

В. М. Меньщиков, В. М. Тешуков

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Содержание

1	Элементы термодинамики	4
1.1	Основные понятия и обозначения	4
1.2	Первый закон термодинамики	8
1.3	Второй закон термодинамики. Основные термодинамические функции и условия равновесия	15
1.4	Задачи	27
2	Законы сохранения и сильный разрыв	32
2.1	Интегральные законы сохранения	32
2.2	Условия на сильном разрыве	34
2.3	Дифференциальные уравнения	38
2.4	Задачи	44
3	Характеристики уравнений газовой динамики. Слабый разрыв	50
3.1	Основные определения	50
3.2	Слабый разрыв	52
3.3	Характеристики уравнений газовой динамики	54
3.4	Задачи	58
4	Одномерные движения газа	63
4.1	Инварианты Римана, простые волны	64
4.2	Плоскость инвариантов Римана. Градиентная катастрофа	72
4.3	(u, p) -диаграммы простых и ударных волн. Распад произвольного разрыва	77
4.4	Автомодельные течения газа. Законы затухания ударных волн	84
4.5	Задачи	89
5	Плоскопараллельные установившиеся движения	108
5.1	Интегралы уравнений движения, характеристики	108
5.2	Простые волны	110
5.3	Косые скачки уплотнения	113
5.4	Уравнения Чаплыгина. Дозвуковые и околосвуковые течения	119
5.5	Задачи	123

В учебном пособии по теоретической газовой динамике рассматриваются следующие вопросы: элементы термодинамики, законы сохранения и соотношения на сильных разрывах, характеристики уравнений газовой динамики, одномерные нестационарные течения газа, плоскопараллельные установившиеся течения. В каждом из разделов представлены серии задач и упражнения, а также необходимый теоретический материал. Разобраны примеры решения конкретных задач. Для более полного ознакомления с теорией рекомендуется учебник Л. В. Овсянникова “Лекции по основам газовой динамики”.

Пособие предназначено для студентов старших курсов механико-математических факультетов университетов, аспирантов и преподавателей в области механики сплошных сред.

1 Элементы термодинамики

1.1 Основные понятия и обозначения

Описание движения газа в рамках феноменологического подхода связано с представлениями о средних величинах, характеризующих его состояние. При выводе основных уравнений математической модели постулируется, что средние по объему плотность, скорость и другие величины стремятся к определенному пределу при стягивании объема к точке. Это предположение оправдывается тем, что размеры объемов, содержащих достаточно большое число молекул, можно выбрать малыми по сравнению с характерными масштабами изучаемых явлений. Но мелкомасштабное движение большого числа молекул внутри малого объема также должно учитываться при моделировании.

Поясним это следующим примером. Пусть газ в целом покоится в некотором фиксированном объеме и средняя скорость его равна нулю. При этом молекулы газа внутри объема движутся, взаимодействуя при столкновениях. После многих столкновений в объеме устанавливается хаотическое движение, в котором все направления движения молекул равновероятны. Такое движение называется тепловым, оно характеризуется вполне определенными параметрами, такими, например, как средняя кинетическая энергия движущихся молекул. Если объем газа в результате некоторого воздействия пришел в движение, то в общем случае изменяется как средняя скорость газа в целом, так и средняя кинетическая энергия молекул, отвечающая тепловому движению. Изменение этой величины необходимо принимать во внимание при формулировке закона сохранения энергии, в противном случае мы не получим адекватной модели явления.

В феноменологической теории используется приближенное описание мелкомасштабных процессов, при этом вводятся некоторые средние параметры, характеризующие состояние газа, ряд соотношений между этими параметрами является следствием общих физических законов, другие соотношения (уравнения состояния конкретных сред) возникают в результате обобщения опытных данных. Известно, что газ, находящийся в фиксированном объеме, при фиксированных внешних параметрах и при отсутствии обмена энергией с внешними телами через некоторое время (время релаксации) приходит в равновесное состояние. Время релаксации тем меньше, чем меньше размеры объема. Поэтому при моделировании процессов с характерным временем изменения средних величин, много большим времени релаксации, приближенно можно считать, что малый объем газа в каждый момент времени

находится в состоянии равновесия при фиксированных внешних параметрах. Непрерывное изменение основных его характеристик трактуется как квазистатический переход от одного равновесного состояния к другому. Таким образом, моделирование мелкомасштабных процессов в газах связано с изучением состояний равновесия общих физических систем и основных закономерностей установления равновесия — это и составляет предмет *термодинамики*.

Введем некоторые основные понятия и определения. Термин *термодинамическая система* будет относиться к совокупности большого числа материальных частиц (молекул, атомов и т.д.) и действующих на них полей (гравитационного, электромагнитного и пр.). Если изучается часть термодинамической системы, то остальную часть называют *окружающей* или *внешней* средой.

Термодинамические системы (или тела) характеризуются физическими и химическими признаками, к которым относятся, например, плотность, упругость, степень нагретости, степень намагниченности, процентное соотношение веществ, из которых состоит тело, процентное соотношение веществ, находящихся в химическом соединении и в свободном состоянии, и т.д. Все эти признаки, имеющие объективную меру, называются *термодинамическими параметрами тела*. Указание значений термодинамических параметров во всех частях тела определяет его *термодинамическое состояние*.

Тело называют *физически однородным*, если во всех его частях физические признаки одинаковы. Если тело представляет собой смесь (но не химическое соединение) нескольких веществ, то оно называется *химически неоднородным*. Примеры химически неоднородных тел: воздух, растворы, сплавы.

Термодинамическое состояние тела называется *равновесным*, если при неизменном внешнем воздействии на тело оно пребывает в этом состоянии неограниченно долго.

Физически однородная часть системы называется *фазой*. Различным агрегатным состояниям (жидкость, газ), а также твердым веществам с различными кристаллическими структурами соответствуют разные фазы. Одно и то же вещество, например вода, может находиться в разных фазах: газообразной, жидкой и твердой. Часть термодинамической системы, существующая как индивидуальное химическое вещество или как совокупность химических веществ, называется *компонентой*.

Пусть физически и химически однородная термодинамическая система, находящаяся в равновесном состоянии, разделена на несколько

частей так, что это разделение не привело к нарушению равновесного состояния во всех частях системы. Термодинамические состояния частей системы будут описываться некоторым набором термодинамических параметров. Те параметры, которые остались неизменными при разделении системы, называются *интенсивными*. Остальные параметры (изменившиеся при разделении) называют *экстенсивными*. К интенсивным параметрам относятся, например, давление, температура, потенциал электрического поля. Примерами экстенсивных величин являются масса, объем, энергия, электрический заряд.

В термодинамике экстенсивные параметры обычно относятся к некоторым стандартным массам. Чаще всего в качестве стандартных масс берется либо *единичная масса*, либо *моль*. Экстенсивные величины, относящиеся к единичной массе, называются *удельными*, а к молю — *мольными*. Напомним, что *молем*, или *грамм-молекулой*, называется количество вещества в граммах, численно равное его молекулярной массе. Как известно, моль любого вещества содержит $N_A = 6,0247 \cdot 10^{23}$ молекул (N_A — число Авогадро).

Для тела, состоящего из смеси нескольких веществ, в термодинамике вводится понятие *средней молекулярной массы*. Эта величина определяется как молекулярная масса, которая была бы присуща этому веществу, если бы оно было химически однородно и состояло из молекул, имеющих массу такую же, какова средняя масса молекул, фактически содержащихся в смеси.

Пример 1.1. Найти среднюю молекулярную массу воздуха, если известно, что он по массе состоит (приближенно) из 76% азота, 23% кислорода и 1% аргона. Молекулярные массы азота и аргона принять равными 28 и 40, соответственно, кислорода — 32.

Решение. Найдем сначала общее выражение для средней молекулярной массы смеси по его составу из n веществ с молекулярными массами M_i ($i = 1, \dots, n$). Пусть 1 г смеси состоит из q_1 долей грамма первого вещества, q_2 долей грамма второго вещества и т.д. Так как моль содержит N_A молекул, то q_i долей грамма вещества с молекулярной массой M_i содержит $(q_i/M_i)N_A$ молекул. Следовательно, в 1 г заданной смеси находится $\sum_{i=1}^n (q_i/M_i)N_A$ молекул. С другой стороны, если через M обозначить среднюю молекулярную массу смеси, то, в силу ее определения, число молекул, содержащихся в 1 г смеси, будет N_A/M . Приравнявая эти две величины, получаем $M = \left(\sum_{i=1}^n (q_i/M_i) \right)^{-1}$. Применим эту формулу для вычисления средней молекулярной массы воздуха: $M_B \cong 0,03457^{-1} \approx 28,92$.

Если под воздействием каких-либо возмущающих факторов система перешла из одного термодинамически равновесного состояния ε_1 в другое равновесное состояние ε_2 , то говорят, что система совершила *процесс* перехода из состояния ε_1 в ε_2 . Процесс называется *круговым* (или *циклом*), если состояния ε_1 и ε_2 тождественны друг другу.

По типу взаимодействия с окружающей средой системы подразделяются на изолированные, замкнутые и открытые. *Изолированной* называется система, которая не взаимодействует с окружающей средой. Термодинамическая система, которая не обменивается веществом с окружающей средой, называется *замкнутой*, в противном случае — *открытой*.

Если две изолированные системы, находящиеся в равновесных состояниях, приведены в тепловой контакт и их состояния не изменились, то говорят, что эти системы находятся в *тепловом равновесии*. В термодинамике принимается эмпирический закон транзитивности теплового равновесия (*нулевой закон термодинамики*): если системы A и B , а также B и C находятся в тепловом равновесии, то и системы A и C также находятся в тепловом равновесии.

Нулевой закон термодинамики является основой для введения понятия *температуры* тела как величины, характеризующей меру отклонения состояния тела от теплового равновесия с некоторым стандартным состоянием стандартного тела. Тела, имеющие одинаковые температуры, находятся в тепловом равновесии. В настоящее время наиболее общепринятой является 100-градусная шкала температуры. За $0^\circ C$ принимается температура таящего льда, за $100^\circ C$ — температура кипения воды при одном и том же давлении в 1 атм. Абсолютная температура T (по Кельвину) также измеряется по 100-градусной шкале и связана с температурой Θ (по Цельсию) соотношением

$$T = \Theta + 273,15.$$

Введем обозначения для основных величин, используемых для описания состояния термодинамической системы: U — внутренняя энергия (ε — удельная внутренняя энергия); S — энтропия (s — удельная энтропия); V — объем (τ — удельный объем); ρ — плотность; p — давление, T — абсолютная температура.

Если среди перечисленных величин независимыми являются только две из них, то символом $(\partial f / \partial V)_T$, где f — любая из трех величин V , S , p , обозначается частная производная от f по переменной V , т. е. $(\partial f / \partial V)_T = \partial f(V, T) / \partial V$. Аналогичное правило записи производных распространяется на случаи с другим числом зависимых и независимых переменных.

1.2 Первый закон термодинамики

Все тела обладают внутренней энергией U , которая складывается из энергии поступательного и вращательного движений молекул, колебательного движения атомов, энергии молекулярного притяжения и отталкивания и т. д. Внутренняя энергия есть термодинамический параметр, который для каждого термодинамического состояния принимает вполне определенное значение.

Пусть термодинамическая система под воздействием окружающей среды перешла из состояния ε_1 в состояние ε_2 и ее внутренняя энергия получила приращение $U_2 - U_1$.

Первый закон термодинамики. Теплота и работа являются двумя единственно возможными формами перехода энергии от одного тела к другому, причем полученная энергия $U_2 - U_1$ равна сумме сообщенного телу тепла Q и затраченной на тело работы \bar{A} , т. е.

$$U_2 - U_1 = Q + \bar{A}. \quad (1.1)$$

Для бесконечно близких состояний ε_1 и ε_2 соотношение (1.1) принимает вид

$$dU = \delta Q + \delta \bar{A}. \quad (1.2)$$

Использование разных обозначений бесконечно малых величин в (1.2) означает, что dU есть дифференциал, т.е. линейная часть приращения функции U , в то время как δQ и $\delta \bar{A}$ обозначают бесконечно малые количества теплоты и работы.

Чаще всего оперируют не с работой \bar{A} , затрачиваемой на тело, а с работой A , совершенной телом. Поскольку $A = -\bar{A}$, то (1.2) обычно записывают в виде

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (1.3)$$

Если система наряду с внутренней энергией характеризуется механической (кинетической или потенциальной), то первый закон термодинамики (1.3) для такой системы запишется так:

$$\delta Q = dE + \delta A.$$

где E — полная энергий системы, т.е. сумма внутренней и механической энергий.

В термодинамическом описании работа и теплота различаются тем, что работа представляет собой макрофизическую форму передачи энергии, тогда как теплота является совокупностью микрофизических процессов передачи энергии. Таким образом, при переходе системы из состояния ε_1 в ε_2 теплота и работа определяются самим процессом перехода, а не только начальным и конечным состояниями системы. Более

того, переход системы из состояния ε_1 в состояние ε_2 можно осуществить либо путем передачи тепла, либо путем механического воздействия, оцениваемого количеством произведенной работы. Вследствие этого количество тепла Q , которое вводится при тепловом воздействии, можно охарактеризовать эквивалентной работой A .

Количество тепла измеряют внесистемной единицей — *калорией*. В силу принципа эквивалентности теплоты и работы существует вполне определенная связь между калорией и единицей измерения работы. В системе СИ эта связь выражается соотношением

$$1 \text{ кал} = 4,184 \text{ Дж.} \quad (1.4)$$

В общем случае выражение для работы δA может быть представлено в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^n P_i^{(e)} dq_i,$$

где $P_i^{(e)}$ — обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате q_i и действующая на систему со стороны окружающей среды. Для так называемых *квазистатических процессов*, когда изменения происходят настолько медленно, что каждое промежуточное состояние является равновесным, внешние обобщенные силы $P_i^{(e)}$ равны обобщенным силам P_i самой системы. Квазистатическим процессам присуще свойство *обратимости*, заключающейся в том, что на каждой стадии такого процесса его можно обратить путем бесконечно малых изменений в окружающей среде.

Для квазистатических процессов внутренние и внешние силы для системы совпадают, и выражение для элемента работы приобретает вид

$$\delta A = \sum_{i=1}^n P_i dq_i, \quad (1.5)$$

Количество независимых обобщенных координат q_i , определенных выражением (1.5), плюс “тепловая координата” характеризуют размерность термодинамической системы. Если, как в нашем случае, размерность системы равна $n+1$, то это означает, что в пространстве термодинамических параметров множество всевозможных термодинамических состояний образует $(n+1)$ -мерное многообразие.

Приведем несколько примеров обобщенных сил и обобщенных координат.

Работа равномерно распределенного давления p , направленная на изменение объема V :

$$\delta A = pdV.$$

Обобщенной силой здесь является давление, а обобщенной координатой — объем тела V .

Работа перемещения электрического заряда e в электрическом поле с потенциалом Φ :

$$\delta A = -\Phi de.$$

Здесь обобщенными координатой и силой будут соответственно величины e и $(-\Phi)$.

Работа сил поверхностного натяжения:

$$\delta A = -\alpha d\Sigma,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения (обобщенная сила $(-\alpha)$), Σ — площадь поверхности раздела (обобщенная координата).

Работа, совершаемая системой при изменении масс компонент вследствие химических реакций, при растворении одних веществ в других, при фазовых переходах:

$$\delta A = -(\mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \dots + \mu_n dm_n).$$

Здесь массы составляющих системы m_1, m_2, \dots, m_n суть обобщенные координаты, а обобщенными силами являются *химические потенциалы* $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, взятые со знаком “минус”.

Рассмотрим замкнутую однокомпонентную двухфазную термодинамическую систему (например, жидкость — пар), в которой совершается работа сил давления по изменению объема и “химическая” работа при фазовом переходе. Если m_1, m_2 и μ_1, μ_2 — массы и химические потенциалы первой и второй фаз соответственно, то выражение для элемента работы будет иметь вид

$$\delta A = pdV - \mu_1 dm_1 - \mu_2 dm_2. \quad (1.6)$$

Термомеханической системой будем называть замкнутую термодинамическую систему, в которой происходят только процессы передачи тепла и механической деформации под действием равномерно распределенного давления. Для этой системы элемент работы записывается следующим образом:

$$\delta A = pdV. \quad (1.7)$$

К таким системам относятся жидкости, газы, пары и т.д. Первый закон термодинамики для них будет записываться следующим образом:

$$\delta Q = dU + pdV. \quad (1.8)$$

В соответствии с принятым определением размерности термодинамической системы размерность термомеханической системы равна двум, или, как говорят, эта система является *двухпараметрической средой*.

Пусть системе сообщено количество тепла δQ . Предположим, что в этом процессе оставался неизменным некоторый параметр состояния β , а температура увеличилась на dT . В данном случае величину

$$C_\beta = (\delta Q/dT)_\beta, \quad (1.9)$$

называют *теплоемкостью* системы при постоянном параметре β .

Для термомеханической системы выделяются следующие основные процессы, в которых сохраняется один из термодинамических параметров:

<i>адиабатический</i>	$\delta Q = 0;$
<i>изобарический</i>	$p = \text{const};$
<i>изохорический</i>	$V = \text{const};$
<i>изотермический</i>	$T = \text{const}.$

Хотя теплота не является параметром состояния, включение в этот список адиабатических процессов связано с тем, что, как будет установлено позднее, адиабатичность процесса приводит при определенных условиях к сохранению такого термодинамического параметра состояния, как энтропия s . Из определения теплоемкости следуют очевидные соотношения: $C_Q = 0$, $C_T = \infty$.

Поскольку термомеханическая система является двухпараметрической средой, то при заданных значениях давления p и объема V должны однозначно определяться температура T и внутренняя энергия U как функции от p и V .

Термомеханическая система называется *идеальным (совершенным) газом*, если параметры p , V и T подчиняются уравнению Клапейрона:

$$pV = nRT, \quad (1.10)$$

где n — число молей, R — универсальная газовая постоянная ($R = 8,314 \text{ Дж}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}$). С помощью основного термодинамического тождества (оно будет приведено в разд. 1.3) устанавливается, что внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры: $U = U(T)$. Уравнение (1.10) остается справедливым и для смеси из r

идеальных газов, если под n понимать сумму $n = n_1 + \dots + n_r$, где n_i — число молей i -го компонента. При рассмотрении смеси идеальных газов уравнением

$$p_i V = n_i R T, \quad (i = 1, \dots, r)$$

вводится понятие *парциального давления* p_i i -го компонента в смеси, занимающего объем V при температуре T . Давление p в смеси связано с парциальными давлениями p_i соотношением $p = p_1 + \dots + p_r$.

Уравнение состояния идеального газа (1.10) пригодно для описания реальных газов в случае достаточно низких давлений и высоких температур. Для *плотных газов*, когда при соответствующих внешних условиях возможен их переход в жидкое состояние, используются более сложные по структуре уравнения состояния, например уравнения состояния Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT, \quad (1.11)$$

где n — число молей, a и b — постоянные.

Пример 1.2. Пусть воздух находится в термически изолированной комнате объемом 27 м^3 . В комнате имеется небольшое отверстие, через которое воздух может просачиваться наружу, где давление равно 1 атм. Какое количество тепла необходимо подвести в комнату, чтобы температура медленно увеличилась с 0 до 20°C ? При проведении расчетов принять плотность воздуха при $T = 0^\circ$ и $p = 1$ атм равной $\rho = 0,00129 \text{ г/см}^3$, удельную теплоемкость C_p постоянной и равной $C_p = 0,238 \text{ кал/(г·град)}$.

Решение. Так как нагревание происходит медленно, можно считать, что давление в комнате сохраняется равным 1 атм. Поскольку сохраняется и объем воздуха V , то при его нагревании будет изменяться масса воздуха m . Из уравнения Клапейрона имеем

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT,$$

где M — молекулярная масса воздуха. Поскольку $M = \text{const}$, то зависимость $m = m(T)$ можно представить в виде $m(T) = m_1 T_1 / T$, где m_1 — масса воздуха при температуре T_1 . В силу определения теплоемкости, для искомого количества тепла Q имеем формулу

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_p m(T) dT = C_p m_1 T_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

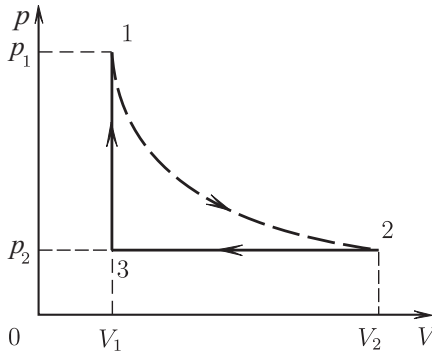


Рис. 1.1

Так как $T_1 = 0^\circ\text{C} = 273\text{K}$, $T_2 = 20^\circ\text{C} = 293\text{K}$, то $Q = 0,00129 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 2,7 \cdot 10^6 \text{см}^3 \cdot 0,238 \frac{\text{кал}}{\text{г}\cdot\text{град}} \cdot 273\text{град} \cdot \ln(293/273) \cong 2,26 \cdot 10^6 \ln(293/273)\text{кал} \cong 1,6 \cdot 10^5 \text{кал} = 160\text{ккал}$.

Пример 1.3. Один моль идеального газа с начальными давлением p_1 и объемом V_1 свободно (и адиабатически) расширяется до объема V_2 . Затем он квазистатически изобарно сжимается до объема V_1 и, наконец, изохорически нагревается до тех пор, пока его давление не станет равным p_1 . Предполагая теплоемкость постоянной, показать с помощью этого цикла справедливость соотношения Майера для молярных теплоемкостей C_p и C_V : $C_p - C_V = R$.

Решение. Описанный цикл изображен на рис. 1.1. Кривая 1–2 соответствует свободному расширению газа, прямые 2–3 и 3–1 — квазистатическим изобарному и изохорическому процессам, соответственно. Заметим, что в случае свободного расширения газа процесс не является квазистатическим, так как давление в газе не уравновешено внешним давлением. Работа, совершаемая газом при переходе из состояния “1” в “2”, равна нулю, так как $\delta A = p^{(e)}dV$, а $p^{(e)} = 0$. Здесь $p^{(e)}$ — давление во внешней среде. Итак, в процессе $1 \rightarrow 2$ $A_{1 \rightarrow 2} = 0$ и $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$ (процесс адиабатический!). Из первого закона термодинамики $U_2 - U_1 = Q_{1 \rightarrow 2} - A_{1 \rightarrow 2}$ вытекает, что $U_2 = U_1$. Следовательно, в состоянии “2” температура $T_2 = T_1$.

Далее, при переходе $2 \rightarrow 3$ имеем

$$A_{2 \rightarrow 3} = \int_{V_2}^{V_1} p_2 dV = p_2(V_1 - V_2), \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \int_{T_2}^{T_3} C_p dT = C_p(T_3 - T_2),$$

где C_p — молярная теплоемкость при постоянном давлении. В изохорическом процессе $3 \rightarrow 1$ работа не совершается, т.е. $A_{3 \rightarrow 1} = 0$. Если C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме, то для совершения процесса $3 \rightarrow 1$ затрачивается следующее количество теплоты:

$$Q_{3 \rightarrow 1} = \int_{T_3}^{T_1} C_V dT = C_V(T_1 - T_3).$$

Из первого закона термодинамики получим:

$$Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3} + A_{3 \rightarrow 1}.$$

Отсюда, подставляя значения для теплоты и работы, будем иметь

$$C_p(T_3 - T_1) - C_V(T_3 - T_1) = p_2(V_1 - V_2).$$

Из уравнения Клапейрона для состояний “2” и “3” следуют равенства

$$p_2 V_2 = RT_1, \quad p_2 V_1 = RT_3.$$

Подставляя их в предыдущее уравнение, получим

$$C_p - C_V = R.$$

Пример 1.4. Вычислить механический эквивалент тепла J , если известно, что для воздуха при нормальных температуре и давлении (т.е. при $T = 0^\circ\text{C}$, $p = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$) плотность $\rho = 0,00129 \text{ г/см}^3$, удельная теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 0,235 \text{ кал/(г} \cdot \text{град)}$ и ее отношение к теплоемкости при постоянном объеме $\gamma = C_p/C_V = 1,41$. Предполагается, что воздух является идеальным газом, объем которого при этих условиях равен $22,4 \text{ л/моль}$.

Решение. Газовую постоянную R , выраженную в Дж/(моль·град), можно получить из уравнения состояния идеального газа для одного моля $pV = RT$. Кроме того, эту постоянную можно выразить в кал/(моль·град) из соотношения Майера $C_p - C_V = R$ (см. пример 1.3). Если обозначить последнюю величину через R' , то $J = R/R'$ Дж/кал.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} R &= \frac{pV}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^6 \cdot 22,4 \cdot 10^3}{273} = 8,32 \cdot 10^7 \text{ эрг/(моль} \cdot \text{град)} = \\ &= 8,32 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{град)}. \end{aligned}$$

Масса m одного моля воздуха равна

$$m = \rho V = 0,00129 \cdot 22,4 \cdot 10^3 \cong 28,9 \text{ г/моль.}$$

Отсюда следует

$$C_p = mc_p = 28,9 \cdot 0,238 \cong 6,88 \text{ кал/(моль} \cdot \text{град),}$$

$$C_V = \frac{1}{\gamma} C_p = 6,88/1,41 \cong 4,88 \text{ кал/(моль} \cdot \text{град).}$$

Следовательно, $J \cong \frac{R}{C_p - C_V} = \frac{8,32}{2,00} = 4,16 \text{ Дж/кал.}$

1.3 Второй закон термодинамики. Основные термодинамические функции и условия равновесия

Предположим, что при переходе рассматриваемой системы из состояния α в состояние α' окружающая среда (термостат) переходит из состояния β в состояние β' . Если существует принципиальная возможность вернуть систему из состояния α' в состояние α , а термостат из состояния β' в состояние β , то процесс перехода $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha', \beta')$ называется *обратимым*.

Пусть система совершает циклический процесс $\alpha \rightarrow \alpha$, при котором термостат переходит из состояния β в состояние β' . Цикл $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta')$ называется *обратимым циклом*, если процесс $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta')$ обратим.

Ясно, что квазистатические процессы и циклы являются обратимыми. Более того, так как квазистатические процессы являются равновесными, т.е. каждое промежуточное состояние системы равновесно, то в квазистатическом процессе каждый элементарный акт перехода системы и термостата в новое состояние является обратимым. В силу сказанного, совокупность обратимых процессов не сводится, вообще говоря, только к квазистатическим процессам.

Второй закон термодинамики так же, как и первый закон термодинамики, является эмпирическим и допускает различные его формулировки, эквивалентные друг другу. Одна из формулировок второго закона термодинамики, носящая название *принципа Томсона — Кельвина*, гласит:

невозможно превратить в работу все количество тепла, взятое от тела с однородной температурой, не производя никаких других изменений состояния системы.

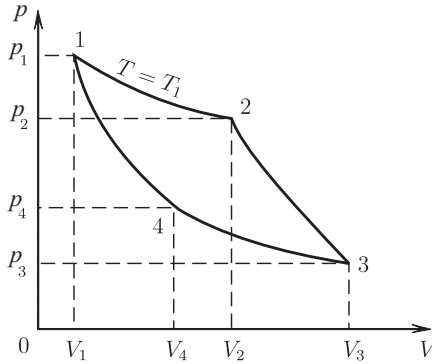


Рис. 1.2

В этой формулировке под термином “другие изменения” подразумеваются такие изменения системы, которые сохраняются после завершения процесса.

Второе начало (закон) термодинамики имеет важное значение в теории тепловых двигателей — непрерывно действующих устройств, результатом работы которых является превращение теплоты в работу. Для производства работы нужно иметь два тела с разными температурами и вспомогательное тело, называемое рабочим телом, которое должно периодически многократно изменять свое состояние, совершая циклический процесс. На одном из участков этого процесса рабочее тело расширяется, совершая работу A_1 за счет теплоты, полученной от более нагретого тела, и частично за счет собственной внутренней энергии. На втором участке над рабочим телом совершается работа сжатия A_2 . Часть этой работы идет на восстановление внутренней энергии рабочего тела, другая часть передается в виде теплоты менее нагретому телу. Полезная работа $A = A_1 - A_2$ согласно первому закону термодинамики совпадает с разностью $Q_1 - Q_2$, где Q_1 — количество теплоты, полученной рабочим телом от более нагретых тел, Q_2 — количество теплоты, полученной от рабочего тела менее нагретыми телами. Второе начало утверждает, что теплота, получаемая от более нагретых тел, превращается в работу не полностью, часть теплоты переходит к менее нагретым телам ($Q_2 > 0$). Рассмотрим цикл Карно, соответствующий обратимому круговому процессу превращения теплоты в работу между двумя источниками теплоты с температурами T_1, T_2 (рис. 1.2).

Участок 1–2 соответствует изотермическому расширению, в процес-

се которого рабочее тело находится в тепловом контакте с источником тепла с температурой T_1 , на участке 2–3 происходит адиабатическое расширение ($\delta Q = 0$), участок 3–4 соответствует изотермическому сжатию, когда рабочее тело находится в тепловом контакте с источником теплоты с температурой T_2 ($T_2 < T_1$), участок 4–1 соответствует адиабатическому сжатию.

