dz + \int_0^l \rho \dot{w} w dz. \quad (12.42)$$

Здесь W^0 — упругий потенциал каждого сечения Σ балки:

$$W^0 = \int_{\Sigma} W d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Sigma. \quad (12.43)$$

Последний интеграл в (12.42) представляет собой силу Даламбера; ρ — линейная плотность ($\rho = \rho_V \Sigma$); ρ_V — обычная объёмная плотность.

В силу того, что напряжённое состояние при изгибе балки описывается единственной отличной от нуля компонентой σ_{33} , которая согласно (12.16) равна

$$\sigma_{33} = \frac{E}{R} x_2, \quad (12.44)$$

получим из (12.43)

$$W = \frac{\sigma_{33}^2}{2E} = \frac{E}{2R^2} \int_{\Sigma} x_2^2 d\Sigma = \frac{EI}{2R^2}. \quad (12.45)$$

Используя равенства (12.36) и (12.42), имеем

$$\mathcal{L} = \int_0^l \frac{EI}{2} w''^2 dz - \int_0^l q(z)w(z) dz + \int_0^l \rho \dot{w} w dz. \quad (12.46)$$

Проварьируем теперь лагранжиан (12.46), т. е. возьмём его функциональную производную по w

$$\delta \mathcal{L} = \int_0^l EI w'' \delta w'' dz - \int_0^l q(z) \delta w dz + \int_0^l \rho \dot{w} \delta w dz. \quad (12.47)$$

Интегрируя дважды по частям первое слагаемое правой части (12.47), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l EI w'' \delta w'' dz &= EI w'' \delta w' \Big|_0^l - \int_0^l (EI w'')' \delta w' dz = \\ &= EI w'' \delta w' \Big|_0^l - EI w'' \delta w \Big|_0^l + \int_0^l (EI w'')'' \delta w dz. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Подставим теперь (12.48) в (12.47) и учтём, что в положении равновесия \mathcal{L} имеет стационарную точку ($\delta \mathcal{L} = 0$), а также граничные условия (12.41):

$$\int_0^l [(EI w'')'' + \rho \ddot{w} - q] \delta w dz + EI w'' \delta w' \Big|_0^l = 0. \quad (12.49)$$

Учитывая произвольность вариаций δw , получим уравнение колебаний балки

$$(EI w'')'' = q - \rho \ddot{w}. \quad (12.50)$$

или уравнение равновесия балки

$$(EIw'')'' = q. \quad (12.51)$$

Из тех же соображений следствием уравнения (12.49) являются либо кинематические граничные условия

$$w'|_{z=0} = 0, \quad w'|_{z=l} = 0, \quad (12.52)$$

либо так называемые естественные граничные условия, которые в силу (12.36) можно записать в виде

$$M|_{z=0} = 0, \quad M|_{z=l} = 0. \quad (12.53)$$

Итак, для определения прогиба балки под действием распределённой нагрузки требуется решить уравнение (12.51), которое в силу (12.36) перепишем следующим образом

$$M'' + q = 0. \quad (12.54)$$

Кроме того, должны быть выполнены граничные условия. Если, например, балка слева закреплена, а справа шарнирно опёрта (рис. 22), то граничные условия выглядят так:

$$w|_{z=0} = 0, \quad w'|_{z=l} = 0, \quad w|_{z=l} = 0, \quad M|_{z=l} = 0. \quad (12.55)$$

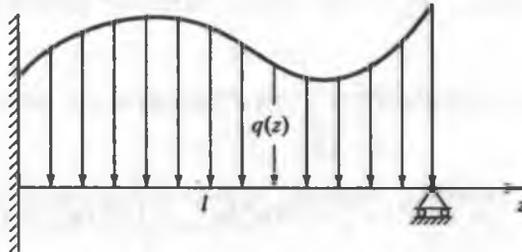


Рис. 22.

Величина EI , входящая в уравнения (12.50) и (12.51), называется изгибной жёсткостью балки. Она зависит от упругих свойств (E) и геометрии сечения (I), а также может зависеть от координаты z .

Если выделить элемент Δz упругой линии балки, находящейся под действием распределённой нагрузки $q(z)$ (рис. 23), то суммарную силу ΔQ на этом элементе можно связать с $q(z)$ следующим образом

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta z} \equiv \frac{dQ}{dz} = q(z). \quad (12.56)$$

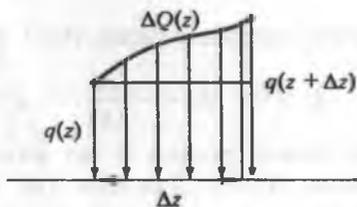


Рис. 23.

Тем самым определена функция $Q(z)$, являющаяся первообразной по отношению к $q(z)$ и называемая перерезывающей силой. Сравнивая (12.56), (12.54) и (12.36), мы видим, что

$$Q = -M' = EIw'''. \quad (12.57)$$

Говорят, что в точке $z = z_0$ действует сосредоточенная нагрузка Q_0 , если

$$q(z) = Q_0\delta(z - z_0), \quad Q_0 = \text{const}. \quad (12.58)$$

В качестве примера задачи об изгибе рассмотрим балку, защемлённую слева и свободную справа, на которую в точке $z = l$ действует сосредоточенная сила Q_0 (рис. 24). Для решения задачи о равновесии балки при изгибе в этом случае можно поступить, например, так. Решим однородное уравнение (12.51), предполагая, что изгибная жёсткость не зависит от z . Его общее решение имеет вид

$$w = A_1 + A_2z + A_3z^2 + A_4z^3, \quad (12.59)$$

где A_1, \dots, A_4 — произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий

$$w|_{z=0} = 0, \quad w'|_{z=0} = 0, \quad M|_{z=l} = 0, \quad Q|_{z=l} = Q_0, \quad (12.60)$$

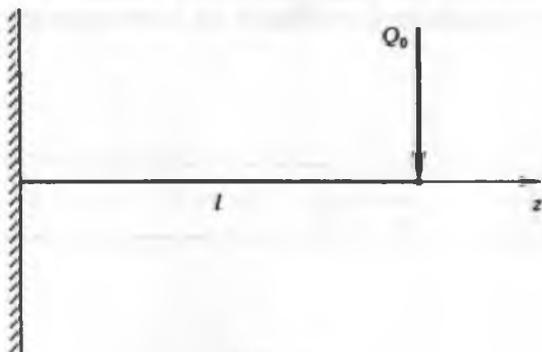


Рис. 24.

соответствующих данному опиранию балки. Из (12.59) и (12.60) следует

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{Q_0 l}{2EI}, \quad A_4 = \frac{Q_0}{6EI}. \quad (12.61)$$

Однако эту задачу можно решить и без интегрирования дифференциального уравнения (12.51). Для этого из условий равновесия определим в заделке (левом конце балки) силу реакции $R = -Q_0$ и момент реакции $M_R = Q_0 l$. Поэтому можно сразу построить эпюры (распределения по длине) перерезывающих сил $Q(z)$ и изгибающего момента $M(z)$ (рис. 25). Отметим, что знак перерезывающих сил и изгибающего момента часто выбирается по-другому [8, 12, 26].

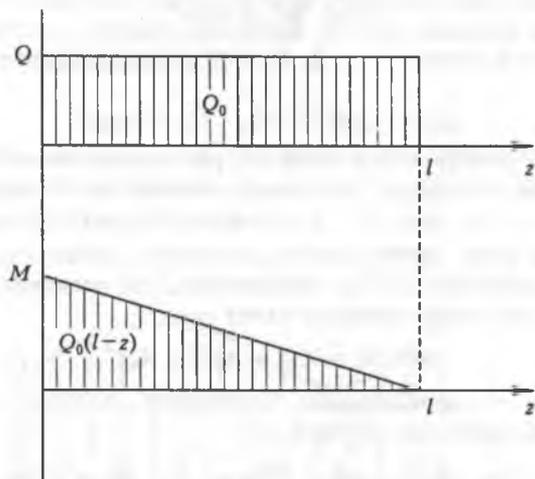


Рис. 25.

Лекция 13

Растяжение, изгиб и кручение стержня

Рассмотрим другие виды напряжённого состояния, реализуемые в призматическом стержне при различных видах прилагаемой нагрузки. Так как длина l стержня много больше характерного линейного размера поперечного сечения Σ (например, его диаметра), то для решения задачи теории упругости вместо сложной системы распределённых нагрузок $S_i^0(x_1, x_2)$ достаточно рассматривать статически эквивалентную ей систему главных векторов \vec{P} и \vec{M} так, чтобы выполнялись соотношения (12.1), (12.2). Тогда напряжённые состояния, соответствующие этим двум системам, будут мало отличаться при удалении от торцевого сечения на расстояние, называемое зоной краевого эффекта. В этом утверждении состоит принцип Сен-Венана, упрощающий постановку краевых задач.

Применяя данный принцип, разобьём задачу теории упругости для стержня на ряд более простых задач, а их результаты в итоге сложим. Одна из таких задач была исследована в предыдущей главе.

Рассмотрим брус, закреплённый с одного торца $x_3 = 0$ (рис. 26). Будем считать, что начало координат находится в центре масс левого торца. Пусть внешние силы, распределённые по правому торцу $x_3 = l$,

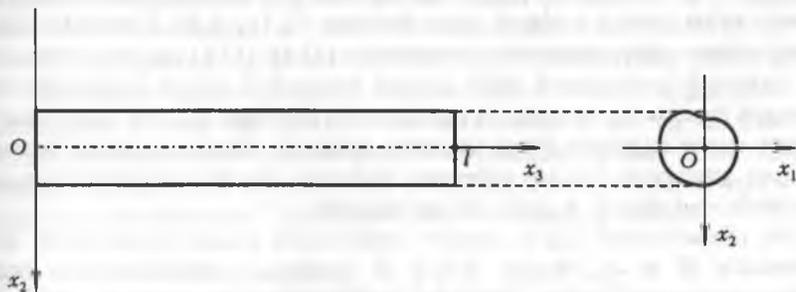


Рис. 26.

приводятся к главному вектору сил \vec{P} и главному моменту \vec{M} :

$$\vec{P} = P_i \vec{e}_i, \quad \vec{M} = M_i \vec{e}_i. \quad (13.1)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$P_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad (13.2)$$

так как совершенно аналогично можно рассмотреть случай $P_2 = 0$, $M_2 = 0$, но $P_1 \neq 0$, $M_1 \neq 0$. Впрочем, согласно принципу линейной суперпозиции можно изучить по отдельности случаи, когда только одна из оставшихся четырёх компонент векторов (13.1) отлична от нуля, а остальные равны нулю. После решения задач для каждого такого случая, эти решения надо сложить.

Положим, например, что

$$P_3 = p\Sigma, \quad P_1 = P_2 \equiv 0, \quad \vec{M} = 0. \quad (13.3)$$

Распределение напряжений внутри стержня, удовлетворяющее уравнениям равновесия и уравнениям совместности, очевидно, следующее:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{i3}\delta_{j3}, \quad \sigma = \frac{p}{3}. \quad (13.4)$$

Согласно (13.4) и обратному закону Гука (4.42) запишем деформации

$$\epsilon_{33} = \frac{p}{E}, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\nu \frac{p}{E} = -\nu \epsilon_{33}; \quad \epsilon_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (13.5)$$

и перемещения

$$u_3 = \frac{p}{E} x_3, \quad u_J = -\nu \frac{p}{E} x_J. \quad (13.6)$$

в стержне.

Компонента u_3 , как видно из (13.6), удовлетворяет граничному условию $u_3 = 0$ при $x_3 = 0$, в то время как две другие компоненты u_J равны нулю только в одной точке сечения Σ_0 ($x_3 = 0$). Следовательно, напряжённо-деформированное состояние (13.4)–(13.6) является решением задачи о растяжении либо сжатии стержня с одним закреплённым концом только вне некоторой окрестности сечения Σ_0 . Эта окрестность также носит название зоны краевого эффекта. Точное решение задачи теории упругости в зоне краевого эффекта обычно получить гораздо сложнее, чем вне её, и здесь мы его опустим.

Из соотношений (13.5) следует физический смысл технических постоянных E и ν . Модуль Юнга E является коэффициентом пропорциональности между осевыми напряжением и деформацией при одномерном растяжении стержня, а коэффициент Пуассона ν , взятый

со знаком «-», является коэффициентом пропорциональности между поперечной и продольной деформациями при таком растяжении. Отсюда понятен экспериментальный способ нахождения E и ν [8].

Нетрудно найти и решение задачи о растяжении или сжатии стержня длины l под действием собственного веса в поле силы тяжести. Пусть сечение Σ_0 жёстко закреплено, другое сечение Σ_l ($x_3 = l$) свободно от напряжений, но действуют массовые силы $F_i = g\delta_{3i}$, где g — модуль ускорения силы тяжести. Уравнениям равновесия (4.17) и сформулированным граничным условиям удовлетворяет линейное распределение напряжений σ_{33} :

$$\sigma_{ij} = \rho g(l - x_3)\delta_{i3}\delta_{j3}. \quad (13.7)$$

Максимальное растягивающее напряжение, равное отношению веса всего тела к площади поперечного сечения, реализуется при $x_3 = 0$.

Продольные перемещения u_3 , вычисленные на основании (13.7), имеют вид

$$u_3 = \frac{\rho g x_3}{E} \left(l - \frac{x_3}{2} \right). \quad (13.8)$$

Они максимальны на свободном конце: $u_3(l) = \rho g l^2 / (2E)$.

Растягивающие напряжения (13.7) и перемещения (13.8) возникают в тяжелом вертикальном стержне, подвешенном концом Σ_0 к потолку (ось x_3 направлена вниз) (рис. 27). Если в этих формулах изменить знак g на противоположный, то получится решение задачи о сжатии собственным весом стержня, стоящего концом Σ_0 на полу (ось x_3 направлена вверх) (рис. 28). К числу важных технических и инженерных приложений относится ряд задач о равнопрочных сечениях, где при заданных внешних нагрузках необходимо оптимизировать форму конструкции так, чтобы во всех поперечных сечениях продольные напряжения были бы одинаковы. Приведём пример такой задачи. К вертикально висящему тяжёлому стержню с переменным по длине сечением $\Sigma(x_3)$ (рис. 29) подвешен груз массы m . Требуется определить функцию $\Sigma(x_3)$ так, чтобы напряжения σ_{33} во всех поперечных сечениях были равны σ_0 .

Поскольку $\sigma_{33}(l) = mg/\Sigma(l)$, то во всех сечениях продольные напряжения должны совпадать с этой величиной. С другой стороны, σ_{33} в произвольном сечении x_3 равно отношению суммы весов груза и части стержня ниже этого сечения к $\Sigma(x_3)$. Следовательно, относительно неизвестной функции $\Sigma(x_3)$ может быть записано уравнение

$$\frac{1}{\Sigma(x_3)} \left(mg + \rho g \int_{x_3}^l \Sigma(\xi) d\xi \right) = \frac{mg}{\Sigma(l)}. \quad (13.9)$$

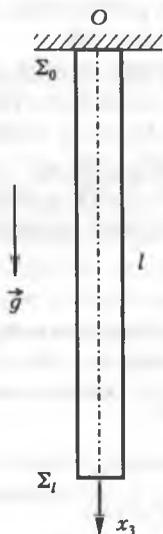


Рис. 27.



Рис. 28.

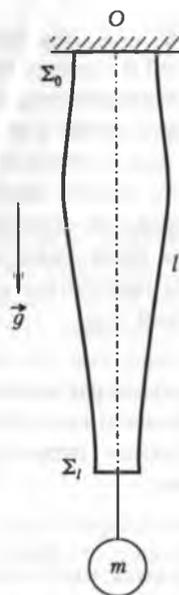


Рис. 29.

Преобразуем (13.9) к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$m \frac{d\Sigma}{dx_3} + \rho \Sigma(l) \Sigma = 0, \quad (13.10)$$

имеющему решение

$$\Sigma(x_3) = \Sigma(l) \exp \left[\frac{\rho \Sigma(l)}{m} (l - x_3) \right]. \quad (13.11)$$

Остается выразить $\Sigma(l)$ через данные задачи: $\Sigma(l) = mg/\sigma_0$. Окончательно получим

$$\Sigma(x_3) = \frac{mg}{\sigma_0} \exp \left[\frac{\rho g}{\sigma_0} (l - x_3) \right]. \quad (13.12)$$

Как видно из (13.12), зависимость площади, а, значит, и линейных размеров поперечного сечения от x_3 должна быть экспоненциальной. Кроме того, для выполнения условий задачи необходимо, чтобы $m > 0$, т. е., убрав с нижнего сечения груз, добиться равнопрочности с параметром $\sigma_0 > 0$ невозможно.

Закон изменения сечения, подобный (13.12), характерен для Эйфелевой башни и многих примеров, встречающихся в природе (кости млекопитающих, сталактиты и т. д.).

Вернемся к общему случаю (13.1), (13.2). Случай

$$\vec{P} = 0, \quad M_2 = M_3 = 0 \quad (13.13)$$

был рассмотрен нами в предыдущей лекции. Поэтому нам осталось исследовать случай (13.1) при

$$P_1 = P_3 = 0, \quad P_2 \neq 0, \quad M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 \neq 0. \quad (13.14)$$

В лекции 12 было установлено, что под действием изгибающего момента M возникает напряжённое состояние

$$\sigma_{ij} = -\frac{M x_2}{I} \delta_{i3} \delta_{j3}. \quad (13.15)$$

Однако, в отличие от предыдущей лекции, в настоящем случае изгибающий момент M возникает от действия силы P_2 , и поэтому

$$M = P_2(l - x_3), \quad (13.16)$$

т. е. момент M линейно зависит от координаты x_3 . Уравнения равновесия (12.14) запишем в следующем виде

$$\begin{cases} \sigma_{IJ,J} + \sigma_{I3,3} = 0, \\ \sigma_{3J,J} + \sigma_{33,3} = 0. \end{cases} \quad (13.17)$$

Воспользуемся так называемым полуобратным методом Сен-Венана¹⁾, согласно которому некоторые искомые величины определяются гипотетически, а остальные из решения задачи. Предположим, что напряжения таковы, что

$$\sigma_{IJ} = 0, \quad (13.18)$$

а компонента σ_{33} определяется из (13.15) и (13.16):

$$\sigma_{33} = -\frac{P_2(l - x_3)}{I} x_2. \quad (13.19)$$

Тогда из решения задачи должны быть найдены только две компоненты σ_{I3} тензора напряжений. Из первой строки в (13.17) с учётом предположения (13.18) видно, что компоненты σ_{I3} не должны зависеть от координаты x_3 . Из второй строки (13.17) с учётом предположения (13.19) следует

$$\sigma_{3J,J} = -\frac{P_2 x_2}{I}. \quad (13.20)$$

¹⁾ Не путать с принципом Сен-Венана, о котором шла речь в начале лекции!

Запишем теперь уравнения совместности Бельтрами (12.13) в виде

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{IJ} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,IJ} = 0, \\ \Delta\sigma_{33} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,33} = 0, \\ \Delta\sigma_{3J} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,3J} = 0. \end{cases} \quad (13.21)$$

Очевидно, что первые две строчки (13.21) удовлетворяются тождественно, а из третьей в силу того, что

$$\sigma = \frac{\sigma_{33}}{3} = -\frac{P_2(l-x_3)x_2}{3I}, \quad (13.22)$$

следует

$$\Delta\sigma_{3J} = -\frac{P_2\delta_{2J}}{(1+\nu)I}. \quad (13.23)$$

Непосредственной проверкой легко установить тождество

$$\sigma_{3M,JJ} - \sigma_{3J,MM} = \epsilon_{KM}\epsilon_{IJ}\sigma_{3J,IK}. \quad (13.24)$$

Из (13.20) следует, что

$$\sigma_{3J,MM} = -\frac{P_2\delta_{2M}}{I}, \quad (13.25)$$

а из (13.23) —

$$\sigma_{3M,JJ} = -\frac{P_2\delta_{2M}}{(1+\nu)I}. \quad (13.26)$$

Подставляя (13.25) и (13.26) в (13.24), получим

$$\epsilon_{KM}\epsilon_{IJ}\sigma_{3J,IK} = \frac{\nu P_2\delta_{2M}}{(1+\nu)I}. \quad (13.27)$$

Умножим обе части (13.27) на ϵ_{NM} и просуммируем по M :

$$(\epsilon_{IJ}\sigma_{3J,I})_{,N} = \frac{\nu P_2\epsilon_{N2}}{(1+\nu)I}. \quad (13.28)$$

Теперь умножим (13.28) на dx_N и проинтегрируем:

$$\epsilon_{IJ}\sigma_{3J,I} = \frac{\nu P_2 x_1}{(1+\nu)I} + 2\mu\tau, \quad (13.29)$$

где μ — модуль сдвига, а τ — некоторая постоянная.

Для установления геометрического смысла этой постоянной воспользуемся соотношениями Коши и законом Гука:

$$\epsilon_{3I} = \frac{1}{2}(u_{3,I} + u_{I,3}) = \frac{\sigma_{3I}}{2\mu}. \quad (13.30)$$

Подставим (13.30) в (13.29) и положим $P_2 = 0$:

$$2\mu\tau = \epsilon_{IJ}\mu(u_{3,JI} + u_{J,3I}) = \mu\epsilon_{IJ}u_{J,3I}. \quad (13.31)$$

Введём согласно (3.16) и (3.35) компоненту вектора вращения

$$\omega \equiv \omega_3 = \frac{1}{2}\epsilon_{3ij}u_{j,i} = \frac{1}{2}\epsilon_{IJ}u_{J,I}. \quad (13.32)$$

Из (13.32) следует, что

$$2\omega_{,3} = \epsilon_{IJ}u_{J,I3}. \quad (13.33)$$

Сравнивая (13.33) и (13.31), получим

$$\tau = \omega_{,3}, \quad (13.34)$$

т. е. постоянная τ представляет собой изменение угла поворота окрестности точки относительно оси, параллельной оси бруса x_3 , отнесённое к единице длины. Величина τ называется круткой поперечного сечения. Если $P_2 \neq 0$, то из (13.31) и (13.29) имеем

$$\epsilon_{IJ}\sigma_{3I} = 2\mu\omega_{,3} = \frac{E}{1+\nu}\omega_{,3}, \quad (13.35)$$

или

$$\tau = \omega_{,3} - \frac{\nu P_2 x_1}{EI}. \quad (13.36)$$

Интегрируя (13.36) по поперечному сечению Σ стержня и деля обе части равенства на площадь этого сечения Σ , получим

$$\tau = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \omega_{,3} dx_1 dx_2 - \frac{\nu P_2}{E I \Sigma} \int_{\Sigma} x_1 dx_1 dx_2. \quad (13.37)$$

Так как ось бруса проходит через центр масс сечения, то последний интеграл в (13.37) равен нулю, и формула (13.37)

$$\tau = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \omega_{,3} dx_1 dx_2 \quad (13.38)$$

определяет «среднюю» крутку по поперечному сечению Σ .

Итак, для определения двух неизвестных компонент σ_{I3} тензора напряжений мы имеем два уравнения: уравнение равновесия (13.20) и уравнение совместности (13.29). Добавим к ним очевидные граничные условия

$$\sigma_{3J}n_J|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Sigma. \quad (13.39)$$

На правом торце $x_3 = l$ выполняются интегральные условия

$$M_3 = \epsilon_{3ij} \int_{\Sigma_l} x_i S_j^{\circ} d\Sigma = \epsilon_{IJ} \int_{\Sigma_l} x_I \sigma_{J3} d\Sigma, \quad (13.40)$$

которые задают крутящий момент.

Лекция 14

Функция напряжения при изгибе и кручении

Продолжим изучение напряжённо-деформированного состояния, возникающего при изгибе и кручении стержня, и обратимся к задаче, сформулированной в конце прошлой лекции.

Обозначим

$$G_J = \sigma_{3J} + \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \delta_{2J}, \quad (14.1)$$

где $f(x_1)$ — пока произвольная функция. Нетрудно видеть, что

$$G_{J,J} = \sigma_{3J,J} + \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)]_{,J} \delta_{2J} = \sigma_{3J,J} + \frac{P_2 x_2}{I}. \quad (14.2)$$

Таким образом, уравнение равновесия (13.20) может быть записано следующим образом

$$G_{J,J} = 0. \quad (14.3)$$

Введём скалярную функцию \mathcal{F} , называемую функцией напряжений при изгибе и кручении, такую что

$$\mathcal{F}_{,I} = \epsilon_{IJ} G_J. \quad (14.4)$$

Из (14.4) следует, что

$$G_K = \epsilon_{IK} \mathcal{F}_{,I}, \quad (14.5)$$

и поэтому уравнение равновесия (14.3) для функции \mathcal{F} удовлетворяется тождественно. Из (14.1) и (14.5) имеем

$$\sigma_{3J} = \epsilon_{IJ} \left[\mathcal{F}_{,I} - \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \delta_{1I} \right]. \quad (14.6)$$

Здесь мы использовали тождество $\epsilon_{IJ} \delta_{1I} = \delta_{2J}$.