На участке 1–2 рабочее тело получает теплоту Q_1 , на участке 3–4 — теплоту Q_2 . Полезная работа за один цикл $A = Q_1 + Q_2$. Из второго начала термодинамики следует, что обязательно $Q_2 < 0$ при положительной A . При этом термический коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} < 1.$$

Из второго начала термодинамики следует также, что ни одна тепловая машина не может иметь больший КПД, чем машина, соответствующая циклу Карно, и что все обратимые тепловые машины имеют один и тот же КПД независимо от используемого цикла и рабочего тела (КПД зависит только от T_1, T_2).

Для идеального газа η можно вычислить в виде $\eta = (T_1 - T_2)T_1^{-1}$. Сравнение двух формул для η показывает, что в обратимом цикле для любого тела

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Для необратимого цикла знак равенства нужно заменить на знак “ $<$ ”.

Применение второго закона термодинамики к циклическому процессу, при котором система последовательно проходит n состояний и поглощает при каждом переходе теплоту Q_i ($i = 1, \dots, n$) из тепловых резервуаров R_i ($i = 1, \dots, n$) с температурами $T_i^{(e)}$ дает неравенство

$$\sum_{i=1}^n (Q_i/T_i^{(e)}) \leq 0. \quad (1.12)$$

Если изменение состояний происходит непрерывно, то (1.12) принимает вид

$$\oint \frac{\delta Q}{T^{(e)}} \leq 0. \quad (1.13)$$

Знак равенства в (1.12), (1.13) имеет место только для обратимых процессов.

Пусть L и L' представляют собой два квазистатических процесса, связывающих состояния α и α_0 . Рассмотрим обратимый квазистатический цикл $\alpha_0 \xrightarrow{L} \alpha \xrightarrow{L'} \alpha_0$. В силу (1.13) имеем (так как $T^{(e)} = T$)

$$\int_{\substack{\alpha_0 \\ (L)}}^{\alpha} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\substack{\alpha \\ (L')}}^{\alpha_0} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Это означает, в силу обратимости процессов L и L' , что интеграл

$$\int_{\substack{\alpha_0 \\ (L)}}^{\alpha} \frac{\delta Q}{T} = \int_{\substack{\alpha_0 \\ (L')}}^{\alpha} \frac{\delta Q}{T}$$

не зависит от процесса, а определяется только начальным и конечным состояниями процесса. Вследствие этого, выбирая в качестве исходного состояния некоторое равновесное состояние α_0 для любого другого состояния α можно определить новый термодинамический параметр состояния — *энтропию* $S(\alpha)$

$$S(\alpha) - S(\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\delta Q}{T}, \quad (1.14)$$

где интегрирование производится по любому квазистатическому процессу, связывающему состояния α_0 и α .

Для бесконечно близких α_0 и α будем иметь

$$dS = \delta Q/T. \quad (1.15)$$

В статистической теории энтропия системы определяется выражением $S = k \ln W$, где k — постоянная Больцмана, а W — термодинамическая вероятность. Последняя величина определяется как *число равновероятных микросостояний*, отвечающих рассматриваемому *макросостоянию*.

Очевидно, что энтропия является экстенсивным параметром состояния системы. Из выражения (1.15) вытекает, что если система квазистатически переходит из состояния α в состояние $\alpha + \delta\alpha$, то количество теплоты δQ в таком процессе дается выражением $\delta Q = TdS$, т.е. в квазистатических процессах энтропия S играет роль “тепловой координаты” по аналогии с обобщенными координатами при вычислении работы, совершаемой системой.

В общем случае для процесса перехода системы из состояния α_1 в состояние α_2 второй закон термодинамики выражается неравенством

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\delta Q}{T^{(e)}} \leq S(\alpha_2) - S(\alpha_1), \quad (1.16)$$

где $T^{(e)}$ — температура термостата. Для бесконечно близких значений состояний α_1 и α_2 соотношение (1.16) принимает вид

$$\delta Q \leq T^{(e)} dS. \quad (1.17)$$

В (1.16) и (1.17) знак равенства имеет место только для обратимых процессов. Из второго закона термодинамики вытекает важное следствие: в изолированной (или адиабатно изолированной) системе энтропия может только возрастать.

Неравенство (1.16) дает правило определения направления развития реальных процессов, происходящих в системе, когда она подвергается внешнему воздействию, или когда в ней происходят самопроизвольные процессы (химические реакции, фазовые переходы).

Для квазистатических процессов в однокомпонентной двухфазной системе первый закон термодинамики (1.13) будет записываться в силу (1.6) и (1.15) следующим образом:

$$TdS = dU + pdV - \mu_1 dm_1 - \mu_2 dm_2, \quad (m_1 + m_2 = \text{const}). \quad (1.18)$$

Для квазистатических процессов в термомеханической системе первый закон термодинамики имеет вид

$$TdS = dU + pdV. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19), играющее ключевую роль в газовой динамике, будем называть *основным термодинамическим тождеством*.

Так как (1.19) есть уравнение в полных дифференциалах, а система является двухпараметрической средой, то для описания всевозможных состояний этой системы необходимо задать, по крайней мере, еще одну функциональную связь между величинами T , S , p , V , U . Такие связи называются *уравнениями состояния*. Из физического смысла ясно, что в качестве независимых переменных целесообразно выбирать переменные из величин T , S , p , V . Для четырех пар таких величин можно указать уравнения состояния, полностью описывающие термодинами-

ческую систему. Ниже приводятся эти уравнения состояния, отвечающие соответствующей паре независимых переменных:

$$\begin{aligned}
 (V, S) : \quad U &= U(V, S), \\
 (p, S) : \quad J &\equiv U + pV = J(p, S), \\
 (V, T) : \quad F &\equiv U - TS = F(V, T), \\
 (p, T) : \quad \Psi &\equiv U - TS + pV = \Psi(p, T).
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Величины U, J, F, Ψ называются потенциалами Гиббса и имеют следующие названия: J — *энтальпия*, F — *свободная энергия*, Ψ — *полный термодинамический потенциал*.

Наиболее изучены в газовой динамике движения политропного газа — идеального газа с постоянной теплоемкостью. Для политропного газа из соотношений (1.10) и (1.19), переписанных в терминах удельных величин ε, τ, s , легко получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 s &= s_0 + C_V \ln T + R' \ln \tau, \quad p = \text{const } \rho^\gamma \exp(s/C_V), \\
 \varepsilon &= \frac{p\tau}{\gamma - 1} \quad (\gamma = C_p/C_V).
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

В (1.21) постоянная $R' = R/M$, где M — молекулярная масса газа, $\rho = 1/\tau$ — плотность газа. Многие закономерности движений политропного газа сохраняются и при более общих зависимостях вида $p = g(\tau, s)$, $\varepsilon = e(\tau, p)$.

Газ называется нормальным, если его уравнения состояния $p = g(\tau, s)$, $\varepsilon = e(\tau, p)$ удовлетворяют следующим условиям:

1°. Функция $g(\tau, s)$ определена и трижды непрерывно дифференцируема в области $\{0 < \tau < \infty, -\infty < s < \infty\}$, удовлетворяет неравенствам

$$(a) \quad g > 0, \quad (b) \quad g_\tau < 0, \quad (c) \quad g_{\tau\tau} > 0, \quad (d) \quad g_s > 0. \tag{1.22}$$

и предельным соотношениям:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(\tau, s) = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} g(\tau, s) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} g(\tau, s) = \infty.$$

2°. Функция (τ, s) определена, трижды непрерывно дифференцируема в области $\{0 < \tau < \infty, 0 < p < \infty\}$, удовлетворяет неравенствам

$$(e) \quad pe_p - e \geq 0, \quad (f) \quad \left(\frac{e_{p\tau}}{e_p} \right) (\tau, g(\tau, s)) \geq \frac{g_{ss}g_\tau - g_{\tau s}g_s}{g_s^2}. \tag{1.23}$$

и предельным соотношениям:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e(\tau, p) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e(\tau, g(\tau, s)) = 0.$$

Скоростью звука называется величина $c > 0$, определенная формулой

$$c^2 = (\partial p / \partial \rho)_s = -\tau^2 g_\tau(\tau, s).$$

Следствием условий, сформулированных в определении нормального газа, являются следующие свойства функции $g(\tau, s)$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau, s) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau g(\tau, s) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} c^2(\tau, s) = 0.$$

Действительно, основное термодинамическое тождество (1.19) для удельных величин

$$T ds = d\varepsilon + p d\tau$$

дает следующие следствия:

$$\varepsilon_\tau(\tau, s) = -p, \quad i_\tau(\tau, s) = \tau g_\tau(\tau, s) \quad (i = \varepsilon + p\tau).$$

Тогда, с использованием неравенств $g_\tau(\tau, s) < 0$ и $g_{\tau\tau}(\tau, s) > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau, s) - \varepsilon(2\tau, s) &= \int_{\tau}^{2\tau} g(\tau', s) d\tau' \geq \tau g(2\tau, s), \\ i(\tau, s) - i(2\tau, s) &= - \int_{\tau}^{2\tau} \tau' g_{\tau}(\tau', s) d\tau' \geq -g_{\tau}(2\tau, s) \int_{\tau}^{2\tau} \tau' d\tau' = \\ &= -(3/2)\tau^2 g_{\tau}(2\tau, s) = (3/2)c^2(2\tau, s). \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon(\tau, s) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то функции $\tau g(\tau, s)$ и $i(\tau, s)$ тоже стремятся к нулю. Из последнего неравенства следует, что $c^2 \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Следует отметить, что условия устойчивости термодинамического равновесия, вытекающие из второго закона термодинамики, определяют некоторые из ограничений, которым должны удовлетворять уравнения состояния. Для того, чтобы сформулировать эти условия, рассмотрим установление равновесия в части термодинамической системы, контактирующей с окружающей средой, в которой температура $T^{(e)}$ и давление $p^{(e)}$ постоянны. Пусть δU , δS , δV характеризуют малое отклонение системы от состояния равновесия при заданных внешних

параметрах $T^{(e)}$, $p^{(e)}$. В соответствии с первым законом термодинамики равенство

$$\delta Q = \delta U + p^{(e)} \delta V$$

определяет количество теплоты, необходимое для создания этого отклонения. Если равновесие устойчиво, то эти отклонения самопроизвольно не реализуются, то есть $\delta Q > T^{(e)} \delta S$. Для функции $\tilde{\psi} = U - T^{(e)} S + p^{(e)} V$ последнее неравенство означает, что

$$\delta \tilde{\psi} = \delta U - T^{(e)} \delta S + p^{(e)} \delta V > 0 \quad (1.24)$$

при любом отклонении. Следовательно, в состоянии равновесия $\tilde{\psi}$ имеет локальный минимум, при этом первая вариация функции равна нулю, а вторая — неотрицательна. Следствием обращения в нуль первой вариации являются равенства $T = T^{(e)}$, $p = p^{(e)}$. Неотрицательность второй вариации приводит к соотношению

$$\delta T \delta S - \delta p \delta V \geq 0. \quad (1.25)$$

При выводе неравенства (1.25) использовались формулы $(\partial U / \partial S)_V = T$, $(\partial U / \partial V)_S = -p$.

Универсальный вид условия устойчивости равновесия (1.25) позволяет использовать его для получения термодинамических неравенств при любом выборе независимых переменных. Если, например, в качестве независимых переменных выбраны V и T , то неравенство (1.25) сведется к условию неотрицательности следующей квадратичной формы:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V (\delta T)^2 + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \right) \delta V \delta T - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T (\delta V)^2 \geq 0.$$

Так как $(\partial S / \partial V)_T = (\partial p / \partial T)_V$, то из последнего неравенства получаем условия термодинамической устойчивости:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{T} \geq 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \leq 0.$$

Легко убедиться, что для нормального газа эти условия выполнены.

Особый интерес представляет выявление условий равновесия и направления протекания реальных процессов (в случае, когда система выведена из равновесия) в системах с фазовыми переходами и другими процессами, сопровождающимися изменением масс составляющих. В качестве примера проведем исследование этих вопросов для однокомпонентной двухфазной системы, квазистатические процессы в которой описываются уравнением (1.18).

Пусть, как и в предыдущем случае, система находится в контакте с термостатом, в котором поддерживаются постоянными температура $T^{(e)}$ и давление $p^{(e)}$. Устойчивость равновесия рассматриваемой системы также будет обеспечиваться тем, что функция $\tilde{\psi} = U - T^{(e)}S + p^{(e)}V$ на данном состоянии имеет локальный минимум.

Пусть ε_i , s_i и τ_i удельная внутренняя энергия, энтропия и объем i -й фазы. В квазистатических процессах изменения удельных величин каждой из фаз связаны основным термодинамическим тождеством (1.19):

$$T_i ds_i = d\varepsilon_i + p_i d\tau_i, \quad (i = 1, 2), \quad (1.26)$$

где T_i , p_i — температура и давление в i -й фазе. Для функции $\tilde{\psi} = U - T^{(e)}S + p^{(e)}V$ справедливо следующее представление через удельные величины: $\tilde{\psi} = m_1\psi_1 + m_2\psi_2$. Здесь $\tilde{\psi}_i = \varepsilon_i - T^{(e)}s_i + p^{(e)}\tau_i$ ($i = 1, 2$), m_1 и m_2 — массы первой и второй фаз. Варьируя $\tilde{\psi}$ с учетом условия $m_1 + m_2 = \text{const}$ получим равенство: $\delta\tilde{\psi} = m_1\delta\tilde{\psi}_1 + m_2\delta\tilde{\psi}_2 + (\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2)\delta m_1$. С использованием уравнений (1.26) выражение для вариации $\delta\tilde{\psi}$ можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\psi} = & m_1(T_1 - T^{(e)})\delta s_1 - m_1(p_1 - p^{(e)})\delta\tau_1 + \\ & + m_2(T_2 - T^{(e)})\delta s_2 - m_2(p_2 - p^{(e)})\delta\tau_2 + (\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2)\delta m_1. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Так как в состоянии равновесия первая вариация величины $\tilde{\psi}$ должна обращаться в нуль, то из (1.27) вытекают условия фазового равновесия системы: $T_1 = T_2 = T^{(k)}$, $p_1 = p_2 = p^{(e)}$, $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2$. Следовательно, удельные полные термодинамические потенциалы (химические потенциалы фаз) совпадают при равновесии:

$$\psi_1(p, T) = \psi_2(p, T). \quad (1.28)$$

Если выполнены только условия теплового и механического равновесия $T_1 = T_2$, $p_1 = p_2$, но $\psi_1(p, T) > \psi_2(p, T)$, то происходит фазовый переход, в котором $\delta\tilde{\psi} = (\psi_1 - \psi_2)\delta m_1 < 0$ и $\delta m_1 < 0$. Уравнение (1.28) описывает некоторую кривую $p = p_{\Phi}(T)$ на плоскости (T, p) . Если при переходе через эту кривую первые производные функции ψ терпят разрыв, т. е.

$$\begin{aligned} \left. \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial p} - \frac{\partial\psi_2}{\partial p} \right) \right|_{p=p_{\Phi}(T)} &= \tau_1 - \tau_2 \neq 0, \\ \left. \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial T} - \frac{\partial\psi_2}{\partial T} \right) \right|_{p=p_{\Phi}(T)} &= S_2 - S_1 \neq 0, \end{aligned}$$

то такая ситуация называется *фазовым переходом первого рода*. К ним относятся, например, переходы, связанные с изменением агрегатного состояния вещества (вода — пар) и с изменением кристаллической структуры решетке в металлах.

Если при переходе через *кривую фазового равновесия* $p = p_{\Phi}(T)$ остаются непрерывными потенциал и первые производные от него, а терпят скачок вторые производные потенциала, то в этом случае говорят, что имеет место *фазовый переход второго рода*. Примером фазового перехода второго рода является переход металла из нормального в сверхпроводящее состояние.

Число степеней свободы r фазового равновесия для n — компонентной системы, когда одновременно могут сосуществовать l фаз, дается формулой Гиббса (правило фаз Гиббса):

$$r = n - l + 2$$

Из этой формулы следует, что в однокомпонентной системе одновременно могут сосуществовать не более трех фаз, причем их сосуществование возможно только при единственных значениях p и T . Эта точка на плоскости (T, p) называется *тройной точкой*. Для воды тройная точка (лед — вода — пар) характеризуется значениями $T = 273,16$ К, $p = 1$ атм.

Пример 1.5. Доказать, что отношение адиабатической сжимаемости $\kappa_s = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_S$ к изотермической сжимаемости

$$\kappa_T = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_T$$

равно отношению теплоемкости при постоянном объеме к теплоемкости при постоянном давлении.

Решение. Дифференцируя по p тождество $S \equiv S(V(p, S), p)$ получаем

$$\kappa_s = V^{-1} \frac{(\partial s/\partial p)_V}{(\partial S/\partial V)_p}.$$

Полагая последовательно

$$S(p, V) = S(T(p, V), V), \quad S(p, V) = S(T(p, V), p)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p. \end{aligned}$$

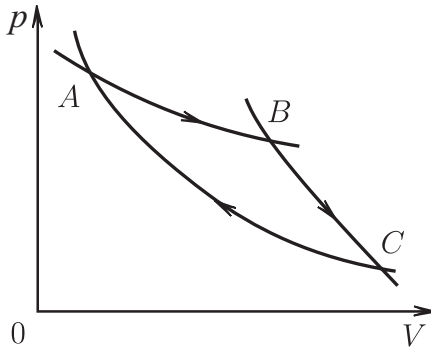


Рис. 1.3

Отсюда

$$\kappa_s = \frac{C_V}{VC_p} \frac{(\partial T/\partial p)_V}{(\partial T/\partial V)_p} = -\frac{C_V}{VC_p} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{C_V}{C_p} \kappa_T.$$

Пример 1.6. Используя принцип Томсона — Кельвина, доказать, что пересечение двух квазистатических адиабат невозможно.

Решение. Пусть две адиабаты пересекаются в точке C на плоскости (V, p) (рис. 1.3).

Рассмотрим изотерму AB , пересекающую обе адиабаты AC и BC в точках A и B соответственно. В соответствии с предыдущей задачей взаимное расположение адиабат и изотермы будет таким, каким оно изображено на рис. 1.3. Рассмотрим обратимый цикл $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, в котором система получает тепло Q от термостата только на участке AB . Работа A , совершаемая системой, равна площади фигуры ABC и положительна. Из первого закона термодинамики вытекает, что $Q = A$, т.е. Q также больше нуля. Это означает, что тепло, взятое из резервуара, полностью переходит в работу, что противоречит принципу Томсона — Кельвина.

Пример 1.7. Теплота плавления льда при 1 атм и 0°C равна $L_{\text{пл}} = 1436,3$ кал/моль, а теплота испарения при 1 атм и 100°C $L_{\text{исп}} = 9717$ кал/моль. Считая, что средняя теплоемкость воды при $p = 1$ атм и температурах $0 - 100^\circ\text{C}$ равна $18,046$ кал/(град·моль), вычислить разность между энтропией 1 моль льда при 1 атм и энтропией 1 моль пара при 1 атм и 100°C .

Решение. Согласно определению разность энтропий $S_{\text{п}} - S_{\text{л}}$ мо-

жет быть вычислена с помощью интеграла $\int_{\text{Л} \rightarrow \text{П}} \delta Q/T$, где интегрирование идет по квазистатическому пути превращения льда в пар $\text{Л} \rightarrow \text{В}_1 \rightarrow \text{В}_2 \rightarrow \text{П}$. Здесь Л — лед при 0°C , В_1 — вода при 0°C , В_2 — вода при 100°C . Итак, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{П}} - S_{\text{Л}} &= \int_{\text{Л} \rightarrow \text{В}_1} \delta Q/T + \int_{\text{В}_1 \rightarrow \text{В}_2} \delta Q/T + \int_{\text{В}_2 \rightarrow \text{П}} \delta Q/T \cong \\ &\cong \frac{1436}{273} \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}} + \left(C_p \int_{273}^{373} \frac{dT}{T} \right) \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}} + \frac{9717}{373} \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}} = \\ &= (5,26 + 18,046 \ln \frac{373}{273} + 26,05) \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}} \simeq 36,94 \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}}. \end{aligned}$$

Пример 1.8. Пусть однокомпонентная двухфазная система находится в фазовом равновесии, и пусть L — количество теплоты, необходимое для перехода единицы массы вещества из первой фазы во вторую при заданной температуре T . Доказать, что функция $p = P_{\Phi}(T)$, описывающая кривую фазового равновесия на плоскости (T, p) , удовлетворяет уравнению Клапейрона — Клаузиуса:

$$\frac{dP_{\Phi}}{dT} = \frac{\rho_1 \rho_2}{T} \frac{L}{\rho_1 - \rho_2},$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности вещества в первой и второй фазах, L — удельная теплота фазового перехода.

Решение. Вдоль кривой фазового равновесия тождественно удовлетворяется условие (1.28)

$$\psi_1(P_{\Phi}(T), T) \equiv \psi_2(P_{\Phi}(T), T),$$

где ψ_1 и ψ_2 — полные удельные термодинамические потенциалы (химические потенциалы) первой и второй фаз. Дифференцируя это тождество, получаем

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial p} - \frac{\partial \psi_2}{\partial p} \right) \frac{dP_{\Phi}}{dT} = \frac{\partial \psi_2}{\partial T} - \frac{\partial \psi_1}{\partial T}.$$

Так как $\partial \psi / \partial p = \tau$, $\partial \psi / \partial T = -S$ то предыдущее соотношение перепишется так:

$$\frac{dP_{\Phi}}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Приращение энтропии при постоянной температуре выражается формулой $S_2 - S_1 = L/T$, где L — указанная в задаче теплота. В силу этого

$$\frac{dP_\Phi}{dT} = \frac{L}{T(\tau_2 - \tau_1)} = \frac{L}{T(\rho_2^{-1} - \rho_1^{-1})} = \frac{\rho_1 \rho_2 L}{T(\rho_1 - \rho_2)}.$$

1.4 Задачи

1.1. При постоянной температуре 20°C идеальный газ квазистатически переходит из состояния с давлением 20 атм в состояние с давлением 1 атм. Какую работу совершает 1 моль газа (в джоулях)? Какое количество тепла (в калориях) необходимо передать газу?

Ответ: $A \cong 7,26 \cdot 10^3$ Дж, $Q \cong 1,74$ ккал/моль.

1.2. Воздух характеризуется следующими параметрами: при $p = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$ и $T = 0^\circ\text{C}$ его плотность $\rho = 0,00129 \text{ г/см}^3$, удельная теплоемкость при постоянном давлении $C_p = 0,238 \text{ кал/(г}\cdot\text{град)}$ и $\gamma = C_p/C_V = 1,41$. Вычислить количество тепла, необходимое для нагревания воздуха от 0 до 20°C (а) при постоянном объеме; (б) при постоянном давлении. Начальный объем воздуха 27 м^3 .

Ответ: (а) $Q = 1,176 \cdot 10^5$ кал; (б) $Q = 1,658 \cdot 10^5$ кал.

1.3. Уравнение состояния смеси из r видов идеальных газов имеет вид

$$pV = nRT, \quad n = \sum_{i=1}^r n_i.$$

Здесь n_i — число молей i -го компонента. Внутренняя энергия задается выражением $U = \sum_{i=1}^r n_i C_{V_i}^0 T$, где $C_{V_i}^0$ — мольная теплоемкость при постоянном объеме i -го компонента. Найти C_V и C_p смеси.

Ответ: $C_V = \sum_{i=1}^r n_i C_{V_i}^0$, $C_p = \sum_{i=1}^r n_i (C_{V_i}^0 + R)$.

1.4. Вычислить удельную теплоемкость воздуха при постоянном объеме, считая его смесью кислорода O_2 и азота N_2 с соотношением масс компонентов 23:77. Удельная теплоемкость газообразного кислорода при постоянном объеме равна $0,158 \text{ кал/(г}\cdot\text{град)}$, а газообразного азота $0,176 \text{ кал/(г}\cdot\text{град)}$.

Ответ: $C_V \cong 0,172 \text{ кал/(г}\cdot\text{град)}$.

1.5. Пусть δQ — теплота, необходимая для изменения температуры 1 г вещества на величину dT при сохранении величины x . Показать, что удельная теплоемкость $C_x = (\partial Q / \partial T)_x$ определяется формулой

$$c_x = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\tau + \left[p + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \right] \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_x.$$

1.6. Идеальный газ с постоянной теплоемкостью совершает адиабатический переход из состояния (p_1, V_1, T_1) в состояние (p_2, V_2, T_2) . Показать, что в данном процессе $pV^\gamma = \text{const}$ ($\gamma = C_p/C_V$), а работа A , совершаемая газом, равна $A = C_V(T_1 - T_2)$.

1.7. Состояния идеального газа с постоянной теплоемкостью изменяются в соответствии с квазистатическим изотермически-адиабатным циклом (циклом Карно), изображенным на рис. 1.2. Процессы $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$ изотермические, $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ адиабатические. Доказать соотношение

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

где Q_1 — тепло, полученное от резервуара с температурой T_1 при переходе $1 \rightarrow 2$, а Q_2 — тепло от резервуара с температурой T_2 , полученной при переходе $3 \rightarrow 4$.

1.8. Для газа с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса (1.11) критической точкой K называется точка, в которой

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0.$$

Найти значения давления p_k , объема V_k и температуры T_k в критической точке и исследовать изотерму $T = T_k$ на плоскости (p, V) . Как будет вести себя изотермы $T = T_*$ на плоскости (p, V) при $T_* > T_k$ и $T_* < T_k$?

Ответ: $p_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}$, $V_k = 3nb$, $T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}$.

1.9. Пусть уравнения состояния среды заданы в виде

(а) $\varepsilon = \varepsilon(\tau, p)$, $s = s(\tau, p)$, $T = T(\tau, p)$;

(б) $\varepsilon = \varepsilon(s, T)$, $\tau = \tau(s, T)$, $p = p(s, T)$.

Найти соотношения, которым должны удовлетворять заданные функции.

Ответ: (а) $T \frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + p$, $T \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}$;

(б) $T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} + p \frac{\partial \tau}{\partial s}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + p \frac{\partial \tau}{\partial T} = 0$.

1.10. Доказать соотношение

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)_p + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_s + p = 0.$$

1.11. Используя потенциалы Гиббса (1.20), доказать следующие соотношения Максвелла:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p;$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

1.12. Доказать, что внутренняя энергия в идеальном газе есть функция только температуры.

1.13. Показать, что скорость звука c ($c^2 = (\partial p / \partial \rho)_S$) в идеальном газе зависит только от температуры.

1.14. Пусть уравнения состояния среды заданы в виде $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Найти выражение для скорости звука c как функции плотности ρ и температуры T .

Ответ:
$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial T} \left(\frac{p}{\rho^2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) / \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}.$$

1.15. Вычислить якобиан перехода $D(T, s) / D(p, \tau)$ от переменных T, s к переменным p, τ .

Ответ: $D(T, s) / D(p, \tau) = 1.$

1.16. Показать, что $\varepsilon(\tau, T) = \varepsilon_1(\tau) + \varepsilon_2(T)$ тогда и только тогда, когда $p = p(\tau, T)$ — линейная функция T .

1.17. Найти вид функции $\varepsilon(\tau, T)$ для реального газа с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $\varepsilon = E(T) - \frac{a}{M^2 \tau}$, где M — молекулярная масса газа, $E(T)$ — произвольная функция.

1.18. Показать, что в газе Ван-дер-Ваальса теплоемкость при постоянном объеме зависит только от температуры. Найти выражение для удельной энтропии в предположении постоянства удельной теплоемкости C_V .

Ответ: $s = C_V \ln T + \frac{R}{M} \ln(\tau - b/M) + s_0$, где M — молекулярная масса газа, s_0 — постоянная.

1.19. Пусть в газе Ван-дер-Ваальса теплоемкость при постоянном объеме C_V постоянная. Газ свободно адиабатически расширился, увеличив объем с V_1 до $V_2 > V_1$. Найти изменение температуры и энтропии при этом расширении.

Ответ:

$$T_2 - T_1 = -\frac{an^2}{C_V} \frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2},$$

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \right),$$

где n — число молей газа.

1.20. Доказать формулу

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_p.$$

1.21. Доказать, что при $(\partial p/\partial \tau)_T < 0$ (т.е. для устойчивых равновесных состояний) справедливо неравенство $C_p > C_V$.

1.22. Показать, что процесс свободного адиабатического расширения газа необратим.

1.23. При 25°C объем воды V определяется выражением

$$V = (18 - 7 \cdot 10^{-4}p + 4,6 \cdot 10^{-8}p^2) \text{ см}^3/\text{моль}$$

для давлений p в диапазоне от 1 до 1000 атм, а

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = (4,5 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-6}p) \text{ см}^3/(\text{град} \cdot \text{моль}).$$

Определить работу, необходимую для сжатия 1 моля воды от 1 до 1000 атм при 25°C и найти изменение внутренней энергии.

Ответ: $A \cong 33$ Дж/моль; $\Delta U = -124$ Дж/моль.