Подставляя (14.6) в уравнение совместности (13.29), получим

$$\delta_{KI} \left[\mathcal{F}_{,I} - \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \delta_{1I} \right]_{,K} = \frac{\nu P_2 x_1}{(1 + \nu) I} + 2\mu\tau, \quad (14.7)$$

откуда

$$\Delta \mathcal{F} = -\frac{P_2}{2I} f'(x_1) + \frac{\nu P_2 x_1}{(1+\nu)I} + 2\mu\tau, \quad (14.8)$$

где обозначено $f'(x_1) = df/dx_1$.

Обратимся теперь к граничным условиям (13.39) и воспользуемся формулами (9.17). Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{3J} n_J &= \sigma_{3J} \epsilon_{JK} \tau_K = \epsilon_{IJ} \left[\mathcal{F}_{,I} - \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \delta_{II} \right] \epsilon_{JK} \tau_K = \\ &= - \left[\mathcal{F}_{,I} - \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \delta_{II} \right] \tau_I. \end{aligned} \quad (14.9)$$

В силу того, что

$$\mathcal{F}_{,I} \tau_I = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \quad (14.10)$$

из (14.9) и (13.39) имеем

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} \right|_{\Gamma} = \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \tau_I. \quad (14.11)$$

Итак, задача свелась к решению уравнения Пуассона (14.8) с заданными граничными условиями на внешнем контуре Γ_0 и внутренних контурах Γ_α ($\alpha = 1, \dots, N$), если таковые существуют, ($\Gamma \equiv \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$) (рис. 30)

$$\mathcal{F}|_{\Gamma_\alpha} = \frac{P_2}{2I} \oint_{\Gamma_\alpha} [x_2^2 - f(x_1)] \frac{dx_1}{ds} ds + C_\alpha, \quad (14.12)$$

где $\alpha = 0, 1, \dots, N$.

Таким образом, задача Дирихле (14.8), (14.12) определяет функцию \mathcal{F} с точностью до постоянной на границе. Если контур односвязный, то, как было упомянуто в лекции 3, уравнения совместности являются необходимым и достаточным условием для существования однозначного поля перемещений (см. формулы Чезаро (3.26)). В этом случае можно положить $C_0 = 0$, ибо константа при определении напряжений (14.6) не играет роли. В случае многосвязной области уравнений совместности для нахождения перемещений недостаточно. Необходимо ещё записать некоторые условия в виде контурных интегралов. К их выводу мы и переходим.

Введём в рассмотрение вектор

$$\vec{T} = \sigma_{3I} \vec{e}_I, \quad (14.13)$$

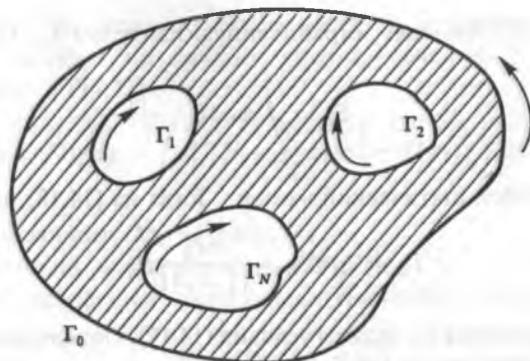


Рис. 30.

который назовём вектором касательных напряжений. Циркуляцией касательных напряжений назовём величину

$$\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{T} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} \sigma_{3I} dx_I = \oint_{\Gamma} \sigma_{3I} \tau_I ds. \quad (14.14)$$

Из (13.30) и (13.33) следует

$$\omega_{,3} = \frac{1}{2} \epsilon_{IJK} u_{,J} = \epsilon_{IJ} \frac{\sigma_{3J,I}}{2\mu}. \quad (14.15)$$

Проинтегрируем (14.15) по поверхности сечения бруса Σ и, воспользовавшись двумерным аналогом теоремы Стокса (теоремой Грина) и формулой (9.17), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \omega_{,3} d\Sigma &= \frac{1}{2\mu} \epsilon_{IJ} \int_{\Sigma} \sigma_{3J,I} d\Sigma = \\ &= \frac{1}{2\mu} \epsilon_{IJ} \int_{\Gamma} \sigma_{3J} n_I ds = \frac{1}{2\mu} \int_{\Gamma} \sigma_{3J} \tau_J ds. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Из (14.14) и (14.16) следует так называемая теорема о циркуляции касательных напряжений

$$\Gamma = 2\mu \int_{\Sigma} \omega_3 d\Sigma. \quad (14.17)$$

Подставляя в (14.17) выражение (13.36), имеем

$$\Gamma = 2\mu \int_{\Sigma} \left(\tau + \frac{\nu P_2 x_1}{EI} \right) d\Sigma. \quad (14.18)$$

Обозначим Σ_α площадь, ограниченную контуром Γ_α ($\alpha = 1, \dots, N$).
Интеграл

$$S_\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} x_1 d\Sigma \quad (14.19)$$

представляет собой статический момент. Тогда из (14.18) получим

$$\Gamma_\alpha = 2\mu\tau\Sigma_\alpha + \frac{\nu P_2}{(1+\nu)I} S_\alpha. \quad (14.20)$$

На каждом контуре Γ_α заданы условия (14.12). Определим циркуляцию касательных напряжений Γ_α на любом из них:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &= \oint_{\Gamma_\alpha} \sigma_{3J} dx_J = \oint_{\Gamma_\alpha} \epsilon_{IJ} \left[\mathcal{F}_{,I} - \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \delta_{1I} \right] dx_J = \\ &= \oint_{\Gamma_\alpha} \frac{d\mathcal{F}}{dn} ds - \frac{P_2}{2I} \oint_{\Gamma_\alpha} [x_2^2 - f(x_1)] \tau_2 ds. \end{aligned} \quad (14.21)$$

Теперь можно найти все постоянные C_α . В самом деле, по формулам (14.12) известны значения \mathcal{F}_α на каждом контуре Γ_α . Поэтому решение задачи известно с точностью до постоянных на каждом контуре. Найдем нормальную производную решения $d\mathcal{F}/dn$ и из (14.20), (14.21) будем иметь

$$\oint_{\Gamma_\alpha} \frac{d\mathcal{F}}{dn} ds = 2\mu\tau\Sigma_\alpha + \frac{\nu P_2}{(1+\nu)I} S_\alpha + \frac{P_2}{2I} \oint_{\Gamma_\alpha} [x_2^2 - f(x_1)] \tau_2 ds, \quad (14.22)$$

т. е. систему алгебраических уравнений относительно постоянных C_α .

Заметим, что пока неизвестной остаётся крутка τ . Так как нам известна величина крутящего момента M_3 , находим из (13.40)

$$\begin{aligned} M_3 &= \epsilon_{IJ} \int_{\Sigma_I} x_I \left\{ \epsilon_{KJ} \left[\mathcal{F}_{,K} - \frac{P_2}{2I} [x_2^2 - f(x_1)] \delta_{1K} \right] \right\} d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma_I} x_I \mathcal{F}_{,I} d\Sigma - \frac{P_2}{2I} \int_{\Sigma_I} x_1 [x_2^2 - f(x_1)] d\Sigma. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Используя очевидное тождество

$$x_I \mathcal{F}_{,I} = (x_I \mathcal{F})_{,I} - \delta_{II} \mathcal{F} = (x_I \mathcal{F})_{,I} - 2\mathcal{F}, \quad (14.24)$$

а также то, что интеграл по поверхности Σ_l правого торца можно заменить на интеграл по любому другому сечению Σ , продолжим цепочку равенств в (14.23):

$$M_3 = \oint_{\Gamma} x_I \mathcal{F} n_I ds - \int_{\Sigma} \left\{ 2\mathcal{F} + \frac{P_2}{2I} x_1 [x_2^2 - f(x_1)] \right\} d\Sigma. \quad (14.25)$$

Из (14.25) по заданному M_3 находится τ .

При определении всех постоянных C_α ($\alpha = 1, \dots, N$) и крутки τ функция $f(x_1)$ выбирается произвольно. Например, полагая на каждом контуре Γ_α

$$[x_2^2 - f(x_1)] \tau_1 = 0, \quad (14.26)$$

из (14.12) получим

$$\mathcal{F}|_{\Gamma_\alpha} = C_\alpha. \quad (14.27)$$

Для односвязного контура, как отмечалось ранее, можно положить

$$\mathcal{F}|_{\Gamma} = 0. \quad (14.28)$$

Поэтому из (14.25) имеем

$$M_3 = - \int_{\Sigma} \left\{ 2\mathcal{F} + \frac{P_2}{2I} x_1 [x_2^2 - f(x_1)] \right\} d\Sigma. \quad (14.29)$$

Если изгиба нет ($P_2 = 0$), то

$$M_3 = -2 \int_{\Sigma} \mathcal{F} d\Sigma. \quad (14.30)$$

Выражение (13.70) называется формулой Прандтля.

Заметим, что при кручении стержня максимальные касательные напряжения возникают на границе. В самом деле, при отсутствии изгиба уравнение (14.8) и связь напряжений с функцией \mathcal{F} упрощаются:

$$\Delta \mathcal{F} = 2\mu\tau. \quad (14.31)$$

$$\sigma_{3J} = \epsilon_{IJ} \mathcal{F}_{,I}, \quad (14.32)$$

т.е. напряжения являются гармоническими функциями. Как известно, такие функции, согласно принципу максимума, достигают своего максимального значения на границе.

Тот факт, что при отсутствии изгиба функция \mathcal{F} удовлетворяет уравнению (14.31) и граничным условиям (14.27), даёт повод использовать так называемую мембранную аналогию. Для прогиба u мембраны

справедливо уравнение

$$\Delta u = -\frac{p}{N}, \quad (14.33)$$

где p — давление на её поверхность, а N — постоянная, называемая натяжением мембраны. Пусть граничные условия на контуре этой мембраны имеют вид

$$u|_{\Gamma_\alpha} = u_\alpha^0. \quad (14.34)$$

Вдоль изолиний равных прогибов мембраны $u = \text{const}$ или $du/ds = 0$. Посмотрим, чему соответствуют эти линии при кручении бруса. Для этого «обратим» соотношения (14.32)

$$\mathcal{F}_{,I} = \epsilon_{IJ}\sigma_{3J}. \quad (14.35)$$

Тогда из равенства $\mathcal{F} = \text{const}$ следует, что

$$0 = \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}_{,I}\tau_I = \epsilon_{IJ}\sigma_{3J}\tau_I = \sigma_{3J}n_J = T_J n_J = \vec{T} \cdot \vec{n}. \quad (14.36)$$

Таким образом, линии $\mathcal{F} = \text{const}$ являются линиями, вектор касательных напряжений к которым направлен по касательной. Каждый контур Γ_α ($\alpha = 0, 1, \dots, N$), как следует из (14.36), является также и траекторией касательных напряжений. Величина полного касательного напряжения $|\vec{T}| \equiv T$ записывается следующим образом

$$T = \vec{T} \cdot \vec{\tau} = \sigma_{3I}\tau_I = \epsilon_{JI}\mathcal{F}_{,J}\tau_I = \mathcal{F}_{,J}n_J = \frac{d\mathcal{F}}{dn}. \quad (14.37)$$

Следовательно, величина T соответствует в мембране величине du/dn , т. е. тангенсу угла наклона мембраны (уклону или градиенту).

Из формулы Прандтля (14.30) следует, что крутящий момент пропорционален объёму, образованному между плоскостью $x_3 = 0$ и деформированной поверхностью мембраны.

Эффективность мембранной аналогии заключается в простоте эксперимента: на проволочный контур надо натянуть мыльную плёнку. Впрочем, эксперимент может быть даже мысленным. Например, для двух контуров на рис. 31 видно, что в случае выходящего угла (рис. 31 а) $du/dn = 0$, а, следовательно, полное касательное напряжение T равно нулю. В случае же входящего угла (рис. 31 б) угол наклона плёнки в вершине будет равен $\pi/2$, т. е. величина T равна бесконечности.

При наличии изгиба формулу (14.29) можно формально записать в виде

$$M_3 = \psi(\tau, P_2). \quad (14.38)$$

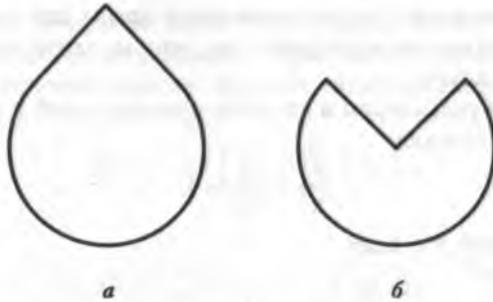


Рис. 31.

Если $M_3 = 0$, то, вообще говоря, это не означает, что и $\tau = 0$. Возникает вопрос, можно ли, перемещая вектор $\vec{P} = P_2 \vec{e}_2$ на торце $x_3 = l$ (рис. 32), найти такое его положение, при котором $\tau = 0$?

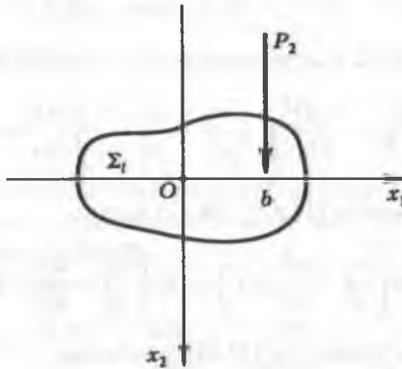


Рис. 32.

Перенесем $\vec{P} = 0$ в центр масс сечения Σ_l (точку O) с добавлением при этом пары сил, эквивалентной моменту величины $M_0 = bP_2$. Тогда из (14.38) следует

$$bP_2 = \psi(0, P_2). \quad (14.39)$$

Из (14.29) следует, что величина P_2 должна входить в правую часть (14.39) линейно. Значит, множитель b определяется только геометрией сечения Σ . Аналогично можно найти величину a для составляющей вектора $\vec{P} = P_1 \vec{e}_1$ по оси x_1 . Тогда, поместив в точку $(a; b)$ сечения Σ_l вектор \vec{P} , мы добьемся того, что брус не скручивается, а только изгибается. Точка $(a; b)$ называется центром изгиба. Эта точка имеет важное

практическое значение. Так, в самолётном крыле для сохранения угла атаки жёсткость крыла подбирают так, чтобы центр изгиба совпадал с центром парусности.

В заключение рассмотрим в качестве примера изгиб и кручение бруса эллиптического сечения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \quad (13.40)$$

Выберем функцию f в виде

$$f(x_1) = a_2^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} \right). \quad (13.41)$$

Тогда уравнение (14.8) запишется следующим образом

$$\Delta \mathcal{F} = 2\mu\tau + \frac{P_2}{I} \left(\frac{\nu}{1+\nu} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) x_1, \quad (14.42)$$

а на контуре Γ эллипса в силу односвязности области из (14.12) имеем

$$0 = \mathcal{F}|_{\Gamma} = \frac{P_2 a_2^2}{2I} \oint_{\Gamma} \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right) \frac{dx_1}{ds} ds = 0. \quad (14.43)$$

Ищем решение задачи (14.42), (14.43) в виде

$$\mathcal{F} = A \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right) + B \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right) x_1. \quad (14.44)$$

Подставим (14.44) в уравнение (14.42) и получим

$$2A \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + 2B \frac{3a_2^2 + a_1^2}{a_1^2 a_2^2} x_1 = 2\mu\tau + \frac{P_2}{I} \left(\frac{\nu}{1+\nu} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) x_1. \quad (14.45)$$

Отсюда находим

$$A = \frac{\mu\tau a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad B = \frac{P_2 a_1^2 a_2^2}{2I(3a_2^2 + a_1^2)} \left(\frac{\nu}{1+\nu} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \right). \quad (14.46)$$

По формулам (14.6) нетрудно найти напряжения σ_{31} и σ_{32} , а по формуле (14.29) — крутящий момент M_3 :

$$M_3 = -2 \int_{\Sigma} \mathcal{F} d\Sigma - \frac{P_2 a_2^2}{2I} \int_{\Sigma} \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right) x_1 d\Sigma. \quad (14.47)$$

Второе слагаемое в правой части (14.47) равно нулю, так как подынтегральное выражение представляет собой нечётную функцию x_1 при симметричных относительно x_1 пределах интегрирования.

Поэтому

$$M_3 = -2A \left(\frac{I_1}{a_1^2} + \frac{I_2}{a_2^2} - \Sigma \right), \quad (14.48)$$

где

$$I_1 = \int_{\Sigma} x_1^2 d\Sigma = \frac{\pi a_1^3 a_2}{4}, \quad I_2 = \int_{\Sigma} x_2^2 d\Sigma = \frac{\pi a_1 a_2^3}{4},$$

$$\Sigma = \pi a_1 a_2. \quad (14.49)$$

Крутящий момент (14.48) равен

$$M_3 = \pi A a_1 a_2 = \frac{\pi \mu \tau a_1^3 a_2^3}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (14.50)$$

Отсюда

$$\tau = \frac{a_1^2 + a_2^2}{\pi \mu a_1^3 a_2^3} M_3, \quad A = \frac{M_3}{\pi a_1 a_2} = \frac{M_3}{\Sigma}. \quad (14.51)$$

В случае нулевого крутящего момента ($M_3 = 0$) из (14.51) вытекает, что и крутка равна нулю. Следовательно, центр масс эллиптического бруса совпадает с центром его изгиба.

Если изгиб отсутствует ($P_2 = 0$), то из (14.6) и (14.44) следует:

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \frac{2A}{a_2^2} x_2 = \frac{2M_3}{\Sigma a_2^2} x_2 = \frac{2M_3}{\pi a_1 a_2^3} x_2 = \frac{M_3 x_2}{2I_2}, \\ \sigma_{32} = \frac{2A}{a_1^2} x_1 = \frac{2M_3}{\Sigma a_1^2} x_1 = \frac{2M_3}{\pi a_1^3 a_2} x_1 = \frac{M_3 x_1}{2I_1}. \end{cases} \quad (14.52)$$

Тогда согласно (14.13) полное касательное напряжение равно

$$|\vec{T}| = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} = \frac{M_3}{2} \sqrt{\frac{x_1^2}{I_1^2} + \frac{x_2^2}{I_2^2}}. \quad (14.53)$$

Если считать, что $a_2/a_1 < 1$, то $a_2^2/a_1^2 < a_2/a_1$. Поэтому эллипс, являющийся траекторией касательных напряжений, более вытянут, чем эллипс Γ . Из (14.52) также видно, что в центре сечения касательные напряжения равны нулю. Они максимальны на концах малой полуоси эллипса Γ .

Формулу (14.50) можно записать следующим образом:

$$M_3 = D\tau, \quad (14.54)$$

если ввести величину D :

$$D = \frac{M_3}{\tau} = \frac{\pi\mu a_1^3 a_2^3}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{\mu\Sigma^4}{4\pi^2(I_1 + I_2)} = \frac{\mu\Sigma^4}{4\pi^2 I_p}, \quad (14.55)$$

которая называется жёсткостью при кручении.

Для кругового сечения бруса

$$a_1 = a_2 \equiv a, \quad I_1 = I_2 = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi a^4}{4}, \quad (14.56)$$

поэтому жёсткость при кручении связана простым соотношением с полярным моментом инерции:

$$D = \mu I_p. \quad (14.57)$$

Для определения жёсткости можно сформулировать так называемую изопериметрическую задачу

$$\frac{\int_{\Sigma} \Psi_{,i} \Psi_{,i} d\Sigma}{4\mu \left(\int_{\Sigma} \Psi d\Sigma \right)^2} \geq \frac{\tau}{M_3} \equiv D. \quad (14.58)$$

Заметим, что равенство в (14.58) достигается тогда и только тогда, когда $\Psi = C\mathcal{F}$, где C — произвольная постоянная. Функцию \mathcal{F} часто называют функцией напряжения при кручении.

Лекция 15

Теория пластин

Исследуем задачу теории упругости о чистом изгибе пластины. Для этого рассмотрим прямой цилиндр, высота которого много меньше диаметра D его сечения (рис. 33). Такой цилиндр, как уже отмечалось, называется диском или пластиной в зависимости от приложенной нагрузки. Вид сбоку на этот цилиндр показан на рис. 34.

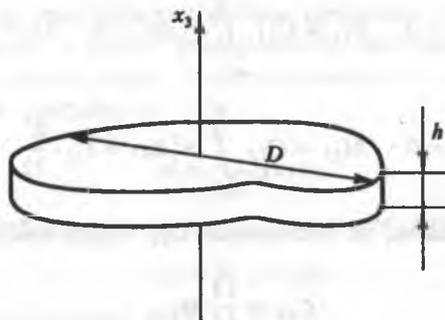


Рис. 33.

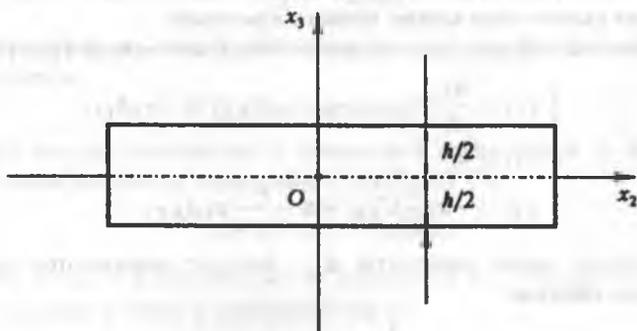


Рис. 34.

В связи с предположением о том, что $h \ll D$, введём величины, осреднённые по толщине цилиндра

$$P_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3, \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{ij} dx_3, \quad (15.1)$$

где P_{ij} — компоненты тензора усилий, M_{ij} — компоненты тензора моментов, Q_i — компоненты вектора перерезывающих сил.

Задача теории упругости для рассматриваемого цилиндрического тела состоит, как и в лекции 12, в решении системы уравнений (12.13), (12.14) и удовлетворении граничных условий (12.15). Будем искать решение этой задачи в виде

$$\sigma_{i3} = 0, \quad \sigma_{IJ} = C_{IJ} x_3, \quad (15.2)$$

где C_{IJ} — некоторые постоянные. Из (15.1), (15.2) имеем

$$\begin{aligned} P_{i3} = 0, \quad P_{IJ} = C_{IJ} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 dx_3 = 0, \quad Q_i = 0, \\ M_{i3} = 0, \quad M_{IJ} = C_{IJ} \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 = C_{IJ} \frac{h^3}{12}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Если моменты заданы, то постоянные C_{IJ} определяются через них по формуле

$$C_{IJ} = \frac{12}{h^3} M_{IJ}. \quad (15.4)$$

Так как тензор усилий равен нулю, а моменты, вообще говоря, отличны от нуля, то данное тело можно назвать пластиной.

Компоненты деформаций найдем из обратного закона Гука (4.42):

$$\begin{cases} \epsilon_{IJ} = \frac{x_3}{E} (C_{IJ} - \nu \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} C_{KL}) \equiv -x_3 A_{IJ}, \\ \epsilon_{I3} = 0, \\ \epsilon_{33} = -x_3 \frac{\nu}{E} C_{KK} \equiv \frac{\nu}{1-\nu} x_3 A_{KK}. \end{cases} \quad (15.5)$$

Здесь введены новые константы A_{IJ} , которые выражаются через C_{IJ} следующим образом

$$A_{IJ} = -\frac{1}{E} (C_{IJ} - \nu \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} C_{KL}). \quad (15.6)$$

Формулы (15.6) можно обратить (см. задачу 13 в лекции 2):

$$C_{IJ} = -\frac{E}{1-\nu^2}(A_{IJ} + \nu\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}A_{KL}). \quad (15.7)$$

Чтобы найти перемещения по заданным деформациям, можно воспользоваться формулами Чезаро или проинтегрировать соотношения Коши другим способом. Нетрудно видеть, что компоненты вектора перемещений имеют вид

$$\begin{cases} u_I = \epsilon_{IJ}x_J = -x_3x_JA_{IJ}, \\ u_3 = \frac{\nu}{1-\nu}A_{KK}\frac{x_3^2}{2} + \frac{1}{2}A_{IJ}x_Ix_J. \end{cases} \quad (15.8)$$

Из (15.8) следует, что перемещения срединной плоскости ($x_3 = 0$) таковы:

$$u_I \equiv 0, \quad u_3 = \frac{1}{2}A_{IJ}x_Ix_J. \quad (15.9)$$

Следовательно, при деформировании срединная плоскость не испытывает удлинений, а только искривляется, превращаясь в срединную поверхность второго порядка. Назовём перемещение u_3 срединной плоскости прогибом пластины w :

$$w = \frac{1}{2}A_{IJ}x_Ix_J. \quad (15.10)$$

Его вторые производные естественно назвать кривизнами κ_{IJ} :

$$\kappa_{IJ} \equiv w_{,IJ} = A_{IJ}. \quad (15.11)$$

Из (15.5) и (15.11) следует, что

$$\epsilon_{IJ} = -x_3\kappa_{IJ}. \quad (15.12)$$

Перемещения u_I при фиксированных x_1 и x_2 являются линейными функциями x_3 :

$$u_I = -x_3x_J\kappa_{IJ}. \quad (15.13)$$

Углы α_I между касательной к срединной поверхности и плоскостью $x_3 = 0$ вычисляются из выражений (15.10), (15.11):

$$\alpha_I \equiv -w_{,I} = -\kappa_{IJ}x_J. \quad (15.14)$$

Любая точка с координатами x_i пластинки в результате деформирования перейдёт в точку с координатами y_i :

$$y_i = x_i + u_i \quad (15.15)$$

или

$$\begin{cases} y_I = x_I - A_{IJ}x_J = x_I - \kappa_{IJ}x_J, \\ y_3 = x_3 + \frac{1}{2}A_{IJ}x_Ix_J. \end{cases} \quad (15.16)$$

Векторы ортонормированного репера \bar{e}_i на срединной плоскости перейдут в векторы \bar{e}'_i на срединной поверхности, причём

$$\bar{e}'_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2, \quad \bar{e}'_i = \bar{e}'_1 \times \bar{e}'_2, \quad (15.17)$$

а также

$$\bar{e}'_i = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \bar{e}_j. \quad (15.18)$$

Отсюда и из (15.16) следует, что

$$\bar{\nu} \equiv \bar{e}'_3 = \frac{\partial y_I}{\partial x_3} \bar{e}_I + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \bar{e}_3 = -\kappa_{IJ}x_J \bar{e}_I + \bar{e}_3 = \alpha_I \bar{e}_I + \bar{e}_3. \quad (15.19)$$

Из (15.19) видно, что нормаль к срединной поверхности только поворачивается на углы α_I , оставаясь нормалью.