Указание: при вычислении ΔU использовать соотношение

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -(\partial V/\partial T)_p.$$

1.24. Выписать условия для функции $\varepsilon = \varepsilon(T)$, задающей закон изменения удельной внутренней энергии идеального газа в зависимости от температуры, при выполнении которых газ будет нормальным (см. (1.22), (1.23)).

1.25. Доказать, что функции состояния нормального газа удовлетворяют неравенствам

$$2(\partial \varepsilon/\partial \tau)_p + p > 0, \quad -2\varepsilon(\partial p/\partial \tau)_s > p^2.$$

1.26. Калорическое уравнение состояние некоторых сред (вода, металлы) часто берется в виде так называемого двучленного уравнения состояния

$$p = A(s)(\rho/\rho_0)^\gamma - \rho_0 c_0^2/\gamma \quad (p > -\rho_0 c_0^2/\gamma),$$

где ρ_0 , c_0 — значения плотности и скорости звука среды в исходном недеформированном состоянии. Найти выражение для удельной внутренней энергии ε в виде $\varepsilon = e(\tau, p)$, принимая $\varepsilon = 0$ при $\rho = \rho_0$ и $p = 0$, и выяснить, выполняются ли условия нормального газа для таких сред.

Ответ: $\varepsilon = \frac{1}{\gamma-1}(\tau p + c_0^2(\tau/\tau_0 - 1))$.

1.27. Показать, что газ с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса не является нормальным газом.

1.28. Вывести уравнение Гиббса — Дюгема

$$SdT - Vdp + \sum_{j=1}^N m_j d\mu_j = 0$$

для N -компонентной открытой системы.

1.29. Вблизи тройной точки (твердое тело — жидкость — газ) кривая равновесия на плоскости (T, p) между твердой и газообразной фазами имеет обычно больший наклон к температурной оси, чем кривая равновесия между жидкой и газообразной фазами. Дать термодинамическое объяснение этого явления.

1.30. Пусть теплота парообразования L не зависит от температуры, а состояния пара описываются уравнениями Клапейрона. Показать, что для давления $p_{\text{пар}}$ насыщенных паров жидкости справедлива зависимость

$$p_{\text{пар}} \sim \exp(-L/RT).$$

2 Законы сохранения и сильный разрыв

2.1 Интегральные законы сохранения

Для произвольного изменяющегося со временем конечного объема $\Omega(t)$ с границей $\Sigma(t)$, занятого газом, определяются следующие величины:

$$\text{масса } m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho d\omega;$$

$$\text{импульс } \mathbf{K}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\omega;$$

$$\text{момент импульса } \mathbf{L}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\omega;$$

$$\text{внутренняя энергия } U(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho \varepsilon d\omega;$$

$$\text{энтропия } S(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho s d\omega;$$

$$\text{полная энергия } E(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \varepsilon \right) d\omega.$$

Входящие в подынтегральные выражения ρ — плотность, \mathbf{v} — вектор скорости, ε — удельная внутренняя энергия, s — удельная энтропия являются функциями точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и времени t . Очевидно, что в случае непрерывности этих функций значения подынтегральных выражений в точке \mathbf{x} в фиксированный момент времени t можно получить как пределы отношений приведенных выше интегралов к величине объема при стягивании объема к точке \mathbf{x} .

Сформулируем основные уравнения математической модели движения невязкого газа (тензор напряжений — шаровой). Введем понятие частицы и индивидуального объема. Для этого рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}.$$

Частицей называется точка пространства \mathbb{R}^3 , закон движения которой задается решением задачи Коши $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ при фиксированном $\boldsymbol{\xi}$.

Объем, состоящий во все моменты времени из одних и тех же частиц, называется *индивидуальным* (или *материальным*) объемом и обозначается далее символом $\omega(t)$, а его граница — символом $\partial\omega(t)$. При движении газа в поле внешних сил с объемной плотностью $\rho \mathbf{f}$ для любого индивидуального объема должны быть выполнены *интегральные законы сохранения*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho d\omega &= 0; \\
\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} d\omega &= - \iint_{\partial\omega(t)} p \mathbf{n} d\sigma + \iiint_{\omega(t)} \rho \mathbf{f} d\omega; \\
\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\omega &= - \iint_{\partial\omega(t)} p (\mathbf{x} \times \mathbf{n}) d\sigma + \iiint_{\omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) d\omega; \\
\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \varepsilon \right) d\omega &= - \iint_{\partial\omega(t)} p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \\
&\quad + \iint_{\partial\omega(t)} q_n d\sigma + \iiint_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\omega.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В формулах (2.1) p — давление, \mathbf{n} — внешняя нормаль к $\partial\omega(t)$, q_n — поверхностная плотность потока тепла, вносимого в этот объем со стороны окружающей его среды ($q_n d\sigma dt$ — количество тепла, сообщенного объему $\omega(t)$ через площадку $d\sigma$ с нормалью \mathbf{n} за время dt). Соотношения (2.1) выражают законы сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии.

Для практических целей удобна следующая форма интегральных законов сохранения (вытекающая из (2.1)) для произвольно меняющегося со временем объема $\Omega(t)$ с границей $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho d\omega + \iint_{\Sigma(t)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - D_n) d\sigma &= 0; \\
\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} d\omega + \iint_{\Sigma(t)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - D_n) d\sigma &= \\
&= - \iint_{\Sigma(t)} p \mathbf{n} d\sigma + \iiint_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} d\omega; \\
\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\omega + \iint_{\Sigma(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - D_n) d\sigma &= \\
&= - \iint_{\Sigma(t)} p (\mathbf{x} \times \mathbf{n}) d\sigma + \iiint_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) d\omega;
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \varepsilon \right) d\omega + \iint_{\Sigma(t)} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \varepsilon \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - D_n) d\sigma = \\ = - \iint_{\Sigma(t)} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \iint_{\Sigma(t)} q_n d\sigma + \iiint_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\omega. \end{aligned}$$

В формулах (2.2) D_n — скорость перемещения поверхности $\Sigma(t)$ в направлении нормали \mathbf{n} . Величина D_n определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{x}_0 \in \Sigma(t)$. Величина $\Delta\sigma$ задается условием $\mathbf{x}_0 + \Delta\sigma\mathbf{n} \in \Sigma(t + \Delta t)$. Тогда по определению

$$D_n(\mathbf{x}_0, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}.$$

Будем считать, что поверхностная плотность потока тепла q_n подчиняется закону Фурье

$$q_n = \kappa(\nabla T \cdot \mathbf{n}), \quad (2.3)$$

где ∇T — градиент температуры T газа, κ — коэффициент теплопроводности. Газ называется *нетеплопроводным*, если $\kappa = 0$. В дальнейшем изучается модель нетеплопроводного газа.

2.2 Условия на сильном разрыве

Движение газа называется *непрерывным*, если подынтегральные функции в (2.1) или (2.2) по крайней мере один раз непрерывно дифференцируемы. Движение газа называется *движением с сильным разрывом*, если существует гиперповерхность $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ такая, что с каждой стороны от нее движение непрерывно, а при переходе через $\Gamma(t)$ искомые величины претерпевают разрыв первого рода. Поверхность $\Gamma(t)$ называется *поверхностью сильного разрыва*.

Пусть \mathbf{n} — нормаль к $\Gamma(t)$, D_n — скорость перемещения $\Gamma(t)$ в направлении \mathbf{n} . Из (2.1) следует, что на $\Gamma(t)$ должны выполняться следующие условия (условия на сильном разрыве):

$$\begin{aligned} [\rho(v_n - D_n)] &= 0; \\ [\rho\mathbf{v}(v_n - D_n) + p\mathbf{n}] &= 0; \\ [\rho(|\mathbf{v}|^2/2 + \varepsilon)(v_n - D_n) + pv_n] &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, $[F] = F_2 - F_1$ — скачок величины F при переходе через $\Gamma(t)$. Анализ соотношений (2.4) показывает, что существуют два типа сильных разрывов: *контактный разрыв* и *ударная волна*.

Условия на контактном разрыве:

$$v_{1n} = v_{2n} = D_n; \quad p_1 = p_2. \quad (2.5)$$

Условия на ударной волне:

$$\begin{aligned} \rho_2 v_2 &= \rho_1 v_1; \\ p_2 + \rho_2 v_2^2 &= p_1 + \rho_1 v_1^2; \\ \varepsilon_2 + p_2 \tau_2 + \frac{1}{2} v_2^2 &= \varepsilon_1 + p_1 \tau_1 + \frac{1}{2} v_1^2; \\ \mathbf{v}_2 - v_{2n} \mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 - v_{1n} \mathbf{n} \\ (v_i &\equiv v_{in} - D_n, \quad i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Часто используются следующие следствия соотношений (2.6):

$$v_1^2 = \tau_1^2 \frac{p_2 - p_1}{\tau_1 - \tau_2}, \quad v_2^2 = \tau_2^2 \frac{p_2 - p_1}{\tau_1 - \tau_2}; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} (v_2 - v_1)^2 &= (p_2 - p_1)(\tau_1 - \tau_2); \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 &= (p_2 + p_1)(\tau_1 - \tau_2)/2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При исследовании ударных волн особое значение имеет соотношение (2.8), связывающее термодинамические величины ε , p , τ . Определим функцию Гюгонио $H(\tau, p; \tau_1, p_1)$ формулой

$$H(\tau, p; \tau_1, p_1) = \varepsilon(\tau, p) - \varepsilon(\tau_1, p_1) + (p + p_1)(\tau - \tau_1)/2. \quad (2.9)$$

Функция $\varepsilon(\tau, p)$ определена уравнением состояния газа $\varepsilon = e(\tau, p)$.

Кривая на плоскости (τ, p) , заданная уравнением

$$H(\tau, p; \tau_1, p_1) = 0, \quad (2.10)$$

называется *адиабатой Гюгонио с центром* (τ_1, p_1) . Для политропного газа уравнение адиабаты Гюгонио можно представить в виде

$$\frac{p}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)\tau_1 - (\gamma - 1)\tau}{(\gamma + 1)\tau - (\gamma - 1)\tau_1} \quad (2.11)$$

Адиабата Гюгонио описывает множество состояний (τ, p) , связанных соотношениями ударного перехода с состоянием (τ_1, p_1) . Качественный вид адиабаты Гюгонио для нормального газа изображен на рис. 2.1. На этом же рисунке указано расположение изэнтропы $s = s_1$, проходящей через точку (τ_1, p_1) . В точке (τ_1, p_1) адиабата Гюгонио и изэнтропа

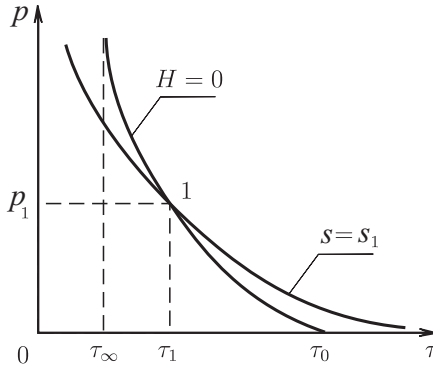


Рис. 2.1

имеют касание второго порядка (совпадают наклоны и кривизны обеих кривых).

Для модели нормального газа адиабата Гюгонио обладает следующими свойствами:

а) уравнение адиабаты Гюгонио можно представить в виде

$$\tau = \tau(p; \tau_1, p_1), \quad \frac{\partial \tau}{\partial p}(p; \tau_1, p_1) < 0;$$

б) энтропия $s(p) = s(p, \tau(p; \tau_1, p_1))$ монотонно возрастает с ростом давления вдоль адиабаты Гюгонио: $s'(p) > 0$ при $p \neq p_1$;

в) $\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{s(p) - s_1}{(p - p_1)^3} = k_1 > 0;$

г) адиабата Гюгонио звездна относительно центра: любой луч, выходящий из центра (τ_1, p_1) , пересекает ее не более чем в одной точке.

Будем называть передней стороной фронта ударной волны (или стороной перед ударной волной) ту сторону, с которой газ натекает на ударный фронт. Противоположная сторона называется задней стороной. Свойства адиабат Гюгонио показывают, что при ударном переходе энтропия изменяется. Из второго начала термодинамики следует, что энтропия в теплоизолированной частице при переходе через ударный

фронт обязательно возрастает. Следствием этого факта является теорема Цемплена: абсолютная величина нормальной скорости газа относительно ударного фронта больше скорости звука перед фронтом ($|v_{1n} - D_n| > c_1$) и меньше скорости звука за фронтом ($|v_{2n} - D_n| < c_2$).

Соотношения на ударной волне (2.6) позволяют определить основные параметры течения по обе стороны ударного фронта и нормальную скорость фронта, если известны \mathbf{v}_1 , p_1 , ρ_1 и одна из следующих величин: а) p_2 , б) ρ_2 , в) D_n , г) v_{2n} . В случаях а) – в) основные параметры определяются однозначно, при этом одновременно определяется соответствие состояний “1”, “2” и сторон фронта. В случае г) при

$$(v_{2n} - v_{1n})^2 < p_1(\tau(0; \tau_1, p_1) - \tau_1)$$

однозначность определения параметров обеспечивается указанием стороны фронта (состояние “1” — за фронтом или перед фронтом). При выполнении противоположного неравенства параметры находятся в случае г) однозначно. В случаях б), в) задаваемые величины должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\text{б) } \tau(0; \tau_1, p_1) > \tau_2 > \tau(\infty; \tau_1, p_1);$$

$$\text{в) } (v_{1n} - D_n)^2 \geq p_1 \tau_1^2 (\tau(0; \tau_1, p_1) - \tau_1)^{-1}.$$

Пример 2.1. Пусть H_1 — адиабата Гюгонио с центром (τ_1, p_1) , и пусть точка $(\tau_2, p_2) \in H_1$. Для нормального газа выяснить взаимное расположение кривой H_1 , адиабаты $s = s_2$ и адиабаты Гюгонио H_2 с центром в точке (τ_2, p_2) .

Решение. Адиабаты Гюгонио H_1 и H_2 заданы уравнениями:

$$H_1 : \quad \varepsilon(\tau, p) - \varepsilon(\tau_1, p_1) + (p + p_1)(\tau - \tau_1)/2 = 0; \tag{2.12}$$

$$H_2 : \quad \varepsilon(\tau, p) - \varepsilon(\tau_2, p_2) + (p + p_2)(\tau - \tau_2)/2 = 0.$$

Так как $(\tau_2, p_2) \in H_1$, то

$$\varepsilon(\tau_2, p_2) - \varepsilon(\tau_1, p_1) + (p_2 + p_1)(\tau_2 - \tau_1)/2 = 0. \tag{2.13}$$

В силу этого соотношения и второго уравнения (2.12) получаем, что $(\tau_1, p_1) \in H_2$, т.е. точки (τ_1, p_1) и (τ_2, p_2) являются общими для адиабат H_1 и H_2 . Покажем, что других точек пересечения у адиабат H_1 и H_2 нет.

Действительно, после вычитания из первого уравнения (2.12) второго с учетом равенства (2.13) получим соотношение

$$(\tau_2 - \tau_1)(p - p_1) = (p_2 - p_1)(\tau - \tau_1). \tag{2.14}$$

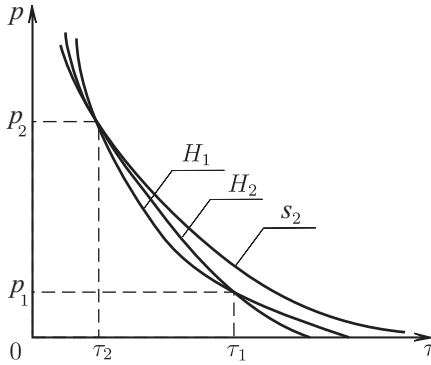


Рис. 2.2

Из (2.14) следует, что множество точек пересечения H_1 и H_2 лежит на прямой, проходящей через точки (τ_1, p_1) и (τ_2, p_2) . В силу свойства звездности адиабаты Гюгонио пересечение прямой (2.14) с H_1 (или H_2) возможно только в двух точках, т. е. в точках (τ_1, p_1) и (τ_2, p_2) .

Для выяснения взаимного расположения адиабат Гюгонио H_1 , H_2 и изэнтропы $s = s_2$ воспользуемся известными свойствами поведения энтропии вдоль адиабаты Гюгонио. Функции $s_1(p) = s(p, \tau_1, p_1)$, $\tau_1(p) = \tau(p; \tau_1, p_1)$, $s_2(p) = s(p, \tau_2, p_2)$, $\tau_2(p) = \tau(p; \tau_2, p_2)$ определяют поведение энтропии и удельного объема вдоль H_1 и H_2 . Дифференцированием тождества $p = g(\tau_i(p), s_i(p))$ получаем равенства

$$1 = g_\tau \frac{d\tau_i}{dp} + g_s \frac{ds_i}{dp} \quad (i = 1, 2).$$

В точке (τ_2, p_2) : $\frac{ds_2}{dp} = 0$, $\frac{ds_1}{dp} > 0$, поэтому

$$\frac{d\tau_2}{dp} - \frac{d\tau_1}{dp} = \left(\frac{g_s}{g_\tau} \right)_2 \cdot \frac{ds_1}{dp} < 0.$$

Изэнтропа $s = s_2$ касается адиабаты Гюгонио H_2 и, следовательно, пересекает кривую H_1 под тем же углом, что и H_2 . Поэтому расположение адиабат H_1 , H_2 и изэнтропы $s = s_2$ будет таким, как на рис. 2.2.

2.3 Дифференциальные уравнения

В классе непрерывных движений газа интегральные законы сохранения могут быть преобразованы к соответствующим дифференциаль-

ным уравнениям. В основе этих преобразований лежит следующая формула дифференцирования интегралов:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} F(\mathbf{x}, t) d\omega = \iiint_{\omega(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F + F \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\omega \quad (2.15)$$

($\omega(t)$ — индивидуальный объем). Выражение $\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F$ называется *полной (материальной, субстациональной) производной* величины F по времени и обозначается символом $\frac{dF}{dt}$.

Дифференциальные уравнения движения невязкого, нетеплопроводного ($\kappa = 0$) газа в случае отсутствия массовых сил ($\mathbf{f} = 0$) имеют вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0. \quad (2.16)$$

Система уравнений (2.16) замыкается уравнением состояния:

$$p = f(\rho, s), \quad \left(f(\rho, s) \equiv g\left(\frac{1}{\rho}, s\right) \right). \quad (2.17)$$

Первое уравнение системы (2.16), называемое *уравнением импульсов*, может быть записано в виде (форма Громеки—Ламба)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.18)$$

где $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, а знак “ \times ” означает векторное произведение.

Движение газа, в котором $\boldsymbol{\omega} = 0$, называется *безвихревым* или *потенциальным*. В случае потенциального движения существует функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$, называемая *потенциалом* скорости, с которой справедливо представление $\mathbf{v} = \nabla \varphi$. Для изэнтропических ($s \equiv \text{const}$) потенциальных движений из (2.18) вытекает *интеграл Коши—Лагранжа*:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + i = A(t), \quad (2.19)$$

где $i = \varepsilon + p\tau$ — удельная энтальпия.

В *установившихся* движениях газа $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \right)$ вдоль линий тока сохраняются энтропия и *полная энтальпия* $h = \frac{q^2}{2} + i$, где $q = |\mathbf{v}|$. Уравнение

$$\frac{q^2}{2} + i = h_0(\mathcal{L}) \quad (2.20)$$

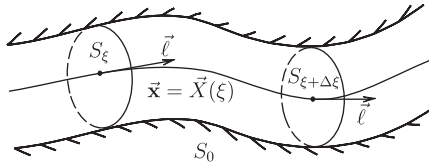


Рис. 2.3

называется *интегралом Бернулли*.

Величина $h_0(\mathfrak{L})$ сохраняет постоянные значения вдоль линий тока (вообще говоря, разные на различных линиях). Для безвихревого изэнтропического установившегося движения h_0 постоянна всюду в области течения.

Следующий пример показывает, как из интегральных законов сохранения можно получить дифференциальные уравнения, описывающие в гидравлическом приближении течение газа в трубе.

Пример 2.2. По теплоизолированному каналу переменного сечения в установившемся режиме течет теплопроводный газ. Предполагая величины \mathbf{v} , p , ρ распределенными однородно на плоских сечениях, ортогональных “средней” линии тока $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ (ξ — длина дуги), вывести приближенные дифференциальные уравнения, описывающие движения газа (гидравлическое приближение).

Решение. Обозначим через $\mathbf{l}(\xi)$ орт касательной к линии тока $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$. Так как ξ — длина дуги, то $\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi}$. Поскольку в плоском сечении S_ξ (рис. 2.3), ортогональном $\mathbf{l}(\xi)$, величины \mathbf{v} , p , ρ постоянны, то они могут быть представлены как функции ξ :

$$p = p(\xi), \quad \rho = \rho(\xi), \quad \mathbf{v} = q(\xi)\mathbf{l}(\xi). \quad (2.21)$$

Для вывода искомых дифференциальных уравнений воспользуемся интегральными законами сохранения массы, импульса и энергии в форме (2.2). В качестве объема Q рассмотрим область, ограниченную плоскими нормальными к линии $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ сечениями S_ξ , $S_{\xi+\Delta\xi}$ и стенкой S_0 канала, отсекаемой этими сечениями (см. рис. 2.3). Обозначив через $F(\xi)$ площадь сечения S_ξ , получим следующее уравнение из закона сохранения массы:

$$(\rho q F)|_{\xi+\Delta\xi} - (\rho q F)|_\xi = 0.$$

Поделив это равенство на $\Delta\xi$ и устремив $\Delta\xi$ к нулю, придем к уравне-

нию

$$\frac{d(\rho q F)}{d\xi} = 0. \quad (2.22)$$

Обратимся теперь к закону сохранения импульса. После вычисления поверхностных интегралов по S_ξ и $S_{\xi+\Delta\xi}$ этот закон дает следующее соотношение:

$$[(\rho q^2 F + pF)\mathbf{l}]_{\xi+\Delta\xi} - [(\rho q^2 F + pF)\mathbf{l}]_\xi + \iint_{S_0} p \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (2.23)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, использовано условие $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{S_0} = 0$. Последнее слагаемое в (2.23) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} p \mathbf{n} d\sigma &= p(\xi) \iint_{S_0} \mathbf{n} d\sigma + O(\Delta\xi) \iint_{S_0} \mathbf{n} d\sigma = \\ &= p(\xi) \iint_{S_0} \mathbf{n} d\sigma + O(\Delta\xi) = p(\xi) \left(- \iint_{S_{\xi+\Delta\xi}} \mathbf{n} d\omega - \iint_{S_\xi} \mathbf{n} d\omega \right) + O(\Delta\xi) = \\ &= -p(\xi) [(\mathbf{l}F)_{\xi+\Delta\xi} - (\mathbf{l}F)_\xi] + O(\Delta\xi), \end{aligned}$$

где $O(\Delta\xi)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{O(\Delta\xi)}{\Delta\xi} = 0.$$

Поделив (2.23) на $\Delta\xi$ и устремив $\Delta\xi$ к нулю, получим равенство

$$\frac{d}{d\xi} [(\rho q^2 F + pF)\mathbf{l}] - p(\xi) \frac{d(\mathbf{l}F)}{d\xi} = 0. \quad (2.24)$$

Так как $\mathbf{l} \cdot \left(\frac{d\mathbf{l}}{d\xi} \right) = 0$, то после скалярного умножения уравнения (2.24) на \mathbf{l} оно преобразуется к виду

$$\frac{d}{d\xi} [\rho q^2 F + pF] - p(\xi) \frac{dF}{d\xi} = 0.$$

В силу уравнения (2.22) последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$q \frac{dq}{d\xi} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} = 0. \quad (2.25)$$

Аналогичные выкладки с привлечением закона сохранения энергии и граничных условий на S_0 : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\varkappa \nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$ приводят к уравнению

$$\frac{d}{d\xi} \left[\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) qF + pqF - \varkappa \frac{dT}{d\xi} F \right] = 0. \quad (2.26)$$

Интегрирование уравнения (2.22) дает равенство

$$\rho qF = G (= \text{const}).$$

Величина G называется расходом газа и равна массе газа, протекающего по каналу в единицу времени через его сечение. Используя это соотношение, уравнение (2.22), основное термодинамическое тождество (1.19), преобразуем (2.26) к виду

$$T \frac{ds}{d\xi} = \frac{1}{G} \frac{d}{d\xi} \left(\varkappa F \frac{dT}{d\xi} \right). \quad (2.27)$$

В итоге получена система уравнений:

$$\begin{aligned} \rho qF &= G; \\ q \frac{dq}{d\xi} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} &= 0; \\ T \frac{ds}{d\xi} &= \frac{1}{G} \frac{d}{d\xi} \left(\varkappa F \frac{dT}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

При заданных G и $F(\xi)$ система (2.28) в совокупности с термодинамическими уравнениями состояния образует замкнутую систему уравнений, описывающую стационарное движение теплопроводного газа в канале с теплоизолированными стенками в гидравлическом приближении.

В примере 2.3 дается вывод дифференциальных уравнений, описывающих простые волны — частные решения системы уравнений (2.16), заданные соотношениями

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\alpha), \quad \rho = \rho(\alpha), \quad p = p(\alpha),$$

где $\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t)$.

Пример 2.3. Показать, что движение газа в невырожденной простой волне (с давлением $p \neq \text{const}$) является изэнтропическим и безвихревым, а поверхности уровня $\alpha(\mathbf{x}, t) = \text{const}$ — плоскими. Вывести уравнения, описывающие простые волны.

Решение. Для указанных частных решений справедливы формулы

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}'(\alpha) \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \rho'(\alpha) \frac{d\alpha}{dt}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{v}'(\alpha) \cdot \nabla \alpha.$$

С учетом этих соотношений уравнения газовой динамики (2.16) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{\rho} p' \nabla \alpha &= 0; \\ \rho' \frac{d\alpha}{dt} + \rho \mathbf{v}' \cdot \nabla \alpha &= 0; \\ s' \frac{d\alpha}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Так как $p'(\alpha) \neq 0$, то из первых двух уравнений (2.29) следует, что $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$. Из последнего уравнения (2.29) вытекает, что $s \equiv \text{const}$ — энтропичность движения газа. После векторного умножения первого уравнения (2.29) на $\nabla \alpha$ получим равенство $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \alpha \times \mathbf{v}' = 0$. Следовательно, течение в простой волне потенциально. Равенство $\mathbf{v}' \times \nabla \alpha = 0$ позволяет представить $\nabla \alpha$ в виде $\nabla \alpha = k(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}'(\alpha)$, где $k(\mathbf{x}, t)$ — некоторая скалярная функция. Из второго уравнения (2.29) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha &= -\frac{\rho}{\rho'} \mathbf{v}' \cdot \nabla \alpha, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= -k \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \frac{\rho}{\rho'} |\mathbf{v}'|^2 \right) = -k \left(qq' + \frac{\rho}{\rho'} |\mathbf{v}'|^2 \right), \end{aligned}$$

где $q = |\mathbf{v}|$. Приведенное выше представление $\nabla \alpha$ и α_t позволяет заключить, что нормаль к каждой поверхности $\alpha = \text{const}$ имеет одно и то же направление для всех точек гиперповерхности. Это означает, что гиперповерхность $\alpha = \text{const}$ является плоскостью.

Домножив первое уравнение (2.29) скалярно на $\nabla \alpha$ и заметив, что $p' = c^2 \rho'$, получим с учетом второго уравнения (2.29) уравнение для функции $\alpha(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - c^2 |\nabla \alpha|^2 = 0. \quad (2.30)$$

Из (2.30) следует, что гиперповерхности $\alpha(\mathbf{x}, t) = \text{const}$ являются звуковыми характеристиками (см. разд. 3).

Из первых двух уравнений системы (2.29) получаем уравнение

$$\rho^2 |\mathbf{v}'|^2 = \rho' p', \quad (2.31)$$

связывающее только функции переменной α . Так как

$$\begin{aligned} d\alpha &= -k \left(qq' + \frac{\rho}{\rho'} |\mathbf{v}'|^2 \right) dt + k \mathbf{v}' \cdot d\mathbf{x} = \\ &= k \left(- \left(qq' + \frac{1}{\rho'} p' \right) dt + \mathbf{v}' \cdot d\mathbf{x} \right), \end{aligned}$$

то на поверхности $\alpha = \text{const}$ необходимо

$$\mathbf{v}' \cdot d\mathbf{x} - \left(qq' + \frac{p'}{\rho} \right) dt = 0.$$

Поскольку в этом уравнении множители при $d\mathbf{x}$ и dt постоянны на поверхности $\alpha = \text{const}$, его можно проинтегрировать:

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{x} - \left(qq' + \frac{p'}{\rho} \right) t = F(\alpha). \quad (2.32)$$

Здесь $F(\alpha)$ — произвольная функция.

Уравнения (2.30)–(2.32) полностью описывают рассматриваемый класс решений — *невыврожденные* ($p \neq \text{const}$) *простые волны*.

2.4 Задачи

2.1. Пусть $\omega(t)$ — индивидуальный объем, а $\Omega(t)$ — произвольно меняющийся со временем объем такой, что $\omega(t_0) = \Omega(t_0)$. Доказать соотношение

$$\left(\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} F d\omega \right) \Big|_{t=t_0} = \left(\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} F d\omega \right) \Big|_{t=t_0} + \iint_{\Sigma(t_0)} F (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - D_n) d\sigma.$$

Здесь $\Sigma(t)$ — граница объема $\Omega(t)$, D_n — скорость перемещения $\Sigma(t)$ в направлении внешней нормали \mathbf{n} к $\Sigma(t)$, \mathbf{v} — вектор скорости, F — произвольная функция переменных \mathbf{x} , t .

2.2. Движущаяся поверхность задана уравнением $h(\mathbf{x}, t) = 0$. Доказать, что D_l — скорость перемещения поверхности в направлении произвольного вектора \mathbf{l} , $|\mathbf{l}| = 1$, вычисляется по формуле

$$D_l = - \frac{h_t}{(\mathbf{l}, \nabla h)}.$$

2.3. Вывести уравнения, описывающие в гидравлическом приближении нестационарное течение теплопроводного газа по криволинейному каналу с теплоизолированными стенками. При выводе уравнений

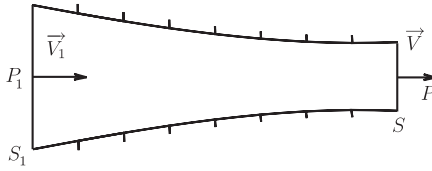


Рис. 2.4

считать в любой момент времени все гидравлические величины постоянными на сечениях, ортогональных к “средней” линии канала, а вектор скорости — направленным по касательной к этой линии.

Указание: Воспользоваться методом примера 2.2.

Ответ:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho F(\xi)) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho q F(\xi)) = 0;$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0;$$

$$\rho T F \left(\frac{\partial s}{\partial t} + q \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\kappa F \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = 0$$

(обозначения те же, что в примере 2.2).

2.4. Рассматривается стационарное течение газа в трубе переменного сечения (рис. 2.4). Доказать, что на участке от S_1 до S на стенки трубы действует сила

$$\mathbf{R} = G(\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}) + p_1 S_1 \frac{\mathbf{V}_1}{|\mathbf{V}_1|} - p S \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Здесь G — расход газа в трубе, S_1 и S — площади выделенных сечений трубы, \mathbf{V}_1 , \mathbf{v} — скорости газа в этих сечениях, p_1 , p — соответствующие давления (скорость в указанных на рис. 2.4 сечениях считается направленной по нормали к сечению).

2.5. Показать, что условие на сильном разрыве, вытекающее из интегрального закона сохранения момента импульса, является следствием условий (2.4).

2.6. Пусть функция $\varepsilon = \varepsilon(\tau, p)$, определяющая уравнение состояния нормального газа, удовлетворяет неравенству $e_p \leq b\tau$ ($b = \text{const} > 0$) для всех p и $\tau < \tau_1$. Показать, что для адиабаты Гюгонио выполнено неравенство $\lim_{p \rightarrow \infty} \tau(p; \tau_1, p_1) = \tau_\infty > 0$.

2.7. Показать, что скорость перемещения ударной волны D_n строго монотонно возрастает вместе с силой разрыва $[p]$, причем $D_n \rightarrow \infty$ при $[p] \rightarrow \infty$.

2.8. Идеальный газ с плотностью ρ_1 сжимается до плотности ρ_2 двумя способами: непрерывным образом и с помощью ударной волны. Выяснить, в каком случае температура газа в конечном состоянии будет выше.

2.9. Когда достигается большая плотность: при сжатии нормального газа одной ударной волной, повышающей давление от p_1 до p_3 , или при последовательном сжатии двумя ударными волнами, если при прохождении первой волны давление повышается от значения p_1 до $p_2 < p_3$, а при прохождении второй — от значения p_2 до p_3 ?

2.10. Выписать уравнение адиабаты Гюгонио в случае, когда свойства среды определяются двучленным уравнением состояния (см. задачу 1.26).

Ответ:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{(\gamma - 1)(p + p_0) + (\gamma + 1)(p_1 + p_0)}{(\gamma - 1)(p_1 + p_0) + (\gamma + 1)(p + p_0)}, \quad p_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma},$$

здесь (τ_1, p_1) — центр адиабаты Гюгонио.

2.11. Пусть газ имеет постоянную теплоемкость C_V и его свойства определяются уравнением состояния:

$$\left(p + \frac{a_1}{\tau^2}\right)(\tau - b_1) = R'T$$

($R' = \frac{R}{M}$, R — газовая постоянная, M — моль газа, a_1, b_1 — постоянные). Выписать уравнение адиабаты Гюгонио.

Ответ:

$$\begin{aligned} p \left(\frac{(\gamma + 1)}{2} \tau - b_1 - \frac{(\gamma - 1)}{2} \tau_1 \right) - p_1 \left(\frac{(\gamma + 1)}{2} \tau_1 - b_1 - \frac{(\gamma - 1)}{2} \tau \right) = \\ = \frac{a_1}{\tau_1^2} (\tau_1 - b_1) - \frac{a_1}{\tau^2} (\tau - b_1). \end{aligned}$$

Здесь (τ_1, p_1) — центр адиабаты Гюгонио.

2.12. Показать, что адиабата Гюгонио для газа с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса может быть кривой, не звездной относительно центра (рассмотреть окрестность критической точки, определяемой соотношениями

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right)_T = 0).$$

2.13. Соотношение Гюгонио $H(\tau_2, p_2, \tau_1, p_1) = 0$ можно трактовать как уравнение гиперповерхности в четырехмерном пространстве. Фиксируя значения двух координат, получаем плоские сечения этой гиперповерхности. Исследовать качественные свойства этих кривых для политропного и нормального газов.

2.14. Выяснить, будет ли ударная волна определена, если известны $v_1 - v_{1n} \mathbf{n}$ и

(а) $v_{1n}, v_{2n}, \rho_1, \rho_2$; (с) v_{1n}, D_n, p_2, ρ_1 ;

(b) v_{1n}, v_{2n}, p_1, p_2 ; (d) v_{1n}, v_{2n}, D_n, p_1 .

(газ политропный). Каким ограничениям должны удовлетворять задаваемые величины?

2.15. Из соотношений на ударной волне в политропном газе получить выражения для величин ρ_2, p_2, v_{2n} через величины ρ_1, p_1, v_{1n}, D_n .

Ответ:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2},$$

$$|v_{2n} - v_{1n}| = \frac{2c_1(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_1}.$$

Здесь $M_1 = |v_{1n} - D_n|/c_1$, c_1 — скорость звука в газе в состоянии “1”, γ — показатель политропы.

2.16. Выписать линеаризованные соотношения на слабой ударной волне ($(p_2 - p_1)/p_1 \ll 1$).

2.17. Доказать, что на фронте слабой ударной волны справедливо соотношение (предполагается, что $D_n > v_{1n}$)

$$v_{1n} + c_1 + v_{2n} + c_2 - 2D_n = O([p]^2).$$

2.18. Вывести дифференциальные уравнения (2.16) из интегральных законов сохранения (2.2).

2.19. Показать, что если в уравнениях (2.16) заменить дифференциальное уравнение $ds/dt = 0$ уравнением

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

то получится система уравнений, эквивалентная системе (2.16).

2.20. Показать, что в теплопроводном газе скорость изменения энтропии в частице задается выражением

$$\frac{ds}{dt} = (\rho T)^{-1} \operatorname{div}(\varkappa \nabla T).$$

2.21. Доказать, что процесс выравнивания температуры в теплоизолированном индивидуальном объеме необратим.

2.22. Пусть \mathcal{L} — замкнутая кусочно-гладкая линия, состоящая во все моменты времени из одних и тех же частиц. Доказать равенство

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{L}} \tau \nabla p d\mathbf{x}.$$

2.23. Показать, что интеграл Бернулли (2.20) для модели политропного газа записывается в виде

$$q^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c^2 = q_m^2(\mathcal{L}).$$

Здесь $q_m^2(\mathcal{L})$ — величина постоянная вдоль линии тока \mathcal{L} .

2.24. Показать, что если в стационарном течении идеального газа линия тока прямолинейна, то поверхности равного давления ортогональны к ней (считается, что $p \neq \text{const}$ на линии тока).

2.25. Доказать, что в безвихревом изэнтропическом движении потенциал скоростей $\varphi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right) - c^2 \Delta \varphi = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \nabla, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

2.26. Проверить, что соотношениями

$$v_x = \frac{x}{t} + a\rho, \quad v_y = v_z = 0, \quad p = \frac{a^2}{3} \rho^3,$$

$$s = s_0, \quad \Phi \left(t\rho, \frac{x}{t} + 2a\rho \right) = 0$$

задано (в неявной форме) точное решение уравнений газовой динамики. Здесь v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат; a, s_0 — постоянные; $\Phi(\lambda, \mu)$ — произвольная функция.

2.27. Показать, что стационарная невырожденная простая волна описывает сверхзвуковое течение газа (течение газа, в котором $|\mathbf{v}| \geq c$).

2.28. Одномерное движение газа с плоскими волнами определяется соотношениями

$$\mathbf{v} = u(x, t) \vec{e}_x, \quad p = p(x, t), \quad \rho = \rho(x, t).$$

Здесь \vec{e}_x — орт декартовой системы координат, отвечающий координате x . Вывести уравнения невырожденных простых волн в одномерном движении.

2.29. Получить уравнения для вырожденных ($p \equiv \text{const}$) простых волн (см. пример 2.3).

2.30. Одномерные движения газа с плоскими ($\nu = 0$), цилиндрическими ($\nu = 1$) и сферическими ($\nu = 2$) волнами определяются соотношениями

$$\mathbf{v} = v(x, t)\nabla x, \quad p = p(x, t), \quad \rho = \rho(x, t),$$

$$x = \begin{cases} x & (\nu = 0); \\ \sqrt{x^2 + y^2} & (\nu = 1); \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (\nu = 2). \end{cases}$$

Показать, что $v(x, t)$, $p(x, t)$, $\rho(x, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$v_t + vv_x + \rho^{-1}p_x = 0,$$

$$p_t + vp_x + \rho c^2 v_x = -\frac{\nu \rho c^2 v}{x},$$

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = -\frac{\nu \rho v}{x}.$$

3 Характеристики уравнений газовой динамики. Слабый разрыв

3.1 Основные определения

Рассматривается система из квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка для m искоемых функций (u_1, \dots, u_m) от n независимых переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl}^i \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = f_k \quad (k = 1, \dots, m). \quad (3.1)$$

Здесь a_{kl}^i, f_k — заданные функции от $\mathbf{x}, u_1, \dots, u_m$. Систему (3.1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n A^i \mathbf{U}_{x_i} = \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

где A^i — матрицы с элементами a_{kl}^i (k — номер строки, l — номер столбца), \mathbf{U} и \mathbf{f} — вектор-столбцы с компонентами u_k и f_k , соответственно.

Дополнительное задание данных Коши на гиперповерхности Γ : $\mathbf{U}|_{\Gamma} = \varphi(\mathbf{x})|_{\Gamma}$ позволяет найти производные вектора \mathbf{U} по касательным к Γ направлениям, если Γ — достаточно гладкая поверхность, а φ — достаточно гладкая функция. Рассмотрим вопрос об определении производных вектора \mathbf{U} по нормальному к Γ направлению с помощью уравнений (3.2). Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — вектор, направленный по нормали к поверхности Γ , а векторы $\boldsymbol{\sigma}_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) образуют базис в касательной плоскости. Любой орт \mathbf{e}_i оси x_i можно разложить по базису $\boldsymbol{\xi}, \{\boldsymbol{\sigma}_k\}$:

$$\mathbf{e}_i = |\boldsymbol{\xi}|^{-2} \xi_i \boldsymbol{\xi} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_i^k \boldsymbol{\sigma}_k.$$

Аналогичное представление получается для производной по направлению вектора \mathbf{e}_i :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = |\boldsymbol{\xi}|^{-2} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_i^k \frac{\partial}{\partial \sigma_k}. \quad (3.3)$$

Здесь $\partial/\partial \xi = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)$, $\partial/\partial \sigma_k = (\boldsymbol{\sigma}_k \cdot \nabla)$. С помощью представления (3.3) система уравнений (3.2) преобразуется к виду

$$|\boldsymbol{\xi}|^{-2} A(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} = - \sum_{k=1}^{n-1} B^k \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma_k} + \mathbf{f}, \quad (3.4)$$

где $A(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n A^i \xi_i$, $B^k = \sum_{i=1}^n \beta_i^k A^i$. Матрица $A(\boldsymbol{\xi})$ называется характеристической матрицей системы. Из (3.4) следует, что производные по направлению нормали $\partial \mathbf{U} / \partial \boldsymbol{\xi}$ можно определить однозначно через известные значения функций и производных по направлениям, касательным к Γ , в том случае, если $\det A(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$. Если $\det A(\boldsymbol{\xi}) = 0$ на поверхности Γ , то, согласно известным теоремам линейной алгебры, для разрешимости уравнений (3.4) относительно $\partial \mathbf{U} / \partial \boldsymbol{\xi}$ необходимо выполнение условий ортогональности

$$\lambda_l(\boldsymbol{\xi}) \sum_{k=1}^{n-1} B^k \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma_k} = \lambda_l(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{f} \quad (l = 1, \dots, m_1) \quad (3.5)$$

вектора, стоящего в правой части уравнений (3.4), всем линейно независимым векторам λ_l , удовлетворяющим равенству

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) A(\boldsymbol{\xi}) = 0. \quad (3.6)$$

Это означает, в частности, что в случае, когда $\det A(\boldsymbol{\xi}) = 0$, данные Коши на Γ нельзя задать произвольно, функция φ должна удовлетворять условиям (3.5). В связи с изложенным выше введем определения.

Определение 1. Вектор $\boldsymbol{\xi}$ называется нормальным характеристическим вектором, если $\det A(\boldsymbol{\xi}) = 0$.

Определение 2. Гиперповерхность Γ называется характеристической поверхностью (характеристикой), если вектор нормали к Γ является нормальным характеристическим вектором.

Определение 3. Система уравнений (3.2) называется гиперболической в точке (\mathbf{x}, \mathbf{U}) , если существует такой вектор $\boldsymbol{\eta}$, что при любом векторе $\boldsymbol{\sigma}$, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0$ характеристическое уравнение

$$\det A(z\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\sigma}) = 0$$

имеет m вещественных корней z_k , а совокупность векторов λ_k , $k = 1, \dots, m$, удовлетворяющих соотношениям (3.6) при $\boldsymbol{\xi} = z_k \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\sigma}$, образует базис в \mathbb{R}^m . Система называется гиперболической, если она гиперболическа в каждой точке (\mathbf{x}, \mathbf{U}) . Направление, задаваемое вектором $\boldsymbol{\eta}$, называется направлением гиперболичности.

Если на заданном решении $\mathbf{U} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ требуется найти характеристическую поверхность Γ , заданную уравнением $h(\mathbf{x}) = 0$, то вектор ∇h направленный по нормали к Γ , должен удовлетворять уравнению

$$\det A(\nabla h) = 0. \quad (3.7)$$

Соотношение (3.7) при известном векторе $\mathbf{U} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ является уравнением с частными производными первого порядка относительно функции $h(\mathbf{x})$.

Определение 4. Равенство

$$\boldsymbol{\lambda}(\nabla h) \cdot \sum_{i=1}^n A^i \mathbf{U}_{x_i} = \boldsymbol{\lambda}(\nabla h) \cdot \mathbf{f} \quad (3.8)$$

называется условием на характеристике $h(\mathbf{x}) = 0$, если $\boldsymbol{\lambda}(\nabla h)$ удовлетворяет уравнению (3.6) при $\boldsymbol{\xi} = \nabla h$.

Согласно (3.5), в соотношение на характеристике (3.8) войдут только производные по касательным к Γ направлениям. В классе непрерывно дифференцируемых решений гиперболической системы уравнений (3.2) совокупность условий на характеристиках эквивалентна исходным уравнениям. Совокупность характеристик можно разбить на семейства характеристических поверхностей, отвечающих различным корням z_k . Если данные Коши на характеристике Γ таковы, что соотношения (3.8) выполнены, то производные по нормали к Γ определяются из уравнений (3.4) неоднозначно, так как уравнение (3.4) с нулевой правой частью имеет нетривиальные решения. Этот факт позволяет строить непрерывные кусочно-гладкие решения уравнений (3.2) путем “склейки” двух гладких решений по характеристической поверхности $h(\mathbf{x}) = 0$. При этом удовлетворяются условия непрерывности решения и его производных по касательным к Γ направлениям, а производные в нормальном направлении могут быть разрывны.

3.2 Слабый разрыв

Определение 5. Гладкая гиперповерхность Γ является поверхностью слабого разрыва решения $\mathbf{U} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$, если решение и его первые производные по касательным к Γ направлениям непрерывны в окрестности Γ , а некоторые из первых производных по направлению нормали, будучи непрерывны вне Γ и односторонне непрерывны на Γ , имеют разрыв первого рода в точках поверхности Γ .

Легко проверяется, что решение уравнений газовой динамики со слабым разрывом удовлетворяет определению обобщенного движения газа.

Если Γ — поверхность слабого разрыва, то Γ -характеристика уравнений (3.2). Действительно, если на Γ вычислить разность предельных

значений величин, входящих в уравнения (3.4), то получим равенство

$$|\xi|^{-2} A(\xi) \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (3.9)$$

(здесь $[\dots]_{\Gamma}$ — обозначение скачка функции на Γ). Так как на поверхности слабого разрыва $[\partial \mathbf{U} / \partial \xi] \neq 0$, то необходимо $\det A(\xi) = 0$, а это и означает, что Γ является характеристикой.

Пример 3.1. Пусть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + k_i(\mathbf{r}, x, t) \frac{\partial r_i}{\partial x} = f_i(\mathbf{r}, x, t)$$

$$(i = 1, \dots, n; \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad k_1 < k_2 < \dots < k_n)$$

имеет слабый разрыв на характеристике $x = x_m(t)$, определяемой дифференциальным уравнением $dx/dt = k_m$. Вывести дифференциальные уравнения для скачков производных на характеристике, если известно решение системы при $x \geq x_m(t)$.

Решение. По определению слабого разрыва производные функций r_j в касательном направлении непрерывны на $x = x_m(t)$:

$$[r_{jt} + k_m r_{jx}] = 0.$$

С учетом уравнений системы и соотношения $[f_j] = 0$ получаем равенство

$$(k_m - k_j)[r_{jx}] = 0.$$

Следовательно, на характеристике

$$[r_{jx}] = 0, \quad j \neq m.$$

Выведем дифференциальное уравнение для $[r_{mx}]$. Для этого продифференцируем m -е уравнение системы по x :

$$\begin{aligned} & \frac{d_m r_{mx}}{dt} + \sum_{j \neq m} \frac{\partial k_m}{\partial r_j} r_{jx} r_{mx} + \frac{\partial k_m}{\partial r_m} r_{mx}^2 + \frac{\partial k_m}{\partial x} r_{mx} = \\ & = \sum_{j \neq m} \frac{\partial f_m}{\partial r_j} r_{jx} + \frac{\partial f_m}{\partial r_m} r_{mx} + \frac{\partial f_m}{\partial x}, \quad \frac{d_m}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + k_m \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Вычислим разность предельных значений на линии $x = x_m(t)$ величин, входящих в уравнение:

$$\frac{d_m}{dt} [r_{mx}] + \left(\sum_{j \neq m} \frac{\partial k_m^+}{\partial r_j} r_{jx}^+ + 2 \frac{\partial k_m^+}{\partial r_m} r_{mx}^+ + \frac{\partial k_m^+}{\partial x} - \frac{\partial f_m^+}{\partial r_m} \right) [r_{mx}] - \frac{\partial k_m^+}{\partial r_m} [r_{mx}]^2 = 0.$$

Здесь φ^\pm — предельные значения $\varphi(x_m(t) \pm 0, t)$, $[r_{mx}] = r_{mx}^+ - r_{mx}^-$. Коэффициенты полученного уравнения заданы, если заданы функции $r_j(x, t)$ в области $x \geq x_m(t)$. Решение обыкновенного дифференциального уравнения определяет величину $[r_{mx}](t)$, если известен начальный скачок производной $[r_{mx}](0)$. Скачки производных по переменной t определяются из соотношения

$$[r_{mt}] = -k_m[r_{mx}].$$

Для систем уравнений, не приводящихся к инвариантам Римана, после соответствующей модификации приведенных выше рассуждений получаются дифференциальные уравнения, описывающие изменение скачков производных решения при движении вдоль характеристической кривой.

3.3 Характеристики уравнений газовой динамики

Систему уравнений газовой динамики можно представить в векторном виде

$$A^t \mathbf{U}_t + A^x \mathbf{U}_x + A^y \mathbf{U}_y + A^z \mathbf{U}_z = 0, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{U} = (u, v, w, p, s)^T$, $b = 1/(\rho c^2)$,

$$A^t = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^x = \begin{pmatrix} \rho u & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & bu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A^y = \begin{pmatrix} \rho v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & bv & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad A^z = \begin{pmatrix} \rho w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & bw & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

Характеристическая матрица $A(\boldsymbol{\xi})$ имеет вид ($\boldsymbol{\xi} = (\tau, \xi, \eta, \zeta)$)

$$A(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \rho\chi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & \rho\chi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \rho\chi & \zeta & 0 \\ \xi & \eta & \zeta & b\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Здесь $\chi = \tau + u\xi + v\eta + w\zeta$. Равенство $\det A(\boldsymbol{\xi}) = 0$ выполнено, если

$$\tau + u\xi + v\eta + w\zeta = 0$$

или

$$\tau + u\xi + v\eta + w\zeta = \mp c\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Система уравнений газовой динамики — гиперболическая система; в качестве направления гиперболичности можно выбрать $\boldsymbol{\eta} = (1, 0, 0, 0)$, при этом

$$\tau = -u\xi - v\eta - w\zeta$$

будет трехкратным корнем характеристического уравнения, каждый из корней

$$\tau = -u\xi - v\eta - w\zeta \mp c\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

— однократным корнем. Соответствующие этим корням векторы $\lambda(\boldsymbol{\xi})$ образуют базис в \mathbb{R}^5 .

Поверхности $h(\mathbf{x}, t) = 0$ называются контактными характеристиками, если функция $h(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z = 0. \quad (3.12)$$

Звуковые характеристики двух семейств C^\pm определяются решениями дифференциальных уравнений:

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z \pm c\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} = 0 \quad (3.13)$$

В дальнейшем контактные характеристики будут обозначаться символом C^0 , а звуковые — символами C^+ или C^- соответственно выбору знака в (3.13).

Если положить $\mathbf{n} = \nabla_{\mathbf{x}}h|\nabla_{\mathbf{x}}h|^{-1}$, $D_n = -h_t|\nabla_{\mathbf{x}}h|^{-1}$, то из (3.13) следует соотношение

$$D_n = u_n \pm c \quad (u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}).$$

Звуковая характеристика, определяемая уравнением (3.13) со знаком “+” в правой части, движется в \mathbb{R}^3 в сторону области $h(\mathbf{x}, t) > 0$ с нормальной скоростью $u_n + c$, а характеристика, соответствующая знаку “−” в (3.13), движется с нормальной скоростью $u_n - c$.

Для построения характеристики на заданном решении достаточно решить задачу Коши для уравнений (3.12) или (3.13) с данными $h(\mathbf{x}, 0) = h_0(\mathbf{x})$. При этом уравнение $h_0(\mathbf{x}) = 0$ определяет начальное положение характеристической поверхности.

Пример 3.2. Пусть задано решение уравнений газовой динамики

$$u = u_1(\mathbf{x}, t), \quad v = v_1(\mathbf{x}, t), \quad w = w_1(\mathbf{x}, t), \quad p = p_1(\mathbf{x}, t), \quad S = S_1(\mathbf{x}, t).$$

Найти уравнение контактной характеристики, если ее положение в момент времени $t = 0$ определено уравнением $h_0(x, y, z) = 0$.

Решение. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений бихарактеристик):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds'} &= 1, & \frac{dx}{ds'} &= u_1(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{ds'} &= v_1(x, y, z, t), & \frac{dz}{ds'} &= w_1(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$t|_{s'=0} = 0, \quad x|_{s'=0} = x_0, \quad y|_{s'=0} = y_0, \quad z|_{s'=0} = z_0.$$

Пусть $t = s'$, $x = x_1(s', x_0, y_0, z_0)$, $y = y_1(s', x_0, y_0, z_0)$, $z = z_1(s', x_0, y_0, z_0)$ — решение задачи Коши. Выразим x_0, y_0, z_0 через x, y, z, t из полученных соотношений. Тогда функция

$$h(\mathbf{x}, t) = h_0(x_0(x, y, z, t), y_0(x, y, z, t), z_0(x, y, z, t)) \quad (3.15)$$

удовлетворяет уравнению

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z = 0 \quad (3.16)$$

и, следовательно, $h(\mathbf{x}, t) = 0$ задает уравнение искомой характеристики. Действительно, так как $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}_1(s', \mathbf{x}_0), s') = \mathbf{x}_0$ при $0 \leq s' \leq t$, то $h(\mathbf{x}_1(s', \mathbf{x}_0), s') = h_0(\mathbf{x}_0)$ и

$$\frac{d}{ds} h(x_1(s', x_0, y_0, z_0), y_1(s', x_0, y_0, z_0), z_1(s', x_0, y_0, z_0), s') = 0.$$

Если положить в этом равенстве $s' = t$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ и учесть уравнения (3.14), то получим равенство (3.16). Выполнение начального условия $h(\mathbf{x}, 0) = h_0(\mathbf{x})$ следует из равенства $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$.

Пример 3.3. Пусть задано решение уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned} u &= u_1(\mathbf{x}, t), & v &= v_1(\mathbf{x}, t), & w &= w_1(\mathbf{x}, t), \\ \rho &= \rho_1(\mathbf{x}, t), & S &= S_1(\mathbf{x}, t), & (p_1 &= f(\rho_1, S_1)). \end{aligned}$$

Найти уравнение звуковой характеристики C^- , если ее положение в момент времени $t = 0$ определено уравнением $h_0(x, y, z) = 0$.

Решение. Введем обозначение $P = h_x$, $Q = h_y$, $R = h_z$. Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений (уравнений бихарактеристик):

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{ds'} &= u_1 - c_1 \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; \\
 \frac{dy}{ds'} &= v_1 - c_1 \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; \\
 \frac{dz}{ds'} &= w_1 - c_1 \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; \quad \frac{dt}{ds'} = 1; \\
 \frac{dP}{ds'} &= c_{1x} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} - u_{1x}P - v_{1x}Q - w_{1x}R; \\
 \frac{dQ}{ds'} &= c_{1y} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} - u_{1y}P - v_{1y}Q - w_{1y}R; \\
 \frac{dR}{ds'} &= c_{1z} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} - u_{1z}P - v_{1z}Q - w_{1z}R; \\
 x|_{s'=0} &= x_0, \quad y|_{s'=0} = y_0, \quad z|_{s'=0} = z_0, \quad t|_{s'=0} = 0, \\
 P|_{s'=0} &= h_{0x_0}(x_0, y_0, z_0), \quad Q|_{s'=0} = h_{0y_0}(x_0, y_0, z_0), \\
 R|_{s'=0} &= h_{0z_0}(x_0, y_0, z_0).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Пусть соотношения $t = s'$, $x = x_1(s', x_0, y_0, z_0)$, $y = y_1(s', x_0, y_0, z_0)$, $z = z_1(s', x_0, y_0, z_0)$ получены в результате решения задачи Коши (3.17). Выразим x_0, y_0, z_0 через t, x, y, z . Функция

$$h(\mathbf{x}, t) = h_0(x_0(\mathbf{x}, t), y_0(\mathbf{x}, t), z_0(\mathbf{x}, t))$$

удовлетворяет уравнению

$$h_t + u_1 h_x + v_1 h_y + w_1 h_z = c_1 \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2},$$

и следовательно, искомая звуковая характеристика задается уравнением $h(\mathbf{x}, t) = 0$.

Замечание. При доказательстве факта, что $h(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению для звуковой характеристики C^- , используется то, что уравнения для P, Q, R получены дифференцированием исходного дифференциального уравнения звуковой характеристики по x, y, z и равенство $h(x_1, y_1, z_1, s') = h_0(x_0, y_0, z_0)$.

Приведенный выше алгоритм построения звуковой характеристической поверхности позволяет строить гладкое решение дифференциальных уравнений в “малом” по времени, так как обращение найденных отображений в общем случае возможно лишь для малых значений

t . Обобщенные решения уравнений (3.13) могут определять негладкие поверхности, имеющие ребра, складки и другие особенности.

Понятие характеристики играет важную роль при качественном анализе газодинамических течений. Движущиеся в \mathbb{R}^3 характеристические поверхности являются волновыми фронтами, ограничивающими области влияния возмущений, возникающих в течении. Например, если по покоящемуся газу распространяется непрерывная волна возмущения, то поверхность, по которой происходит примыкание возмущенного движения к невозмущенному, является характеристической поверхностью, так как только на таких поверхностях возможно непрерывное примыкание двух решений уравнений газовой динамики с разрывом производных.