Из (15.3) и (15.11) следует связь между моментами и кривизнами:

$$M_{IJ} = -D(\kappa_{IJ} + \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\kappa_{KL}), \quad (15.20)$$

где величина D ,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (15.21)$$

называется жёсткостью пластинки. Она зависит от упругих постоянных E и ν и от толщины пластинки h . Зная моменты (15.20), можно найти по формулам (15.2) и (15.4) компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{IJ} = \frac{12}{h^3} M_{IJ} x_3. \quad (15.22)$$

Итак, решение задачи теории упругости о чистом изгибе пластины показывает, что можно изучать только деформирование срединной плоскости пластины, исследуя её прогиб, а затем, пользуясь тем, что нормаль к срединной поверхности остаётся нормалью к ней во всё время деформирования (гипотеза плоской нормали), можно определить перемещения в любой точке.

Чтобы распространить такой подход на более общую нагрузку, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. Для этого рассмотрим только срединную плоскость Σ пластины. Будем считать, что на неё

действует распределённая нагрузка $q(x_1, x_2)$. Тогда лагранжиан \mathcal{L} можно записать в виде (см. (5.20))

$$\mathcal{L} = \int_{\Sigma} W^0 d\Sigma - \int_{\Sigma} qw d\Sigma, \quad (15.23)$$

где W^0 — средний по толщине пластины упругий потенциал:

$$W^0 = \int_{-h/2}^{h/2} W dx_3 = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_3. \quad (15.24)$$

Учитывая формулы (15.2), (15.4)–(15.6), (15.12) и (15.22), получим из (15.24)

$$\begin{aligned} W^0 &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{IJ} \varepsilon_{IJ} dx_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 M_{IJ} \kappa_{IJ} dx_3 = \\ &= -\frac{6M_{IJ} \kappa_{IJ}}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 = -\frac{1}{2} M_{IJ} \kappa_{IJ}. \end{aligned} \quad (15.25)$$

Наконец, принимая во внимание (15.20) и (15.11), получим

$$W^0 = \frac{D}{2} (\kappa_{IJ} + \nu \varepsilon_{IK} \varepsilon_{JL} \kappa_{KL}) \kappa_{IJ} = \frac{D}{2} (w_{,IJ} + \nu \varepsilon_{IK} \varepsilon_{JL} w_{,KL}) w_{,IJ}. \quad (15.26)$$

Проварьируем теперь лагранжиан (15.23) по w с учётом (15.26). Тогда получим на основании вариационного принципа Лагранжа (5.21)

$$\delta \mathcal{L} \equiv \int_{\Sigma} D(w_{,IJ} + \nu \varepsilon_{IK} \varepsilon_{JL} w_{,KL}) \delta w_{,IJ} d\Sigma - \int_{\Sigma} q \delta w d\Sigma = 0. \quad (15.27)$$

Учтем далее тождества

$$\begin{aligned} D w_{,IJ} \delta w_{,IJ} &= (D w_{,IJ} \delta w_{,I})_{,J} - (D w_{,IJ})_{,J} \delta w_{,I} = \\ &= (D w_{,IJ} \delta w_{,I})_{,J} - [(D w_{,IJ})_{,J} \delta w]_{,I} + (D w_{,IJ})_{,IJ} \delta w, \end{aligned} \quad (15.28)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IK} \varepsilon_{JL} w_{,KL} \delta w_{,IJ} &= \varepsilon_{IK} \varepsilon_{JL} [(w_{,KL} \delta w_{,I})_{,J} - w_{,KLJ} \delta w_{,I}] = \\ &= \varepsilon_{IK} \varepsilon_{JL} (w_{,KL} \delta w_{,I})_{,J}, \end{aligned} \quad (15.29)$$

и, используя теорему Грина, получим из вариационного принципа Лагранжа (15.27)

$$\delta \mathcal{L} \equiv \int_{\Sigma} (Dw_{,IJ})_{,IJ} \delta w \, d\Sigma + \int_{\Gamma} Dw_{,IJ} \delta w_{,I} n_J \, ds - \int_{\Gamma} (Dw_{,IJ})_{,J} \delta w \, n_J \, ds + \\ + \nu \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \int_{\Gamma} Dw_{,KL} \delta w_{,I} n_J \, ds - \int_{\Sigma} q \delta w \, d\Sigma = 0. \quad (15.30)$$

Положим, что прогибы контура Γ , ограничивающего срединную плоскость пластины Σ , равны нулю, т. е. выполняется граничное условие

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad (15.31)$$

которое можно проварьировать:

$$\delta w|_{\Gamma} = 0 \quad (15.32)$$

и подставить в третий интеграл в правой части (15.30). Объединяя же вместе второй и четвёртый интегралы и вспоминая (15.20), получим из (15.30)

$$\int_{\Sigma} (Dw_{,IJ})_{,IJ} \delta w \, d\Sigma + \int_{\Gamma} M_{IJ} \delta w_{,I} n_J \, ds - \int_{\Sigma} q \delta w \, d\Sigma = 0. \quad (15.33)$$

В силу произвольности вариаций δw из (15.33) вытекают уравнение равновесия пластины

$$(Dw_{,IJ})_{,IJ} = q, \quad (15.34)$$

и одна из следующих двух пар граничных условий

$$w_{,I}|_{\Gamma} = 0 \quad (15.35)$$

либо

$$M_{IJ} n_J|_{\Gamma} = 0. \quad (15.36)$$

Заметим, что производные от w по нормали и касательной имеют вид

$$\frac{dw}{dn} = w_{,I} n_I, \quad \frac{dw}{d\tau} = w_{,I} \tau_I, \quad (15.37)$$

причём

$$n_J = \epsilon_{JK} \tau_K, \quad \tau_J = -\epsilon_{JK} n_K. \quad (15.38)$$

Поэтому производные по координатам от w выражаются на контуре Γ через производные по нормали и касательной:

$$w_{,I} = \frac{dw}{dn} n_I - \epsilon_{JK} \frac{dw}{d\tau} n_K. \quad (15.39)$$

В справедливости (15.39) легко убедиться, последовательно помножив левую и правую часть на n_I и τ_I . Тогда получим (15.37). Однако равенство нулю производной от w по касательной является прямым следствием соотношения (15.31). Поэтому вместо трёх граничных условий (15.31) и (15.35) достаточно потребовать лишь два: (15.31) и

$$\left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (15.40)$$

Граничные условия (15.31), (15.40) (кинематические граничные условия) в совокупности означают защемление пластины по контуру Γ .

Чтобы найти статические граничные условия (например, условия на свободном крае пластины), запишем выражение (15.27) в виде

$$\int_{\Sigma} M_{IJ} \delta w_{,IJ} d\Sigma - \int_{\Sigma} q \delta w d\Sigma = 0. \quad (15.41)$$

Учитывая также тождество (15.28), получим из (15.41)

$$\int_{\Sigma} (M_{IJ, JJ} - q) \delta w d\Sigma + \int_{\Gamma} (M_{IJ} n_J \delta w_{,I} - M_{IJ, J} n_I \delta w) ds = 0. \quad (15.42)$$

Из первого интеграла в левой части (15.42) следует уравнение

$$M_{IJ, JJ} = q, \quad (15.43)$$

которое эквивалентно уравнению (15.34).

Несмотря на формулу (15.1), в литературе вводится вектор перерезывающих сил \bar{Q} по формулам

$$Q_I \equiv M_{IJ, J}, \quad (15.44)$$

так что (15.43) эквивалентно уравнению

$$Q_{I, I} = q. \quad (15.45)$$

Контурный интеграл в силу (15.39) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_2 \equiv & \int_{\Gamma} M_{IJ} n_I n_J \frac{d\delta w}{dn} ds - \\ & - \int_{\Gamma} Q_I n_I \delta w + \int_{\Gamma} \epsilon_{KI} M_{IJ} n_K n_J \frac{d\delta w}{d\tau} ds. \end{aligned} \quad (15.46)$$

Если ввести обозначение

$$H \equiv \epsilon_{KI} M_{IJ} n_K n_J, \quad (15.47)$$

то последний интеграл в (15.46) записывается в виде

$$\int_{\Gamma} H \frac{d\delta w}{d\tau} ds = \int_{\Gamma} \frac{d}{d\tau} (H \delta w) ds - \int_{\Gamma} \frac{dH}{d\tau} \delta w ds. \quad (15.48)$$

Так как первый интеграл в правой части (15.48) равен нулю*, то из (15.42) мы получим статические граничные условия на свободном крае пластины:

$$M_{IJ} n_I n_J |_{\Gamma} = 0, \quad \left(Q_I n_I + \frac{dH}{d\tau} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (15.49)$$

Если жёсткость D не зависит от координат x_1 и x_2 , то из (15.34) имеем

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}. \quad (15.50)$$

Неоднородное бигармоническое уравнение (15.50) в теории пластин называется уравнением Софи Жермен.

* Легко видеть, что всюду можно положить $d\tau \equiv ds$.

Лекция 16

Кинематика тонких оболочек

Рассмотрим двумерную поверхность Σ_0 в трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 и будем описывать её радиусом-вектором $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, зависящим от двух параметров α^1 и α^2 , которые примем за криволинейные координаты на поверхности

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha^1, \alpha^2). \quad (16.1)$$

В каждой точке поверхности введём локальный ковариантный базис

$$\vec{r}_I = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^I}, \quad I = 1, 2. \quad (16.2)$$

Ковариантную фундаментальную матрицу

$$g_{IJ} = \vec{r}_I \cdot \vec{r}_J \quad (16.3)$$

будем считать невырожденной, т.е. её определитель g отличен от нуля. Тогда в каждой точке поверхности существует контравариантная фундаментальная матрица g^{IJ} такая, что

$$g^{IK} g_{KJ} = \delta_J^I, \quad (16.4)$$

поэтому можно ввести контравариантный (вообще говоря, неголономный) базис

$$\vec{r}^I = g^{IJ} \vec{r}_J. \quad (16.5)$$

Очевидно, что

$$\vec{r}^I \cdot \vec{r}^J = g^{IJ}. \quad (16.6)$$

В каждой точке поверхности Σ_0 введём единичный вектор нормали \vec{n}

$$\vec{n} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{IJ} \vec{r}_I \times \vec{r}_J = \frac{\sqrt{g}}{2} \epsilon_{IJ} \vec{r}^I \times \vec{r}^J = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2. \quad (16.7)$$

Вектор нормали \vec{n} ортогонален касательной плоскости к поверхности:

$$\vec{r}_I \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{r}^I \cdot \vec{n} = 0 \quad (16.8)$$

и составляет вместе с векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 подвижный репер поверхности.

Образует частные производные от векторов локального ковариантного базиса по координатам:

$$\bar{r}_{IJ} = \frac{\partial \bar{r}_I}{\partial \alpha^J} = \frac{\partial \bar{r}_J}{\partial \alpha^I}. \quad (16.9)$$

Нетрудно видеть, что \bar{r}_{IJ} симметричны по I, J . Образует далее тензор с компонентами

$$b_{IJ} = \bar{r}_{IJ} \cdot \bar{n}, \quad (16.10)$$

который называется тензором кривизны или тензором второй квадратичной формы. Доказательство того, что это в самом деле тензор, следует из

$$b_{IJ} = \frac{\partial}{\partial \alpha^J} (\bar{r}_I \cdot \bar{n}) - \bar{r}_I \cdot \bar{n}_J = -\bar{r}_I \cdot \bar{n}_J, \quad (16.11)$$

где, как и всюду в дальнейшем, $\bar{n}_I \equiv \partial \bar{n} / \partial \alpha^I$.

Все величины, обозначенные стрелочками, являются векторами в \mathbb{R}^3 . Поэтому их можно разложить по векторам подвижного репера. В частности, имеем

$$\bar{r}_{IJ} = \Gamma_{IJ}^K \bar{r}_K + b_{IJ} \bar{n}. \quad (16.12)$$

В самом деле, умножая скалярно на вектор \bar{n} обе части (16.12), мы получим (16.10). Величины Γ_{IJ}^K представляют собой двумерные символы Кристоффеля второго рода. Обозначая запятой ковариантную производную, будем иметь из (16.12)

$$\bar{r}_{I,J} = b_{IJ} \bar{n}. \quad (16.13)$$

Для частных производных по координатам от единичного вектора нормали справедливо представление

$$\bar{n}_I = -b_I^J \bar{r}_J. \quad (16.14)$$

Это следует из того, что после скалярного умножения левой и правой частей (16.14) на вектор \bar{r}_K следует (16.11).

Выражения (16.13) и (16.14) называются деривационными формулами. Они показывают, как разлагаются ковариантные производные векторов подвижного репера по векторам репера.

Вычислим теперь частные производные от векторов (16.14):

$$\bar{n}_{IM} = -\frac{\partial b_I^J}{\partial \alpha^M} \bar{r}_J - b_I^J \left(\Gamma_{JM}^K \bar{r}_K + b_{JM} \bar{n} \right). \quad (16.15)$$

В силу того, что кососимметричная часть (16.15) равна нулю, т. е.

$$\bar{n}_{[IM]} = 0, \quad (16.16)$$

из (16.15) следует, что

$$b_{|I}^J b_{M|J} = 0. \quad (16.17)$$

Соберем в правой части (16.15) слагаемые при векторах \bar{r}_K :

$$\left(-\frac{\partial b_I^K}{\partial \alpha^M} - b_I^J \Gamma_{JM}^K \right) \bar{r}_K \quad (16.18)$$

и добавим и вычтем $b_J^K \Gamma_{IM}^J$ — выражение, симметричное по индексам I и M . Тогда в соответствии с (16.10) получим

$$b_{|I,M}^K = 0. \quad (16.19)$$

Соотношения (16.17), (16.19) называются формулами Петерсона—Кодаци.

Пусть теперь поверхность Σ_0 деформируется. Каждая материальная частица, занимавшая положение \bar{r} в недеформированном состоянии, после деформации займет положение \bar{r}' , так что её вектор перемещения равен \bar{u} :

$$\bar{r}' = \bar{r} + \bar{u}. \quad (16.20)$$

Разложим этот вектор по векторам подвижного репера

$$\bar{u} = u^K \bar{r}_K + w \bar{n} \quad (16.21)$$

и продифференцируем левую и правую части (16.21) ковариантно по α^I :

$$\bar{u}_I = u_{,I}^K \bar{r}_K + u^K \bar{r}_{K,I} + w_{,I} \bar{n} + w \bar{n}_{,I}. \quad (16.22)$$

Используя деривационные формулы (16.13) и (16.14), получим из (16.22)

$$\bar{u}_I = \mu_I^K \bar{r}_K - \psi \bar{n}, \quad (16.23)$$

где введены обозначения

$$\mu_I^K = u_{,I}^K - w b_{,I}^K, \quad -\psi_I = u^K b_{K,I} + w_{,I}. \quad (16.24)$$

Из (16.20) и (16.23) имеем

$$\bar{r}'_I = (\delta_I^K + \mu_I^K) \bar{r}_K - \psi_I \bar{n}. \quad (16.25)$$

Фундаментальная матрица деформированного состояния g'_{IJ} представляется следующим образом

$$g'_{IJ} = \bar{r}'_I \cdot \bar{r}'_J = g_{IJ} + \mu_I^K \mu_{KJ} + \psi_I \psi_J + \mu_{IJ} + \mu_{JI}. \quad (16.26)$$

Компоненты тензора деформаций ϵ_{IJ} естественно определить в виде

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1}{2}(g'_{IJ} - g_{IJ}) = \frac{1}{2}(\mu_{IJ} + \mu_{JI} + \mu_I^K \mu_{KJ} + \psi_I \psi_J). \quad (16.27)$$

Если деформации считать малыми, т. е.

$$|u_{I,J}| \ll 1, \quad (16.28)$$

то квадратичные слагаемые в (16.27) могут быть опущены:

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1}{2}(\mu_{IJ} + \mu_{JI}). \quad (16.29)$$

Определитель g' фундаментальной матрицы (16.26) равен

$$g' = |\underline{g} + 2\underline{\epsilon}| = (g_{11} + 2\epsilon_{11})(g_{22} + 2\epsilon_{22}) - \\ - (g_{12} + 2\epsilon_{12})^2 \simeq g + 2(\epsilon_{11}g_{22} + \epsilon_{22}g_{11} - 2\epsilon_{12}g_{12}). \quad (16.30)$$

Вводя первый инвариант θ тензора деформаций соотношениями

$$\theta = g^{IJ}\epsilon_{IJ} = e_I^I = u_{I,I} - \omega b_I^I = \mu_I^I = \frac{\epsilon_{11}g_{22} + \epsilon_{22}g_{11} - 2\epsilon_{12}g_{12}}{g}, \quad (16.31)$$

определитель g' в (16.30) запишем (для малых деформаций) так:

$$g' = g(1 + 2\theta). \quad (16.32)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{\sqrt{g}}(1 - \theta). \quad (16.33)$$

В этом случае единичный вектор нормали в деформированном состоянии \bar{n}' находится следующим образом

$$\bar{n}' = \frac{1}{\sqrt{g'}} \bar{r}'_1 \times \bar{r}'_2 = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}}(1 - \theta) (\bar{r}_1 + \mu_1^K \bar{r}_K - \psi_1 \bar{n}) (\bar{r}_2 + \mu_2^K \bar{r}_K - \psi_2 \bar{n}) = \\ = \frac{1 - \theta}{\sqrt{g}} (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \mu_1^I \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \mu_2^I \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 - \psi_1 \bar{n} \times \bar{r}_2 - \psi_2 \bar{r}_1 \times \bar{n}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}}(1 - \theta) (\sqrt{g} \bar{n} + \mu_1^I \sqrt{g} \bar{n} + \sqrt{g} \psi_1 \bar{r}'^I) = \\ = (1 - \theta) [(1 + \theta) \bar{n} + \psi_1 \bar{r}'^I]. \quad (16.34)$$

Здесь мы использовали очевидные следствия соотношений (16.7)

$$\bar{n} \times \bar{r}_I = \sqrt{g} \epsilon_{IJ} \bar{r}'^J \quad (16.35)$$

или

$$\bar{n} \times \bar{r}_1 = \sqrt{g} \bar{r}'^2, \quad \bar{r}_2 \times \bar{n} = \sqrt{g} \bar{r}'^1. \quad (16.36)$$

Таким образом,

$$\bar{n}' = \bar{n} + \bar{\psi}, \quad (16.37)$$

где

$$\bar{\psi} = \psi_I \bar{r}^I. \quad (16.38)$$

Умножим (16.37) скалярно на \bar{r}_K :

$$\bar{n}' \cdot \bar{r}_K = \psi_K, \quad (16.39)$$

тем самым устанавливая физический смысл величин ψ_K : они связаны с углами наклона нормали в деформированном состоянии с векторами подвижного репера \bar{r}_I в недеформированном состоянии.

Продифференцируем ковариантно соотношение (16.37)

$$\bar{n}'_J = \bar{n}_J + \psi_{I,J} \bar{r}^I + \psi_I \bar{r}^I_J \quad (16.40)$$

и, используя (16.13), получим из (16.40)

$$\bar{n}'_J = \bar{n}_J + \psi_{I,J} \bar{r}^I + \psi_I b^I_J \bar{n}. \quad (16.41)$$

Тогда тензор кривизны (второй квадратичной формы) в деформированном состоянии согласно (16.11), (16.14), (16.25) и (16.41) будет выглядеть так (малыми второго порядка мы, конечно, пренебрегаем):

$$\begin{aligned} b'_{IJ} &= -\bar{r}'_I \cdot \bar{n}'_J = -\left(\bar{r}_I + \mu_I^K \bar{r}_K - \psi_I \bar{n}\right) \times \\ &\quad \times \left(\bar{n}_J + \psi_{M,J} \bar{r}^M + \psi_M b^M_J \bar{n}\right) = b_{IJ} + \mu_I^K b_{KJ} - \psi_{I,J}. \end{aligned} \quad (16.42)$$

Введём так называемый тензор искривлений κ :

$$\kappa_{IJ} = \psi_{I,J} - \mu_I^K b_{KJ}. \quad (16.43)$$

Тогда из (16.42) следует

$$b'_{IJ} = b_{IJ} - \kappa_{IJ}. \quad (16.44)$$

Заметим, что тензор κ симметричен. В самом деле, согласно формулам (16.24) имеем

$$-\kappa_{IJ} = \underline{u^K_J b_{KI}} + w_{I,J} + \underline{u^K b_{KI,J}} + \underline{u^K_J b_{KJ}} - w b^K_I b_{KJ}. \quad (16.45)$$

Сумма подчеркнутых членов в (16.45), так же как и последнее слагаемое в правой части (16.45), симметричны по индексам I и J ; симметричность ковариантной производной $w_{I,J}$ вытекает из её «расшифровки»:

$$w_{I,J} = w_{IJ} - \Gamma_{IJ}^K w_K. \quad (16.46)$$

Симметричность слагаемого $\underline{u^K b_{KI,J}}$ в (16.45) следует из формул Петерсона—Кодацци (16.19).

Рассмотрим теперь трёхмерное геометрическое тело, образованное из поверхности Σ_0 следующим образом. В каждой точке Σ_0 проведём внешнюю нормаль и отложим в её направлении отрезок $h/2$ ¹⁾. Соединяя все точки концов отрезка, получим поверхность Σ_+ . Точно так же проведём внутреннюю нормаль в каждой точке Σ_0 и отложим в её направлении отрезок такой же длины. Концы этих отрезков лежат на поверхности Σ_- . Тело, лежащее между поверхностями Σ_+ и Σ_- ; называется оболочкой со срединной поверхностью Σ_0 .

Предположим, что $h \ll D$, где D — диаметр поверхности Σ_0 , и что поверхности Σ_+ , Σ_- строятся без самопересечений. Тогда любой точке оболочки может быть поставлен в соответствие радиус-вектор \vec{R} (рис. 35)

$$\vec{R} = \vec{r} + z\vec{n}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (16.47)$$

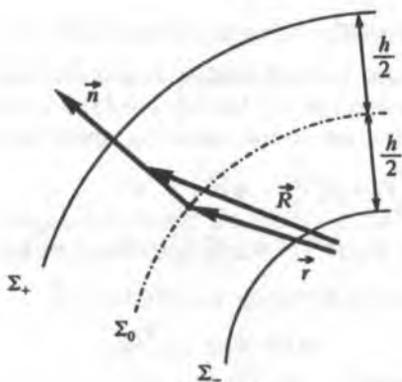


Рис. 35.

Продифференцировав (16.47) по α^I , получим

$$\vec{R}_I = \vec{r}_I + z\vec{n}_I = \left(\delta_I^K - b_I^K z \right) \vec{r}_K, \quad (16.48)$$

где \vec{R}_I — векторы локального базиса в точке оболочки, описываемой радиусом-вектором \vec{R} .

Фундаментальная матрица G_{IJ} произвольной точки оболочки имеет вид

$$G_{IJ} = \vec{R}_I \cdot \vec{R}_J = g_{IJ} - 2zb_{IJ} + z^2 b_I^K b_{KJ}. \quad (16.49)$$

¹⁾ Величина h может, вообще говоря, зависеть от α^1 , α^2 (оболочка переменной толщины).