Если данные Коши $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x})$ имеют слабый разрыв на поверхности $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, то решение уравнений газовой динамики имеет слабые разрывы на контактной и двух звуковых характеристиках, проходящих при $t = 0$ через Γ . В начальный момент происходит распад слабого разрыва, так что

$$\left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi}(\mathbf{x}, 0) \right]_{\Gamma} = \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} \right]^{+} + \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} \right]^{-} + \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} \right]^{0},$$

где $\left[\dots \right]^{\pm, 0}$ — скачки производных на соответствующих характеристиках. Согласно (3.9) $\left[\partial \mathbf{U} / \partial \xi \right]$ на характеристике является собственным вектором соответствующей матрицы $A(\boldsymbol{\xi})$. Разложение $\left[\partial \mathbf{U} / \partial \xi \right]_{\Gamma}$ по собственным векторам матрицы $A(\boldsymbol{\xi})$, соответствующим разным семействам характеристик, определяет $\left[\partial \mathbf{U} / \partial \xi \right]^{\pm, 0}$ на Γ .

3.4 Задачи

3.1. Проверить, что для контактной характеристики ранг характеристической матрицы $A(\boldsymbol{\xi})$ равен двум, и найти три независимых условия на контактной характеристике.

3.2. Показать, что для звуковой характеристики ранг матрицы $A(\boldsymbol{\xi})$ равен четырем, и найти условие на звуковой характеристике.

3.3. Показать, что система уравнений газовой динамики, описывающая установившиеся движения, гиперболична при $|\mathbf{u}| > c$ (c — скорость звука). Показать, что в качестве направления гиперболичности можно выбрать направление вектора скорости.

3.4. Показать, что функции

$$u = \frac{x}{t+t_0}, \quad v = \frac{y}{t+t_0}, \quad w = \frac{z}{t+t_0}, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{t}{t+t_0} \right)^3,$$

$$S = S_0; \quad p = A(S)\rho^3, \quad A(S_0) = \frac{c_0^2}{3\rho_0^2}$$

удовлетворяют системе уравнений газовой динамики. Здесь t_0 , ρ_0 , S_0 , c_0 — заданные положительные постоянные.

3.5. Найти уравнение контактной характеристики на решении, определяемом в условии задачи 3.4, если начальное положение характеристической поверхности задано уравнением $x^2 + y^2 - lz = 0$.

Ответ: $h(\mathbf{x}, t) = x^2 + y^2 - (t+t_0)lzt_0^{-1} = 0$.

3.6. Найти уравнение звуковой характеристики C^- на решении, определяемом в условии задачи 3.4, если известно начальное положение характеристики $h(\mathbf{x}, 0) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$, ($l = \text{const}$).

Ответ:

$$h(\mathbf{x}, t) = x^2 + y^2 - l^2 \left[\left(1 - \frac{c_0 t_0}{3l} \right) \frac{t+t_0}{t_0} + \frac{c_0 t_0}{3l} \left(\frac{t_0}{t+t_0} \right)^2 \right]^2 = 0.$$

3.7. Показать, что функции

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} + \frac{x}{t+t_0} \right), \quad v = v_0, \quad w = w_0,$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{2c_0} \frac{xt_0}{t(t+t_0)}, \quad p = \frac{c_0^2}{3\rho_0^2} \rho^3$$

удовлетворяют системе уравнений газовой динамики (t_0 , v_0 , w_0 , ρ_0 — заданные постоянные, $t_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $c_0 > 0$).

3.8. Найти общее решение дифференциального уравнения для контактных характеристик на решении уравнений газовой динамики, определенном в условии предыдущей задачи.

Ответ: $h(\mathbf{x}, t) = h_1 \left(\frac{x}{\sqrt{t(t+t_0)}}, y - v_0 t, z - w_0 t \right)$, h_1 — произвольная функция.

3.9. Показать, что функции

$$u = \frac{x + ay + bz}{t+t_0}, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

$$\rho = \rho_0 \frac{t_0}{t+t_0}, \quad p = \frac{c_0^2}{3\rho_0^2} \rho^3$$

удовлетворяют системе уравнений газовой динамики (a, b, t_0, ρ_0, c_0 — заданные постоянные, $\rho_0 > 0, c_0 > 0, t_0 > 0$).

3.10. Найти уравнение звуковой характеристики C^- на решении, определенном в условии задачи 3.9, если известно начальное положение характеристики $h(\mathbf{x}, 0) = x + ay + bz - l = 0$ ($l = \text{const}$).

Ответ: $h(\mathbf{x}, t) = x + ay + bz + c_0\sqrt{1 + a^2 + b^2}t - l(t + t_0)t_0^{-1} = 0$.

3.11. Найти характеристическую форму уравнений одномерного движения с плоскими, сферическими, цилиндрическими волнами (см. 2.30).

3.12. Показать, что после введения новых искомым величин (инвариантов Римана)

$$r = u + \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad l = u - \frac{2c}{\gamma - 1}$$

система уравнений одномерного изэнтропического движения политропного газа с плоскими волнами преобразуется к виду

$$r_t + \left(\frac{\gamma + 1}{4}r + \frac{3 - \gamma}{4}l \right) r_x = 0,$$

$$l_t + \left(\frac{\gamma + 1}{4}l + \frac{3 - \gamma}{4}r \right) l_x = 0.$$

3.13. Начальные данные для системы уравнений изэнтропического одномерного движения газа с плоскими волнами заданы в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \geq a, \\ c_0(x - a)(l + a - x)^{-1}, & x < a. \end{cases} \quad c(x, 0) = c_0,$$

($a = \text{const}, c_0 = \text{const}, l = \text{const}$). Вычислить $[u_x]$ на характеристике $x = c_0t + a$ в момент времени t , если известно, что при $x > c_0t + a$ решение постоянно: $u = 0, c = c_0$ (газ политропный).

Ответ: $[u_x] = -c_0(2l + \frac{\gamma+1}{2}c_0t)^{-1}$.

3.14. Показать, что после замены искомым функций, указанной в 3.12, уравнения одномерного изэнтропического движения политропного газа с цилиндрическими ($\nu = 1$) и сферическими ($\nu = 2$) волнами преобразуются к виду

$$r_t + \left(\frac{\gamma + 1}{4}r + \frac{3 - \gamma}{4}l \right) r_x = -\frac{\nu(r^2 - l^2)(\gamma - 1)}{8x},$$

$$l_t + \left(\frac{\gamma + 1}{4}l + \frac{3 - \gamma}{4}r \right) l_x = -\frac{\nu(r^2 - l^2)(\gamma - 1)}{8x}.$$

3.15. Начальные данные для системы уравнений изэнтропического одномерного движения с цилиндрическими волнами те же, что в 3.13. Вычислить $[u_x]$ на характеристике $x = c_0 t + a$ в момент времени t , если при $x > c_0 t + a$ решение постоянно (газ политропный).

Ответ:

$$[u_x] = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c_0 t + a}} \frac{c_0}{l + 2^{-1}(\gamma + 1)(\sqrt{a(c_0 t + a)} - a)}.$$

3.16. Начальные данные для системы уравнений изэнтропического одномерного движения со сферическими волнами те же, что в 3.13. Вычислить $[u_x]$ на характеристике $x = c_0 t + a$ в момент времени t , если при $x > c_0 t + a$ решение постоянно (газ политропный).

Ответ:

$$[u_x] = \frac{2ac_0}{(c_0 t + a)(4l + (\gamma + 1)a \ln[(c_0 t + a)a^{-1}]}.$$

3.17. Показать, что слабый разрыв решения системы уравнений одномерных изэнтропических движений ($\nu = 0, 1, 2$) не может возникнуть либо исчезнуть до тех пор, пока решение и его первые производные остаются ограниченными.

3.18. Доказать, что в одномерном движении политропного газа с плоскими волнами на контактном разрыве выполнено соотношение $[u_x] = 0$.

3.19. В условиях задачи 3.18 показать, что если решение по обе стороны контактного разрыва непрерывно дифференцируемо и $[\rho] \neq 0$ при $t = 0$, то $[\rho] \neq 0$ при $t > 0$.

3.20. Бихарактеристики, выпущенные из некоторой точки (\vec{x}_0, t_0) в сторону $t > t_0$ (или $t < t_0$), образуют характеристический конус, который ограничивает область влияния точки (\vec{x}_0, t_0) . Найти характеристический конус для уравнений газовой динамики на постоянном решении.

3.21. Найти общий вид решения уравнения контактных характеристик на решении уравнений газовой динамики

$$u = u_0(y), \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = p_0, \quad \rho = \rho_0$$

($u_0(y)$ — заданная функция, p_0, ρ_0 — заданные положительные постоянные).

Ответ: $h(\mathbf{x}, t) = F(x - u_0(y)t, y, z)$, F — произвольная функция.

3.22. Найти уравнение звуковой характеристики C^- на решении

$$u = u_0(y), \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = p_0, \quad \rho = \rho_0,$$

если начальное положение характеристики определено уравнением $y^2 + z^2 - l^2 = 0$.

Ответ: $y^2 + z^2 = (l - c_0 t)^2$.

3.23. Рассматривается задача Коши с кусочно-дифференцируемыми начальными данными для системы уравнений одномерного движения с плоскими волнами:

$$u(x, 0) = u_0 \frac{|x| + 2l}{|x| + l}, \quad p(x, 0) = p_0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0,$$

u_0, p_0, ρ_0, l — постоянные. Показать, что в момент времени $t = 0$ на характеристике C^- , выходящей из начала координат, выполнены соотношения $[u_x] = -u_0 l^{-1}$, $[p_x] = -\rho_0 c_0 u_0 l^{-1}$, $[S_x] = 0$, где $p_0 = f(\rho_0, S_0)$, $c_0^2 = f_\rho(\rho_0, S_0)$.

3.24. Найти уравнения звуковых характеристик C^\pm на постоянном решении:

$$\mathbf{v} = 0, \quad p = p_0, \quad \rho = \rho_0,$$

если известно, что в момент времени $t = 0$ они проходят через поверхность Γ , образованную двумя полуплоскостями $\{x = -1, 0 \leq y < \infty, -\infty < z < \infty\}$; $\{y = 1, 0 \leq x < \infty, -\infty < z < \infty\}$ и цилиндрической поверхностью $\{x^2 + y^2 = 1, x \leq 0, y \leq 0, -\infty < z < \infty\}$.

4 Одномерные движения газа

Класс одномерных движений газа с плоскими ($\nu = 0$), цилиндрическими ($\nu = 1$) и сферическими ($\nu = 2$) волнами определяется следующим образом. Пусть x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$, а $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ — базисные векторы этой системы координат. Для $\nu = 0, 1, 2$ определим пространственную координату $x = X_\nu(x^1, x^2, x^3)$ формулой

$$x = X_\nu(x^1, x^2, x^3) = \begin{cases} x^1, & \nu = 0; \\ \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, & \nu = 1; \\ \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, & \nu = 2; \end{cases}$$

Одномерными движениями газа будут называться такие движения, в которых вектор скорости \mathbf{v} , давление p и плотность ρ удовлетворяют следующим функциональным зависимостям:

$$\mathbf{v} = u(x, t)\nabla X_\nu, \quad p = p(x, t), \quad \rho = \rho(x, t). \quad (4.1)$$

Здесь

$$\nabla X_\nu = (\partial X_\nu / \partial x^1)\mathbf{l}_1 + (\partial X_\nu / \partial x^2)\mathbf{l}_2 + (\partial X_\nu / \partial x^3)\mathbf{l}_3.$$

Решения уравнений газовой динамики вида (4.1) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{u}{x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{u}{x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Система уравнений (4.2) является гиперболической и имеет три семейства характеристик C^0, C^+, C^- , определяемых уравнениями

$$(C^0): \quad \frac{dx}{dt} = u(x, t); \quad (C^\pm): \quad \frac{dx}{dt} = u(x, t) \pm c(x, t). \quad (4.3)$$

Пусть $d^0/dt, d^\pm/dt$ — операторы дифференцирования вдоль характеристик C^0, C^\pm . С этими операторами условия на характеристиках (4.3)

запишутся так (характеристическая форма уравнений (4.2)):

$$\begin{aligned} \frac{d^0 p}{dt} - c^2 \frac{d^0 \rho}{dt} &= 0, & \left(\frac{d^0 S}{dt} = 0 \right), \\ \frac{d^+ u}{dt} + \frac{1}{\rho c} \frac{d^+ p}{dt} &= -\frac{\nu}{x} cu, \\ \frac{d^- u}{dt} - \frac{1}{\rho c} \frac{d^- p}{dt} &= \frac{\nu}{x} cu. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1 Инварианты Римана, простые волны

Система уравнений (4.2) и ее характеристическая форма (4.4) значительно упрощаются для *изэнтропических* ($S \equiv S_0 = \text{const}$) одномерных движений газа с плоскими ($\nu = 0$) волнами. В этом случае остаются только два семейства характеристик C^+ и C^- , а условия (4.4) на характеристиках могут быть проинтегрированы. Введение вспомогательной функции

$$\sigma = \int_0^{\rho} \frac{c(\rho', S_0)}{\rho'} d\rho' \quad (4.5)$$

позволяет преобразовать условия на характеристиках C^+ и C^- к виду

$$\frac{d^+(u + \sigma)}{dt} = 0, \quad \frac{d^-(u - \sigma)}{dt} = 0. \quad (4.6)$$

Для политропного газа функция σ имеет вид

$$\sigma = \sqrt{\gamma A(S_0) \rho^{\gamma-1}} = \frac{2c}{\gamma-1}.$$

Функции $r = u + \sigma$ и $l = u - \sigma$ называются *инвариантами Римана*. Уравнения изэнтропических одномерных движений газа с плоскими волнами в инвариантах Римана записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial r}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial l}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial l}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В системе (4.7) функции u и c должны быть выражены через r и l .

Решения, в которых один из инвариантов Римана тождественно постоянен, исчерпывают класс простых волн уравнений (4.7). При этом r -волной (l -волной) называется решение, в котором $r \equiv \text{const}$ ($l \equiv \text{const}$).

Функциональный вид решений — простых r -волн и l -волн — дается следующими выражениями:

$$\begin{array}{ll}
 r\text{-волна :} & l\text{-волна :} \\
 u + \sigma(\rho) = r_0 = \text{const}, & u - \sigma(\rho) = l_0 = \text{const}, \quad (4.8) \\
 x - (u - c)t = F_1(u), & x - (u + c)t = F_2(u).
 \end{array}$$

Второе соотношение (4.8) означает, что в r -волне (l -волне) прямолинейны характеристики семейства C^- (семейства C^+).

Простые волны подразделяются на *простые волны сжатия* ($\rho_t + u\rho_x > 0$) и *простые волны разрежения* ($\rho_t + u\rho_x < 0$). В простых волнах сжатия (разрежения) характеристики прямолинейного семейства сближаются (расходятся) в направлении возрастания времени.

Простые волны, в которых все прямолинейные характеристики пересекаются в одной точке, называются *центрированными простыми волнами* или *волнами Римана*. Если (x_0, t_0) — точка пересечения прямолинейных характеристик, то r и l -волны Римана описываются следующими формулами:

$$\begin{array}{ll}
 r\text{-волна :} & l\text{-волна :} \\
 u + \sigma(\rho) = r_0 = \text{const}, & u - \sigma(\rho) = l_0 = \text{const}, \quad (4.9) \\
 u - c = \frac{x - x_0}{t - t_0}, & u + c = \frac{x - x_0}{t - t_0}.
 \end{array}$$

Значение простых волн при решении конкретных газодинамических задач обусловлено следующим утверждением: в непрерывном движении с плоскими волнами всякое *непостоянное* решение, примыкающее по звуковой характеристике к постоянному, является *простой* волной. При этом по характеристике C^+ примыкает l -волна, а по характеристике C^- — r -волна.

Пример 4.1. В бесконечной трубе, закрытой с одной стороны поршнем, в области $0 < x < \infty$ покоится политропный газ, в котором $c = c_0, \rho = \rho_0$. При $t > 0$ поршень выдвигается из трубы по закону

$$x = X(t) = \begin{cases} -\frac{Vt_0}{2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^2, & 0 < t \leq t_0; \\ -\frac{Vt_0}{2} - V(t - t_0), & t_0 < t < \infty, \end{cases} \quad (4.10)$$

где $V > 0, t_0 > 0$ — постоянные. Требуется найти движение газа при $t > 0$.

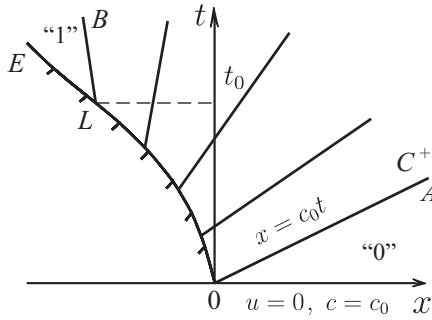


Рис. 4.1

Решение. В предположении непрерывности движения математическая формулировка поставленной задачи будет следующей (рис. 4.1): требуется найти решение уравнений (4.7), удовлетворяющих условиям

$$t = 0 \quad (x > 0); \quad u = 0, \quad c = c_0;$$

$$x = X(t) \quad (t > 0): \quad u = \begin{cases} -Vt/t_0, & 0 < t \leq t_0; \\ -V, & t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (4.11)$$

Если провести из точки O характеристику C^+ , то, в силу теоремы о единственности решения задачи Коши, решение правее этой характеристики будет определяться только начальными данными и, следовательно, будет таким: $u = 0, c = c_0$. Вследствие этого уравнение характеристики OA , проведенной на этом решении, задается выражением $x = c_0 t$.

По характеристике OA к постоянному решению "0" может примыкать либо снова постоянное решение, либо простая l -волна. Поскольку постоянным решением нельзя удовлетворить граничное условие на кривой OLE , задаваемой уравнением (4.10), то слева от OA будет l -волна. Следовательно, во всей области определения решения инвариант $l = u - \frac{2c}{\gamma - 1}$ будет тождественно постоянен и равен

$$l \equiv u - \frac{2c}{\gamma - 1} = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

Отсюда получим

$$c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u, \quad u + c = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u. \quad (4.12)$$

Формулы (4.12) показывают, что на OLE наряду с u будет известна и скорость звука c :

$$c|_{OLE} = \begin{cases} c_0 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{Vt}{t_0}, & 0 < t \leq t_0; \\ c_0 - \frac{\gamma-1}{2} V, & t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (4.13)$$

Так как скорость звука не может быть отрицательной, то необходимо различать два случая:

$$\text{а) } c_0 - \frac{\gamma-1}{2} V \geq 0; \quad \text{б) } c_0 - \frac{\gamma-1}{2} V < 0.$$

Рассмотрим сначала случай (а). Так как на прямой LE величины u и c постоянны, то между C^+ -характеристикой LB , выпущенной из точки L , и прямой LE решение будет тождественно постоянным:

$$(BLE) : u = -V, \quad c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2} V.$$

При этом уравнение характеристики LB таково:

$$LB : x = -\frac{Vt_0}{2} + \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) (t - t_0).$$

Теперь рассмотрим вопрос построения решения в области $AOLB$, занятой простой l -волной. Решение в этой области определяется соотношениями (4.8), которые в нашем случае можно записать так:

$$\begin{aligned} c &= c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u, \\ x - \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} u \right) t &= F(u). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Функцию $F(u)$ определим из граничного условия на OL . В точках кривой OL второе уравнение системы (4.14) примет вид

$$-\frac{Vt_0}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 - \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} \frac{Vt}{t_0} \right) t = F(-Vt/t_0).$$

Отсюда определяем вид функции $F(u)$:

$$F(u) = \frac{t_0}{V} \left(\frac{\gamma}{2} u^2 + c_0 u \right).$$

Теперь из уравнения

$$\frac{t_0}{V} \left(\frac{\gamma}{2} u^2 + c_0 u \right) = x - \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u \right) t$$

находится искомая зависимость $u = u(x, t)$:

$$u = \frac{1}{2\gamma t_0} \left[- (2c_0 t_0 + (\gamma + 1) V t) + \sqrt{(2c_0 t_0 + (\gamma + 1) V t)^2 - 8\gamma V t_0 (c_0 t - x)} \right]. \quad (4.15)$$

Функция $c = c(x, t)$ определяется, в силу (4.14), соотношением $c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u(x, t)$.

Решение в случае (а): $c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} V \geq 0$ построено. Если $c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} V = 0$, то при $t \geq t_0$ на поршне скорость звука равна нулю, а прямые LB и LE совпадают.

Теперь рассмотрим случай (б): $c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} V < 0$. Определим время t_* , когда на поршне впервые обратилась в нуль скорость звука. В силу (4.13), это время равно

$$t_* = \frac{2t_0}{\gamma - 1} \frac{c_0}{V}.$$

Положение поршня $X(t_*)$ и скорость поршня $X'(t_*)$ в этот момент были следующими:

$$x_* = X(t_*) = -\frac{V t_0}{2} \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^2 = -\frac{2t_0 c_0^2}{(\gamma - 1)^2 V}, \quad X'(t_*) = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

Характеристика C_*^+ , выходящая из точки (x_*, t_*) , дается формулой

$$C_*^+ : \quad x - x_* = (u(x_*, t_*) + c(x_*, t_*))(t - t_*) = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0 (t - t_*).$$

Между этой характеристикой и поршнем при $t > t_*$ находится область вакуума ($c = 0$). Правее этой характеристики решение определяется формулой (4.15) и соотношением $c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u(x, t)$.

Решение полностью построено. В ходе решения этой задачи нами установлено также, что скорость u_k истечения покоящегося политропного газа в вакуум дается формулой $u_k = \frac{2}{\gamma - 1} c_0$.

Осуществляя в полученном решении предельный переход $t_0 \rightarrow 0$, $V \equiv \text{const}$, можно получить решение задачи для следующего закона движения поршня:

$$x = X_0(t) \equiv -Vt.$$

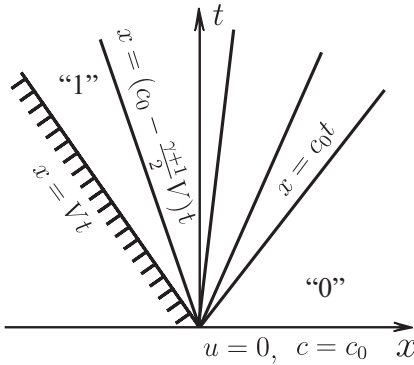


Рис. 4.2: $V \leq 2c_0/(\gamma - 1)$

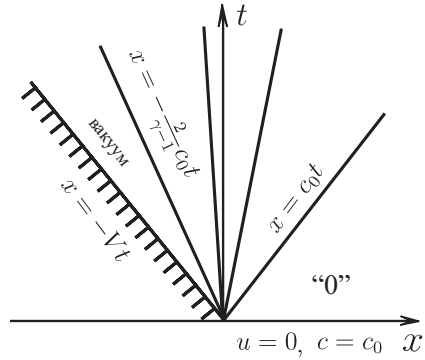


Рис. 4.3: $V > 2c_0/(\gamma - 1)$

Из уравнения характеристики LB и выражения (4.15) для функции $u(x, t)$ получим при $t_0 \rightarrow 0$ ($V \leq \frac{2c_0}{\gamma-1}$)

$$u = \begin{cases} 0, & c_0 t \leq x < \infty; \\ \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), & \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) t \leq x < c_0 t; \\ -V, & -Vt < x < \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) t; \end{cases} \quad (4.16)$$

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u.$$

Для $V > \frac{2c_0}{\gamma-1}$ предельное решение ($t_0 \rightarrow 0$) описывается формулами

$$u = \begin{cases} 0, & c_0 t \leq x < \infty; \\ \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), & -\frac{2c_0}{\gamma-1} t \leq x < c_0 t; \end{cases} \quad (4.17)$$

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u.$$

Непосредственно из (4.16) и (4.17) видно, что при постоянной скорости выдвижения поршня из трубы, заполненной покоящимся газом, решение описывается центрированной волной. На рис. 4.2 и 4.3 изображены картины в плоскости (x, t) , отвечающие двух случаям выдвижения поршня из газа с постоянной скоростью V .

Заметим, что в случае $V > \frac{2c_0}{\gamma-1}$ решение вообще не зависит от V . Это означает, что данное решение может рассматриваться, в частно-

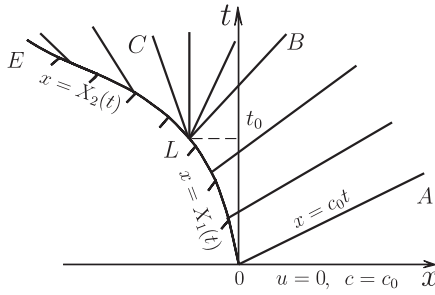


Рис. 4.4

сти, как решение следующей задачи Коши с разрывными начальными данными:

$$t = 0 \quad (x > 0) : \quad u = 0, \quad c = c_0;$$

$$t = 0 \quad (x < 0) : \quad c = 0.$$

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий использование централизованных волн разрежения для разрешения особенностей решения, возникающих из-за нарушения непрерывности в граничных условиях.

Пример 4.2. Пусть поршень, находящийся при $t = 0$ в сечении $x = 0$, выдвигается из покоящегося политропного газа ($0 < x < \infty$) по закону

$$x = X(t) = \begin{cases} X_1(t), & 0 < t \leq t_0; \\ X_2(t), & t_0 < t < \infty, \end{cases}$$

причем функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0, \quad -\frac{2c_0}{\gamma - 1} < X_1'(t) \leq 0, \quad X_1''(t) \leq 0;$$

$$X_1(t_0) = X_2(t_0) = x_0, \quad X_2'(t_0) < X_1'(t_0),$$

$$-\frac{2c_0}{\gamma - 1} < X_2'(t) < 0, \quad X_2''(t) \leq 0.$$

Дать качественное описание структуры решения данной задачи.

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, при $x \geq c_0t$ решением будет $u = 0, c = c_0$. Следовательно, к характеристике OA (рис. 4.4) будет примыкать простая волна. Прямолinéйные характеристики

семейства C^+ , выходящие из точек кривой OLE , задающей закон движения поршня, полностью определяются величиной $\lambda = u + c$, вычисленной на поршне для всех моментов времени. Аналогично предыдущему примеру для $\lambda(t) = (u + c)(X(t), t)$ легко устанавливается формула

$$\lambda(t) = \begin{cases} c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} X_1'(t), & 0 < t \leq t_0; \\ c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} X_2'(t), & t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (4.18)$$

Так как по условиям задачи $X_1''(t) \leq 0$, $X_2''(t) \leq 0$ и $X_2'(t_0) < X_1'(t_0)$, то функция $\lambda(t)$ с ростом t не возрастает и в точке t_0 претерпевает отрицательный скачок, т.е. $\lambda(t_0 + 0) < \lambda(t_0 - 0)$. Это означает, что характеристики C^+ будут образовывать расходящийся в направлении возрастания времени веер, т.е. будет реализовываться волна разрежения. Условия $X_1'(t) > -\frac{2c_0}{\gamma - 1}$, $X_2'(t) > -\frac{2c_0}{\gamma - 1}$ обеспечивают невозможность отрыва поршня от газа.

Рассмотрим характеристики LB и LC , выходящие из точки L , определяемые значениями $\lambda(t_0 + 0)$ и $\lambda(t_0 - 0)$:

$$\begin{aligned} LB: \quad x - x_0 &= \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} X_1'(t_0) \right) (t - t_0); \\ LC: \quad x - x_0 &= \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} X_2'(t_0) \right) (t - t_0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

В областях $AOLB$ и CLE решение определяется уравнениями l -волны (4.8), где для каждой из областей найдется своя функция $F(u)$ посредством удовлетворения граничному условию на поршне. Неопределенным останется решение только в треугольной области BLC . Легко проверить, что центрированная волна разрежения с центром L обеспечивает непрерывное сопряжение решений в областях $AOLB$ и CLE по характеристикам LB и LC .

Действительно, данная l -волна Римана определяется уравнениями

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad u + c = \frac{x - x_0}{t - t_0},$$

откуда находим

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} - c_0 \right), \quad c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} + \frac{2c_0}{\gamma - 1} \right). \quad (4.20)$$

Величины u и c , вычисленные по формулам (4.19), (4.20) на характе-

ристиках LB и LC , будут следующими:

$$\begin{aligned} u|_{LB} &= X_1'(t_0), & c|_{LB} &= c_0 + \frac{\gamma-1}{2}X_1'(t_0); \\ u|_{LC} &= X_2'(t_0), & c|_{LC} &= c_0 + \frac{\gamma-1}{2}X_2'(t_0). \end{aligned}$$

Данные выражения и доказывают факт непрерывного сопряжения простых волн в областях $AOLB$ и CLE с центрированной волной разрежения в области BLC . Структура решения полностью определена.