Приведём симметричный тензор b_{IJ} к главным осям и обозначим его главные значения b_{11}^* и b_{22}^* следующим образом

$$b_{11}^* = \frac{1}{\rho_1}, \quad b_{22}^* = \frac{1}{\rho_2}, \quad (16.50)$$

где величины ρ_α , $\beta = 1, 2$, называются радиусами главных кривизн.

Будем говорить, что оболочка тонкая, если выполняются условия

$$\left| \frac{z}{\rho_\beta} \right| \ll 1, \quad \beta = 1, 2. \quad (16.51)$$

Для тонких оболочек последним слагаемым в правой части (16.49) можно пренебречь, т. е.

$$G_{IJ} = g_{IJ} - 2zb_{IJ}. \quad (16.52)$$

После деформирования радиус-вектор \vec{R}' произвольной точки оболочки зависит от трёх параметров α^1 , α^2 и z :

$$\vec{R}' = \vec{R}'(\alpha^1, \alpha^2, z), \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (16.53)$$

При этом, если положить $z = 0$, то получим

$$\vec{R}'(\alpha^1, \alpha^2, 0) = \vec{r}'(\alpha^1, \alpha^2). \quad (16.54)$$

Кинематические гипотезы всех теорий оболочек заключаются в выборе априорного представления радиуса-вектора (16.53). Обычно выражение (16.53) разлагают в тот или иной ряд по степеням z и оставляют некоторые члены этого разложения. В частности, если оставить лишь первую степень z , то будем иметь

$$\vec{R}' = \vec{r}' + z\vec{c}, \quad (16.55)$$

где \vec{c} — некоторый вектор. Мы рассмотрим две наиболее распространённые теории оболочек. В одной из них (теории Кирхгофа—Лява) полагают

$$\vec{c} = \vec{n}'. \quad (16.56)$$

В другой теории (теории Тимошенко) считается, что

$$\vec{c} = \vec{n}' + \vec{\gamma}, \quad (16.57)$$

где $\vec{\gamma}$ — некоторый кинематический вектор

$$\vec{\gamma} = \gamma_K \vec{r}'^K, \quad (16.58)$$

который подлежит определению в результате решения задачи.

Рассмотрим сначала кинематические характеристики теории Кирхгофа—Лява. Вектор перемещений \bar{u}' , который в любой точке оболочки равен

$$\bar{u}' = \bar{R}' - \bar{R}, \quad (16.59)$$

с учётом выражений (16.55), (16.56) запишем следующим образом

$$\bar{u}' = \bar{r}' + z\bar{n}' - \bar{r} - z\bar{n} = \bar{u} + z(\bar{n}' - \bar{n}). \quad (16.60)$$

Учитывая (16.37), имеем из (16.60)

$$\bar{u}' = \bar{u} + z\bar{\psi}. \quad (16.61)$$

Векторы репера в произвольной точке оболочки после её деформирования получим из (16.55), (16.56)

$$\bar{R}'_I = \bar{r}'_I + z\bar{n}'_I = \bar{r}'_I - zb'_I \bar{r}'_J. \quad (16.62)$$

Тогда фундаментальная матрица G'_{IJ} имеет вид

$$G'_{IJ} = \bar{R}'_I \cdot \bar{R}'_J = g'_{IJ} - 2zb'_{IJ} + z^2 b'^K_I b_{KJ}. \quad (16.63)$$

Для тонких оболочек последним слагаемым в (16.63) можно пренебречь, так как в силу (16.51)

$$|zb'^K_I| \ll 1. \quad (16.64)$$

Поэтому имеем вместо (16.63)

$$G'_{IJ} = g'_{IJ} - 2zb'_{IJ}. \quad (16.65)$$

Компоненты тензора деформаций ϵ'_{IJ} для произвольной точки оболочки равны

$$\epsilon'_{IJ} = \frac{1}{2}(G'_{IJ} - G_{IJ}) = \frac{1}{2}(g'_{IJ} - g_{IJ}) - z(b'_{IJ} - b_{IJ}), \quad (16.66)$$

а с учётом (16.27) и (16.44)

$$\epsilon'_{IJ} = \epsilon_{IJ} + z\kappa_{IJ}. \quad (16.67)$$

Тензор деформаций произвольной точки оболочки должен быть трёхмерным. Поэтому в дополнение к компонентам ϵ'_{IJ} найдем компоненты ϵ'_{i3} . Так как

$$\bar{R}'_3 = \bar{n}' = \bar{n} + \bar{\psi}, \quad \bar{R}_3 = \bar{n}, \quad (16.68)$$

то

$$G'_{33} = \bar{R}'_3 \cdot \bar{R}'_3 = 1, \quad G_{33} = 1, \quad (16.69)$$

$$G'_{I3} = \bar{R}'_I \cdot \bar{R}'_3 = (\bar{r}'_I + z\bar{n}'_I) \cdot \bar{n}'_I = 0,$$

$$G_{I3} = \bar{R}_I \cdot \bar{R}_3 = 0. \quad (16.70)$$

Поэтому

$$\epsilon'_{33} = \frac{1}{2}(G'_{33} - G_{33}) = 0, \quad (16.71)$$

$$\epsilon'_{I3} = \frac{1}{2}(G'_{I3} - G_{I3}) = 0. \quad (16.72)$$

Соотношение (16.71) показывает, что в теории оболочек Кирхгофа—Лява «обжатие» отсутствует, а из соотношения (16.72) следует, что в этом случае отсутствует и «межслойный» сдвиг.

Повторим теперь все выкладки, принимая во внимание кинематическую гипотезу Тимошенко (16.57). Вектор перемещений (16.59) будет иметь вид

$$\bar{u}' = \bar{r}' + z(\bar{n} + \bar{\gamma}) - \bar{r} - z\bar{n} = \bar{u} + z\bar{\gamma}. \quad (16.73)$$

Сравнивая выражения (16.73) и (16.61), мы видим, что все кинематические характеристики теории Кирхгофа—Лява отличаются от соответствующих характеристик теории Тимошенко тем, что вектор $\bar{\psi}$ заменяется вектором $\bar{\gamma}$.

Поэтому вместо тензора искривлений κ_{IJ} (16.43) имеем тензор $\bar{\kappa}_{IJ}$:

$$\bar{\kappa}_{IJ} = \gamma_{I,J} - \mu_I^K b_{KJ}. \quad (16.74)$$

Вместо тензора деформаций (16.67) имеем

$$\epsilon'_{IJ} = \epsilon_{IJ} + z\bar{\kappa}_{IJ}, \quad (16.75)$$

а вместо (16.62) в соответствии с (16.55), (16.57) —

$$\bar{R}'_I = \bar{r}'_I + z(\bar{n}_I + \bar{\gamma}_I), \quad (16.76)$$

где

$$\bar{\gamma}_I = \gamma_I^J \bar{r}_J + \gamma^J b_{JI} \bar{n}. \quad (16.77)$$

Кроме того,

$$\bar{R}'_3 = \bar{n} + \bar{\gamma}. \quad (16.78)$$

Поэтому

$$G'_{33} = \bar{R}'_3 \cdot \bar{R}'_3 = 1 + 2\bar{n} \cdot \bar{\gamma} + |\bar{\gamma}|^2 \approx 1. \quad (16.79)$$

$$\begin{aligned} G'_{I3} &= \bar{R}'_I \cdot \bar{R}'_3 = [\bar{r}_I + \bar{u}_I + z(\bar{n}_I + \bar{\gamma}_I)] \cdot (\bar{n} + \bar{\gamma}) = \\ &= [\bar{r}_I + \mu_I^K \bar{r}_K - \psi_I \bar{n} + z(-b_I^K \bar{r}_K + \gamma_{I,I}^K \bar{r}_K + \gamma^K b_{KI} \bar{n})] \times \\ &\times (\bar{n} + \gamma^J \bar{r}_J) = -\psi_I + z b_{KI} \gamma^K + \gamma_I - z b_{JI} \gamma^J = \gamma_I - \psi_I. \end{aligned} \quad (16.80)$$

Таким образом, в теории Тимошенко

$$\epsilon'_{33} = \frac{1}{2}(G'_{33} - G_{33}) = 0, \quad (16.81)$$

$$\epsilon'_{I3} = \frac{1}{2}(G'_{I3} - G_{I3}) = \frac{1}{2}(\gamma_I - \psi_I). \quad (16.82)$$

Здесь «обжатие», как видно, также отсутствует, но «межслойные сдвиги», вообще говоря, присутствуют.

Лекция 17

Статика оболочек

Рассмотрим элемент тела (оболочки), описанный в прошлой лекции, и воспроизведём его на рис. 36.

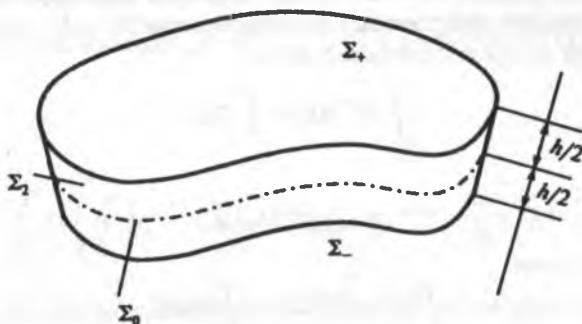


Рис. 36.

Здесь, как и ранее, Σ_0 — срединная поверхность; $\Sigma_1 = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ — поверхность, состоящая из двух поверхностей Σ_+ , Σ_- , конгруэнтных срединной; Σ_2 — боковая поверхность оболочки.

К объёму V , занимаемому оболочкой, и поверхности $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, ограничивающей этот объём, можно применить постулаты механики сплошной среды (массовые и инерционные силы отсутствуют): об изменении количества движения (4.5)

$$\int_{\Sigma} \vec{S}^{(\nu)} d\Sigma = 0 \quad (17.1)$$

и об изменении момента количества движения (4.6)

$$\int_{\Sigma} \vec{R} \times \vec{S}^{(\nu)} d\Sigma = 0. \quad (17.2)$$

Здесь $\vec{S}^{(\nu)}$ — плотность вектора усилий, действующего на площадке с единичным вектором нормали $\vec{\nu}$. Из (4.9), (4.10) следует

$$\vec{S}^{(\nu)} = \bar{S}^i \nu_i, \quad \bar{S}^i = \sigma^{ij} \bar{e}_j. \quad (17.3)$$

Векторы подвижного репера в произвольной точке оболочки мы ввели в предыдущей лекции:

$$\bar{e}_I = \bar{R}_I, \quad \bar{e}_3 = \bar{n}. \quad (17.4)$$

Поэтому из (17.3), (17.4) имеем

$$\bar{S}^I = \sigma^{IJ} \bar{R}_J + \sigma^{I3} \bar{n}, \quad (17.5)$$

$$\bar{S}^3 \equiv 0. \quad (17.6)$$

Условие (17.6) называется статической гипотезой Кирхгофа—Лява.

Отнесём усилия, действующие на поверхностях Σ_+ и Σ_- , к нагрузке \bar{p} , действующей на срединной поверхности:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{S}^{(\nu)} d\Sigma = \int_{\Sigma_0} \bar{p} d\Sigma, \quad (17.7)$$

где

$$\bar{p} = p^I \bar{r}_I + p^3 \bar{n}. \quad (17.8)$$

Обозначим также

$$\int_{\Sigma_1} z \bar{n} \times \vec{S}^{(\nu)} d\Sigma = \int_{\Sigma_0} \bar{m} d\Sigma, \quad (17.9)$$

где \bar{m} — вектор плотности моментов

$$\bar{m} = m^I \bar{r}_I. \quad (17.10)$$

В правой части (17.10) суммирование идет по большому латинскому индексу, так как из (17.9) следует, что

$$m^3 \bar{n} = 0. \quad (17.11)$$

Рассмотрим некоторую площадку $d\Sigma$, построенную как параллелограмм на двух векторах \bar{a} и \bar{b} , с единичным вектором нормали $\bar{\nu}$:

$$\bar{\nu} d\Sigma = \sqrt{G} \epsilon_{ijk} a^i b^j \bar{e}^k. \quad (17.12)$$

Положим теперь, что вектор \bar{a} имеет только две компоненты $d\alpha^I$, а вектор \bar{b} всего одну $d\alpha^3 = dz$. Тогда из (17.12) имеем

$$\nu_K d\Sigma = \sqrt{G} \epsilon_{I3K} d\alpha^I dz = \sqrt{G} \epsilon_{KI} d\alpha^I dz, \quad (17.13)$$

или, заменяя индексы,

$$\nu_I d\Sigma = \sqrt{G} \epsilon_{IJ} d\alpha^J dz. \quad (17.14)$$

Пусть Γ — контур, ограничивающий срединную поверхность Σ_0 , а \bar{k} — единичный вектор нормали к этому контуру (рис. 36). Тогда

$$k_I = \sqrt{g} \epsilon_{IJ} \frac{d\alpha^J}{ds}, \quad (17.15)$$

где s — длина дуги контура Γ . В соответствии со статической гипотезой Кирхгофа—Лява (17.6) из (17.5) и (17.14) имеем

$$\int_{\Sigma_2} \bar{S}^{(\nu)} d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \bar{S}^I \nu_I d\Sigma = \int_{\Sigma_2} (\sigma^{IJ} \bar{R}_J + \sigma^{I3} \bar{n}) \sqrt{G} \epsilon_{IK} d\alpha^K dz. \quad (17.16)$$

Учтём далее соотношения (16.48) и (17.15) и получим из (17.16)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_2} \bar{S}^{(\nu)} d\Sigma &= \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \left\{ \int_{\Gamma} [\sigma^{IJ} (\delta_J^M - z b_J^M) \bar{r}_M + \sigma^{I3} \bar{n}] \frac{k_I}{\sqrt{g}} \sqrt{G} ds \right\}. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Введём обозначения для тензора усилий T^{IJ} и вектора перерезывающих сил Q^I :

$$T^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\frac{G}{g}} (\sigma^{IJ} - z \sigma^{IM} b_M^J) dz, \quad (17.18)$$

$$Q^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\frac{G}{g}} \sigma^{I3} dz. \quad (17.19)$$

Введём также векторы усилий \bar{P}^I :

$$\bar{P}^I = T^{IJ} \bar{r}_J + Q^I \bar{n}. \quad (17.20)$$

Тогда перепишем векторное равенство (17.17) в новых обозначениях:

$$\int_{\Sigma_2} \bar{S}^{(\nu)} d\Sigma = \int_{\Gamma} \bar{P}^I k_I ds = \int_{\Sigma_0} \bar{P}^I \cdot d\Sigma. \quad (17.21)$$

Таким образом, из постулата (17.1), учитывая (17.7) и (17.21), имеем

$$\int_{\Sigma_0} (\bar{P}^I{}_{,I} + \bar{p}) d\Sigma = 0. \quad (17.22)$$

В силу произвольности выбранного объёма V , включающего кусок Σ_0 срединной поверхности всей оболочки, из (17.22) следует, что в каждой точке оболочки

$$\bar{P}^I{}_{,I} + \bar{p} = 0. \quad (17.23)$$

Это и есть следствие закона об изменении количества движения (17.1).

Обратимся теперь к постулату об изменении момента количества движения (17.2). В соответствии со статической гипотезой (17.6) имеем аналогично (17.17)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_2} \bar{R} \times \bar{S}^{(\nu)} d\Sigma = \\ = \int_{-h/2}^{h/2} dz \left\{ \int_{\Gamma} (\bar{r} + z\bar{n}) \left[\sigma^{IJ} (\bar{r}_J + z\bar{n}_J) + \sigma^{I3}\bar{n} \right] \frac{k_I}{\sqrt{g}} \sqrt{G} ds \right\}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Введём тензор моментов M^{IJ} :

$$M^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\frac{G}{g}} z (\sigma^{IJ} - z\sigma^{IM}b_M^J) dz. \quad (17.25)$$

и вектор моментов \bar{M}^I :

$$\bar{M}^I = \bar{n} \times M^{IJ} \bar{r}_J = \sqrt{g} \epsilon_{JK} M^{IJ} \bar{r}^K. \quad (17.26)$$

Принимая во внимание обозначения (17.18)–(17.20), воспользуемся теоремой Грина

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \bar{r} \times \bar{P}^I k_I ds = \int_{\Sigma_0} (\bar{r} \times \bar{P}^I)_{,I} d\Sigma = \\ = \int_{\Sigma_0} \bar{r}_I \times \bar{P}^I d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \bar{r} \times \bar{P}^I{}_{,I} d\Sigma. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Таким образом, с учётом (17.18)–(17.20) и (17.25)–(17.27) из (17.24) следует

$$\int_{\Sigma_2} \bar{R} \times \bar{S}^{(\nu)} d\Sigma = \int_{\Sigma_0} \bar{r}_I \times \bar{P}^I d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \bar{r} \times \bar{P}^I_{,I} d\Sigma + \int_{\Gamma} \bar{M}^I k_I ds. \quad (17.28)$$

Применим теорему Грина к последнему интегралу в правой части (17.28):

$$\int_{\Gamma} \bar{M}^I k_I ds = \int_{\Sigma_0} \bar{M}^I_{,I} d\Sigma. \quad (17.29)$$

Обратимся теперь к постулату (17.2) и примем во внимание (17.28), (17.29) и (17.9). Имеем

$$\int_{\Sigma_0} \bar{M}^I_{,I} d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \bar{r}_I \times \bar{P}^I d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \bar{r} \times \bar{P}^I_{,I} d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \bar{r} \times \bar{p} d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \bar{m} d\Sigma = 0. \quad (17.30)$$

Заметим, что сумма подчёркнутых в (17.30) слагаемых тождественно равна нулю, так как выполнены соотношения (17.23). Поэтому для произвольного выделенного элемента оболочки имеют место равенства

$$\int_{\Sigma_0} \left(\bar{M}^I_{,I} + \bar{r}_I \times \bar{P}^I + \bar{m} \right) d\Sigma = 0, \quad (17.31)$$

откуда следуют и дифференциальные следствия постулата об изменении момента количества движения

$$\bar{M}^I_{,I} + \bar{r}_I \times \bar{P}^I + \bar{m} = 0. \quad (17.32)$$

Итак, мы получили два векторных уравнения (17.23) и (17.32) в каждой точке оболочки. Их можно записать в виде шести уравнений для компонент векторов.

Возвратимся к векторному соотношению (17.23) и заметим, что из (17.20) при использовании деривационных формул следует

$$\begin{aligned} \bar{P}^I_{,I} &= T^{IJ}_{,I} \bar{r}_J + T^{IJ} \bar{r}_{J,I} + Q^I_{,I} \bar{n} + Q^I \bar{n}_I = \\ &= T^{IJ}_{,I} \bar{r}_J + T^{IJ} b_{JI} \bar{n} + Q^I_{,I} \bar{n} - Q^I b^J_I \bar{r}_J. \end{aligned} \quad (17.33)$$

Учитывая (17.8) и (17.33), имеем из (17.23)

$$\begin{cases} T^{IJ}{}_{,I} - Q^I b_I^J + p^J = 0, \\ T^{IJ} b_{IJ} + Q^I{}_{,I} + p^3 = 0. \end{cases} \quad (17.34)$$

Ковариантно продифференцируем далее уравнения (17.26) и получим

$$\bar{M}^I{}_{,I} = \sqrt{g} \epsilon_{JK} M^{IJ}{}_{,I} \bar{r}^K + \sqrt{g} \epsilon_{JK} M^{IJ} b_I^K \bar{n}. \quad (17.35)$$

Кроме того, свёртка $\bar{r}_I \times \bar{P}^I$ с учётом (17.20) выглядит следующим образом

$$\bar{r}_I \times \bar{P}^I = \bar{r}_I \times (T^{IJ} \bar{r}_J + Q^J \bar{n}) = \sqrt{g} (\epsilon_{IJ} T^{IJ} \bar{n} - \epsilon_{IJ} Q^I \bar{r}^J). \quad (17.36)$$

Подставляя (17.35) и (17.36) в (17.32) и принимая во внимание (17.10), окончательно получим

$$\begin{cases} \sqrt{g} \epsilon_{JK} (M^{IJ}{}_{,I} - Q^J) + m_K = 0, \\ \sqrt{g} \epsilon_{JK} (b_I^K M^{IJ} + T^{JK}) = 0. \end{cases} \quad (17.37)$$

Итак, вместо двух векторных уравнений (17.23) и (17.31) мы вывели шесть уравнений (17.34) и (17.37) в компонентах. Покажем, однако, что последнее уравнение (17.37) удовлетворяется тождественно. Для этого воспользуемся соотношениями (17.25) и (17.18). Последнее уравнение (17.37) тогда запишется в виде

$$\sqrt{g} \epsilon_{JK} \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\frac{G}{g}} [b_I^K z (\sigma^{IJ} - z \sigma^{IM} b_M^J) + \sigma^{JK} - z \sigma^{JM} b_M^K] dz = 0. \quad (17.38)$$

В подынтегральном выражении (17.38) соберем слагаемые при разных степенях z . Коэффициенты при z в нулевой, первой и второй степенях будут соответственно следующими

$$\sqrt{G} \epsilon_{JK} \sigma^{JK} \equiv 0, \quad (17.39)$$

$$\sqrt{G} \epsilon_{JK} (\sigma^{IJ} b_I^K - \sigma^{IJ} b_I^K) \equiv 0, \quad (17.40)$$

$$\sqrt{G} \epsilon_{JK} b_I^K b_M^J \sigma^{IM} \equiv 0. \quad (17.41)$$

Умножим теперь первое из уравнений (17.37) на ϵ^{LK}/\sqrt{g} и просуммируем по K . Тогда в новых обозначениях

$$q^L = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{LK} m_K, \quad (17.42)$$

получим из (17.37)

$$M^{IJ}{}_{,I} - Q^J + q^J = 0. \quad (17.43)$$

Итак, следствием двух векторных уравнений (17.23) и (17.32) являются пять уравнений (17.34) и (17.43) в компонентах. Впрочем, их число можно сократить. Для этого выразим из (17.43) перерезывающие силы и подставим в уравнения (17.34):

$$\begin{cases} T^{IJ}{}_{,I} - b_I^J (M^{KI}{}_{,K} + q^I) + p^J = 0, \\ T^{IJ} b_{IJ} + M^{IJ}{}_{,IJ} + q_{,J}^J + p^3 = 0. \end{cases} \quad (17.44)$$

Определяющие соотношения для тонких упругих оболочек рассмотрим для простоты в ортогональной системе координат. Тогда компоненты тензоров с верхними и нижними индексами совпадают, $G \approx g = 1$, и мы можем записать соотношения (17.18), (17.19) и (17.25) в виде

$$T_{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{IJ} dz, \quad Q_I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{I3} dz, \quad M_{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{IJ} dz. \quad (17.45)$$

Закон Гука для этого случая может быть записан следующим образом (см. также (10.28)):

$$\sigma_{IJ} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{IJ} + \nu \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \epsilon_{KL}), \quad (17.46)$$

где деформации ϵ_{IJ} определены выражениями (16.67). Подставляя (16.67) в (17.46), а затем в (17.45) и пользуясь тем, что тензоры $\underline{\epsilon}$, $\underline{\kappa}$ определены только на срединной поверхности, получим

$$T_{IJ} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{IJ} + \nu \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \epsilon_{KL}), \quad (17.47)$$

$$M_{IJ} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_{IJ} + \nu \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \kappa_{KL}). \quad (17.48)$$

Обычно вводят обозначения

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (17.49)$$

причём C называется цилиндрической жёсткостью оболочки, а D изгибной.

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях и начнем с гипотезы Тимошенко. Умножим первое уравнение (17.34) на u_J , второе на w ,

уравнение (17.43) на γ_J , сложим полученные выражения и проинтегрируем по срединной поверхности Σ_0 . После применения теоремы Грина получим

$$\int_{\Sigma_0} \left[-T^{IJ} \mu_{JI} + Q^I (\psi_I - \gamma_I) - M^{IJ} \gamma_{J,I} + p^J u_J + p^3 w + q^J \gamma_J \right] d\Sigma + \int_{\Gamma} (T^{IJ} u_J + M^{IJ} \gamma_J + Q^I w) k_I ds = 0. \quad (17.50)$$

Работа внешних сил, действующих на контуре Γ , описывается контурным интегралом в (17.50). Отсюда следует, что кинематических граничных условий на контуре Γ должно быть пять. Например, если оболочка заземлена по контуру Γ , то из (17.51) следует

$$u_J|_{\Gamma} = 0, \quad \gamma_J|_{\Gamma} = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0. \quad (17.51)$$

Естественными граничными условиями (для свободного контура Γ) будут следующие равенства

$$T^{IJ} k_J|_{\Gamma} = 0, \quad Q^I k_I|_{\Gamma} = 0, \quad M^{IJ} k_J|_{\Gamma} = 0, \quad (17.52)$$

т. е. их всего тоже пять.