4.2 Плоскость инвариантов Римана. Градиентная катастрофа

При отыскании решений системы (4.7), не являющихся простыми волнами, иногда бывает целесообразно в качестве независимых переменных выбирать инварианты Римана r и l , а в качестве искомым функций координаты x и t . Эта перемена ролей зависимых и независимых переменных оправдывается тем, что уравнения относительно величин $x = x(r, l)$ и $t = t(r, l)$ оказываются линейными. В данном случае они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l} - (u + c)\frac{\partial t}{\partial l} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial r} - (u - c)\frac{\partial t}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Величины u , c связаны с независимыми переменным r , l формулами

$$u = \frac{r+l}{2}, \quad \sigma(c) = \frac{r-l}{2}. \tag{4.22}$$

Исключением x из (4.21) можно эту систему уравнений привести к одному уравнению относительно функции $t = t(r, l)$:

$$t_{rl} - H(r-l)(t_r - t_l) = 0, \tag{4.23}$$

где функция $H(z)$ определяется формулами

$$z = 2\sigma(c); \quad H(z) = \frac{1 + \sigma'(c)}{4c\sigma'(c)}.$$

Для политропного газа $H(z)$ имеет вид

$$H(z) = \frac{\beta}{z}, \quad \beta = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}. \tag{4.24}$$

Уравнение Дарбу (4.23) превращается в этом случае в уравнение Эйлера—Пуассона:

$$t_{rl} - \frac{\beta}{r-l}(t_r - t_l) = 0. \quad (4.25)$$

С использованием функции $h = \rho c$ уравнение (4.23) может быть преобразовано к самосопряженному виду:

$$(ht_l)_r + (ht_r)_l = 0. \quad (4.26)$$

При решении ряда задач для уравнений (4.26) эффективным бывает применение метода Римана, существенной частью которого является отыскание функции Римана $W(r, l; r_0, l_0)$. Задача об отыскании функции Римана $W(r, l; r_0, l_0)$ для уравнения (4.26) формулируется следующим образом. Найти решение уравнения (4.26), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} W(r_0, l; r_0, l_0) &= \sqrt{\frac{h(r_0 - l_0)}{h(r_0 - l)}}, \\ W(r, l_0; r_0, l_0) &= \sqrt{\frac{h(r_0 - l_0)}{h(r - l_0)}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Таким образом, функция $W(r, l; r_0, l_0)$ является решением специализированной задачи Гурса для уравнения (4.26).

В случае политропного газа, т.е. для уравнения (4.25), функция Римана $W(r, l; r_0, l_0)$ представима в следующем виде:

$$W(r, l; r_0, l_0) = \frac{(r_0 - l_0)^{2\beta}}{(r - l_0)^\beta (r_0 - l)^\beta} F\left(\beta, \beta; 1; \frac{(r_0 - r)(l - l_0)}{(r - l_0)(r_0 - l)}\right), \quad (4.28)$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, представимая при $|z| < 1$ таким степенным рядом:

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{1}{2!} \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}z^2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}z^n + \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Если использовать формулу преобразования

$$F(\beta, \beta; 1; y) = (1 - y)^{-\beta} F\left(\beta, 1 - \beta; 1; \frac{y}{y - 1}\right), \quad (4.30)$$

то легко видеть, что при целых положительных значениях β ряд (4.29) обрывается и, следовательно, представляет собой некоторую элементарную функцию.

Нетрудно заметить, что функция Римана $W(r, l; r_0, l_0)$ дает решение задачи о взаимодействии двух центрированных волн разрежения $r = r_0$ и $l = l_0$, идущих навстречу друг другу по одному и тому же состоянию. Если t_0 — время начала взаимодействия волн, то решение такой задачи будем описываться формулой

$$t = t_0 W(r, l; r_0, l_0). \quad (4.31)$$

Основной сложностью описанного метода решения является нахождение обратного преобразования $r = r(x, t)$, $l = l(x, t)$ после того, как построено решение задачи в виде $t = t(r, l)$, $x = x(r, l)$. Отметим, что обратное преобразование существует не всегда, этим ограничивается область применения метода.

Пример 4.3. Показать, что решение системы уравнений (4.21) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x - (u + c)t &= \frac{\partial U}{\partial r}, \\ x - (u - c)t &= \frac{\partial U}{\partial l} \end{aligned} \quad (4.32)$$

где функция $U = U(r, l)$ удовлетворяет уравнению

$$U_{rl} - \tilde{H}(r - l)(U_r - U_l) = 0. \quad (4.33)$$

Здесь $\tilde{H}(z)$ определяется формулами

$$z = 2\sigma(c), \quad \tilde{H}(z) = \frac{\sigma' - 1}{4c\sigma'} = \frac{\sigma' - 1}{\sigma' + 1} H(z). \quad (4.34)$$

Решение. Пусть функция $c = \tilde{c}(z)$ является решением уравнения $z = 2\sigma(c)$. Тогда уравнения (4.21) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l} - \left(\frac{r+l}{2} + \tilde{c}(r-l) \right) \frac{\partial t}{\partial l} &\equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial l} \left[x - \left(\frac{r+l}{2} + \tilde{c} \right) t \right] + t \left(\frac{1}{2} - \tilde{c}' \right) = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial r} - \left(\frac{r+l}{2} - \tilde{c}(r-l) \right) \frac{\partial t}{\partial r} &\equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial r} \left[x - \left(\frac{r+l}{2} - \tilde{c} \right) t \right] + t \left(\frac{1}{2} - \tilde{c}' \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Из этих уравнений следует, что выражение

$$dU = \left[x - \left(\frac{r+l}{2} + \tilde{c} \right) t \right] dr + \left[x - \left(\frac{r+l}{2} - \tilde{c} \right) t \right] dl$$

является полным дифференциалом функции $U(r, l)$. Вследствие этого получим

$$\begin{aligned} x - \left(\frac{r+l}{2} + \tilde{c} \right) t &= \frac{\partial U}{\partial r}, \\ x - \left(\frac{r+l}{2} - \tilde{c} \right) t &= \frac{\partial U}{\partial l}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Из уравнений (4.36) находим

$$t = -\frac{U_r - U_l}{2\tilde{c}}, \quad x = -\frac{\left(\frac{r+l}{2} - \tilde{c}\right)U_r - \left(\frac{r+l}{2} + \tilde{c}\right)U_l}{2\tilde{c}}. \quad (4.37)$$

Из (4.35) и (4.37) вытекает искомое уравнение для функции $U(r, l)$:

$$U_{rl} - \tilde{H}(r-l)(U_r - U_l) = 0.$$

Типичным для квазилинейных гиперболических уравнений является невозможность существования гладких решений при всех $0 < t < \infty$, даже если начальные или граничные условия обладают какой угодно гладкостью. Например, если решение поставленной задачи описывается простой волной сжатия, то в силу того, что прямолинейные характеристики в ней сближаются с ростом t , они должны пересечься при конечном значении t_* . В точке пересечения x_* прямолинейных характеристик обратятся в бесконечность производные u_x , c_x и т.д. Явление неограниченного роста градиентов основных величин называют “*градиентной катастрофой*”. Дальнейшее построение решения возможно только в классе движений с сильными разрывами.

Изучение возможности образования “градиентной катастрофы” в общем случае проводят с использованием так называемых *транспортных* уравнений, описывающих эволюцию градиентов основных величин вдоль соответствующих характеристик. Вывод транспортных уравнений для системы (4.2) и их подробный анализ для системы (4.7) изложены в [1].

Пример 4.4. В начальный момент времени $t = 0$ в трубе, заполненной покоящимся политропным газом ($0 < x < \infty$), в сечении $x = 0$ находится поршень. При $t > 0$ поршень осуществляет плавное движение по закону $x = X(t)$. Выяснить, при каких условиях возможна “градиентная катастрофа”, и найти время t_k ее образования.

Решение. В области непрерывного движения решение описывается простой l -волной; тогда

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = -\frac{2c_0}{\gamma - 1},$$

где c_0 — скорость звука в покоящемся газе. Система уравнений (4.7) при этом сведется к одному уравнению относительно функции $r = r(x, t)$:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad (4.38)$$

где

$$u = \frac{1}{2} \left(r - \frac{2c_0}{\gamma - 1} \right), \quad c = \frac{\gamma - 1}{4} r + \frac{c_0}{2}. \quad (4.39)$$

Обращение величины $R = r_x$ в бесконечность соответствует образованию градиентной катастрофы. Выведем уравнение, описывающее эволюцию величины R вдоль характеристик C^+ . Для этого продифференцируем уравнение (4.38) по x и учтем формулы (4.39). В результате получим

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\gamma + 1}{4} R^2 = 0.$$

Так как $d^+ R/dt = R_t + (u + c)R_x$ есть производная вдоль характеристики C^+ , то предыдущее уравнение на C^+ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^+ R}{dt} + \frac{\gamma + 1}{4} R^2 = 0. \quad (4.40)$$

Пусть характеристика C^+ выходит из точки $t = \xi$, $x = X(\xi)$, лежащей на линии, задающей закон движения поршня на плоскости (x, t) . Пусть далее R в этой точке равна $R_0(\xi)$. Тогда вдоль этой характеристики C^+ величина R в соответствии с уравнением (4.40) будет даваться формулой

$$R = \frac{4R_0(\xi)}{4 + (\gamma + 1)(t - \xi)R_0(\xi)}.$$

Из нее видно, что при $R_0(\xi) < 0$ величина R обратится в бесконечность при $t = t_*(\xi)$, определяемой формулой

$$t_*(\xi) = \xi - \frac{4}{(\gamma + 1)R_0(\xi)}. \quad (4.41)$$

Теперь осталось определить $R_0(\xi)$ на поршне для всех значений $t = \xi$. Из граничного условия $u(X(t), t) = X'(t)$ на поршне имеем

$$r(X(t), t) - \frac{2c_0}{\gamma - 1} = 2X'(t).$$

Продифференцируем это равенство по t :

$$r_x X'(t) + r_t = 2X''(t). \quad (4.42)$$

Комбинируя (4.42) с (4.38), взятым при $x = X(t)$, получаем

$$\frac{\partial r}{\partial x}(X(t), t) = -\frac{2X''(t)}{c_0 + \frac{\gamma-1}{2}X'(t)}. \quad (4.43)$$

Таким образом, определилась функция $R_0(\xi)$:

$$R_0(\xi) = -\frac{2X''(\xi)}{c_0 + \frac{\gamma-1}{2}X'(\xi)}. \quad (4.44)$$

Подставляя выражение (4.44) в (4.41) получаем

$$t_*(\xi) = \xi + \frac{2c_0 + (\gamma - 1)X'(\xi)}{(\gamma + 1)X''(\xi)}. \quad (4.45)$$

Поскольку в числителе формулы (4.45) стоит удвоенная скорость звука на поршне, то $\infty > t_*(\xi) > \xi$ только при $X''(\xi) > 0$. Это неравенство и дает условие существования градиентной катастрофы. Время ее образования будет определяться формулой

$$t_k = \inf_{\xi(X''(\xi) > 0)} \left[\xi + \frac{2c_0 + (\gamma - 1)X'(\xi)}{(\gamma + 1)X''(\xi)} \right]. \quad (4.46)$$

4.3 (u, p) -диаграммы простых и ударных волн. Распад произвольного разрыва

При исследовании многих задач в классе одномерных движений газа с плоскими волнами используется так называемый *метод (u, p) -диаграмм простых и ударных волн*. В этом методе используется изображение на плоскости (u, p) всех состояний газа, в которые можно перейти из состояния (u_0, p_0, τ_0) с помощью простых или ударных волн. Начальное состояние можно также задавать с помощью параметров u_0, p_0, s_0 (при этом $p_0 = g(\tau_0, s_0)$).

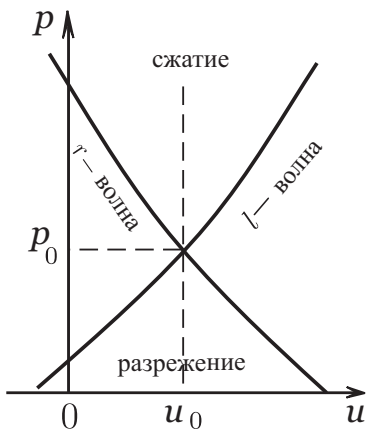


Рис. 4.5

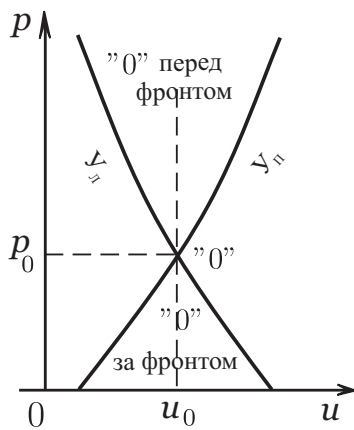


Рис. 4.6

При фиксированном выборе направления оси Ox (слева направо) простые и ударные волны подразделяются на *волны, обращенные вправо* и *волны, обращенные влево*. Говорят, что волна обращена вправо (влево), если состояние перед волной находится справа (слева) от фронта. В соответствии с этим определением *простые l -волны* будут волнами, *обращенными вправо*, а *простые r -волны* — волнами, *обращенными влево*. Если D — скорость ударной волны, распространяющейся по состоянию "0", то при $D - u_0 > 0$ волна обращена вправо, а при $D - u_0 < 0$ волна обращена влево.

Полагая функцию σ , определенную соотношением (4.5), зависящей от давления p , получим следующие уравнения (u, p) -диаграмм простых волн с центром в точке (u_0, p_0) :

$$\begin{aligned} l\text{-волна} : \quad u - \sigma(p; S_0) &= u_0 - \sigma(p_0; S_0); \\ r\text{-волна} : \quad u + \sigma(p; S_0) &= u_0 + \sigma(p_0; S_0). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Для нормального газа вид (u, p) -диаграмм простых волн (4.47) изображен на рис. 4.5. Ветви, на которых $p > p_0$, отвечают волнам сжатия, а ветви, на которых $p < p_0$ — волнам разрежения. Для (u, p) -диаграмм простых волн имеют место формулы

$$\frac{dp}{du} = \pm \rho c, \quad \frac{d^2 p}{du^2} = \frac{\rho}{c} \frac{d(\rho c)}{dp},$$

которые и определяют качественное поведение кривых в случае нормального газа (см. рис. 4.5).

(u, p) -диаграмма ударных волн с центром в точке (u_0, p_0) и заданным значением τ_0 определяется уравнением

$$(u - u_0)^2 = (p - p_0)(\tau_0 - \tau_H(p; \tau_0, p_0)), \quad (4.48)$$

где $\tau = \tau_H(p; \tau_0, p_0)$ — адиабата Гюгонио с центром в точке (τ_0, p_0) . На рис. 4.6 изображены (u, p) -диаграммы ударных волн, обращенных вправо (\mathcal{U}_Π), и ударных волн, обращенных влево (\mathcal{U}_Δ), описываемых уравнением (4.48). Легко устанавливается, что (u, p) -диаграммы простых и ударных волн с общим центром (u_0, p_0) имеют в точке (u_0, p_0) одинаковый наклон и одинаковую кривизну, т. е. имеют касание второго порядка.

Для политропного газа (u, p) -диаграмма простых волн с центром в точке (u_0, p_0) описывается уравнением

$$(u - u_0)^2 = \frac{4\gamma\tau_0 p_0}{(\gamma - 1)^2} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right)^2, \quad (4.49)$$

а (u, p) -диаграмма ударных волн с центром в этой же точке следующим уравнением:

$$(u - u_0)^2 = \frac{2\tau_0(p - p_0)^2}{(\gamma + 1)p + (\gamma - 1)p_0}. \quad (4.50)$$

Одной из задач, эффективно решаемых методом (u, p) -диаграмм, является задача о распаде произвольного разрыва, позволяющая в общем случае определять вид решения в окрестности точек разрыва искомых величин. Постановка задачи такова: в классе обобщенных движений газа с сильными разрывами найти при $t > 0$ решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$t = 0: \quad (u, p, \rho) = \begin{cases} (u_1, p_1, \rho_1), & x < 0; \\ (u_2, p_2, \rho_2), & x > 0; \end{cases} \quad (4.51)$$

где $u_1, p_1, \rho_1, u_2, p_2, \rho_2$ — заданные постоянные. При этом допускается, что газ в состоянии “1” ($x < 0$) и газ в состоянии “2” ($x > 0$) имеют разную физическую природу, т. е. их термодинамические состояния описываются различными уравнениями.

Сформулированная задача является конически автомодельной, т. е. инвариантной относительно следующего преобразования растяжения:

$$x' = ax, \quad t' = at, \quad u' = u, \quad p' = p, \quad \rho' = \rho, \quad (4.52)$$

где a — произвольное положительное число, являющееся параметром преобразования. Инвариантность задачи относительно преобразования (4.52) означает инвариантность начальных условий (4.51), уравнений (4.2) (при $\nu = 0$) и условий на сильных разрывах при преобразовании (4.52).

Отличительным признаком конически автомодельной задачи является задание начальных и граничных условий на лучах, выходящих из одной точки, причем задаваемые величины на лучах должны быть постоянными. В нашем случае данные задаются на лучах ($t = 0, x < 0$) и ($t = 0, x > 0$), выходящих их точки $x = t = 0$.

Решение, инвариантное относительно следующего преобразования растяжения (4.52), имеет вид

$$u = u(\lambda), \quad p = p(\lambda), \quad \rho = \rho(\lambda); \quad \lambda = \frac{x}{t}. \quad (4.53)$$

Так как для решения вида (4.53) искомые функции постоянны на каждом луче $\lambda = \text{const}$, то область $\{t > 0, -\infty < x < \infty\}$ может быть разбита на секторы $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, внутри которых решение непрерывно, а границы секторов являются линиями сильного или слабого разрыва. Заметим также, что непрерывное решение вида (4.53) может быть либо постоянным, либо центрированной волной (r или l). Отсюда вытекает, что построение решения задачи о распаде произвольного разрыва сводится к задаче о сопряжении постоянных решений и центрированных волн разрежения друг с другом непрерывным образом или через контактные разрывы и ударные волны, распространяющиеся с постоянными скоростями.

Анализ возможных вариантов сопряжения показывает, что решение задачи о распаде произвольного разрыва устроено следующим образом: имеется один контактный разрыв, справа и слева от которого находится по одной волне (ударной или волне разрежения), обращенных вправо и влево соответственно. В частности, по состоянию “2” будет распространяться волна, обращенная вправо, переводящая это состояние в состояние “3’”, а по состоянию “1” — волна, обращенная влево, переводящая “1” в состояние “3””. Поскольку состояния “3’” и “3”” разделены контактным разрывом, то должны выполняться равенства

$$p_{3'} = p_{3''} = p_3, \quad u_{3'} = u_{3''} = u_3.$$

Опишем метод решения задачи о распаде произвольного разрыва. Суть его заключается в том, что точка (u_3, p_3) на плоскости (u, p) описывается как точка пересечения *совмещенной* (u, p) -*диаграммы* волн,

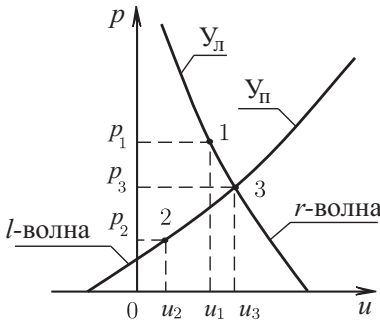


Рис. 4.7

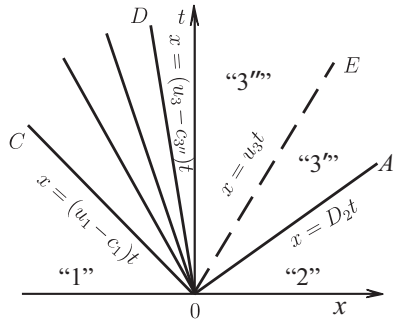


Рис. 4.8

обращенных вправо, с центром (u_2, p_2) и совмещенной (u, p) -диаграммы волн, обращенных влево, с центром (u_1, p_1) (рис. 4.7). Под *совмещенной* (u, p) -*диаграммой* с центром (u_0, p_0) понимается кривая, составленная из (u, p) -диаграммы ударной волны при $p \geq p_0$ и (u, p) -диаграммы простой волны при $p_0 \geq p \geq 0$. Уравнения совмещенных (u, p) -диаграмм с центрами в точках “1” и “2” (см. рис. 4.7) имеют вид

$$u = F_1(p) \equiv \begin{cases} u_1 - \sqrt{(p - p_1)(\tau_1 - \tau_{H_1}(p; \tau_1, p_1))}, & \infty > p \geq p_1; \\ u_1 - \sigma_1(p; s_1) + \sigma_1(p_1; s_1), & 0 \leq p \leq p_2; \end{cases} \quad (4.54)$$

$$u = F_2(p) \equiv \begin{cases} u_2 + \sqrt{(p - p_1)(\tau_2 - \tau_{H_2}(p; \tau_2, p_2))}, & p_2 \leq p < \infty; \\ u_2 + \sigma_2(p; s_2) - \sigma_2(p_2; s_2), & 0 \leq p \leq p_2. \end{cases}$$

Уравнения (4.54) написаны в предположении, что газы в состояниях “1” и “2” описываются различными уравнениями состояния.

После того как найдена точка пересечения кривых $u = F_1(p)$ и $u = F_2(p)$, решение задачи о распаде произвольного разрыва можно считать, в основном, законченным. Действительно, пусть эта точка (u_3, p_3) расположена так, как это показано на рис. 4.7. Тогда картина движения на плоскости (x, t) изобразится следующим образом (рис. 4.8). Луч OE задает уравнение движения контактного разрыва: $x = u_3t$. Состояние “2” переходит в “3” посредством ударной волны OA , а состояние “1” в “3” посредством центрированной r -волны разрежения COD . Величины $\tau_{3'}$ и $\tau_{3''}$ могут быть вычислены из уравнений

$$p_3 = g_1(\tau_{3''}, s_1), \quad \tau_{3'} = \tau_{H_2}(p_3; \tau_2, p_2).$$

В области COD решение находится из соотношений

$$u + \sigma_1(p; s_1) = u_1 + \sigma_1(p_1; s_1), \quad p = g_1(\tau, s_1), \quad u - c = \frac{x}{t}.$$

Наконец, фронты OA , OC и OD волн определяются формулами

$$\begin{aligned} OC: \quad x &= (u_1 - c_1)t; \\ OD: \quad x &= (u_3 - c_{3''})t; \\ OA: \quad x &= D_2 t = \frac{\tau_2 u_3 - \tau_{3'} u_2}{\tau_2 - \tau_{3'}} t. \end{aligned} \tag{4.55}$$

В (4.55) скорость звука $c_{3''}$ в состоянии “3'''” определяется, очевидно, уравнением

$$c_{3''}^2 = -\tau_{3''}^2 \left. \frac{\partial g_1(\tau, s_1)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_{3''}}.$$

Метод (u, p) -диаграмм применяется при решении многих задач с сильными разрывами. Его реализация особенно упрощается, если используется *акустическое приближение* при рассмотрении процессов, в которых относительные значения скачков величин $[p]$, $[\rho]$, $[u]$ малы. В акустическом приближении кривые (u, p) -диаграмм заменяются прямыми, являющимися касательными к этим кривым в центре. (u, p) -диаграммы ударных и простых волн с центром в (u_0, p_0) в акустическом приближении описываются единым уравнением

$$(p - p_0)^2 = \rho_0^2 c_0^2 (u - u_0)^2.$$

Пример 4.5. Бесконечная труба с площадью сечения $S = 100 \text{ см}^2$ заполнена покоящимся воздухом с параметрами $\rho_0 = 0,012 \text{ г/см}^3$, $p_0 = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ и разделена на две части невесомым нетеплопроводным поршнем. Предполагая воздух политропным газом с $\gamma = 1,4$, найти мощность установки, способной мгновенно сообщить поршню скорость $V = 1,25 c_0$ (c_0 — скорость звука в покоящемся воздухе) и параметры воздуха на обеих сторонах поршня в процессе его движения со скоростью V .

Решение. Пусть поршень движется по закону $x = Vt$. Тогда по состоянию “0” справа от поршня пойдет волна, обращенная вправо, а по состоянию “0” слева от поршня — волна, обращенная влево. За этими волнами должны реализовываться состояния с известной скоростью $u = V$. На плоскости (u, p) соответствующие (u, p) -диаграммы этих двух волн изображены кривыми “0”–“1” и “0”–“2” (рис. 4.9).

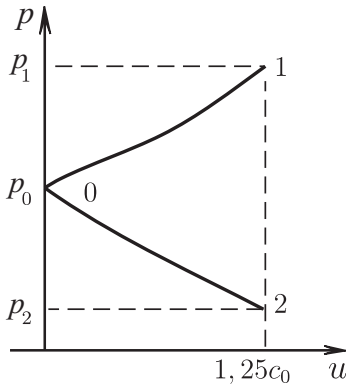


Рис. 4.9

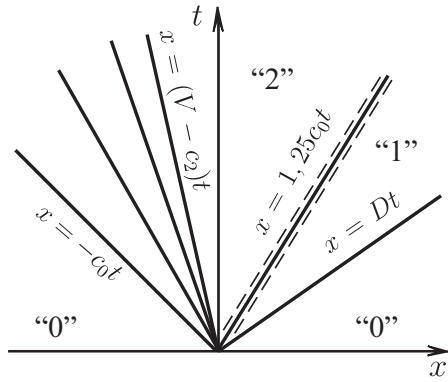


Рис. 4.10

Так как данная задача конически автомодельна, то конфигурация волн, отвечающая (u, p) -диаграмме на рис. 4.9 будет такой, как на рис. 4.10.

Давления p_1 и p_2 рассчитываются на основании уравнений (4.50) и (4.49), описывающих кривые “0”–“1” и “0”–“2”. Для вычисления p_1 имеем уравнение (4.50) при $\gamma = 7/5$, $u_0 = 0$, $u = V$:

$$\frac{25}{16} c_0^2 = \frac{2\tau_0 p_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)^2}{\left(\frac{7}{5} + 1\right) \frac{p_1}{p_0} + \left(\frac{7}{5} - 1\right)} = \frac{25c_0^2 (p_1/p_0 - 1)^2}{7(6p_1/p_0 + 1)}.$$

Здесь использовано соотношение $c^2 = \gamma \tau p$. После элементарных преобразований для величины $p'_1 = p_1/p_0$ получим следующее квадратное уравнение:

$$16(p'_1)^2 - 74p'_1 + 9 = 0.$$

Данное уравнение имеет два корня: $9/2$ и $1/8$. Поскольку p'_1 должен быть больше единицы, то для давления p_1 получим $p_1 = 4,5 p_0$.

Давление p_2 определяется из уравнения (4.49), написанного применительно к r -волне:

$$u - u_0 = -\frac{2c_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right].$$

Полагая здесь $u_0 = 0$, $u = 5c_0/4$, $\gamma = 7/5$, получим для отношения $p'_2 = p_2/p_0$ следующее значение:

$$p'_2 = (0,75)^7 \approx 0,13.$$

Таким образом, для приведения в движение поршня со скоростью $V = 1,25 c_0$ к нему необходимо приложить силу

$$F = (p_1 - p_2)S \approx (4,5 - 0,13)p_0S = 4,37p_0S.$$

Произведение силы F на скорость поршня V даст искомое значение мощности W установки, способной осуществить это движение:

$$\begin{aligned} W &= 4,37 \cdot S \cdot p_0 \cdot 1,25 \left(\frac{7 p_0}{5 \rho_0} \right)^{1/2} = \\ &= 4,37 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 1,25 \left(1,4 \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,2} \right)^{1/2} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx \\ &\approx 1,9 \cdot 10^6 \text{ Вт} = 1,9 \text{ МВт}. \end{aligned}$$

Найдем плотности ρ_1 и ρ_2 в состояниях “1” и “2”, примыкающих к поршню (см. рис. 4.10). Видно, что ρ_1 должно определяться из уравнения адиабаты Гюгонио с центром (τ_0, p_0) , а ρ_2 — из уравнения изэнтропы, проходящей через эту же точку (τ_0, p_0) . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_0} &= \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0} = \frac{(\gamma + 1)\frac{p_1}{p_0} + \gamma - 1}{(\gamma - 1)\frac{p_1}{p_0} + \gamma + 1} \bigg|_{\substack{\gamma=1,4 \\ \frac{p_1}{p_0}=4,5}} = \frac{56}{21} \approx 2,7; \\ \frac{\rho_2}{\rho_0} &= \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{1/\gamma} \bigg|_{\substack{\gamma=1,4 \\ \frac{p_2}{p_0}=0,13}} \approx 0,23. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получим

$$\begin{aligned} p_1 &= 4,5 p_0 = 455850 \text{ Па}, & \rho_1 &= 2,7 \rho_0 = 3,24 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\ p_2 &= 0,13 p_0 = 13169 \text{ Па}, & \rho_2 &= 0,23 \rho_0 = 0,276 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

4.4 Автомодельные течения газа. Законы затухания ударных волн

Для одномерных движений газа с цилиндрическими ($\nu = 1$) и сферическими ($\nu = 2$) волнами условия на характеристиках (4.4) не интегрируются. Для таких движений класс задач, решение которых удается

построить в явной аналитической форме, оказывается довольно узким в отличие от одномерных движений газа с плоскими ($\nu = 0$) волнами.