Сложнее обстоит дело для случая кинематической гипотезы Кирхгофа—Лява. Здесь в (17.50) следует положить $\gamma_I = \psi_I$. Тогда формально для заземлённой оболочки должны выполняться условия (17.51), где γ_J заменено на ψ_J . Однако из (16.24) следует, что

$$\psi_J|_{\Gamma} = (-b_{KJ} u^K - w_J)|_{\Gamma} = 0, \quad (17.53)$$

но u_I на контуре Γ согласно (17.51) равны нулю. Так как из (17.51) следует, что и перемещение w на Γ равно нулю, то тождественно равна нулю и его производная по касательной к контуру. Следовательно, из (17.53) вытекает только одно нетривиальное условие: на контуре Γ равна нулю производная по нормали от перемещения w . Таким образом, условия заземления вдоль контура для гипотезы Кирхгофа—Лява будут вместо (17.51) следующими

$$u_J|_{\Gamma} = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0, \quad \psi_I k_I|_{\Gamma} = 0. \quad (17.54)$$

Для вывода статических граничных условий умножим первые уравнения (17.44) на δu_I , последнее уравнение (17.44) на δw , сложим их и проинтегрируем по срединной поверхности Σ_0 . Тогда, применяя теорему

Грина, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_0} \left[\left(T^{IJ}{}_{,I} - b_I^J (M^{KI}{}_{,K} + q^I) + p^J \right) \delta u_J + \right. \\
 & \quad \left. + \left(T^{IJ} b_{IJ} + M^{IJ}{}_{,IJ} + q_{,J}^J + p^3 \right) \delta w \right] d\Sigma = \\
 & = \int_{\Gamma} \left(T^{IJ} n_I \delta u_J - b_I^J M^{KI} n_K \delta u_J + M_{IJ,I} n_J \delta w + q^J n_J \delta w \right) ds + \\
 & + \int_{\Sigma_0} \left(-T^{IJ} \delta u_{J,I} + b_I^J M^{KI} \delta u_{J,K} + b_{I,K}^J M^{KI} \delta u_J - b_I^J q^I \delta u_J + \right. \\
 & \quad \left. + p^J \delta u_J + T^{IJ} b_{IJ} \delta w - M^{IJ}{}_{,I} \delta w_J - q^J \delta w_J + p^3 \delta w \right) d\Sigma. \quad (17.55)
 \end{aligned}$$

Правую часть (17.55) можно разбить на три части: изменение работы внешних сил $\delta \mathcal{A}^{(e)}$,

$$\delta \mathcal{A}^{(e)} = \int_{\Sigma_0} \left(p^J \delta u_J + p^3 \delta w + q^I \delta \psi_I \right) d\Sigma, \quad (17.56)$$

изменение работы внутренних сил $\delta \mathcal{A}^{(i)}$,

$$\delta \mathcal{A}^{(i)} = - \int_{\Sigma_0} \left(T^{IJ} \mu_{JI} + M^{IJ} \delta \psi_{I,J} \right) d\Sigma, \quad (17.57)$$

и работу $\delta \mathcal{A}_{\Gamma}$ сил на контуре Γ ,

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{A}_{\Gamma} = & - \int_{\Gamma} \left(b_I^J M^{KI} n_K \delta u_J - M^{IJ}{}_{,I} n_J \delta w - \right. \\
 & \left. - M^{IJ} n_I \delta w_J + q^J n_J \delta w + T^{IJ} n_I \delta u_J \right) ds. \quad (17.58)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения (15.39), обозначая по аналогии с (15.47)*

$$H = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{JK} M_J^I n_K n_I \quad (17.59)$$

и приравнявая нулю обобщённые силы в (17.58) при обобщённых перемещениях, получим в результате следующие четыре граничные

* См. сноску на стр. 136.

условия для свободного края оболочки

$$\begin{cases} (T^{IJ} - M^{IK} b_K^J) n_I = 0, \\ Q^I n_I + \frac{dH}{d\tau} = 0, \\ M^{IJ} n_I n_J = 0. \end{cases} \quad (17.60)$$

Лекция 18

Контактная задача Герца

Особое место в теории упругости занимают контактные задачи с переменной границей контакта. В этих задачах на поверхности раздела тел, контактно взаимодействующих между собой, граничные условия существенно различны для области самого контакта и вне этой области. Однако граница этого раздела изменяется при деформировании и должна быть определена в результате решения самой задачи. Такая задача является существенно нелинейной.

Однако она имеет большой практический интерес. Ведь при расчёте работающих конструкций необходимо учитывать контактные взаимодействия различных её элементов. Поэтому-то контактная задача — важная составляющая науки, занимающейся изучением трения и износа узлов и механизмов, которая называется трибологией.

Рассмотрим два тела А и Б, которые соприкасаются в одной точке (рис. 37). Введём две прямоугольные системы координат: одну для тела А (O, x_1, x_2, x_3), а другую для тела Б (O, x'_1, x'_2, x'_3), причём $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $x_3 = -x'_3$. Пусть точка касания находится в начале координат. Уравнение поверхности в точке касания для тела А запишем в виде

$$x_3 = \kappa_{IJ} x_I x_J, \quad (18.1)$$

где κ_{IJ} — компоненты двумерного симметричного тензора второго ранга. Они характеризуют кривизну и кручение, что видно из производных

$$x_{3,\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}, \quad x_{3,\alpha\alpha} = 2\kappa_{\alpha\alpha}. \quad (18.2)$$

Аналогично (18.1) для тела Б имеем

$$x'_3 = \kappa'_{IJ} x'_I x'_J, \quad (18.3)$$

Предположим, что оба тела сдавливаются силами \mathcal{P} , в результате чего они «сближаются» на величину α . Термин «сближение» ясен из рис. 38. Это расстояние между вершинами тел А и Б, если бы они свободно внедрились друг в друга при контактном взаимодействии.

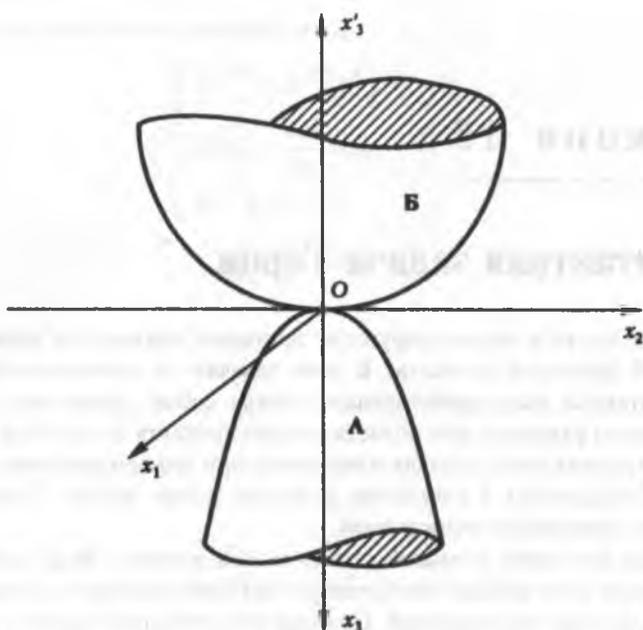


Рис. 37.

На самом деле такого не происходит. Точки a и b , которые до контакта лежали на одной вертикали и принадлежали телам A и B соответственно, после контакта сольются.

Другими словами, следуя Герцу, мы принимаем два предположения.

1. При контакте происходит абсолютное сцепление частиц, т.е. касательных напряжений не возникает. Поэтому точки a и b , пришедшие в соприкосновение, остаются в контакте в течение всего процесса деформирования.
2. Плошадка контакта всегда остаётся плоской.

Из рис. 38 видно, что для вертикальных координат точек a и b и их перемещений справедливо равенство

$$(x_3 + u_3) + (x'_3 + u'_3) = \alpha. \quad (18.4)$$

Разумеется, в тех точках, где поверхности не соприкасаются, верно неравенство

$$(x_3 + u_3) + (x'_3 + u'_3) > \alpha. \quad (18.5)$$

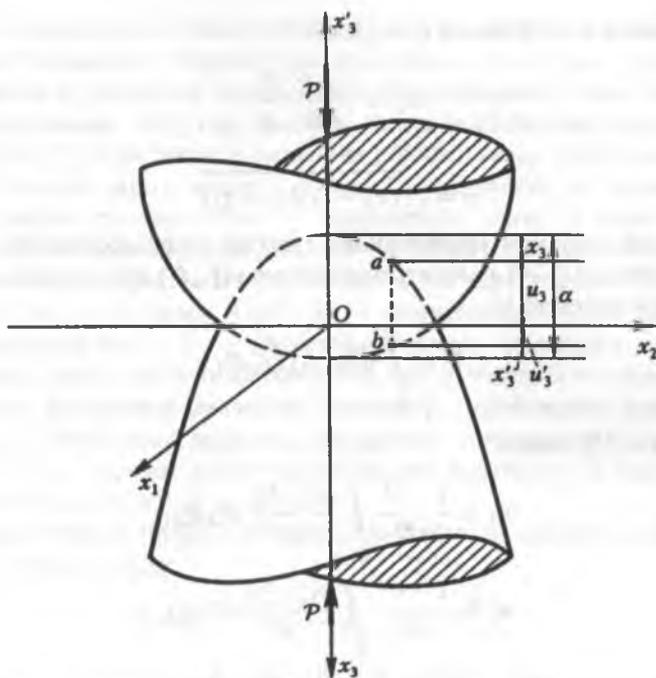


Рис. 38.

Следовательно, равенство (18.4) справедливо только в области контакта тел А и Б. Подставим (18.1) и (18.3) в равенство (18.4)

$$(\kappa_{IJ} + \kappa'_{IJ})x_I x_J + u_3 + u'_3 = \alpha. \quad (18.6)$$

Тензор с компонентами $\kappa_{IJ} + \kappa'_{IJ}$ симметричен, поэтому его можно привести к главным осям. Пусть κ_1, κ_2 — главные значения этого тензора (главные кривизны). Тогда уравнение (18.6) запишется в виде

$$u_3 + u'_3 = \alpha - \kappa_I x_I^2. \quad (18.7)$$

Для подсчёта перемещений u_3 и u'_3 воспользуемся решением Буссинеска (8.10) для сосредоточенной силы P , приложенной в точке $(\xi_1, \xi_2, 0)$

$$u_3 = \frac{P(1 + \nu)}{2\pi E} \left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{2(1 - \nu)}{r} \right], \quad (18.8)$$

где

$$r = \sqrt{(x_I - \xi_I)(x_I - \xi_I) + x_3^2}. \quad (18.9)$$

На плоскости $x_3 = 0$ имеем (см. (8.15))

$$u_3 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{\mathcal{P}}{\rho}, \quad (18.10)$$

где

$$\rho = \sqrt{(x_I - \xi_1)(x_I - \xi_2)}. \quad (18.11)$$

Учитывая принцип суперпозиции, можно сосредоточенную силу \mathcal{P} в соотношении (18.10) заменить плотностью $p(\xi_1, \xi_2)$ сил, распределённых по области контакта Σ :

$$\mathcal{P} = \int_{\Sigma} p(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (18.12)$$

Тогда из (18.10) имеем

$$u_3 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_{\Sigma} \frac{p(\xi_1, \xi_2)}{\rho} d\xi_1 d\xi_2, \quad (18.13)$$

$$u'_3 = \frac{1 - \nu'^2}{\pi E'} \int_{\Sigma} \frac{p(\xi_1, \xi_2)}{\rho} d\xi_1 d\xi_2, \quad (18.14)$$

где коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E относятся к телу А, а ν' и E' — к телу Б.

Из соотношений (18.13), (18.14) видно, что отношение перемещений u_3/u'_3 — величина постоянная,

$$\frac{u_3}{u'_3} = \frac{(1 - \nu^2) E'}{(1 - \nu'^2) E}. \quad (18.15)$$

Подставляя выражения (18.13), (18.14) в (18.7), получим

$$\frac{C}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{p(\xi_1, \xi_2)}{\rho} d\xi_1 d\xi_2 = \alpha - \kappa_I x_I^2, \quad (18.16)$$

где введена константа C , имеющая размерность упругой податливости:

$$C = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu'^2}{E'}. \quad (18.17)$$

Итак, для определения контактного давления $p(\xi_1, \xi_2)$ имеются два уравнения (18.16) и (18.12), причём в них неизвестны область контакта Σ и сближение α .

Задача очень сложная, однако гениальный двадцатитрёхлетний Генрих Герц с ней справился. Прежде чем рассказать о его идее, приведём все величины в указанных уравнениях к безразмерному виду. Это всегда полезно делать, ибо, как правило, число исследуемых параметров уменьшается [7]. Для этого в механике обычно вводят три величины, характеризующие длину, массу и время. В статических же задачах достаточно ввести две величины — характерную длину и характерную массу. Если же в задаче фигурируют два существенно различающихся по своей природе размера, то полезно вводить два характерных параметра длины. Так мы и поступим. Пусть R — характерный радиус кривизны контактирующих тел, а D — характерный размер площадки контакта. Вместо того, чтобы задавать характерную массу, зададим величину q — характерное контактное давление (например, наибольшее давление). Кроме того, чтобы явно выразить размерность постоянной C , определяемой (18.17), зададим характерный модуль упругости G (например, среднее арифметическое E и E').

Образует безразмерные величины, которые в дальнейшем будем пометать волной сверху:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= CG, & \bar{x}_I &= x_I R, & \bar{x}_I &= \frac{x_I}{D}, \\ \bar{p} &= \frac{p}{q}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{D}, & \bar{\xi}_I &= \frac{\xi_I}{D}. \end{aligned} \quad (18.18)$$

Подставим введенные обозначения (18.18) в уравнение (18.16) и, сократив на D^2/R , получим

$$\frac{\bar{C}}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \frac{qR}{GD} = \bar{\alpha} \frac{R}{D} - \bar{x}_I \bar{x}_I^2. \quad (18.19)$$

Соотношение (18.12) примет вид

$$\int_{\Sigma} \bar{p} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 qD^2 = P. \quad (18.20)$$

Из (18.19), (18.20) видно, что будут безразмерными следующие параметры (критерии):

$$k = \frac{qR}{GD}, \quad \beta = \frac{\alpha R}{D^2}, \quad Q = \frac{P}{qD^2}. \quad (18.21)$$

Параметр β можно считать безразмерным сближением, а Q — безразмерной силой сжатия.

Выразим из первого соотношения (18.21) величину q :

$$q = \frac{kGD}{R}. \quad (18.22)$$

Подставим это значение в последнее соотношение (18.21). Получим

$$P = Q \frac{kGD^3}{R}. \quad (18.23)$$

Из (18.23) имеем

$$D = k_1 \sqrt[3]{\frac{PR}{G}}, \quad (18.24)$$

где k_1 — безразмерная величина:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{Qk}}. \quad (18.25)$$

Подставляя (18.24) во второе соотношение (18.21), получим

$$\alpha = \beta \frac{D^2}{R} = \frac{\beta k_1^2}{R} \sqrt[3]{\left(\frac{PR}{G}\right)^2} = k_2 \sqrt{\frac{P^2}{G^2 R}}, \quad (18.26)$$

где k_2 — ещё одна безразмерная величина:

$$k_2 = \beta k_1^2. \quad (18.27)$$

Подставим далее (18.24) в (18.22):

$$q = k_3 \sqrt[3]{\frac{PG^2}{R^2}}, \quad (18.28)$$

где k_3 — безразмерная величина:

$$k_3 = k k_1. \quad (18.29)$$

Сравнивая между собой выражения (18.24), (18.26), (18.28), легко видеть в их правых частях комбинации трёх величин P , G , R , причём порядок зависимости от силы P различен:

$$D \sim P^{1/3}, \quad \alpha \sim P^{2/3}, \quad q \sim P^{1/3}. \quad (18.30)$$

Отметим, что довольно важные качественные зависимости (18.30) являются результатом лишь анализа размерностей в контактной задаче Герца.

Обратимся снова к уравнению (18.16). Г.Герц заметил его сходство с известным в теории потенциала тождеством

$$\int_S \frac{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}}}{\rho(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\pi a_1 a_2}{2} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 + \xi} - \frac{x_2^2}{a_2^2 + \xi}\right) d\xi}{\sqrt{\xi(a_1^2 + \xi)(a_2^2 + \xi)}},$$

которое для сокращения будем записывать следующим образом

$$\int_S \frac{\sqrt{1 - \frac{x_I^2}{a_I^2}}}{\rho(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\pi a_1 a_2}{2} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{x_I^2}{a_I^2 + \xi}\right) d\xi}{\sqrt{\xi(a_1^2 + \xi)(a_2^2 + \xi)}}. \quad (18.31)$$

Здесь S — эллипс с полуосями a_1 и a_2 :

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \quad \left(\frac{x_I^2}{a_I^2} = 1\right). \quad (18.32)$$

Если допустить, что область контакта Σ является эллипсом S , то из соотношений (18.16) и (18.31) находим

$$p(x_1, x_2) = A \sqrt{1 - \frac{x_I^2}{a_I^2}}, \quad (18.33)$$

где A — некоторая константа, которая может быть определена из (18.12):

$$A \int_S \sqrt{1 - \frac{x_I^2}{a_I^2}} dx_1 dx_2 = P. \quad (18.34)$$

Отсюда

$$A = \frac{3P}{2\pi a_1 a_2}. \quad (18.35)$$

Подставляя (18.35) в (18.33), получим распределение контактного давления по площади области соприкосновения тел A и B :

$$p(x_1, x_2) = \frac{3P}{2\pi a_1 a_2} \sqrt{1 - \frac{x_I^2}{a_I^2}}. \quad (18.36)$$

Среднее по области контакта давление есть отношение силы P к площади эллипса:

$$p_{cp} = \frac{P}{\Sigma} = \frac{P}{S} = \frac{P}{\pi a_1 a_2}, \quad (18.37)$$

в то время как максимальное давление, согласно (18.36) реализуемое в точке $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, равно

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a_1 a_2} \quad (18.38)$$

и в полтора раза превышает среднее.

Подставим (18.36) в (18.16)

$$\frac{C}{\pi} \frac{3P}{2\pi a_1 a_2} \int_S \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{a_1^2}}}{\rho} d\xi_1 d\xi_2 = \alpha - \kappa_I x_I^2. \quad (18.39)$$

Сравним теперь правые части (18.39) и (18.31). Получим

$$\frac{3CP}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{x_I^2}{a_I^2 + \xi}\right) d\xi}{\sqrt{\xi(a_1^2 + \xi)(a_2^2 + \xi)}} = \alpha - \kappa_I x_I^2, \quad (18.40)$$

откуда имеем

$$\alpha = \frac{3CP}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi(a_1^2 + \xi)(a_2^2 + \xi)}, \quad (18.41)$$

$$\kappa_I = \frac{3CP}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a_I^2 + \xi)\sqrt{\xi(a_1^2 + \xi)(a_2^2 + \xi)}}. \quad (18.42)$$

Обозначим λ отношение полуосей эллипса S : $\lambda = a_1/a_2$. Тогда из (18.42) после последовательных замен $\eta = \xi/a_1^2$, $\eta = \xi/a_2^2$ получим

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3CP}{4\pi a_1^3} \int_0^\infty \frac{\lambda d\eta}{(1+\eta)\sqrt{\eta(1+\eta)(1+\lambda^2\eta)}}, \\ \kappa_2 = \frac{3CP}{4\pi a_2^3} \int_0^\infty \frac{d\eta}{(1+\eta)\sqrt{\eta(\lambda^2+\eta)(1+\eta)}}. \end{cases} \quad (18.43)$$

Обозначим

$$J_1(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\eta}{(1+\eta)^{3/2} \sqrt{\eta(1+\lambda^2\eta)}}, \quad (18.44)$$

$$J_2(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta)^{3/2} \sqrt{\eta(\lambda^2+\eta)}}.$$

Тогда из (18.43) следует

$$\kappa_{\beta} = \frac{3 CP}{4 \pi a_{\beta}^3} J_{\beta}, \quad \beta = 1, 2. \quad (18.45)$$

Из (18.45) видно, что

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{J_1}{\lambda^3 J_2}, \quad (18.46)$$

поэтому отношение полуосей эллипса не зависит от нагрузки \mathcal{P} и от упругих констант (величины C). Значит, при контакте тел А и Б эллипс S изменяется подобно самому себе.

Для того, чтобы найти величину полуосей эллипса S , воспользуемся формулой (18.45)

$$a_{\beta} = \sqrt[3]{\frac{3 CP J_{\beta}}{4 \cdot 2\pi \kappa_{\beta}}}, \quad (18.47)$$

причём параметр λ , входящий в интегралы (18.44), можно найти, разрешив уравнение (18.46) относительно λ .

Сближение α найдем из (18.41):

$$\alpha = \frac{3 CP J_3}{4 \pi a_1}, \quad (18.48)$$

где

$$J_3 = \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\eta}{\sqrt{\eta(1+\eta)(1+\lambda^2\eta)}}. \quad (18.49)$$

Выражая a_1 из (18.47) и подставляя это значение в (18.48), получим

$$\alpha = J_3 \sqrt[3]{\frac{2\kappa_1}{J_1} \left(\frac{3 CP}{4 \pi}\right)^2}. \quad (18.50)$$

Из соотношений (18.47) и (18.50) видно, что

$$a_{\beta} \sim \mathcal{P}^{1/3}, \quad \alpha \sim \mathcal{P}^{2/3}, \quad (18.51)$$

а из (18.47) и (18.36), что

$$p \sim P^{1/3}. \quad (18.52)$$

Таким образом, оценки (18.51), (18.52), полученные по результатам решения поставленной задачи Герца, совпадают с априорными оценками (18.30). Этот факт подтверждает правильность найденного решения.

Формулы этого решения упрощаются в частных случаях. Например, если вдавливаются друг в друга поверхности вращения, то

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad (18.53)$$

где R и R' — радиусы кривизны тел A и B в точке их касания. Тогда площадка контакта будет кругом радиуса a и, как следует из (18.42),

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{3CP}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)^2 \sqrt{\xi}}. \quad (18.54)$$

Интеграл в (18.54) вычисляется аналитически с помощью замены $\xi = \eta^2$ и равен $\pi/(2a^3)$. Поэтому, приравнивая друг другу правые части (18.53) и (18.54), найдем a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3CPRR'}{4R+R'}}. \quad (18.55)$$

Интеграл J_3 (18.49) в этом случае ($\lambda = 1$) также вычисляется аналитически и равен π . Поэтому из (18.48) получим

$$\alpha = \frac{3CP}{4a}, \quad (18.56)$$

а с учётом (18.55)

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{R+R'}{RR'} \left(\frac{3}{4}CP \right)^2}. \quad (18.57)$$

В частности, если контактируют два одинаковых шара ($R = R'$), то следствием (18.56), (18.57) будут следующие выражения для радиуса площадки контакта и сближения:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{8}CPR}, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{2}{R} \left(\frac{3}{4}CP \right)^2}. \quad (18.58)$$

Если телом А является шар радиуса R , а телом Б — плоскость ($R \rightarrow \infty$), то

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4}CP R}, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{R} \left(\frac{3}{4}CP\right)^2}. \quad (18.59)$$

Во всех этих частных случаях контактное давление имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (18.60)$$

В заключение заметим, что приведенная выше теория Герца в настоящее время обобщена на случаи, когда учитывается трение по поверхности контакта, проскальзывание этих поверхностей и т. д.

Результаты решения задачи Герца можно применить к расчёту соударения упругих тел. Пусть в некоторый момент $t = 0$ соударяются два тела А и Б с массами m и m' соответственно. На площадке контакта возникают распределённые усилия p . Обозначим суммарную силу взаимодействия соударяемых тел через $\mathcal{P}(t)$.

По теореме об изменении количества движения имеем

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{d\alpha}{dt} \right) = -\mathcal{P}, \quad (18.61)$$

где α — по-прежнему сближение, а M — приведенная масса,

$$M = \frac{mm'}{m + m'}. \quad (18.62)$$

Из задачи Герца мы знаем, что \mathcal{P} связано с α по формуле

$$\alpha = k\mathcal{P}^{2/3}, \quad (18.63)$$

где k — некоторый размерный коэффициент, который можно определить из (18.50). Подставляя (18.63) в (18.61), получим

$$\ddot{\alpha} = -B\alpha^{3/2}, \quad (18.64)$$

где $B = 1/(Mk^{3/2})$. Уравнение (18.64) легко интегрируется после домножения его левой и правой частей на $\dot{\alpha}$. Так как $\dot{\alpha}\ddot{\alpha} \equiv (d/dt)(\dot{\alpha}^2/2)$, то после интегрирования получим

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 + c) = -\frac{2}{5}B\alpha^{5/2}. \quad (18.65)$$

Но центры тел А и Б в момент времени $t = 0$, т. е. когда $\alpha = 0$, сближаются с известной скоростью V . Следовательно,

$$\frac{1}{2}(V^2 + c) = 0. \quad (18.66)$$

Из (18.66) находим постоянную интегрирования c и подставляем её в (18.65)

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 - V^2) = -\frac{2}{5}B\alpha^{5/2}. \quad (18.67)$$

В момент наибольшего сближения (в конце фазы) скорость сближения $\dot{\alpha}$ равна нулю. Поэтому

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{5V^2}{4B} \right)^{2/5}. \quad (18.68)$$

Теперь можно определить наибольшее значение силы взаимодействия по формуле (18.63), а затем и размеры площадки контакта.

Так как удар считается абсолютно упругим, то после максимального давления происходит его падение, и вся картина повторяется в обратном направлении по времени. Найдём полное время T контакта, которое называется временем соударения. Для этого решим дифференциальное уравнение (18.67), которое после разделения переменных запишем в виде

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{V^2 - \frac{4}{5}B\alpha^{5/2}}} = dt. \quad (18.69)$$

Интегрируя (18.69), получим

$$T = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{V^2 - \frac{4}{5}B\alpha^{5/2}}}, \quad (18.70)$$

или после замены переменной $\alpha = \alpha_{\max}\varphi$

$$T = \frac{2\alpha_{\max}}{V} \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^{5/2}}} \approx 2,9432 \frac{\alpha_{\max}}{V}. \quad (18.71)$$

Более полное представление о контактной задаче теории упругости можно получить из книги [4].

Лекция 19

Устойчивость равновесия и движения

Понятию «устойчивость», так же как и другим ключевым понятиям естествознания, всегда пытались дать точное математическое определение и тем самым построить математическую модель перехода движения или равновесия (вообще говоря, процесса) из «устойчивого» состояния в «неустойчивое». Такие попытки предложить универсальное определение оказывались в основном неудачными, поскольку в каждой конкретной задаче из физического смысла под термином «устойчивость» подразумевается что-то своё. Например, в задачах статики конструкций это свойство системы сохранять равновесное положение под действием тех или иных нагрузок. В проблемах динамики и колебаний твёрдых тел это неотклонение возмущённого движения от заданного не более чем на определённую величину. В гидродинамических же приложениях под устойчивостью чаще понимают свойство потока оставаться ламинарным, а под потерей устойчивости — его переход в турбулентный режим.

Однако во всех исследованиях важно знать и математически сформулировать следующее:

- а) какое состояние системы или какой процесс выбирается в качестве невозмущённого;
- б) какова природа, а следовательно, каков класс налагаемых на этот невозмущённый процесс возмущений (начальных и постоянно действующих);
- в) каков математический критерий устойчивости процесса, выбранного в п. а), относительно возмущений, выбранных в п. б).

Неустойчивый процесс, согласно Н. Г. Четаеву [28], в природе не встречается, т.е. ненаблюдаем¹⁾. Поэтому свойство устойчивости

¹⁾ По-видимому, это относится только к системам с конечным числом степеней свободы, ибо согласно данному принципу турбулентное движение потока жидкости следует признать устойчивым, поскольку каждый может его наблюдать, достаточно сильно открыв водопроводный кран.

наряду с существованием и единственностью является важным свойством решений краевых задач. Поскольку мы всегда изучаем не реальные объекты, а идеализированные модели (континуум, идеальная жидкость, упругое тело и др.), то принцип Н. Г. Четаева относится в какой-то мере и к математической модели.

Остановимся далее на различных подходах к понятию устойчивости в механике деформируемого твёрдого тела, и прежде всего на статическом подходе, основы которого были заложены Л. Эйлером. Рассматриваются только равновесные положения системы, причём признаком неустойчивости некоторой формы равновесия является наличие смежной формы, реализуемой при тех же внешних нагрузках. Если же «малых возмущений» недостаточно, чтобы перевести систему в соседнее равновесное состояние или же соседних состояний вообще нет, то исходная форма считается устойчивой.

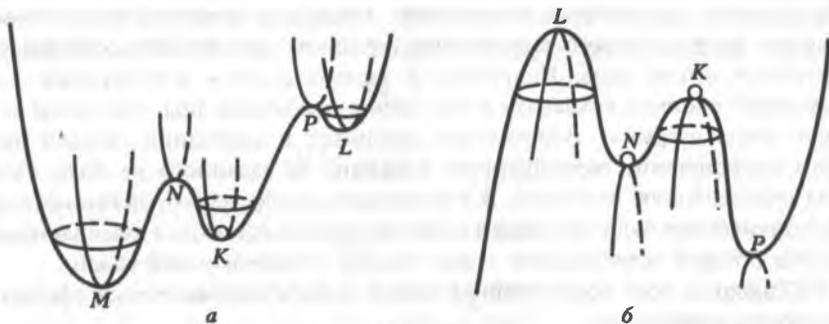


Рис. 39.

Так, равновесие шарика в локальном максимуме K (рис. 39а) устойчиво, так как малых отклонений в любом направлении недостаточно для перемещения шарика в другие равновесные состояния, т.е. в точки L , M , N , P . Равновесие шарика в локальном максимуме K (рис. 39б) неустойчиво, так как сколь угодно малое отклонение в любом направлении приводит к тому, что шарик будет удаляться от точки K . В седловой точке N на рис. 39б шарик устойчив относительно одного класса возмущений (например, в плоскости листа) и неустойчив относительно другого класса (например, в вертикальной плоскости). С устойчивыми положениями равновесия шарика в точках K , L , M на рис. 39а связаны понятия локальной и глобальной устойчивости системы, на которых мы сейчас останавливаться не будем.

Для иллюстрации преимуществ и недостатков статического подхода обратимся к классической задаче о продольном изгибе упругой балки, изученной в лекции 12.

Пусть балка шарнирно оперта на обоих концах $z = 0$ и $z = l$ (рис. 40 а), и на конце $z = l$ действует сжимающая сила P . Уравнение изогнутой оси $w(z)$ балки, записанное в предположении гипотезы плоских сечений, имеет вид

$$EIw^{IV} + Pw'' = 0, \quad (19.1)$$

где EI — постоянная по длине изгибная жёсткость.

Граничные условия

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w''(0) = w''(l) = 0. \quad (19.2)$$

означают, что согласно (12.36) моменты в торцевых сечениях балки отсутствуют, а торцы смещаются лишь вдоль оси приложения силы.

Нетрудно найти общее решение уравнения (19.1):

$$w = A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} z \right) + A_2 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} z \right) + A_3 z + A_4. \quad (19.3)$$

При $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ мы получим прямолинейное состояние равновесия $w \equiv 0$, удовлетворяющее граничным условиям (19.2). Существуют ли другие нетривиальные решения, соответствующие искривлённым равновесным формам балки?

Подставляя (19.3) в (19.2) и приравнявая определитель системы относительно A_1, A_2, A_3, A_4 нулю, получим в итоге простое характеристическое уравнение

$$\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l \right) = 0. \quad (19.4)$$

Если $P = \pi^2 n^2 EI / l^2 \equiv n^2 P_* \equiv P_n$, то существует нетривиальный набор констант: $A_1 = A_3 = A_4 = 0, A_2 = A \in \mathbb{R}$ с собственными функциями

$$w_n = A \sin \frac{\pi n z}{l}. \quad (19.5)$$

Значение $P_* = \pi^2 EI / l^2$ носит название эйлеровой критической силы. При $0 < P < P_*$ прямолинейное равновесие балки устойчиво относительно всякого рода возмущений. Если же сила P принимает дискретный набор значений $P_n, n = 1, 2, \dots$, которые называются первой, второй и т.д. критическими силами, то существуют синусоидальные формы равновесия с одной, двумя и т.д. полуволнами (19.5) и с произвольными

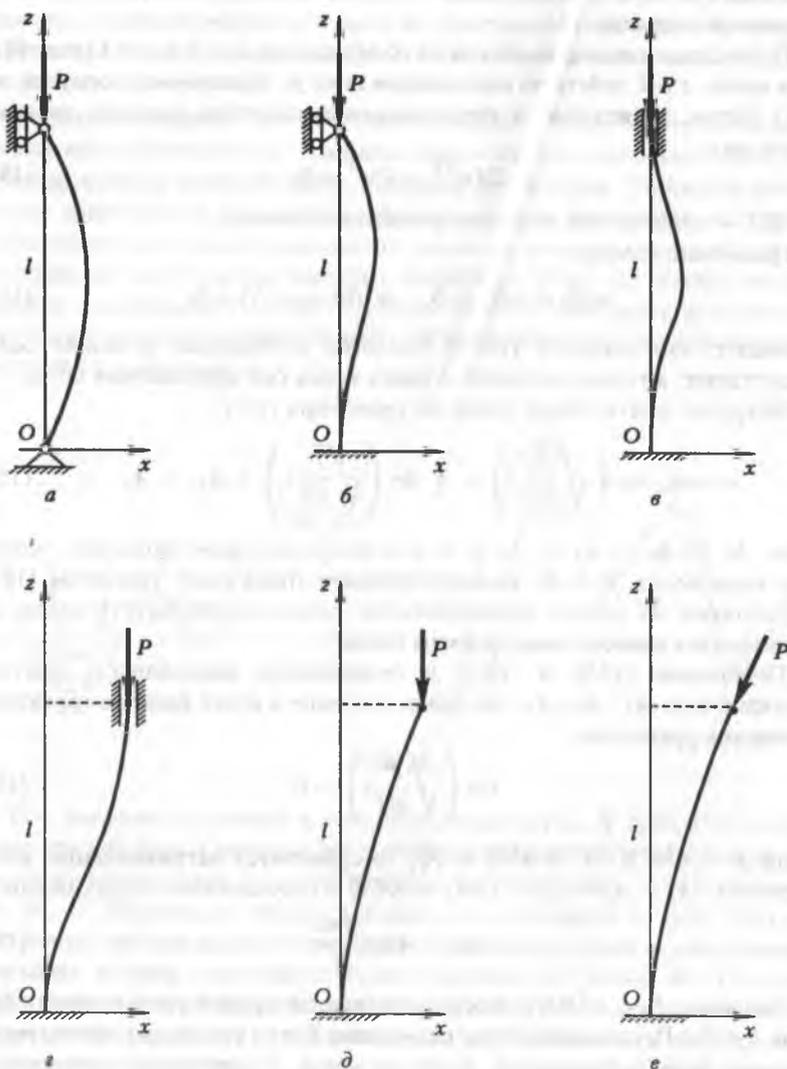


Рис. 40.

амплитудами прогиба A . При этих значениях силы P прямолинейное положение балки будет, очевидно, неустойчивым.

Заметим, что структура выражений для P_n сохраняется и при других способах опирания:

$$P_n = B_n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (19.6)$$

В изученном выше примере $B_n = n$. Если нижний конец балки зашпелен, а верхний шарнирно опёрт (рис. 40 б), то $B_n = \kappa_n/\pi$, где κ_n — корни уравнения $\operatorname{tg} \kappa = \kappa$, ($B_1 \approx 1,430$); если оба конца балки зашпелены (рис. 40 в), то $B_n = 2n$ либо $B_n = 2\kappa_n/\pi$; если нижний конец зашпелен, а верхний не может поворачиваться, но может смещаться вдоль оси (Ox) (рис. 40 з), то $B_n = n$; если нижний конец зашпелен, а верхний свободный (рис. 40 д), то $B_n = n/2$. Формулы (19.6) являются классическими в теории устойчивости стержневых конструкций [1] и играют большую роль при проектировании несущих колонн, опор и т. д.

Вместо прямого анализа устойчивости, основанного на уравнении равновесия (19.1), можно воспользоваться вариационным или энергетическим методом. В лекции 12 мы уже выписывали лагранжиан для балки переменной жёсткости, подверженной действию распределённой нагрузки $q(z)$ (см. (12.46)). Аналогично этому запишем лагранжиан \mathcal{L} для краевой задачи (19.1), (19.2):

$$\mathcal{L} = \frac{EI}{2} \int_0^l w'^2 dz - \frac{P}{2} \int_0^l w^2 dz. \quad (19.7)$$

Разложим функцию $w(z)$ в ряд Фурье с учётом граничных условий (19.2):

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n z}{l}, \quad (19.8)$$

и подставим (19.8) в (19.7). Используя ортогональность систем функций $\{\sin(\pi n z/l)\}$ и $\{\cos(\pi n z/l)\}$ на интервале $0 < z < l$ при $n \geq 1$, получим

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{4l} \left(\frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2} - P \right) A_n^2. \quad (19.9)$$

Вариационный принцип Лагранжа записывается следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (P_n - P) A_n \delta A_n = 0. \quad (19.10)$$

В силу произвольности вариаций δA_n необходимо потребовать, чтобы $(P_n - P)A_n = 0$ при любом $n \geq 1$. Следовательно, в точках $P = P_n$ соответствующая амплитуда A_n может быть любой, остальные же гармоники при этом отсутствуют. Это совпадает с полученными ранее результатами.

Однако в интервалах $P_n < P < P_{n+1}$ согласно статическому подходу исходное положение балки следует считать устойчивым. Это противоречит интуиции и практике. Действительно, при $P > P_*$ изогнутая ось в устойчивом равновесии всегда будет иметь вид (19.5) с одной полуволной. Данный факт говорит об ограниченности подхода, основанного на анализе лишь форм равновесия.

Можно привести примеры, когда происходит потеря устойчивости без перехода к новой форме равновесия. Одним из таких примеров служит балка, нагруженная следящей силой (рис. 40 е), т. е. силой, всегда направленной по касательной к оси в точке приложения²⁾. Уравнение нейтральной оси, по-прежнему, имеет вид (19.1), а граничные условия следующие

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(l) = 0, \quad w'''(l) = 0. \quad (19.11)$$

Заметим, что уравнение (19.1) с учётом (19.11) может быть дважды проинтегрировано по z :

$$EIw'' + Pw = Pw(l) - Pw'(l)(l - z). \quad (19.12)$$

В правую часть (19.12) входят два неизвестных из граничных условий параметра $w(l)$ и $w'(l)$.

Анализируя характеристический определитель в краевых задачах (19.1), (19.11) или (19.12), (19.11), нетрудно показать, что при любом P существует только тривиальное положение равновесия $w \equiv 0$, которое следует признать устойчивым. Это также противоречит практическим наблюдениям и говорит о том, что необходимо использовать динамический подход, т. е. изучать процесс деформирования со временем.

Анализ динамической устойчивости в линейных краевых задачах с однородными граничными условиями сводится к анализу гармоник. Обратимся к предыдущей задаче (рис. 40 е), но вместо уравнения

²⁾ Следящие силы принадлежат к классу неконсервативных сил, т. е. меняющих направление со временем. Характерным примером таких нагрузок являются реактивные силы. Нагрузки же, приложенные к системе на рис. 40 а-д, сохраняют направление и принадлежат к классу консервативных или «мёртвых» сил.

равновесия (19.1) выпишем уравнение малых колебаний:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (19.13)$$

где ρ — постоянная линейная плотность, и учтём условия (19.11).

Решение (19.13) ищется в виде (см. также (11.17))

$$w(z, t) = W(z) e^{i\omega t}, \quad (19.14)$$

где $\omega \in \mathbb{C}$ — комплексная частота гармонических колебаний, а $W(z)$ — форма этих колебаний, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4 W}{d\zeta^4} + \pi^2 \frac{P}{P_*} \frac{d^2 W}{d\zeta^2} - a^4 W = 0. \quad (19.15)$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\zeta = \frac{z}{l}, \quad a^2 = \sqrt{\frac{\rho}{EI}} \omega l^2. \quad (19.16)$$

Фундаментальное решение уравнения (19.15)

$$W(\zeta) = A_1 \operatorname{ch} \lambda_1 \zeta + A_2 \operatorname{sh} \lambda_1 \zeta + A_3 \operatorname{ch} \lambda_2 \zeta + A_4 \operatorname{sh} \lambda_2 \zeta, \quad (19.17)$$

где

$$\mathbb{C} \ni \lambda_{1,2} = \sqrt{-\frac{\pi^2 P}{2P_*} \pm \sqrt{\frac{\pi^4 P^2}{4P_*^2} + a^4}}, \quad (19.18)$$

следует подставить в граничные условия

$$\zeta = 0, \quad W = \frac{dW}{d\zeta} = 0; \quad \zeta = 1, \quad \frac{d^2 W}{d\zeta^2} = \frac{d^3 W}{d\zeta^3} = 0, \quad (19.19)$$

и получить систему однородных уравнений относительно A_k . Приравняем определитель этой системы нулю и выпишем характеристическое уравнение относительно $a(P)$:

$$2a^4 \left(1 + \operatorname{ch} \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 \right) - \frac{\pi^2 P}{P_*} \left(\frac{\pi^2 P}{P_*} - a^2 \operatorname{sh} \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 \right) = 0. \quad (19.20)$$

Если $P = 0$, то балка совершает собственные колебания. В этом случае, как следует из (19.18), $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = ia$, и уравнение (19.20) упрощается:

$$\operatorname{ch} a \cos a = -1. \quad (19.21)$$

Первые два корня (19.21) приближённо равны $a_1 = \pm 1,875$ и $a_2 = \pm 4,695$ им согласно (19.16) соответствуют собственные частоты

$$\omega_1 \approx \frac{3,516}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad \omega_2 \approx \frac{22,04}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}. \quad (19.22)$$

Численный анализ поведения корней уравнения (19.20) на комплексной плоскости показывает, что по мере возрастания P значения ω_1 и ω_2 сближаются вдоль действительной оси, при $P \approx 2,03 P_*$ сливаются, а при $P > 2,03 P_*$ становятся комплексно-сопряжёнными. Это, согласно представлению (19.14), означает колебательную неустойчивость прямолинейного равновесия или неограниченный рост прогибов $w(z, t)$ со временем. Критическое значение следящей силы $P \approx 2,03 P_*$ было получено М. Беком в [29], т.е. почти два столетия после того, как стала известна величина P_* . Таким образом, динамический подход позволил определить значение критической силы в данной задаче, что свидетельствует о его большей общности по сравнению со статическим методом.

С именем выдающегося русского математика А. М. Ляпунова связаны первые строгие определения и признаки устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости движения.

Рассмотрим сначала некоторую систему с конечным числом m степеней свободы и в m -мерном фазовом пространстве (x_1, \dots, x_m) введём функцию $\rho(\bar{x}(t)) \geq 0$, которую будем называть расстоянием или мерой отклонения точки \bar{x} в момент времени t . Например, ρ может быть обычным расстоянием в \mathbb{R}^m :

$$\rho(\bar{x}(t)) = \sqrt{x_1^2(t) + \dots + x_m^2(t)}. \quad (19.23)$$

Движение $X_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, \dots, m$), являющееся решением некоторой системы дифференциальных уравнений, называется устойчивым по Ляпунову при $t > t_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(\bar{x}(t_0)) < \delta \implies \rho(\bar{x}(t)) < \varepsilon \quad (19.24)$$

для любого $t > t_0$. Здесь $\bar{x}(t)$ — другое возможное решение той же системы дифференциальных уравнений.

Данное определение имеет наглядный смысл: если задаться трубкой радиуса ε с образующей вдоль оси t (рис. 41), то в сечении $t = t_0$ этой трубки существует такая δ -окрестность, что все решения, выходящие из неё, не отклоняются при $t > t_0$ за пределы трубки.

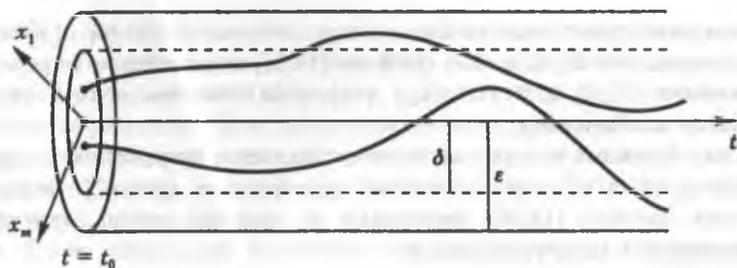


Рис. 41.

Движение $X_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, \dots, m$) называется асимптотически устойчивым по Ляпунову при $t > t_0$, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, для всех решений $\vec{x}(t)$, выходящих при $t = t_0$ из δ -окрестности, называемой областью притяжения, имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\vec{x}(t)) = 0. \quad (19.25)$$

Основная идея прямого или второго метода Ляпунова состоит в том, что вместо меры $\rho(\vec{x})$ в фазовом пространстве рассматривается функция $v(\vec{x})$, определённым образом связанная с $\rho(\vec{x})$ и монотонно меняющаяся вдоль каждого решения. По поведению со временем функции v , называемой функцией Ляпунова, можно судить об устойчивости либо неустойчивости выбранного решения.

Перед формулировками основных теорем прямого метода введём понятие производной по времени от v в силу системы уравнений. Пусть имеются непрерывные функции $F_i(x_1, \dots, x_m)$ такие, что $F_i(0, \dots, 0) = 0$, функция $v(\vec{x})$, непрерывная вместе со своими частными производными $v_{,i}$, и система уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_m), \quad t \geq t_0. \quad (19.26)$$

Тогда величину

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^m v_{,i} F_i(x_1, \dots, x_m) \quad (19.27)$$

назовём производной по времени от v в силу системы (19.26). Сформулируем далее две теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости решений системы (19.26).

Если существует положительно определённая функция $v(\vec{x})$ такая, что производная dv/dt в силу системы (19.26) неположительна, то решение $X_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, \dots, m$) этой системы устойчиво по Ляпунову.

Если существует положительно определённая функция $v(\bar{x})$ такая, что производная dv/dt в силу системы (19.26) отрицательно определена, то решение $X_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, \dots, m$) этой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Поиск функции v в данном случае сводится к построению семейства поверхностей $v = \text{const}$ в фазовом пространстве (рис. 42) таких, что решения системы (19.26) пересекают их снаружи внутрь, тем самым приближаясь к началу координат.

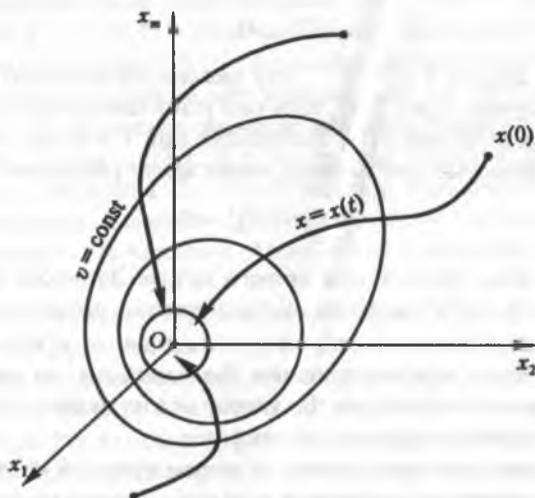


Рис. 42.

В качестве примера рассмотрим набор линейных функций F_i , т. е. систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^m f_{ij} x_j, \quad f_{ij} = \text{const}, \quad t \geq t_0, \quad (19.28)$$

и выберем

$$v(\bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m x_i^2(t). \quad (19.29)$$

Тогда производная от функции Ляпунова (19.29) в силу системы (19.28) имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{ij} x_j x_i. \quad (19.30)$$

Функция v (19.29), очевидно, положительно определена, и для асимптотической устойчивости решения $X_i(t) \equiv 0$ надо потребовать, чтобы матрица f_{ij} квадратичной формы в правой части (19.30) была отрицательно определена. Для этого можно воспользоваться известными алгебраическими критериями. Если же эта квадратичная форма неположительна, например, $f_{\alpha\alpha} \leq 0$, $f_{\alpha\beta} = 0$, то решение $X_i(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Не будем здесь останавливаться на доказательстве обеих теорем, так же как и двух теорем о неустойчивости по Ляпунову, и отошлём читателя к монографии [28]. Введённые в данной лекции понятия будут использованы в следующей для обобщения прямого метода на системы с бесконечным числом степеней свободы и континуальные системы, в частности, упругие тела.

Лекция 20

Устойчивость процессов деформирования

Слово «процесс» уже встречалось в предыдущих лекциях, когда шла речь о нахождении параметров движения со временем. Будем теперь описывать поведение континуальной системы¹⁾ не набором фазовых координат $(x_1(t), \dots, x_m(t))$, где m конечно либо даже бесконечно, а системой функций

$$(\phi_1(\vec{x}, t), \dots, \phi_n(\vec{x}, t)) \equiv \phi(\vec{x}, t), \quad (20.1)$$

где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $t \geq t_0$.