При решении ряда важных прикладных задач могут быть использованы так называемые *автомодельные решения*. Автомодельными решениями называются решения, инвариантные относительно преобразований растяжения, допускаемых исходной системой уравнений. В частности, легко проверить, что система уравнений (4.2) при $\rho c^2 = \gamma p$ ($\gamma = \text{const}$), т.е. для политропного газа, допускает трехпараметрическую группу преобразований растяжения:

$$t' = at, \quad x' = abx, \quad u' = bu, \quad \rho' = c\rho, \quad p' = cb^2p. \quad (4.56)$$

В (4.56) a, b, c — произвольные вещественные числа, являющиеся параметрами группы преобразований. Допустимость преобразований (4.56) уравнениями (4.2) означает, что после перехода в (4.2) от переменных (t, x, \dots, p) к переменным (t', x', \dots, p') вид этих уравнений не изменяется.

Положив в (4.56) $b = a^{\alpha-1}, c = a^\beta$, где α, β — произвольные (но фиксированные) постоянные, получим следующую однопараметрическую группу преобразований растяжений, допускаемую (4.2) при $\rho c^2 = \gamma p$:

$$t' = at, \quad x' = a^\alpha x, \quad u' = a^{\alpha-1}u, \quad \rho' = a^\beta \rho, \quad p' = a^{\beta+2\alpha-2}p. \quad (4.57)$$

Автомодельные решения уравнений (4.2), инвариантные относительно преобразований (4.57), могут быть представлены в виде

$$u' = \frac{x}{t}U(\lambda), \quad \rho' = t^\beta R(\lambda), \quad p' = r^2 t^{\beta-2} P(\lambda); \quad \lambda = xt^{-\alpha}, \quad (4.58)$$

где U, R, P — искомые функции. После подстановки (4.57) в (4.2) получим систему обыкновенных уравнений относительно функций $U(\lambda), R(\lambda), P(\lambda)$:

$$\begin{aligned} (U - \alpha)\lambda U' + \frac{\lambda}{R}P' - U + U^2 + 2\frac{P}{R} &= 0, \\ (U - \alpha)\lambda R' + \lambda R U' + (\beta + \mu U)R &= 0, \\ (U - \alpha)\lambda P' + \gamma \lambda P U' + ((\mu\gamma + 2)U + \beta - 2)P &= 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

где $\mu = 1 + \nu$.

Анализ этой системы показывает, что ее можно свести к одному независимому уравнению и двум квадратурам. Независимое уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{dZ}{dU} = \frac{Z}{U - \alpha} \frac{M}{N}, \quad (4.60)$$

где

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{P}{R}, \quad M = \left[2\gamma U - (\gamma - 1)(2\alpha + \beta) - 2 \right] Z - \\
 &\quad - (U - \alpha) \left[(\mu(\gamma - 1) + 3 - \gamma) U^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (\gamma - \alpha\mu(\gamma - 1) - 2\alpha - 3) U + 2\alpha \right], \\
 N &= (\mu\gamma U + 2\alpha + \beta - 2) Z - (U - \alpha)(U^2 - U).
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

По известной зависимости $Z(U)$ функции $U(\lambda)$ и $R(\lambda)$ находятся квадратурами из уравнений

$$\begin{aligned}
 \lambda \frac{dU}{d\lambda} &= \frac{(\mu\gamma U + 2\alpha + \beta - 2) Z - (U - \alpha)(U^2 - U)}{(U - \alpha)^2 - \gamma Z}, \\
 \frac{\lambda}{R} \frac{dR}{d\lambda} &= - \frac{\lambda U' + \mu U + \beta}{U - \alpha}.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Полезно отметить, что из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии применительно к объему $\lambda_1 t^\alpha \leq x \leq \lambda_2 t^\alpha$ для автомодельных движений вытекают следующие интегральные соотношения:

$$\begin{aligned}
 (\beta + \alpha(\nu + 1)) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R \lambda^\nu d\lambda &= - \left[\lambda^{\nu+1} R (U - \alpha) \right]_1^2, \\
 (\beta + (\nu + 2)\alpha - 1) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R U \lambda^{\nu+1} d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P \lambda^{\nu+1} d\lambda &= \\
 &= - \left[\lambda^{\nu+2} (P + R U (U - \alpha)) \right]_1^2, \\
 (\beta + (\nu + 3)\alpha - 2) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{1}{2} R U^2 + \frac{1}{\gamma-1} P \right) \lambda^{\nu+2} d\lambda &= \\
 &= - \left[\lambda^{\nu+3} \left(P U + \left(\frac{1}{2} R U^2 + \frac{1}{\gamma-1} P \right) (U - \alpha) \right) \right]_1^2.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Здесь $[f(\lambda)]_1^2 = f(\lambda_2) - f(\lambda_1)$. Для определенных соотношений между параметрами α , β и ν из (4.63) сразу получаются интегралы уравнений (4.59). Например, при $\beta + \alpha(\nu + 3) - 2 = 0$ из последнего уравнения (4.63) получаем такой интеграл уравнения (4.60):

$$ZU + \left(\frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{\gamma-1} Z \right) (U - \alpha) = 0. \tag{4.64}$$

Интеграл (4.64) позволяет получить в аналитической форме решение задачи о сильном взрыве. Постановка этой задачи такова: в по-

коящемся политропном газе с параметрами состояния p_1, ρ_1 , заполняющем все пространство \mathbb{R}^3 , в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$ мгновенно выделилась большая (по сравнению с внутренней энергией газа) *конечная энергия* E_0 (произошел взрыв). При $t > 0$ в газ распространяется ударная волна, вызывающая движение газа. Требуется найти закон перемещения ударной волны и описать движение газа за ее фронтом, пренебрегая давлением в покоящемся газе, т.е. при $p_1 = 0$.

Анализ показывает, что здесь необходимо положить $\beta = 0, \alpha = \frac{2}{\nu+3}$. При этих значениях параметров α и β соотношение (4.64) оказывается выполненным, и тем самым удается получить решение задачи в явной аналитической форме. Практическая применимость решения задачи о сильном точечном разрыве ограничивается начальной стадией взрыва, когда давление за ударной волной значительно превосходит давление перед ней, т.е. когда ударная волна сильная. На больших расстояниях от места взрыва поведение ударных волн можно оценивать с помощью асимптотического решения *задачи о затухании ударных волн*.

В этой задаче для анализа течения за слабой ударной волной вводится *амплитуда ударной волны* $\delta = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c_1^2}$, где индекс “1” относится к состоянию перед волной, а индекс “2” — за волной. Пусть $u_1 = 0$ и волна распространяется в положительном направлении оси x . Из соотношений на ударной волне вытекают следующие соотношения для энтропии s и инварианта Римана l :

$$s_2 - s_1 = O(\delta^3), \quad l_2 - l_1 = O(\delta^3).$$

Предположение о постоянстве энтропии и инварианта Римана l всюду за ударной волной (асимптотическая теория) позволяет проинтегрировать условие на C_+ -характеристике:

$$x^{\nu/2} \rho u = \alpha,$$

где величина α постоянна вдоль C_+ -характеристики, но, вообще говоря, меняется при переходе от одной характеристики к другой.

В итоге предположения асимптотической теории движения слабой ударной волны сводятся к тому, что за фронтом волны предполагаются выполненными следующие уравнения:

$$s = s_1 = \text{const}, \quad l = l_1 = \text{const}, \quad x^{\nu/2} \rho u = \alpha. \quad (4.65)$$

На основе уравнений (4.65) определяются законы затухания ударных волн для одномерных движений газа с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами. В частности, если $x = x_{\Phi}(t)$ — закон движения

затухающей ударной волны, то при $x_{\Phi} \rightarrow \infty$ амплитуда ударной волны δ имеет следующие асимптотические представления:

$$\delta = \begin{cases} \delta_0(x_{\Phi})^{-1/2}, & \nu = 0; \\ \delta_1(x_{\Phi})^{-3/4}, & \nu = 1; \\ \delta_2(x_{\Phi})^{-1}(\ln x_{\Phi})^{-1/2}, & \nu = 2, \end{cases}$$

где $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ - некоторые постоянные.

Пример 4.6. В начальный момент времени $t = 0$ покоящийся политропный газ находится вне сферического поршня радиуса $x_0 > 0$. При $t > 0$ поршень вдвигается в газ по закону

$$x = x_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad t_0 = \frac{x_0}{2\varepsilon c_0},$$

где c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $\varepsilon > 0$ — постоянная. Предполагая $\varepsilon \ll 1$, найти с точностью до $O(\varepsilon^2)$ закон движения ударной волны, распространяющейся по газу от поршня.

Решение. Для скорости поршня V имеем формулу

$$V = \varepsilon c_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{-1/2}.$$

Из нее следует, что скорость поршня при $0 < t < \infty$ монотонно убывает от εc_0 до 0. Это означает, что ударная волна, распространяющаяся от поршня, при всех значениях t может считаться слабой. В соответствии с асимптотической теорией затухания ударной волны для нахождения решения за волной воспользуемся уравнениями (4.65):

$$p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}, \quad u - \frac{2c}{\gamma-1} = -\frac{2c_0}{\gamma-1}, \quad x\rho u = \alpha. \quad (4.66)$$

Здесь α — постоянная вдоль C^+ -характеристик.

Поскольку $u \sim \varepsilon$, $\rho \sim \rho_0 + O(\varepsilon)$, то с точностью до $O(\varepsilon^2)$ последнее уравнение в (4.66) можно заменить следующим: $x\rho_0 u = \alpha$. Рассмотрим характеристику C^+ , выходящую из точки $t = \tau$, $x = x_0\left(1 + \frac{\tau}{t_0}\right)^{1/2}$. В этой точке

$$u = V(\tau) = \varepsilon c_0 \left(1 + \frac{\tau}{t_0}\right)^{-1/2},$$

$$\alpha = x_0 \left(1 + \frac{\tau}{t_0}\right)^{1/2} \rho_0 \varepsilon c_0 \left(1 + \frac{\tau}{t_0}\right)^{-1/2} = \varepsilon \rho_0 c_0 x_0.$$

Следовательно, в (4.66) величина α является тождественно постоянной. Для нахождения решения за ударной волной имеем соотношения

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad u = \frac{\varepsilon c_0 x_0}{x}.$$

Так как для скорости ударной волны D справедливо асимптотическое представление (см. задачу 2.18)

$$D = \frac{1}{2}(u + c + c_0) + O(\varepsilon^2),$$

где u, c — величины за ударной волной, то для нахождения закона движения ударной волны необходимо решить следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c_0 + \frac{\gamma + 1}{4}u + O(\varepsilon^2) = c_0 + \frac{\gamma + 1}{4}\varepsilon c_0 \frac{x_0}{x} + O(\varepsilon^2), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Решение ее дается формулой

$$c_0 t = x - x_0 - \frac{\gamma + 1}{4}\varepsilon x_0 \ln \frac{x}{x_0} + O(\varepsilon^2).$$

4.5 Задачи

4.1. Массовая лагранжева координата $m = m(x, t)$ в одномерном движении определяется уравнениями

$$\frac{\partial m}{\partial x} = x^\nu \rho, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = -x^\nu \rho u.$$

Показать, что после перехода к лагранжевым координатам (m, t) система уравнений (4.2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x^\nu \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} - x^\nu \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{\nu}{x} \tau u, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad p = g(\tau, s).$$

4.2. Найти характеристическую форму уравнений одномерного движения газа в лагранжевых координатах (см. задачу 4.1).

4.3. Показать, что задача Коши для системы уравнений одномерных движений газа с плоскими волнами в лагранжевых переменных

сводится к задаче Коши для системы из двух уравнений. Привести эту систему к инвариантам Римана.

4.4. Показать, что в политропном газе с показателем политропы $\gamma = 3$ характеристики уравнений изэнтропического одномерного движения газа с плоскими волнами являются прямыми линиями на плоскости (x, t) .

4.5. Рассматривается непрерывное изэнтропическое одномерное движение политропного газа ($1 < \gamma \leq 3$) с плоскими волнами. Пусть при $t = 0$ инварианты Римана $r = r_0(x)$ и $l = l_0(x)$ не убывают с ростом x и ограничены. Показать, что производные $r_x, l_x, (u \pm c)_x$ положительны при $t > 0$.

4.6. В условиях предыдущей задачи показать, что для решения задачи Коши справедливы априорные оценки:

$$0 \leq r_x(x, t) \leq \max_x r'_0(x); \quad 0 \leq l_x(x, t) \leq \max_x l'_0(x).$$

Указание: рассмотреть изменение r_x и l_x вдоль характеристик.

4.7. Найти закон движения частиц в простой центрированной r -волне, распространяющейся по покоящемуся политропному газу.

Ответ: для центрированной в точке $x = t = 0$ r -волны закон движения частицы, находящейся при $t = 0$ в точке $x = \xi < 0$, дается формулой

$$x = \begin{cases} \xi, & 0 < t < -\frac{\xi}{c_0}; \\ \frac{2c_0}{\gamma-1}t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\xi \left(-\frac{c_0}{\xi}t\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}, & -\frac{\xi}{c_0} < t < \infty. \end{cases}$$

4.8. Из бесконечной прямолинейной трубы, заполненной при $t = 0$, $x > 0$ покоящимся политропным газом, выдвигается плоский поршень по закону

$$x = X(t) \equiv -\frac{2c_0}{\gamma-1}t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}L \left(\left(1 + \frac{c_0}{L}t\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} - 1 \right).$$

Здесь c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $L > 0$ — постоянная, γ — показатель политропы газа. Найти движение газа при $t > 0$.

Ответ:

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}u,$$

$$u = \begin{cases} 0, & c_0t \leq x < \infty; \\ \frac{2c_0}{\gamma+1} \frac{x - c_0t}{c_0t + L}, & X(t) < x < c_0t. \end{cases}$$

4.9. Плоский поршень, занимавший в момент времени $t = 0$ положение $x = 0$, выдвигается по закону $x = -c_0^2 t^2 / L$ из трубы, заполненной при $x > 0$ покоящимся политропным газом. Найти движение газа при $t > 0$ и момент времени t_0 отрыва поршня от газа (c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $L > 0$ — постоянная).

Ответ:

$$u = \frac{2}{\gamma - 1}(c - c_0); \quad t_0 = \frac{L}{(\gamma - 1)c_0};$$

$$c = \begin{cases} c_0, & c_0 t \leq x < \infty; \\ c(x, t), & -\frac{c_0^2}{L} t^2 < x < c_0 t \quad (t \leq t_0); \\ c(x, t), & \frac{L}{(\gamma - 1)^2} - \frac{2c_0}{\gamma - 1} t \leq x < c_0 t \quad (t > t_0); \\ 0, & -\infty < x < \frac{L}{(\gamma - 1)^2} - \frac{2c_0}{\gamma - 1} t \quad (t > t_0); \end{cases}$$

где

$$c(x, t) = c_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{L} c_0 t \right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma + 1}{L} c_0 t \right)^2 - \frac{4\gamma}{L} (c_0 t - x)} \right].$$

4.10. В условиях предыдущей задачи поршень выдвигается из трубы по закону

$$x = -Vt - \frac{c_0^2}{L} t^2, \quad \left(0 < V < \frac{2}{\gamma - 1} c_0, \quad L > 0 \right),$$

где V, L — постоянные, c_0 — скорость звука в покоящемся газе. Найти движение газа при $t > 0$ и момент времени t_0 отрыва поршня от газа.

Ответ:

$$u = \frac{2}{\gamma - 1}(c - c_0); \quad t_0 = \frac{L}{c_0} \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{V}{2c_0} \right);$$

$$c = \begin{cases} c_0, & c_0 t \leq x < \infty; \\ c_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), & \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) t \leq x < c_0 t; \\ c(x, t), & -Vt - \frac{c_0^2}{L} t^2 < x < \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) t, \\ & (t \leq t_0); \\ c(x, t), & x_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} (t-t_0) \leq x < \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) t, \\ & (t > t_0); \\ 0, & -\infty < x < x_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} (t-t_0) \quad (t > t_0). \end{cases}$$

Здесь

$$x_0 = -L \frac{4c_0^2 - (\gamma-1)^2 V^2}{4c_0^2 (\gamma-1)^2},$$

$$c(x, t) = c_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{4\gamma} \left(2 + (\gamma+1) \frac{V}{c_0} + 2 \frac{\gamma+1}{L} c_0 t \right) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma-1}{4\gamma} \sqrt{\left(2 - (\gamma+1) \frac{V}{c_0} + 2 \frac{\gamma+1}{L} c_0 t \right)^2 - \frac{16\gamma}{L} \left(c_0 t - x - \frac{\gamma+1}{2} V t \right)} \right].$$

4.11. Поршень выдвигается из бесконечной трубы, заполненной при $0 < x < \infty$ покоящимся политропным газом, по закону

$$x = X(t) \equiv -\frac{2}{\gamma-1} c_0 t + \frac{\gamma+3}{\gamma-1} L \left(\left(1 + \frac{c_0}{2L} t \right)^{\frac{2}{\gamma+1}} - 1 \right)$$

(c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $L > 0$ — постоянная). Найти движение газа при $t > 0$.

Ответ:

$$u = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0);$$

$$c = \begin{cases} c_0, & c_0 t \leq x < \infty; \\ c_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(c_0 - \frac{x}{t} \right), & \frac{c_0}{2} t \leq x < c_0 t; \\ c_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} c_0 \frac{c_0 t - x + L}{c_0 t + 2L}, & X(t) < x < \frac{c_0}{2} t. \end{cases}$$

4.12. Из покоящегося политропного газа, заполняющего при $t = 0$ область $0 < x < \infty$, выдвигается по закону

$$x = \begin{cases} -\frac{c_0^2}{L}t^2, & 0 < t \leq \frac{L}{2(\gamma-1)c_0} \equiv t_0; \\ \frac{L}{2(\gamma-1)^2} - \frac{3c_0}{2(\gamma-1)}t, & t_0 < t < \infty \end{cases}$$

плоский поршень (c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $L > 0$ — постоянная). Найти движение газа при $t > 0$.

Ответ:

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}u;$$

$$u = \begin{cases} 0, & c_0t \leq x < \infty; \\ U_1(x, t), & -\frac{c_0^2}{L}t^2 < x < c_0t \quad (t \leq t_0); \\ U_1(x, t), & X_1(t) \leq x < c_0t \quad (t > t_0); \\ U_2(x, t), & X_2(t) \leq x < X_1(t) \quad (t > t_0); \\ -\frac{3c_0}{2(\gamma-1)}, & \frac{L}{2(\gamma-1)^2} - \frac{3c_0}{2(\gamma-1)}t < x < X_2(t) \quad (t > t_0), \end{cases}$$

где

$$U_1(x, t) = \frac{c_0}{\gamma} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\gamma+1}{L}c_0t\right)^2 - \frac{4\gamma}{L}(c_0t-x)} - \left(1 + \frac{\gamma+1}{L}c_0t\right) \right],$$

$$U_2(x, t) = -\frac{2c_0}{\gamma+1} + \frac{4(\gamma-1)^2x + L}{(\gamma^2-1)(2(\gamma-1)c_0t-L)}c_0;$$

$$X_1 = \frac{2-\gamma}{4(\gamma-1)^2}L + \frac{\gamma-3}{2(\gamma-1)}c_0t, \quad X_2 = \frac{5-\gamma}{8(\gamma-1)^2}L + \frac{\gamma-7}{4(\gamma-1)}c_0t.$$

4.13. Найти скорость движения свободного поршня массы M в неограниченной трубе с площадью сечения F под действием давления расширяющегося политропного газа. В начальный момент времени газ покоился ($u = 0$, $c = c_0$, $p = p_0$), на обратной стороне поршня давление равно нулю во все моменты времени.

Ответ:

$$V = \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma+1}{2c_0} \frac{Fp_0}{M} t \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} \right].$$

4.14. Поршень, находившийся при $t = 0$ в сечении $x = 0$ прямолинейной трубы, вдвигается при $t > 0$ в газ, первоначально покоившийся в области $0 < x < \infty$. Закон движения поршня таков, что все характеристики семейства C^+ простой волны пересекаются в одной точке при $t = t_0 > 0$. Найти закон движения поршня при $t < t_0$.

Ответ:

$$x = c_0 t_0 \left[1 + \frac{2}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{\gamma + 1}} \right],$$

где c_0 — скорость звука в покоящемся газе.

4.15. В момент времени $t = 0$ газ покоится в прямолинейной трубе между двумя поршнями, отстоящими друг от друга на расстоянии L . Показать, что путем выбора соответствующих законов движения поршней газ между двумя поршнями можно за конечное время изэнтропически перевести в состояние покоя с наперед заданным значением давления.

Указание: использовать одномерные течения в центрированных волнах сжатия и разрежения.

4.16. В условиях предыдущей задачи найти работу A , которую надо затратить на движение поршней, для того чтобы первоначальный объем политропного газа V_0 , находящийся под давлением p_0 , изэнтропически перевести в равновесное состояние покоящегося газа с давлением p_1 .

Ответ:

$$A = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right).$$

4.17. Показать, что решение задачи о взаимодействии центрированных волн разрежения, распространяющихся навстречу друг другу, определяется формулой

$$t = t_0 W(r, l; r_0, l_0).$$

Здесь t_0 — время начала взаимодействия волн, $W(r, l; r_0, l_0)$ — функция Римана, определенная в разделе 4.2 как решение задачи (4.26)–(4.27), r и l — инварианты Римана, r_0 и l_0 — значения инвариантов Римана в простых волнах.

4.18. Показать, что функция Римана $W(r, l; r_0, l_0)$ для политропного газа с $\gamma = 5/3$ дается формулой

$$W(r, l; r_0, l_0) = \frac{r_0 - l_0}{(r - l)^3} ((r - l_0)(r_0 - l) + (r_0 - r)(l - l_0)).$$

4.19. Показать, что функция Римана $W(r, l; r_0, l_0)$ для политропного газа с $\gamma = 1, 4$ дается формулой

$$W(r, l; r_0, l_0) = \frac{r_0 - l_0}{(r - l)^5} \left[7(r_0 - r)^2(l - l_0)^2 + (r - l_0)^2(r_0 - l)^2 + 4(r_0 - r)(l - l_0)(r - l_0)(r_0 - l) \right].$$

4.20. Пусть $t = t(r, l)$ — решение уравнения Эйлера — Пуассона (4.25). Показать, что функция

$$\tilde{t} = \frac{1}{r - l}(t_r - t_l)$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{t}_{rl} - \frac{\beta + 1}{r - l}(\tilde{t}_r - \tilde{t}_l) = 0.$$

4.21. Найти общее решение системы уравнений (4.21) для политропного газа с показателем политропы $\gamma = 3$.

Указание: воспользоваться решением примера 4.3.

Ответ:

$$t = \frac{F(r) + G(l)}{r - l}, \quad x = \frac{lF(r) + rG(l)}{r - l},$$

где $F(r)$ и $G(l)$ — произвольные функции.

4.22. Найти общее решение системы уравнений (4.21) для политропного газа с показателем политропы $\gamma = 5/3$.

Указание: воспользоваться примером 4.3 и задачей 4.20.

Ответ:

$$t = \frac{F'(r) - G'(l)}{(r - l)^2} - 2 \frac{F(r) + G(l)}{(r - l)^3},$$

$$x = \frac{(r + 2l)F'(r) - (2r + l)G'(l)}{3(r - l)^2} - 2 \frac{(r + l)(F(r) + G(l))}{(r - l)^3},$$

где $F(r)$ и $G(l)$ — произвольные функции.

4.23. В бесконечной прямолинейной трубе между двумя заслонками, занимающими положения $x = 0$ и $x = L > 0$, покоится политропный газ ($\gamma = 3$). В момент времени $t = 0$ заслонка ($x = 0$) убирается, и происходит истечение газа в вакуум. Найти распределение скорости звука c и скорости газа u в трубе при $t > 0$.

Ответ:

$$(c, u)|_{t \leq \frac{L}{c_0}} = \begin{cases} (c_0, 0), & c_0 t \leq x \leq L; \\ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right) \right), & -c_0 t < x < c_0 t; \\ (0, \dots), & -\infty < x < -c_0 t; \end{cases}$$

$$(c, u)|_{t > \frac{L}{c_0}} = \begin{cases} \left(\frac{L}{t}, \frac{x-L}{t} \right), & 2L - c_0 t \leq x \leq L; \\ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right) \right), & -c_0 t < x < 2L - c_0 t; \\ (0, \dots), & -\infty < x < -c_0 t. \end{cases}$$

4.24. Политропный газ с показателем политропы $\gamma = 3$ при $t = 0$ покоится в трубе между неподвижной стенкой ($x = L$) и поршнем ($x = 0$). При $t > 0$ поршень выдвигается из газа с постоянной скоростью $V = -c_0/2$, где c_0 — скорость звука в покоящемся газе. Найти распределения скорости газа u и скорости звука c в трубе в момент времени $t = 4L/c_0$.

Ответ:

$$(c, u) = \begin{cases} \left(c_0 \frac{2L-x}{8L}, c_0 \frac{x-2L}{8L} \right), & -2L < x < 0; \\ \left(\frac{c_0}{4}, c_0 \frac{x-L}{4L} \right), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

4.25. Центрированные волны разрежения, определяемые соотношениями $r = r_0$ и $l = l_0$, соответственно, распространяются навстречу друг другу по политропному газу ($\gamma = 5/3$). В момент времени $t = t_0$ в точке $x = x_0$ начинается взаимодействие волн. Найти решение уравнений (4.21) в области взаимодействия.

Ответ:

$$t = t_0 \frac{r_0 - l_0}{(r - l)^3} \left[(r_0 + l_0)(r + l) - 2(rl + r_0 l_0) \right],$$

$$x - x_0 = t_0 \frac{r_0 - l_0}{3(r - l)^3} \left[2(r_0 + l_0)(r^2 + rl + l^2) - 4r^2 l - (r + l)(l^2 + 3r_0 l_0) \right] - \frac{t_0}{3} (2r_0 + l_0).$$

4.26. Политропный газ с показателем политропы $\gamma = 5/3$ при $t = 0$ покоится в области между неподвижной стенкой ($x = L$) и поршнем ($x = 0$). При $t > 0$ поршень выдвигается из газа по закону $x = -Vt$, где

$V > 0$ — постоянная. Показать, что при $V \geq 3c_0/2$ (c_0 — скорость звука в покоящемся газе) скорость звука c на стенке изменяется по закону

$$c = \begin{cases} c_0, & 0 \leq t \leq L/c_0; \\ c_0 a(t), & L/c_0 < t < \infty, \end{cases}$$

где $a(t)$ — положительный корень уравнения:

$$\frac{2c_0 t}{L} a^3 - a^2 - 1 = 0.$$

4.27. В условиях предыдущей задачи показать, что давление p газа на стенку $x = L$ при $t \rightarrow \infty$ определяется следующей асимптотической формулой:

$$p = p_0 \left(\frac{L}{2c_0 t} \right)^{5/3} + O(t^{-7/3}).$$

Здесь p_0 — давление при $t = 0$.

4.28. Для уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$ рассматривается задача Коши

$$u(x, 0) = \begin{cases} \alpha a + b, & -\infty < x < \alpha; \\ ax + b, & \alpha \leq x \leq \beta; \\ \beta a + b, & \beta < x < \infty; \end{cases}$$

(α, β, a, b — постоянные). Найти решение задачи Коши и выяснить условия, при которых возникает “градиентная катастрофа”.

Ответ: при $a < 0$ “градиентная катастрофа” возникает в момент времени $t_k = -a^{-1}$.

4.29. Найти момент наступления “градиентной катастрофы” t_k в решении задачи Коши с начальными данными $r(x, 0) = r_0(x)$, $l(x, 0) = l_0(x)$ для системы уравнений изэнтропического одномерного движения политропного газа ($\gamma = 3$) с плоскими волнами (r и l — инварианты Римана).

Ответ:

$$t_k = \min \left\{ \inf_{\xi, r'_0(\xi) < 0} \left(-\frac{1}{r'_0(\xi)} \right), \inf_{\xi, l'_0(\xi) < 0} \left(-\frac{1}{l'_0(\xi)} \right) \right\}.$$

4.30. Поршень, находившийся при $t = 0$ в сечении $x = 0$ бесконечной прямолинейной трубы, заполненной при $x > 0$ покоящимся политропным газом, вдвигается в газ по закону $x = a^2 t^2$ (a^2 — постоянная). Найти момент наступления “градиентной катастрофы”, если известна c_0 — скорость звука в покоящемся газе.

Ответ: $t_{\text{к}} = \frac{c_0}{a^2(\gamma + 1)}$.

4.31. Поршень выдвигается из бесконечной трубы, заполненной покоящимся нормальным газом, по закону

$$x = F(t) \equiv \begin{cases} f(t), & 0 < t \leq t_0 < \infty; \\ f(t_0), & t_0 < t < \infty. \end{cases}$$

Функция $F(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям $F(0) = 0$, $-u_{\text{в}} < F'(t) \leq 0$ ($u_{\text{в}}$ — скорость истечения покоящегося газа в вакуум). Показать, что за конечное время в течении возникнет ударная волна.