Можно считать, что $\phi(\vec{x}, t)$ является решением некоторой системы дифференциальных уравнений с частными производными. При нулевых начальных условиях эта система имеет единственное решение $\phi(\vec{x}, t) \equiv 0$, которое будем называть невозмущённым процессом. Чаще всего такой процесс соответствует простому состоянию системы: равновесию, движению с постоянной скоростью, однородному деформированию и т. д. Все решения, $\phi = \phi(\vec{x}, t)$, отвечающие ненулевым начальным условиям, будем называть возмущёнными процессами или возмущениями. При этом начальными возмущениями, естественно, будут величины $\phi(\vec{x}, t_0)$. Основной вопрос сформулируем следующим образом: будет ли невозмущённый процесс устойчив по некоторой мере относительно малых, возможно, по другой мере начальных возмущений?

Для ответа на этот глобальный вопрос необходимо прежде всего ввести меру отклонения $\rho[\phi(\vec{x}, t), t]$ в том функциональном пространстве, элементом которого является процесс ϕ . В качестве такой меры выберем вещественный функционал $\rho[\phi, t]$, непрерывный по своему второму аргументу при $t \geq t_0$ и удовлетворяющий условиям $\rho[0, t] = 0$, $\rho[\phi, t] \geq 0$.

¹⁾ Такие системы в литературе также называются системами с бесконечным числом степеней свободы или системами с распределёнными параметрами.

Если вид функционала ρ явно не зависит от времени, то пишут кратко $\rho[\phi]$, и тогда $\rho[0] = 0$, $\rho[\phi] \geq 0$.

Будем ограничивать начальные возмущения мерой $\rho^\circ[\phi]$, а текущие возмущения $\phi(\bar{x}, t)$, $t > t_0$, — мерой $\rho[\phi, t]$. Мера $\rho[\phi, t]$ называется непрерывной при $t = t_0$ по мере $\rho^\circ[\phi]$ при $\rho^\circ = 0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого процесса $\bar{\phi}(\bar{x}, t)$

$$\rho^\circ[\bar{\phi}] < \delta \implies \rho[\bar{\phi}, t] < \varepsilon. \quad (20.2)$$

Данное определение означает, что мера ρ° является «более сильной», чем ρ , т.е., если процесс мал по ρ° , то он заведомо будет малым и по ρ ; в дальнейшем пары мер $\{\rho, \rho^\circ\}$ выбираются согласованными или удовлетворяющими определению непрерывности.

Теперь можно дать определение трубки невозмущённых процессов. Трубкой $\{\rho_0, \rho_0^\circ\}$ невозмущённых процессов, где $\rho_0(t)$ — заданная положительная функция, а ρ_0° — заданное положительное число, называется множество всех процессов, удовлетворяющих неравенствам $\rho[\phi, t] \leq \rho_0(t)$, $t \in [t_0, T)$, и $\rho^\circ[\phi] \leq \rho_0^\circ$. Если они справедливы для любого сколь угодно большого T , то трубка неограничена по времени.

Назовём далее невозмущённый процесс $\phi \equiv 0$ устойчивым по паре мер $\{\rho, \rho^\circ\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого начального момента $t_0 \in [0, T]$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что

$$\rho^\circ[\bar{\phi}] < \delta(\varepsilon, t_0) \implies \rho[\bar{\phi}, t] < \varepsilon \quad (20.3)$$

для любого возмущённого процесса $\bar{\phi}$.

Невозмущённый процесс $\phi \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым по паре мер $\{\rho, \rho^\circ\}$, если он устойчив по этой паре и существует $\delta_0(t_0) > 0$ такое, что

$$\rho^\circ[\bar{\phi}] < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \rho[\bar{\phi}, t] < \varepsilon \quad (20.4)$$

для любого возмущённого процесса $\bar{\phi}$.

Понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по паре мер²⁾ играют важную роль в исследовании процессов деформирования тел, поскольку позволяют подбирать такие начальные возмущения (из таких классов гладкости), что текущие возмущения будут малы в смысле меры ρ , обусловленной теми или иными физическими соображениями. Две различные пары мер носят название эквивалентные,

²⁾ В литературе также определяются устойчивость по паре мер равномерно относительно начальных моментов времени и экспоненциальная устойчивость по паре мер.

если из устойчивости невозмущённого процесса по одной паре следует его же устойчивость по другой паре и наоборот.

Приведём пример, иллюстрирующий необходимость подхода к устойчивости по двум мерам в континуальных системах. Для этого рассмотрим колебания однородной струны, натянутой между точками $x = 0$ и $x = l$. Уравнение колебаний имеет вид

$$T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (20.5)$$

при граничных условиях закрепления

$$\phi(0, t) = \phi(l, t) = 0. \quad (20.6)$$

Здесь T — натяжение струны, а ρ — её линейная плотность.

Нулевым начальным данным отвечает равновесие $\phi \equiv 0$, а ненулевым — движение

$$\phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad (20.7)$$

где $a = \sqrt{T/\rho}$, с известными постоянными A_k, B_k .

Введём меру отклонения $\rho_1[\phi]$:

$$\rho_1^2[\phi] = \frac{1}{l} \int_0^l \phi^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l} \right)^2, \quad (20.8)$$

ограничивающую в интегральном смысле (в среднем) прогибы струны. Тогда

$$\rho_1^2[\phi] \equiv \rho_1^2[\phi(x, 0)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2. \quad (20.9)$$

Будет ли равновесие $\phi \equiv 0$ устойчиво по паре мер $\{\rho_1, \rho_1^0\}$ или, как говорят в таких случаях, по одной мере ρ_1 ? Очевидно, нет, поскольку ρ_1 в (20.9) не ограничивает постоянные B_k или начальное распределение скоростей струны. Следовательно, можно подобрать такие B_k , что даже при равных нулю A_k ($k = 1, 2, \dots$) функция $\rho_1[\phi]$, определяемая (20.8), будет больше некоторого ϵ на сколь угодно малом интервале $t > 0$.

Введём ещё одну меру отклонения $\rho_2[\phi]$:

$$\rho_2^2[\phi] = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\phi^2 + \frac{l^2}{\pi^2 a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] (x, t) dx =$$

$$= \rho_1^2[\phi] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(-A_k \sin \frac{\pi kat}{l} + B_k \cos \frac{\pi kat}{l} \right)^2, \quad (20.10)$$

ограничивающую в среднем прогибы и скорости струны. Тогда

$$\rho_2^{\circ 2}[\phi] \equiv \rho_2^2[\phi(x, 0)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + k^2 B_k^2). \quad (20.11)$$

Из (20.8) следует, что

$$\rho_1^2[\phi] \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + k^2 B_k^2) = \rho_2^{\circ 2}[\phi]. \quad (20.12)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Тогда при $t > 0$ для любого возмущённого процесса $\bar{\phi}$ справедливо следствие

$$\rho_2^{\circ}[\bar{\phi}] < \delta \implies \rho_1[\bar{\phi}, t] < \varepsilon, \quad (20.13)$$

что означает устойчивость равновесия струны по паре мер $\{\rho_1, \rho_2^{\circ}\}$.

Заметим, что равновесие $\phi \equiv 0$ не является устойчивым по одной мере ρ_2 . Действительно, из ограниченности ρ_2° в (20.11) не следует ограниченность ρ_2 в (20.10). Однако, если начальные возмущения стеснить более сильной, чем ρ_3° , мерой ρ_3° :

$$\rho_3^{\circ 2}[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + k^2)(A_k^2 + B_k^2), \quad (20.14)$$

то в силу неравенства

$$\rho_2^2[\phi] \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k^2 + B_k^2) = \rho_3^{\circ 2}[\phi], \quad (20.15)$$

решение $\phi \equiv 0$ устойчиво по паре мер $\{\rho_2, \rho_3^{\circ}\}$.

Введём в рассмотрение ещё несколько интегральных мер отклонения:

$$\begin{aligned} \rho_4^2[\phi] &= \frac{1}{l} \int_0^l \left[\frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{l^2}{\pi^2 a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] (x, t) dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left[\left(A_k \cos \frac{\pi kat}{l} + B_k \sin \frac{\pi kat}{l} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-A_k \sin \frac{\pi kat}{l} + B_k \cos \frac{\pi kat}{l} \right)^2 \right] \quad (20.16) \end{aligned}$$

$$\rho_3^2[\phi] = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\phi^2 + \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{l^2}{\pi^2 a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] (x, t) dx, \quad (20.17)$$

$$\rho_6^2[\phi] = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\phi^2 + \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{l^4}{\pi^4 a^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right)^2 \right] (x, t) dx, \quad (20.18)$$

и соответствующих им начальных мер

$$\rho_4^{\circ 2}[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k^2 + B_k^2), \quad (20.19)$$

$$\rho_5^{\circ 2}[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+k^2) A_k^2 + k^2 B_k^2 \right], \quad (20.20)$$

$$\rho_6^{\circ 2}[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+k^2) A_k^2 + k^4 B_k^2 \right]. \quad (20.21)$$

Из (20.16) следует, что

$$\rho_4^2[\phi] \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k^2 + B_k^2) = 2\rho_4^{\circ 2}[\phi], \quad (20.22)$$

т. е. равновесие устойчиво по мере ρ_4 , причём в определении устойчивости можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{2}$.

Из (20.17) следует, что

$$\begin{aligned} \rho_5^2[\phi] &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (1+2k^2) (A_k^2 + B_k^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+k^2) A_k^2 + k^2 B_k^2 + \frac{1}{2} B_k^2 \right] \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+k^2) A_k^2 + k^2 B_k^2 \right] = 3\rho_5^{\circ 2}[\phi], \end{aligned} \quad (20.23)$$

т. е. равновесие устойчиво по мере ρ_5 , при этом можно выбрать $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{3}$.

Заметим, что меры ρ_3° , ρ_4° , ρ_5° , определяемые (20.14), (20.19) и (20.20) соответственно, эквивалентны между собой в том смысле, что из устойчивости, например, по паре $\{\rho, \rho_3^{\circ}\}$, где ρ — некоторая мера, следует устойчивость по парам $\{\rho, \rho_4^{\circ}\}$, $\{\rho, \rho_5^{\circ}\}$ и наоборот.

Процесс $\phi \equiv 0$ неустойчив по одной мере ρ_6 , но устойчив по паре $\{\rho_6, \rho_7^0\}$, где ρ_7^0 — более сильная, чем ρ_6^0 , мера:

$$\rho_7^0[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + k^2 + k^4)(A_k^2 + B_k^2). \quad (20.24)$$

Мера ρ_7^0 является самой сильной из всех ранее введённых интегральных начальных мер ρ_α^0 , $\alpha = 1, \dots, 7$. Поэтому имеет место устойчивость по всем парам $\{\rho_\alpha, \rho_7^0\}$, $\alpha = 1, 2, 4, 5, 6$.

На примере этой же задачи изучим теперь особенности использования равномерных мер или мер в пространствах функций, непрерывных вместе с определённым числом своих производных. Рассмотрим функционалы

$$\begin{aligned} \rho_8[\phi] &= \sup_{0 < z < l} |\phi| + \frac{l}{\pi \alpha} \sup_{0 < z < l} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l} \right) \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} k \left(-A_k \sin \frac{\pi k a t}{l} + B_k \cos \frac{\pi k a t}{l} \right) \right|, \quad (20.25) \end{aligned}$$

$$\rho_9[\phi] = \sup_{0 < z < l} |\phi| + \frac{l}{\pi \alpha} \sup_{0 < z < l} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| + \frac{l}{\pi} \sup_{0 < z < l} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \quad (20.26)$$

с их начальными значениями

$$\rho_8^0[\phi] = \left| \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \right|, \quad (20.27)$$

$$\rho_9^0[\phi] = \left| \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \right|. \quad (20.28)$$

Выберем возмущённый процесс ϕ такой, что $A_k = k B_k = \varepsilon/k^2$ и, следовательно³⁾, $\rho_8^0 = \pi^2|\varepsilon|/3$. Начальную меру ρ_8^0 можно сделать сколь угодно малой при надлежащем выборе ε . Тем не менее в моменты времени, когда $\sin(\pi k a t_0/l) = 1$,

$$\rho_8[\phi(\bar{x}, t_0)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\varepsilon|}{k} + \frac{|\varepsilon|}{k^3} \right) = \infty, \quad (20.29)$$

³⁾ Здесь мы использовали то, что $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$.

что означает неустойчивость положения равновесия струны по естественной, на первый взгляд, мере ρ_8 , часто используемой в задачах устойчивости систем с конечным числом степеней свободы.

Данный факт наглядно иллюстрирует особенности понятия устойчивости деформируемых тел. Малость ρ_8^0 говорит о малости начальных прогибов и скоростей, но ничего не говорит о малости деформаций — величин, тождественно равных нулю для абсолютно твёрдых тел и систем с конечным числом степеней свободы. Приведённый контрпример это подтверждает. Для того, чтобы ограничить начальные деформации, потребуем малости начальных возмущений по мере ρ_9^0 , определяемой (20.28). Тогда нетрудно доказать устойчивость прямолинейного равновесия по двум мерам $\{\rho_8, \rho_9^0\}$, а также по одной мере ρ_9 .

Итак, на примере простейшей краевой задачи математической физики мы убедились, что понятие устойчивости процесса деформирования (в данном случае равновесия) достаточно относительно и становится бессмысленным, если не оговаривать, в каких функциональных пространствах оцениваются как текущие, так и начальные возмущения.

Обобщение прямого метода Ляпунова на континуальные системы было осуществлено А. А. Мовчаном, а впоследствии А. М. Слободкиным. Соответствующие признаки устойчивости носят название теорем Ляпунова—Мовчана. Основная идея метода, как и ранее, заключается в том, что наряду с мерами $\rho[\phi, t]$, $\rho^0[\phi]$ вводится функционал $v[\phi, t]$ такой, что $v[0, t] = 0$. По поведению этого функционала можно судить об устойчивости либо неустойчивости невозмущённого процесса.

Перед тем, как сформулировать теоремы Ляпунова—Мовчана, приведём несколько необходимых определений.

Функционал $v = v[\phi, t]$ называется положительно определённым по мере ρ , если $v \geq 0$ при $t \geq t_0$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho[\phi, t] \geq \varepsilon \implies v[\phi, t] \geq \delta \quad (20.30)$$

при $t \geq t_0$.

Функционал $v = v[\phi, t]$ называется непрерывным по мере ρ^0 при $t = t_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho^0[\phi] \leq \delta \implies v[\phi] \leq \varepsilon \quad (20.31)$$

в момент времени t_0 .

Полная производная по времени от функционала v

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v[\phi + \Delta\phi, t + \Delta t] - v[\phi, t]}{\Delta t} \quad (20.32)$$

называется положительно определённой, если предел в правой части (20.32) существует для всех $\phi(\bar{x}, t)$, для которых $v[\phi, t] > 0$, и кроме того, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$v[\phi, t] > \varepsilon \implies \frac{dv}{dt}[\phi, t] > \delta. \quad (20.33)$$

Функционал $v[\phi, t]$ называется невозрастающим в силу возмущённых процессов, если его полная производная по времени, определяемая равенством (20.32), меньше либо равна нулю для любого возмущения $\phi(\bar{x}, t)$. В качестве v часто удобно выбирать полную энергию механической системы, которая в силу закона сохранения энергии постоянна и, следовательно, не возрастает в силу возмущённых процессов (т. е. вдоль движения).

Сформулируем ниже основные теоремы прямого метода Ляпунова—Мовчана об устойчивости и об асимптотической устойчивости по двум мерам [14].

Невозмущённый процесс $\phi \equiv 0$ устойчив по паре мер $\{\rho, \rho^\circ\}$ тогда и только тогда, когда существует функционал $v[\phi, t]$, положительно определённый по мере ρ , непрерывный по мере ρ° при $t = t_0$ и невозрастающий в силу возмущённых процессов.

Невозмущённый процесс $\phi \equiv 0$ асимптотически устойчив по паре мер $\{\rho, \rho^\circ\}$ тогда и только тогда, когда существует функционал $v[\phi, t]$, положительно определённый по мере ρ , непрерывный по мере ρ° при $t = t_0$, невозрастающий в силу возмущённых процессов и удовлетворяющий условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v[\phi, t] = 0. \quad (20.34)$$

Доказательства этих двух утверждений, так же как и теоремы о неустойчивости по двум мерам, можно найти в [15, 23], и мы на них останавливаться не будем.

Обратимся снова к краевой задаче (20.5), (20.6) о колебаниях однородной струны. Кинетическая энергия K и потенциальная энергия деформирования U струны имеют вид

$$K = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx, \quad U = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (20.35)$$

Покажем, что в качестве функции $v[\phi, t]$ можно взять полную механическую энергию системы: $v = K + U$. Убедимся сначала, что полная производная по времени от v в силу краевой задачи (20.5), (20.6) равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \int_0^l \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + T \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) dx = \\ &= T \int_0^l \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) dx = \\ &= T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx = T \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{x=0}^{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что $(\partial \phi / \partial t)(0, t) = (\partial \phi / \partial t)(l, t) = 0$ в силу граничных условий (20.6).

Функционал v непрерывен по мере ρ_9^0 , задаваемой (20.28), и положительно определён по мерам ρ_5 , задаваемой (20.17), и

$$\rho_{10}[\phi] = \sup_{0 < x < l} |\phi|. \quad (20.36)$$

Эта положительная определённость является следствием неравенств Фридрикса

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \geq \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \phi^2 dx, \quad l \int_0^l \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \geq \left[\sup_{0 < x < l} |\phi| \right]^2. \quad (20.37)$$

По теореме Ляпунова—Мовчана об устойчивости по двум мерам прямолинейное равновесие струны устойчиво по парам мер $\{\rho_5, \rho_9^0\}$ и $\{\rho_{10}, \rho_9^0\}$.

Заметим, что v не является положительно определённым функционалом по мере ρ_9 . Тем не менее, как отмечалось ранее, равновесие $\phi \equiv 0$ устойчиво по одной мере ρ_9 . Кажущееся противоречие объясняется неудачным выбором в этом случае функционала $v = K + U$ в качестве функции Ляпунова—Мовчана. Таким образом, полная энергия не всегда даёт полное представление об устойчивости процесса деформирования.

Современный обзор работ, посвящённых устойчивости процессов деформирования по двум метрикам, дан в монографии [5]. Мы же, в заключение, исследуем характер устойчивости равновесия однородного

упругого шара $\{V_R : r < R\}$, закрепленного по всей своей поверхности $\{\Sigma_R : r = R\}$ и свободного от действия массовых сил [24]. Уравнения движения и граничные условия имеют вид (11.22)

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \bar{u} + c_2^2 \Delta \bar{u}, \quad (20.38)$$

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = 0, \quad \bar{x} \in \Sigma_R, \quad (20.39)$$

где выражения скоростей c_1, c_2 следуют из (11.8), (11.9). Невозмущённому состоянию равновесия отвечает тривиальное решение

$$\bar{u}(\bar{x}, t) \equiv 0, \quad \bar{x} \in V_R. \quad (20.40)$$

Примем начальные условия

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{U}(\bar{x}), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\bar{x}, 0) = \bar{V}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in V_R, \quad (20.41)$$

согласованные с граничными условиями (20.39):

$$\bar{U}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{V}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Sigma_R, \quad (20.42)$$

причём $\bar{U}(\bar{x}) \in C^{(3)}(V_R)$, $\bar{V}(\bar{x}) \in C^{(2)}(V_R)$.

Решение начально-краевой задачи (20.38), (20.39), (20.41), (20.42) можно построить с помощью формулы Остроградского для неограниченного упругого пространства, а затем ограничить изменение \bar{x} областью V_R . Эта методика подробно изложена в лекции 11.

Здесь же ограничимся случаем сферической симметрии начальных данных

$$\bar{U}(\bar{x}) = U(r) \bar{e}_r, \quad \bar{V}(\bar{x}) = V(r) \bar{e}_r, \quad (20.43)$$

где \bar{e}_r — единичный орт радиуса-вектора \bar{x} . Решение

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = u(r, t) \bar{e}_r \quad (20.44)$$

такой задачи при небольших $t > 0$ выражается формулой

$$u(r, t) = \frac{1}{2r} [(r+c_1t)U(r+c_1t) + (r-c_1t)U(r-c_1t)] + \frac{1}{2c_1r} \int_{r-c_1t}^{r+c_1t} \xi V(\xi) d\xi. \quad (20.45)$$

В (20.45) функции U и V нечётным образом продолжены на отрицательные значения своих аргументов. Непосредственной подстановкой (20.45)

в единственное уравнение Ламе, спроектированное на радиус (см. волновое уравнение (11.14))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c_1^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (20.46)$$

и начальные условия (20.41), (20.43), можно убедиться, что (20.45), действительно, является решением начально-краевой задачи вплоть до момента времени $t_e = (R - r)/c_1$. Для каждой точки шара момент t_e , как видно, свой.

Выберем теперь начальные функции U и V в следующем виде

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \leq r_1, \quad r_1 + r_2 \leq r \leq R; \\ b \sin^4 \frac{\pi(r - r_1)}{r_2}, & r_1 < r < r_1 + r_2, \end{cases} \quad (20.47)$$

а $V(r) \equiv 0$. Заметим, что $U(r) \in C^{(3)}(V_R)$. Согласно (20.45), (20.47)

$$u \left(r_2, \frac{r_1}{c_1} \right) = \frac{r_2 - r_1}{2r_2} b \sin^4 \frac{2\pi r_1}{r_2}, \quad (20.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \left(r_2, \frac{r_1}{c_1} \right) = -\frac{bc_1}{2r_2} \sin^3 \frac{2\pi r_1}{r_2} \left[\frac{4\pi(r_2 - r_1)}{r_2} \cos \frac{2\pi r_1}{r_2} + \sin \frac{2\pi r_1}{r_2} \right]. \quad (20.49)$$

Если положить

$$b_n = \frac{d}{\sqrt{n}}, \quad r_{1n} = \frac{d}{2n + 1}, \quad r_{2n} = \frac{4d}{(2n + 1)^2}, \quad (20.50)$$

где d — положительная постоянная, то при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{r < R} |U_n| \rightarrow 0, \quad \text{но} \quad u_n \left(r_{2n}, \frac{r_{1n}}{c_1} \right) = -\frac{(2n - 3)d}{8\sqrt{n}} \rightarrow \infty.$$

Следовательно, малость начальных перемещений даже при отсутствии начальных скоростей не обеспечивает малости последующих перемещений даже на малом интервале времени, если начальные деформации не малы.

Если положить

$$b_n = \frac{d}{n^2 \sqrt{n}}, \quad r_{1n} = \frac{d}{4n + 1}, \quad r_{2n} = \frac{8d}{(4n + 1)^2}, \quad (20.51)$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{r < R} |U'_n| \rightarrow 0, \quad \text{но} \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} \left(r_{2n}, \frac{r_{1n}}{c_1} \right) = \frac{(4n + 1)^2 (4n - 9)}{128n^2 \sqrt{n}} c_1 \rightarrow \infty.$$

Следовательно, малость начальных деформаций, влекущая малость начальных перемещений, даже при отсутствии начальных скоростей не обеспечивает малости скоростей даже на малом интервале времени.

Наконец, если вместо начальных функций (20.47) выбрать U и V в виде

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r \leq r_1, \quad r_1 + r_2 \leq r \leq R; \\ b \sin^4 \frac{\pi(r - r_1)}{r_2}, & r_1 < r < r_1 + r_2, \end{cases} \quad (20.52)$$

а $U(r) \equiv 0$, и положить b_n , r_{1n} , r_{2n} как и в (20.50), то можно убедиться в справедливости следующего утверждения: малость начальных скоростей даже при отсутствии начальных перемещений не гарантирует малости скоростей в последующем движении.

Более доскональный анализ решения (20.45), основанный на применении теорем Ляпунова—Мовчана, показывает, что характер устойчивости положения равновесия (20.40) следующий [24]:

- малость начальных деформаций и начальных скоростей гарантирует малость перемещений при $0 < t < t_c$;
- малость вторых производных начальных перемещений и первых производных начальных скоростей по координатам гарантирует малость перемещений, деформаций (а, следовательно, напряжений) и скоростей при $0 < t < t_c$;
- малость третьих производных начальных перемещений и вторых производных начальных скоростей по координатам гарантирует малость перемещений, их производных по координатам первых двух порядков, скоростей и их производных по координатам первого порядка при $0 < t < t_c$.

Библиография

- [1] *Алфутов Н. А.* Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.
- [2] *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
- [3] *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994. 560 с.
- [4] *Галин Л. А.* Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953.
- [5] *Георгиевский Д. В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 176 с.
- [6] *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
- [7] *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 312 с.
- [8] *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов.
- [9] *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трёхмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1968. 628 с.
- [10] *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
- [11] *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [12] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
- [13] *Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В.* Интегральные уравнения в теории упругости. Петрозаводск: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 1994. 272 с.
- [14] *Мовчан А. А.* О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 483–493.
- [15] *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.

- [16] *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
- [17] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [18] *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
- [19] *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 264 с.
- [20] *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. 366 с.
- [21] *Победря Б. Е., Шешенин С. В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: ФАН, 1988. 200 с.
- [22] *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука. Т. 1. 1970. 492 с. Т. 2. 1970. 568 с.
- [23] *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределёнными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
- [24] *Слободкин А. М.* Об особенностях понятия устойчивости равновесия в смысле Ляпунова для систем с бесконечным числом степеней свободы // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 38–46.
- [25] *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. М.: ГИФМЛ, 1961. 220 с.
- [26] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
- [27] *Треффц Е.* Математическая теория упругости. Л.-М.: ГТТИ, 1934. 172 с.
- [28] *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
- [29] *Beck M.* Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes // ZAMP. 1952. V. 3. № 3. S. 225–228.
- [30] *Green A.E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. N.-Y.: Dover Publ. INC, 1968. 457 p.

Предметный указатель

Амплитуда волны 91

Аналогия мембранная 123, 124

Базис 7

— векторный 11, 12, 17, 142

— локальный ковариантный 137

— — контравариантный 137

— тензорный 13

Балка 100, 101, 103–105

Бельтрами уравнения 50, 102, 116

Бельтрами—Мичелла уравнения 50,
52, 55, 93

Бернулли гипотеза 106

Бетти формулы 58–60

Буссинеска задача 70, 72, 159

Буссинеска—Черрути задача 67, 72

Вектор 7

— Галёркина 61

— главный 100, 111, 112

— касательных напряжений 121,
124

— моментов 150

— напряжения 33, 37

— перемещения 26, 51, 74, 79, 96,
104–106, 131, 139

— поворота 31

— скорости 31, 38

— усилий 148, 149

— ускорения 31

Вектор-функция 11, 47, 77

— линейная 11

Возмущение 90, 169

— действующее (текущее), 169, 181

— начальное 169, 180, 181, 186

Волна вторичная (S -волна), 90

— первичная (P -волна), 90

— плоская монохроматическая 92

— поперечная 91, 99

— продольная 91, 99

— — гармоническая (синусоидаль-
ная), 91

— — плоская 91

Галёркина вектор 61

— оператор 61

— представление 61

Гамильтона—Кели формула 22

Гельмгольца теорема 89

Герца задача (контактная), 157, 161,
162, 167

Гипотеза кинематическая в теории
оболочек 143

— Кирхгофа—Лява 143, 148, 149,
154

— плоских сечений (гипотеза Бер-
нулли), 106, 171

— статическая в теории оболочек
148

- Тимошенко 143, 145, 153
- Гипотезы в контактной задаче Герца 158
- Градиент векторного поля (Grad), 15
- скалярного поля (grad), 15
- Гука закон для изотропного тела 40, 58, 85, 99, 117, 153
- — — — — обратный 40, 49, 52, 54, 74, 103, 112, 130
- Давление контактное** 160, 163, 167
- Даламбера сила 106
- Девиатор тензора 19, 22, 40
- — напряжений 37, 40
- Деформация 27
- конечная (большая), 27
- малая 27, 81, 140
- Диада 12
- Дивергенция векторного поля (div), 15
- тензорного поля (Div), 15
- Дирихле задача 77, 120
- Диск 86
- Длина волны 92
- Жесткость балки изгибная** 108, 171
- оболочки изгибная 153
- — цилиндрическая 153
- пластины 132
- при кручении 128
- Задача Буссинеска** 70
- Буссинеска—Черрути 72, 73
- в напряжениях 49, 50, 52–54, 66, 102
- — — классическая 52
- — — «новая» (постановка Победри), 54–56
- в перемещениях 43–46
- вторая 43–45, 59
- Герца (контактная), 157, 161, 162, 167
- Дирихле 77, 120
- Кельвина 60, 68
- Коши 93, 95
- красовая 43–46, 48, 50, 173, 174, 182
- Ламе 79, 82
- первая 43–45
- третья (смешанная), 43–45
- Черрути 71, 72
- Закон Гука для изотропного тела**, 40, 58, 85, 99, 117, 153
- — — — — обратный 40, 49, 52, 54, 74, 103, 112, 130
- об изменении количества движения (второй закон МСС), 33, 36, 147, 150, 167
- — — момента количества движения (третий закон МСС), 33, 36, 37, 147, 151
- сохранения массы (первый закон МСС), 32
- Зона красового эффекта** 111, 112
- Изгиб** 101
- Инвариант вектора** 16
- тензора 16, 18, 19, 37
- Интенсивность тензора** 19

— — напряжений 37, 40

Кастильяниан 50–53

Кастильяно вариационный принцип 50, 51

Квазистатика 36

Кельвина задача 60, 68

— вектор 60

— матрица 63

— тензор напряжений 61

— — перемещений 60, 68

Кирхгофа—Лява гипотеза 143, 148, 149, 154

— — кинематическая 143, 145

— теория 143, 145

Количество движения 33

Композит 96

Координаты вектора 9

— лагранжевы 26

— эйлеровы 26

Коссера спектр 48

Коши задача 93, 95

— поверхность 18, 19

— соотношения 27, 30, 81

— тензор напряжений 35

Коэффициент Пуассона 40, 41, 48, 112, 113

Крамера правило 21

— формула 23

Кристоффеля символ 138

Критерий устойчивости 169, 176

Кронекера символ 9

Крукта 117, 122

Кручение 101, 119, 123, 126

Лагранжа вариационный принцип, 46, 47, 106, 132–134, 173

Лагранжев способ описания движения 26

Лагранжевы координаты 26

Лагранжиан 45, 47, 107, 133, 173

Ламе задача 79, 82

— постоянные 40

— уравнения 42, 44, 48, 65, 67–69

Леви-Чивиты символ 13, 14, 20, 21

Линия упругая 104–106

— центров дилатации (расширения-сжатия), 64

Ляпунова прямой (второй) метод 177

— теорема об асимптотической устойчивости 178

— — — устойчивости 177

— функция 177, 178

Ляпунова—Мовчана прямой метод, 186, 187

Ляпунова—Мовчана теорема об асимптотической устойчивости (по паре мер), 187

— — — устойчивости (по паре мер), 187, 188

Максвелла теорема 60

Масса 32

Матрица, алгебраическое дополнение 14

— источников 63

—, определитель 14, 137

- ортогональная 17
- перехода 12, 17
- транспонированная 11
- фундаментальная 137, 139, 140, 142, 144
- фундаментальных решений 66, 67
- Мера отклонения (расстояние), 176, 180
 - — — в \mathbb{R}^m , 176, 177
 - — — в функциональном пространстве 180, 181
 - — — интегральная 182–184
 - — — равномерная 185
- Метод прямой (второй) Ляпунова, 177
 - — Ляпунова—Мовчана 186, 187
 - Ритца 47
 - Сен-Венана полуобратный 115
 - Филоненко-Бородича 52
- Мода бездисперсионная 92
 - дисперсная 92
- Модуль Юнга 40, 112, 113
- Момент второго порядка 101
 - главный 100, 111
 - инерции 101
 - количества движения 34
 - крутящий 118, 122, 126, 127
 - осевой 101
 - первого порядка (статический), 101
 - полярный 101, 102, 128
 - центробежный 101
- Мориса Леви теорема 88
- Напряжение касательное 37, 98, 123
 - нормальное 37, 98
- Неравенство Фридрихса 188
- «Обжатие» 145, 146
- Оболочка 137, 142–144, 147
- Оператор Галёркина 61
 - набла 15
- Остроградского—Гаусса теорема (формула) о дивергенции 16
- Перемещение 26, 27
- Петерсона—Кодацци формулы 141
- Пластина 86, 129, 130, 132
- Плоскость координатная 34
 - срединная 86, 131
- Плотность 32, 33, 67, 106, 160, 175, 182
- Победри постановка задачи («но-вая»), 54–56
- Поверхность боковая 103, 147
 - волновая 91, 92
 - Коши 18, 19
 - разрыва 96–99
 - — сильного 96, 99
 - — слабого 96, 99
 - срединная 131, 132, 147
- Подход к устойчивости динамический 176
 - — — статический (Эйлера), 170, 176
- Полиада 13
- Постоянные Ламе 40

- Потенциал векторный 89, 90
 — деформаций (упругий), 39, 40, 106, 133
 — запаздывающий 96
 — массовых сил 39
 — напряжений 50
 — объёмный 67
 — поверхностных сил 39
 — простого слоя 68
 — скалярный 89, 90
 Правило Крамера 21
 Прандтля формула 123, 124
 Представление Галёркина 61
 Принцип вариационный Кастилья-но 50, 51
 — — Лагранжа 46, 47, 106, 132–134, 173
 — линейной суперпозиции 112
 — новый вариационный 56
 — Сен-Венана 111
 — Четаева 169
 Прогиб балки 105, 108, 171
 — пластины 131, 132
 Произведение векторное 13–15, 17, 24, 31, 37
 — диадное (тензорное), 12–15
 — полное (двойное), 15
 — скалярное 13, 14
 — смешанное 13
 Производная по времени в силу процесса 187, 188
 — — — — — системы 177
 Процесс возмущённый 169, 180, 181
 — невозмущённый 169, 180, 181
 Пуассона коэффициент 40–41, 48, 112, 113
Работа внутренних сил 38, 155
 — массовых сил 38, 44
 — поверхностных сил 38, 44
 Растяжение 83, 112, 113
 Ритца метод 47
 Ротор векторного поля (rot), 15
 — тензорного поля (Rot), 15
Сближение 157, 165–168
 Сдвиг межслойный 145, 146
 Сен-Венана полуобратный метод 115
 — принцип 111
 Сечение равнопрочное 113
 Сжатие 112, 113, 161
 Сила Даламбера 106
 — двойная без момента 63, 68
 — — с моментом 63
 — массовая 33, 60, 62
 — объёмная 33, 85
 — перерезывающая 109, 110, 130, 135, 149
 — поверхностная 33, 34, 85
 — следящая 174, 176
 — сосредоточенная 59, 60, 62, 72, 73, 109, 159, 160
 — эйлера критическая 171
 Символ Кристоффеля 138
 — Кронекера 9

- Леви-Чивиты 13, 14, 20, 21
- Система действительная (истинная), 46, 50
 - кинематически допустимая 45, 46
 - статически допустимая 50
 - — эквивалентная 111
- Скорость 31, 38
 - групповая 92
 - распространения волны 91, 92, 99
- След тензора 19, 28
- Сомильяны формула 61
- Соотношения Коши 27, 30, 81
- Состояние обобщённое плоское напряжённое 85
 - плоское деформированное 74, 75, 78
 - — напряжённое 84, 85
- Соударение 167, 168
- Софи Жермен уравнение 136
- Спектр Коссера 48
- Способ описания движения лагранжев 26
 - — — эйлеров 26
- Статика 36, 147
- Стержень 101
- Стокса теорема (формула) о роторе 16
- Тензор 7**
 - антисимметричный 20, 30
 - вращения 27, 31
 - второго ранга 13, 14, 16, 18, 21
 - дисторсии 27
 - единичный 9, 19, 40
 - искривлений 141
 - кривизны 56, 138, 141, 157, 159
 - малых деформаций 27, 81
 - модулей упругости 39, 40
 - моментов 150
 - напряжений (Коши), 35
 - — Кельвина 61
 - несовместности деформаций 30, 49
 - нулевого ранга 13
 - первого ранга 13
 - перемещений Кельвина 60, 68
 - потоков 54
 - симметричный 16, 18, 20, 22, 23
 - упругих податливостей 39
 - усилий 130, 149
 - фундаментальных решений 66, 68
 - четвёртого ранга 39, 40
 - шаровой 19, 37
- Тензор-функция квазилинейная 23
- Теорема взаимности 59
 - Гельмгольца 89
 - единственности 44, 45
 - Кастильяно (вариационный принцип Кастильяно), 50, 51
 - Лагранжа (вариационный принцип Лагранжа), 46, 47, 106, 132–134, 173
 - Ляпунова 177, 178
 - Ляпунова—Мовчана 187, 188
 - Максвелла 60
 - Мориса Леви 88

- об асимптотической устойчивости 177, 187
- — изменении кинетической энергии (живых сил) (четвёртый закон МСС), 39
- — устойчивости 177, 187, 188
- Остроградского—Гаусса (о дивергенции) (формула Остроградского—Гаусса), 16
- Стокса (о роторе) (формула Стокса), 16
- Теория Кирхгофа—Лява 143, 145
- Тимошенко 143, 145
- Тимошенко гипотеза 145, 153
- теория 143, 145
- Триада 13
- Трибология 157
- Трубка невозмущённых процессов, 181

- Уравнение волновое** 90, 93
- колебаний балки 107, 175
- неразрывности 32
- равновесия балки 108, 171
- — пластины 134
- Софи Жермен 136
- Уравнения Бельтрами 50, 102, 116
- Бельтрами—Мичелла 50, 52, 55, 93
- Ламе 42, 44, 48, 65, 67–69, 189
- равновесия 36, 46, 48, 75, 76, 80, 81, 102, 115, 119
- совместности 49, 53, 54, 76, 78, 85, 87, 118–120
- — обобщённые 53, 54

- Ускорение 31
- Условие несжимаемости 48
- Условия на поверхности разрыва 97–99
- — — — динамические 98, 99
- — — — кинематические 97–99
- совместности деформаций 30, 49
- Устойчивость 169
- движения 169, 174, 176
- по Ляпунову 176, 179
- — — асимптотическая 177
- — паре мер 181, 188
- процесса деформирования 180, 181, 186, 188
- равновесия 169–171, 173, 174, 183, 184, 186, 191

- Фаза волны** 91
- — начальная 91
- Филоненко—Бородича метод 52
- Формула Гамильтона—Кели 22
- Крамера 23
- Прандтля 123, 124
- «БАЦ минус ЦАБ» 24
- Сомильяны 61
- Формулы Бетти 58–60
- деривационные 138, 139, 151
- Петерсона—Кодацци 141
- Чезаро 29, 31, 120, 131
- Фридрихса неравенство 188
- Фронт волны 91, 96
- — задний 91
- — передний 91, 96

- Функционал невозрастающий в силу процесса 187
- непрерывный по мере 186
 - положительно определённый по мере 186
- Функция Ляпунова 177, 178
- напряжений 76, 78, 87, 119, 123, 124
 - — при изгибе и кручении 119, 123, 124
 - — Эри 76, 78
- Центр дилатации (расширения-сжатия), 64
- изгиба 125
- Циркуляция касательных напряжений 121, 122
- Чезаро формулы 29, 31, 120, 131
- Черрути задача 71, 72
- Четаева принцип 169
- Число безразмерное (критерий), 161
- волновое 91
- Шаровая часть тензора 19, 37
- — — напряжений 37, 40
- Эйлеров способ описания движения 26
- Эйлера критическая сила 171
- Эйлера координаты 26
- Энергия кинетическая 38, 39, 45, 187
- полная механическая 188
 - потенциальная 39, 45, 50, 187
 - — деформаций 39, 45
 - — напряжений 50
- Эри функция напряжений 76, 78
- Юнга модуль 40, 112, 113

Именной указатель

Адкинс Джон Эдвард (Adkins J. E.)
27, 192

Алфутов Николай Анатольевич 173,
192

Амензаде Юсуф Аменович 57, 88,
192

Башелейшвили Михаил Онуфриевич
66, 192

Бек Макс фон (Beck Max von) 76,
193

Бельтрами Эудженио (Beltrami E.) 50, 52, 55, 93, 102,
116

Бернулли Якоб I (Bernoulli J. I) 106

Берри Д. С. (Berry D. S.) 27, 193

Бетти Энрико (Betti E.) 58–60

Божидарник Виктор Владимирович
57, 192

Бурчуладзе Тенгиз Владимирович
66, 192

Буссинек Жозеф Валентен (Boussinesq J. V.) 70, 72, 73, 159

Ворович Иосиф Израилевич 4

Галёркин Борис Григорьевич 61–63

Галин Лев Александрович 168, 192

Гамильтон Уильям Роуан
(Hamilton W. R.) 22

Гаусс Карл Фридрих (Gauss C. F.)
16, 36, 38, 51, 58

Гегелиа Тенгиз Георгиевич 66, 192

Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (Helmholtz H. L. F.) 89

Георгиевский Дмитрий Владимирович 188, 192

Герц Генрих Рудольф (Hertz H. R.)
158, 161–163, 166, 167

Грин Джордж (Green G.) 121, 134,
150, 151, 154, 155

Грин Альберт Эдвард (Green A. E.),
27, 192, 193

Гудьер Джеймс Норман
(Goodier J. N.) 26, 110, 193

Гук Роберт (Hooke R.) 40, 42, 49, 52,
54, 58, 74, 85, 99, 103, 112,
117, 130, 153

Даламбер Жан Лерон
(d'Alembert J. L. R.) 106

Дирихле Лежен Петер Густав
(Dirichlet Lejeune P. G.) 77,
120

Жермен Софи (Germain S.) 136

Зерна Вольфганг (Zerna W.) 27, 193

Ильюшин Алексей Антонович 32,
57, 106, 113, 161, 192

Кастильяно Карло Альберто
(Castigliano C. A.) 50, 51

- Кели Артур (Cauley A.) 22
- Кельвин (Томсон Уильям) лорд
(Kelvin lord) 60–63, 68
- Кирхгоф Густав Роберт
(Kirchhoff G. R.) 143–145, 148,
149, 154
- Кодацци Дельфино (Codazzi D.) 139,
141
- Коссера (братья) Эжен Морис Пьер
и Франсуа (Cossera E. M. P.,
Cossera F.) 48
- Коши Огюстен Луи (Cauchy A. L.)
18, 19, 27, 30, 35, 42, 47, 80,
81, 87, 93, 95, 104, 117, 131
- Крамер Габриель (Cramer G.) 21, 23
- Кристоффель Эльвин Бруно
(Christoffel E. B.) 138
- Кронекер Леопольд (Croncker L.)
9–11
- Купрадзе Виктор Дмитриевич 66,
192
- Лагранж Жозеф Луи (Lagrange J. L.)**
46, 47, 51, 106, 132–134, 173
- Ламе Габриель (Lam'e G.) 40, 42–44,
48, 60, 63, 65, 67–69, 79, 82,
190
- Лаплас Пьер Симон (Laplace P. S.)
90
- Леви Морис (Levy M.) 68, 88
- Леви-Чивита Туллио (Levi-Civita T.)
13, 14, 20, 76
- Ленский Виктор Степанович 106,
113, 192
- Лехницкий Сергей Георгиевич 40,
192
- Лурье Анатолий Исакович 27, 192
- Ляв Огастес Эдуард Хьют
(Love A. E. H.) 57, 99, 110,
143–145, 148, 149, 154, 192
- Ляпунов Александр Михайлович,
176–179, 186–188, 191
- Максвелл Джеймс Клерк**
(Maxwell J. C.) 60
- Михлин Соломон Григорьевич 66,
192
- Мичелл Джон Генри (Michell J. H.)
50, 52, 55, 93
- Мовчан Александр Андреевич 186–
188, 191, 192
- Морозов Никита Фёдорович 66, 192
- Мухелишвили Николай Иванович
66, 88, 193
- Новацкий Витольд (Nowacki W.)** 57,
99, 193
- Новожилов Валентин Валентино-
вич 27, 193
- Ньютон Исаак (Newton I.) 33
- Остроградский Михаил Василье-
вич** 16, 36, 38, 51, 58, 93,
96, 189
- Паукшто Михаил Витольдович** 66,
192
- Петерсон Карл Михайлович 141
- Петровский Иван Георгиевич 42
- Пифагор (Πυθαγόρας), 37
- Победря Борис Ефимович 13, 27,
32, 40, 56, 66, 99, 193
- Прандтль Людвиг (Prandtl L.) 123,
124

- Пуассон Симеон Дени
(Poisson S. D.) 40–43, 48, 53,
112, 120, 160
- Риман Георг Фридрих Бернхард
(Riemann G. F. B.) 56
- Ритц Вальтер (Ritz W.) 47
- Седов Леонид Иванович 27, 32, 57,
193
- Сен-Венан (Барре де Сен-Венан)
Адемар Жан Клод
(Saint-Venant A. J. C.) 111, 115
- Сиразетдинов Талгат Касимович,
187, 193
- Слободкин Александр Маркович,
186, 189, 191, 193
- Снеддон Иан Найсмит
(Sneddon I. N.) 27, 193
- Сомильяна Карло (Somigliana C.) 61
- Стокс Джордж Габриель
(Stokes G. G.) 16, 30, 121
- Сулим Георгий Теодорович 57, 192
- Тимошенко Степан Прокофьевич
26, 110, 143, 145, 146, 153,
193
- Треффи Эрих (Treffz E.) 57, 193
- Филоненко-Бородич Михаил Ми-
трофанович 52
- Фридрихс Курт Отто
(Friedrichs K. O.) 188
- Фурье Жан Батист Жозеф
(Fourier J. B. J.) 93, 94, 173
- Холматов Тургун 56, 66, 193
- Чайковский Пётр Ильич 7
- Чезаро Эрнесто (Cesaro E.) 29, 31,
104, 120, 131
- Черрути Витторио (Cerruti V.) 67,
71–73
- Четаев Николай Гурьевич 169, 170,
179, 193
- Шешенин Сергей Владимирович
56, 66, 193
- Эйлер Леонард (Euler L.) 81, 170
- Эри Джордж Бидделл (Airy G. B.)
76, 78
- Юнг Томас (Young T.) 40, 93, 103,
112, 160

Contents

Author Entrance	6
Lecture 1. Tensor Algebra	7
Lecture 2. Exercises on Tensor Analysis	17
Lecture 3. Kinematics of Deformable Media	25
Lecture 4. The Laws of Motion of Deformable Media	32
Lecture 5. The Problem in Terms of Displacements	42
Lecture 6. The Problem in Terms of Stresses	49
Lecture 7. General Theorems & Fundamental Solutions	58
Lecture 8. The Boussinesq—Cerruti' Problem	67
Lecture 9. The Plane Problem. I	74
Lecture 10. The Plane Problem. II	79
Lecture 11. Dynamical Problems	89
Lecture 12. Engineering Beams Theory	100
Lecture 13. Extension, Bend, and Torsion of Bars	111
Lecture 14. The Stress Function for Bend and Torsion	119
Lecture 15. Theory of Plates	129
Lecture 16. Kinematics of Thin Shells	137
Lecture 17. Statics of Shells	147
Lecture 18. The Hertz' Contact Problem	157
Lecture 19. Stability of Equilibrium and Motion	169
Lecture 20. Stability of Deformation Processes	180
References	192
Subject Index	194
Index of Names	202

Б. Е. Победря, Д. В. Георгиевский

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Группа подготовки издания:

Директор — Доминго Марин Рикой

Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Максеева

Компьютерный дизайн — Виктор Романов

Верстка — Наталия Бекетова

Редакционно-корректорские работы — Елена Кудряшова, Виталий Волков

Обработка графики — Елена Ефремова

Обработка текста — Анна Тюрина

Техническое обеспечение — Елена Логвинова, Марина Круцко,

Наталья Аринчева, Елена Лукьянова

Издательство «Эдиториал УРСС».

113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, ком. прав.

Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Подписано к печати 18.05.99 г.

Формат 60 × 88/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 13. Зак. № 589.

Отпечатано в АООТ «Политех-4». 129110, г. Москва, ул. Б. Переславская, 46.



Уважаемые авторы и издатели!

Межиздательский дистрибьюторский центр научной литературы, созданный при издательстве УРСС, приглашает авторов, издательства и другие организации к взаимовыгодному сотрудничеству по вопросам распространения печатной продукции.

Межиздательский дистрибьюторский центр научной литературы ведет работу по распространению книг ряда авторов и нескольких издательств, среди которых московские издательства УРСС, «МЦНМО» (Московский Центр непрерывного математического образования) «Янус», «Факториал», издательство Санкт-Петербургского университета и др.

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Издательство УРСС специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии Наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским гуманитарным научным фондом и Российским фондом фундаментальных исследований, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя весь спектр работ по полной подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Книги, распространяемые Межиздательским дистрибьюторским центром научной литературы, можно приобрести в магазинах:

- «Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. 928-87-44)
- «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40. Тел. 137-06-33)
- «Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8. Тел. 290-45-07)
- «Москва» (м. Охотный ряд, ул. Тверская, 8. Тел. 229-66-43)
- «Лит.-Худ. салон РГБИ» (ул. Кузнецкий мост, 1. Тел. 292-08-57)
- «Ad Marginem» (1-й Новокузнецкий пер., 5/7. Тел. 231-93-60)
- «Эйдос» (Чистый пер., 6. Тел. 201-26-08)
- «Русский путь» (ул. Нижняя Радищевская, 2. Тел. 915-10-47)
- «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

а также в книжных киосках МГУ (Воробьевы горы)

По всем интересующим Вас вопросам
Вы можете обратиться в издательство:
тел./факс 135-44-23, тел. 135-42-46
или электронной почтой urss@urss.isa.ac.ru
Полный каталог изданий представлен
в Internet: <http://urss.isa.ac.ru>