4.32. Закон выдвижения плоского поршня из покоящегося политропного газа, занимающего при $t = 0$ область $0 < x < \infty$, задан формулой

$$x = \begin{cases} L \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \left(\frac{2t}{t_0} - 3 \right), & 0 < t \leq t_0; \\ -L, & t_0 < t < \infty. \end{cases}$$

Здесь $t_0 = \frac{(3\gamma-2)L}{3c_0}$, c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $L > 0$ — постоянная. Показать, что в возникающем течении произойдет “градиентная катастрофа”, и найти координаты $(x_{\text{к}}, t_{\text{к}})$ зарождения ударной волны.

Ответ: $x_{\text{к}} = \frac{7\gamma^2 - 28\gamma - 20}{27(\gamma + 1)}L$, $t_{\text{к}} = \frac{9\gamma^2 - 4}{9(\gamma + 1)}\frac{L}{c_0}$.

4.33. Плоский поршень выдвигается из покоящегося политропного газа, занимавшего при $t = 0$ область $0 < x < \infty$, по закону

$$\begin{cases} \frac{L}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi t}{t_0} \right) - 1 \right), & 0 < t \leq t_0; \\ -L, & t_0 < t < \infty. \end{cases}$$

Здесь $L > 0$ — постоянная, $t_0 = \frac{(7\gamma-1)\pi L}{8c_0}$, c_0 — скорость звука в покоящемся газе. Найти время $t_{\text{к}}$ возникновения “градиентной катастрофы”.

Ответ: $t_{\text{к}} = t_0 \frac{5\sqrt{3}\pi(\gamma + 1) + 36\gamma}{6\sqrt{3}\pi(\gamma + 1)}$.

4.34. Показать, что в политропном газе уравнения (u, p) -диаграмм ударных и простых волн с центром в точке (u_0, p_0) могут быть преоб-

разованы к виду

$$\frac{p - p_0}{\gamma p_0} = M \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} M^2} + \frac{\gamma + 1}{4} M^2,$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

Здесь $M = \frac{|u - u_0|}{c_0}$, c_0 — скорость звука перед волной.

4.35. Показать, что если при отражении простой волны от жесткой стенки возникает простая волна, то падающая и отраженная волны являются одновременно либо волнами сжатия, либо волнами разрежения.

4.36. Плоский поршень, вдвигающийся с постоянной скоростью в покоящийся газ, мгновенно останавливается. Используя метод (u, p) -диаграмм, дать качественное описание движения газа и построить картину движения на плоскости (x, t) .

4.37. В условиях предыдущей задачи показать, что в политропном газе давление на поршне после его остановки всегда положительно (газ не отрывается от поршня).

4.38. Идущая по покою ударная волна догоняет (встречает) простую волну разрежения. Дать качественное описание процесса взаимодействия этих волн и выяснить, будет ударная волна ускоряться или замедляться.

4.39. Ударная волна, распространяющаяся по покоящемуся политропному газу с параметрами $p = p_0, \rho = \rho_0$, достигает границы (перегородки) газа с вакуумом. В момент выхода перегородка мгновенно разрушается. Найти последующее движение газа и скорость истечения газа в вакуум.

Ответ: течение описывается центрированной волной разрежения, $u_{\text{в}} = u_1 + \frac{2}{\gamma-1} c_1 (u_{\text{в}} - \text{скорость разлета газа в вакуум}, u_1 - \text{скорость газа}, c_1 - \text{скорость звука за ударной волной})$.

4.40. Рассматривается задача о распаде произвольного разрыва (газ политропный):

$$(u, p, \tau)|_{t=0} = \begin{cases} (u_0, p_0, \tau_0), & x < 0; \\ (u_1, p_1, \tau_1), & x > 0; \end{cases} \quad (u_i, p_i, \tau_i) = \text{const.}$$

Найти условия, которым должны удовлетворять начальные данные, для того чтобы возникли следующие конфигурации распада разрыва:

(А): в один газ идет ударная волна, в другой — волна разрежения;

(Б): в оба газа идут ударные волны;

(В): в оба газа идут волны разрежения;

Указание: без ограничения общности можно считать $p_0 \geq p_1$ и $u_1 = 0$ (преобразование Галилея).

Ответ:

$$(A): -\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma p_0 \tau_0} \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right) < u_0 <$$

$$< (p_0 - p_1)\sqrt{2\tau_1}((\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_1)^{-1/2};$$

$$(B): (p_0 - p_1)\sqrt{2\tau_1}((\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_1)^{-1/2} < u_0 < \infty;$$

$$(B): -\infty < u_0 < -\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma p_0 \tau_0} \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right).$$

4.41. Построить графики распределения основных величин (u , p , ρ , s) как функций x для некоторого момента времени $t > 0$ при распаде произвольного разрыва в случае реализации конфигурации (A) задачи 4.40.

4.42. Построить графики распределения основных величин (u , p , ρ , s) для некоторого момента времени $t > 0$ при распаде произвольного разрыва в случае конфигураций (Б) и (В) задачи 4.40.

4.43. Рассматривается задача о распаде разрыва (газ политропный, $\gamma = 5/3$):

$$(u, p, \rho)|_{t=0} = \begin{cases} (c_1/\sqrt{5}, 2p_1, 3\rho_1/2), & x < 0; \\ (0, p_1, \rho_1), & x > 0. \end{cases}$$

Здесь p_1 , ρ_1 — постоянные, c_1 — начальная скорость звука справа от разрыва. Предполагая известным коэффициент удельной теплоемкости c_V , найти распределение температуры T в газе при $t > 0$.

Ответ:

$$T = \begin{cases} \frac{2p_1}{\rho_1 c_V}, & -\infty < x < \frac{3}{\sqrt{5}}c_1 t; \\ \frac{1, 5p_1}{\rho_1 c_V}, & \frac{3}{\sqrt{5}}c_1 t < x < \infty. \end{cases}$$

4.44. Рассматривается задача о распаде разрыва (газ политропный, $\gamma = 3$):

$$(u, p, \rho)|_{t=0} = \begin{cases} (-c_0/2, p_0, \rho_0), & x < 0; \\ (0, p_0/8, \rho_1), & x > 0. \end{cases}$$

Здесь p_0, ρ_0, ρ_1 — постоянные, c_0 — скорость звука в газе слева от начального разрыва. Найти распределение плотности при $t > 0$.

Ответ:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & -\infty < x \leq -\frac{3}{2}c_0t; \\ \frac{1}{4}\rho_0 \left(1 - \frac{2x}{c_0t}\right), & -\frac{3}{2}c_0t < x < -\frac{c_0}{2}t; \\ \frac{1}{2}\rho_0, & -\frac{c_0}{2}t \leq x < 0; \\ \rho_1, & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

4.45. Вычислить температуру, получаемую при столкновении двух одинаковых политропных газов, двигавшихся навстречу друг другу со скоростью u_0 . Скорость звука в газах c_0 , температура T_0 .

Ответ: $T = T_0 H \frac{\gamma + 1 - (\gamma - 1)H}{(\gamma + 1)H - (\gamma - 1)}$, где

$$H = 1 + \frac{\gamma + 1}{4} \cdot \frac{u_0^2}{c_0^2} - \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16} \cdot \frac{u_0^4}{c_0^4} + \frac{u_0^2}{c_0^2}}.$$

4.46. Плоский поршень вдвигается в трубу, заполненную покоящимся политропным газом ($\gamma = 3$), со скоростью $\frac{3}{4}c_0$, где c_0 — скорость звука в покоящемся газе. Найти скорость ударной волны, распространяющейся по газу.

Ответ: $D = 2c_0$.

4.47. Доказать, что в политропном газе при взаимодействии двух ударных волн, идущих навстречу друг другу, всегда образуются две ударные волны.

4.48. Ударная волна падает на контактный разрыв, разделяющий два состояния покоя политропного газа. Показать, что при определенных условиях контактный разрыв после взаимодействия с ударной волной может исчезнуть.

4.49. В бесконечной прямолинейной трубе заданы два равновесных состояния покоя “1” и “2” одного и того же политропного газа, разделенные контактным разрывом $x = 0$. По состояниям “1” и “2” со скоростями D_1 и D_2 движутся навстречу друг другу ударные волны. Фронты этих волн одновременно достигают сечения $x = 0$. Показать, что при выполнении условия $\rho_1 D_1^2 = \rho_2 D_2^2$ (ρ_1 и ρ_2 — плотности газов “1” и “2”) контактный разрыв останется неподвижным после взаимодействия ударных волн.

4.50. По покоящемуся газу, заполняющему при $t \leq 0$ область $x < 0$, движется с постоянной скоростью ударная волна. Скорость газа за фронтом равна u_1 . В момент времени $t = 0$ ударная волна падает на

поршень, находящийся при $t \leq 0$ в сечении $x = 0$. При $t > 0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью V . Выяснить возможные режимы движения газа при $t > 0$ в зависимости от соотношений скоростей V и u_1 и построить для каждого случая картину движения на плоскости (x, t) .

4.51. По полубесконечной трубе, заполненной покоящимся политропным газом с параметрами $p = p_1$, $\rho = \rho_1$ движется ударная волна, давление за которой равно p_2 ($p_2 > p_1$). В некоторый момент времени ударная волна достигает закрытого торца трубы и отражается от него. Найти коэффициент усиления ударной волны $k = \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1}$ и отношение плотностей ρ_3/ρ_1 . Здесь p_3 , ρ_3 — давление и плотность газа на стенке после отражения ударной волны.

Ответ:

$$k = \frac{(3\gamma - 1)a + 4\gamma}{(\gamma - 1)a + 2\gamma}, \quad \frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{\gamma(a + 1)(2\gamma + (\gamma + 1)a)}{(\gamma + (\gamma - 1)a)(2\gamma + (\gamma - 1)a)},$$

где $a = (p_2 - p_1)/p_1$.

4.52. В ствол пневматического ружья, один конец которого закрыт пулей, начал вдвигаться поршень со скоростью $V = 0,5 c_0$ (c_0 — скорость звука в покоившемся в стволе воздухе). Найти время задержки вылета пули, если известно, что она вылетает, как только давление на нее превысит первоначальное в 5 раз. Длина ствола 0,5 м, скорость звука $c_0 = 330$ м/с, воздух считать политропным газом с $\gamma = 1,4$.

Ответ: $t_{\text{в}} \approx 0,002$ с.

4.53. Закрытая с обоих торцов цилиндрическая ампула заполнена воздухом с температурой $T_0 = 0^\circ \text{C}$ и давлением $p_0 = 1$ атм. Ампуле мгновенно сообщается в осевом направлении скорость $V = 10 c_0$ (c_0 — скорость звука в начальном состоянии). После того как ампула пролетает половину своей длины, она мгновенно останавливается. Предполагая, что через некоторое время после остановки воздух в ампуле приходит в равновесное состояние, найти давление и температуру в этом состоянии. Воздух считать политропным газом с $\gamma = 1,4$, ампулу — нетеплопроводной.

Указание: найти работу, совершаемую над газом, и использовать первый закон термодинамики.

Ответ: $p_1 \approx 35$ атм, $T_1 \approx 9555$ К.

4.54. Цилиндрическая ампула $-L \leq x \leq L$ с площадью сечения F , заполненная покоящимся политропным газом ($\gamma = 3$), перегороджена в сечении $x = 0$ нетеплопроводной непроницаемой пластиной. При $t > 0$ пластина мгновенно приобрела скорость $V = 0,75 c_0$ (c_0 — скорость

звука в покоящемся газе) и остановилась после прохождения ею расстояния $0,25L$. Предполагая ампулу неподвижной, найти равновесные состояния газа по обе стороны от пластины после остановки и работу, которую надо затратить на движение пластины. В начальном состоянии заданы давление газа p_0 , плотность ρ_0 и температура T_0 .

Ответ:

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \frac{4}{3} \rho_0, & p_+ &= 5 p_0, & T_+ &= \frac{15}{4} T_0; \\ \rho_- &= \frac{4}{5} \rho_0, & p_- &= \frac{127}{160} p_0, & T_- &= \frac{127}{128} T_0; \\ A &= \frac{351}{256} p_0 F L. \end{aligned}$$

4.55. В условиях предыдущей задачи пластина пролетает расстояние $0,25L$ не с постоянной скоростью V , а равноускоренно с ускорением $c_0^2/(2L)$. Дать качественное описание движения газа и определить равновесные состояния в каждой из частей ампулы после ее остановки. Вычислить работу, затраченную на движение пластины.

Ответ:

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \frac{4}{3} \rho_0, & p_+ &= \frac{59}{20} p_0, & T_+ &= \frac{177}{80} T_0; \\ \rho_- &= \frac{4}{5} \rho_0, & p_- &= 0,67 p_0, & T_- &= \frac{67}{80} T_0; \\ A &= \frac{21}{40} p_0 F L. \end{aligned}$$

4.56. Вывести формулы для решения задачи о распаде произвольного разрыва

$$(u, p, \rho)|_{t=0} = \begin{cases} (u_0, p_0, \rho_0), & x < 0; \\ (u_1, p_1, \rho_1), & x > 0; \end{cases} \quad (u_i, p_i, \rho_i = \text{const})$$

в акустическом приближении ($\frac{|p_1 - p_0|}{p_0} \ll 1$, $\frac{|u_1 - u_0|}{|u_0|} \ll 1$).

Указание: использовать линейные аппроксимации (u, p) -диаграмм и адиабат Гюгонио и Пуассона.

Ответ:

$$(u, p, \rho)|_{t>0} = \begin{cases} (u_0, p_0, \rho_0), & -\infty < x < (u_0 - c_0)t; \\ (u_2, p_2, \rho_2), & (u_0 - c_0)t < x < u_2 t; \\ (u_2, p_2, \rho_3), & u_2 t < x < (u_1 + c_1)t; \\ (u_1, p_1, \rho_1), & (u_1 + c_1)t < x < \infty, \end{cases}$$

где c_0, c_1 — скорости звука в газах “0” и “1”,

$$u_2 = \frac{p_0 - p_1 + \rho_0 c_0 u_0 + \rho_1 c_1 u_1}{\rho_1 c_1 + \rho_0 c_0},$$

$$p_2 = \frac{\rho_1 c_1 p_0 + \rho_0 c_0 p_1 + \rho_0 c_0 \rho_1 c_1 (u_0 - u_1)}{\rho_1 c_1 + \rho_0 c_0},$$

$$\rho_2 = \rho_0 + \frac{p_2 - p_0}{c_0^2}, \quad \rho_3 = \rho_1 + \frac{p_2 - p_1}{c_1^2}.$$

4.57. Показать, что при взаимодействии двух слабых волн алгебраическая сумма амплитуд до и после взаимодействия сохраняется с точностью до малых более высокого порядка по сравнению с амплитудами исходных волн. (Амплитуда ударной волны считается положительной, а волны разрежения — отрицательной.)

4.58. Слабая ударная волна, распространяющаяся по покоящемуся газу “0” с параметрами p_0, ρ_0, c_0 , падает на границу контакта этого газа с покоящимся газом “1”, имеющим параметры p_0, ρ_1, c_1 . Показать, что при $\rho_0 c_0 > \rho_1 c_1$ по газу “0” после взаимодействия пойдет волна разрежения, а при $\rho_0 c_0 < \rho_1 c_1$ — ударная волна.

4.59. Показать, что амплитуда волны разрежения, возникающей при взаимодействии двух слабых ударных волн, есть малая величина более высокого порядка по сравнению с амплитудами исходных волн.

4.60. В прямолинейную трубу, заполненную при $t = 0$ покоящимся политропным газом ($\gamma = 3$), вдвигается поршень по закону

$$x = \begin{cases} \varepsilon c_0 t, & 0 < t \leq t_0; \\ \varepsilon c_0 t_0, & t_0 < t < \infty. \end{cases}$$

Здесь c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $t_0 > 0$ — постоянная. Предполагая $\varepsilon \ll 1$, найти закон движения ударной волны.

Указание: использовать приближенные соотношения (4.65) асимптотической теории затухания ударных волн.

Ответ:

$$x = \begin{cases} (1 + \varepsilon) c_0 t, & 0 < t \leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} t_0; \\ c_0 t_0 \left[\varepsilon + \frac{t}{t_0} - 1 + 2\sqrt{\varepsilon} \left(\frac{t}{t_0} - 1 \right)^{1/2} \right], & \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} t_0 < t < \infty. \end{cases}$$

4.61. Плоский поршень вдвигается в покоящийся политропный газ,

заполняющий при $t = 0$ область $0 < x < \infty$ по закону

$$x = \begin{cases} -\frac{2}{\gamma-1}c_0t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_0t_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\varepsilon\right) \left[\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} - 1\right], & t \leq t_1; \\ c_0t_0 \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\varepsilon\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 - \frac{\gamma+1}{2}\varepsilon\right], & t > t_1. \end{cases}$$

Здесь c_0 — скорость звука в покоящемся газе, t_0 , ε — положительные постоянные, t_1 определяется формулой

$$\frac{t_1}{t_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\varepsilon\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1.$$

Предполагая $\varepsilon \ll 1$, найти с точностью до $O(\varepsilon^2)$ закон движения ударной волны.

Ответ: $x = c_0t + \frac{\gamma+1}{2}c_0t_0\varepsilon[\sqrt{1+t/t_0} - 1]$.

4.62. В начальный момент времени $t = 0$ покоящийся политропный газ заполнял область вне цилиндрического поршня радиуса R_0 . При $t > 0$ поршень вдвигается в газ по закону $x = R_0(1 + t/t_0)^{2/3}$, $t_0 = 2R_0/(3\varepsilon c_0)$. Здесь c_0 — скорость звука в покоящемся газе, $\varepsilon > 0$ — постоянная. Предполагая $\varepsilon \ll 1$, найти с точностью до $O(\varepsilon^2)$ закон движения ударной волны, распространяющейся по газу.

Указание: использовать соотношения (4.65) при $\nu = 1$.

Ответ:

$$x = R_0 + c_0t + \frac{\gamma+1}{2}\varepsilon R_0 \left(\sqrt{\frac{c_0}{R_0}t + 1} - 1\right).$$

4.63. Показать, что законы сохранения массы и энергии в одномерных движениях газа с плоскими ($\nu = 0$), цилиндрическими ($\nu = 1$) и сферическими ($\nu = 2$) волнами для произвольно меняющегося со временем объема $x_1(t) \leq x \leq x_2(t)$ имеют вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho x^\nu dx + \left[\rho x^\nu \left(u - \frac{dx}{dt} \right) \right]_1^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho \left(\frac{1}{2}u^2 + \varepsilon \right) x^\nu dx + \left[\rho \left(\frac{1}{2}u^2 + \varepsilon \right) x^\nu \left(u - \frac{dx}{dt} \right) + px^\nu u \right]_1^2 = 0,$$

где символ $[f(x, t)]_1^2$ обозначает разность $f(x_2, t) - f(x_1, t)$.

4.64. Показать, что закон сохранения импульса для одномерных движений газа в случае произвольно меняющегося со временем объема $x_1(t) \leq x \leq x_2(t)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u x^\nu dx + \left[\rho u x^\nu \left(u - \frac{dx}{dt} \right) + p x^\nu \right]_1^2 = \nu \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} p x^{\nu-1} dx,$$

где $[f(x, t)]_1^2 = f(x_2, t) - f(x_1, t)$.

4.65. Вывести законы сохранения (4.63) (см. разд. 4.4) для автомодельных движений политропного газа.

Указание: использовать задачи 4.63 и 4.64.

4.66. Построить решение задачи о сильном точечном разрыве в политропном газе с $\gamma = 7$ (одномерное движение со сферическими волнами).

Ответ: движение за ударной волной при $0 < x < \lambda_\Phi t^{2/5}$ описывается формулами

$$u = 0,1 \frac{x}{t}, \quad \rho = \frac{4}{3} \frac{\rho_1}{\lambda_\Phi} \frac{x}{t^{2/5}}, \quad p = 0,04 \frac{\rho_1}{\lambda_\Phi} \frac{x^3}{t^{2,4}},$$

где

$$\lambda_\Phi = \left(450 \frac{E_0}{\rho_1} \right)^{1/5} \approx 3,4 \left(\frac{E_0}{\rho_1} \right)^{1/5},$$

E_0 — энергия, выделившаяся при взрыве.

4.67. Рассматривается одномерное движение газа при сильном взрыве. Показать, что скорость газа u , давление p и плотность ρ на фронте ударной волны изменяются с расстоянием x_Φ , пройденным ударной волной, в соответствии с формулами

$$u = A_1 x_\Phi^{-(\nu+1)/2}, \quad p = A_2 x_\Phi^{-(\nu+1)}, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1.$$

Здесь ρ_1 — плотность газа перед фронтом ударной волны, ν — параметр геометрии движения ($\nu = 0, 1, 2$), A_1 и A_2 — некоторые постоянные.

4.68. Проинтегрировать уравнения (4.62) для случая, отвечающего постановке задачи и сильном взрыве ($\beta = 0, (\nu+3)\alpha - 2 = 0$).

Ответ:

$$\lambda = AU^{-\alpha} \left(U - \frac{\alpha}{\gamma} \right)^m (a - U)^{-n};$$

$$R = B (\alpha - U)^{\frac{2}{\gamma-2}} \left(U - \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{2m(1-\alpha)}{\alpha(\gamma-1)}} (a - U)^{-\frac{2n}{1+(\gamma-2)\alpha}}, \quad (\gamma \neq 2);$$

$$R = B (\alpha - U)^{1-2\alpha} \left(U - \frac{\alpha}{2} \right)^{1-\alpha} \exp \left(\frac{2\alpha(1-\alpha)}{\alpha - U} \right), \quad (\gamma = 2).$$

Здесь

$$a = \frac{\alpha}{\gamma - 1 - \alpha(\gamma - 2)}, \quad m = \frac{\alpha(\gamma - 1)}{2(1 + \alpha(\gamma - 2))}, \quad n = a \left(1 + \frac{\gamma m}{\alpha} \right) - \alpha;$$

A, B — произвольные постоянные.

5 Плоскопараллельные установившиеся движения

5.1 Интегралы уравнений движения, характеристики

Движение газа называется установившимся, если основные величины \mathbf{v} , p , ρ не зависят от времени (в эйлеровой системе координат). Плоскопараллельное движение характеризуется независимостью основных величин от одной из декартовых координат (например, от координаты z) и равенством нулю проекции вектора скорости на соответствующую координатную ось ($w = 0$). Уравнения газовой динамики, описывающие этот класс движений, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(wu_x + vu_y) + p_x &= 0, & (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0, \\ \rho(wv_x + vv_y) + p_y &= 0, & us_x + vs_y &= 0, & p &= f(\rho, s). \end{aligned} \quad (5.1)$$

В плоскопараллельном установившемся течении частицы движутся вдоль линий тока, определяемых соотношением

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

Линии тока являются контактными характеристиками системы уравнений (5.1). Соотношения на контактных характеристиках можно проинтегрировать. Это дает следующие интегралы:

$$s = s_0, \quad q^2 + 2i(\rho, s_0) = q_m^2. \quad (5.2)$$

Здесь $q^2 = u^2 + v^2$, величины $s_0 = s_0(\mathcal{L})$, $q_m = q_m(\mathcal{L})$ постоянные вдоль линий тока (но принимают в общем случае разные значения на разных линиях тока). Второе соотношение (5.2) называется интегралом Бернулли. Входящую в интеграл Бернулли удельную энтальпию i можно вычислить с помощью уравнения состояния:

$$i(\rho, s_0) = \int_0^\rho \frac{c^2(\rho', s_0)}{\rho'} d\rho' = \int_0^\rho \frac{f_\rho(\rho', s_0)}{\rho'} d\rho'.$$

В случае политропного газа

$$i(\rho, s_0) = \frac{c^2(\rho, s_0)}{\gamma - 1}.$$

Если движение безвихревое ($\omega = v_x - u_y = 0$) и изэнтропическое ($s_0 \equiv \text{const}$), то $q_m \equiv \text{const}$ всюду в области течения. Критическая скорость c_* определяется соотношениями

$$c_* = c(\rho_*, s_0), \quad c^2(\rho_*, s_0) + 2i(\rho_*, s_0) = q_m^2.$$

В общем случае $c_* = c_*(\mathcal{L})$, но в изэнтропическом безвихревом течении $c_* \equiv \text{const}$. Равенство $q = c$ влечет за собой равенство $q = c_*$.

Система уравнений (5.1) является гиперболической системой при $q > c$ (сверхзвуковое течение). В качестве направления гиперболичности можно выбрать направление скорости \mathbf{v} . Введем число Маха M , угол Маха α и угол наклона скорости θ , отсчитываемый от положительного направления оси x , соотношениями

$$M = \frac{q}{c}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{M}, \quad \mathbf{v} = (u, v) = q(\cos \theta, \sin \theta).$$

Звуковые характеристики C^\pm при $M > 1$ определяются в соответствии с общей теорией как интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$C^+ : \frac{dy}{dx} = \text{tg}(\theta + \alpha), \quad C^- : \frac{dy}{dx} = \text{tg}(\theta - \alpha). \quad (5.3)$$

В случае безвихревого изэнтропического движения из (5.1) получаются следующие уравнения:

$$(u^2 - c^2)u_x + 2uvu_y + (v^2 - c^2)v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0. \quad (5.4)$$

Величина $c^2 = c^2(\rho, s_0)$ может быть выражена через q из интеграла Бернулли (5.2). Для сверхзвукового течения соотношения на звуковых характеристиках (5.3) получаются из уравнений (5.4) известным способом (см. разд. 3). Эти соотношения имеют вид

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \text{tg}(\theta + \alpha) \frac{\partial r}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial x} + \text{tg}(\theta - \alpha) \frac{\partial l}{\partial y} = 0. \quad (5.4a)$$

Инварианты Римана r , l заданы формулами

$$r = \theta - \mu(q), \quad l = \theta + \mu(q)$$

$$\mu(q) = \int_{c_*}^q \sqrt{M^2 - 1} \frac{dq'}{q'}. \quad (5.5)$$

В случае политропного газа

$$\mu(q) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}.$$

Для дозвукового течения ($M < 1$) уравнения (5.4) имеют эллиптический тип.

5.2 Простые волны

Система уравнений (5.4) при $M > 1$ имеет решение в виде простых волн $u = u(\lambda(x, y))$, $v = v(\lambda(x, y))$. Невырожденные простые волны подразделяются на два типа: r -волны (решения с постоянным инвариантом Римана r) и l -волны (решения с постоянным инвариантом Римана l). В простой r (l)-волне характеристики семейства $C^-(C^+)$ образуют семейство прямых на плоскости x, y . Если в установившемся плоскопараллельном безвихревом течении основные величины постоянны вдоль звуковой характеристики $C^+(C^-)$, то решение уравнений (5.4) в окрестности этой характеристики либо постоянно, либо является простой l (r)-волной. В частности, непостоянное решение, примыкающее к постоянному по звуковой характеристике, является простой волной. В классе простых волн уравнения (5.1) интегрируются и соотношения

$$r = \theta - \mu(q) = r_0, \quad y = x \operatorname{tg}(\theta - \alpha) + f(\theta); \quad (5.6a)$$

$$l = \theta + \mu(q) = l_0, \quad y = x \operatorname{tg}(\theta + \alpha) + f(\theta) \quad (5.6b)$$

определяют соответственно r и l -волны. Здесь r_0, l_0 — произвольные постоянные, $f(\theta)$ — произвольная функция. При решении конкретных задач в классе простых волн вид функции f определяется заданными граничными условиями.

Пример 5.1. Равномерный сверхзвуковой поток движется вдоль прямолинейного участка жесткой стенки, форма которой задана уравнением

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ -h(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

($h(0) = h'(0) = 0$; $h(x) > 0$, $h'(x) > 0$, $x \neq 0$). Построить решение задачи обтекания изогнутого участка стенки, если известны параметры набегающего потока.

Решение. Решение задачи в окрестности стенки ищем в классе непрерывных движений. Тогда течение будет изэнтропическим и безвихревым в силу того, что набегающий поток изэнтропический и безвихревой. Заданные параметры определяют значение энтропии $s =$

s_1 ($p_1 = f(\rho_1, s_1)$) и $q_m^2 = q_1^2 + 2i(\rho_1, s_1)$. На изогнутом участке стенки условие непротекания $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ (\mathbf{n} — нормаль к стенке) можно преобразовать к виду:

$$\theta \Big|_{y=-h(x)} = \arctg h'(x)$$

Область влияния прямолинейного участка стенки ограничивается прямолинейной характеристикой $C^+ : y = x \operatorname{tg} \alpha_1$ (рис. 5.1). Теорема единственности решения задачи Коши и смешанной задачи с условием непротекания позволяет утверждать, что в указанной области решение постоянно. По характеристике C^+ происходит примыкание простой l -волны к постоянному решению. В области определения простой волны выполнены соотношения

$$\theta + \mu(q) = \mu(q_1),$$

$$y = x \operatorname{tg}(\theta + \alpha) + f(\theta).$$

На первом шаге построения решения определяется вид функции f . Значения θ на кривой Γ ($y = -h(x)$) известны: $\theta = \theta(x)$. Первое соотношение (5.66) позволяет найти $q|_{\Gamma} = q(x)$. Из второго соотношения после подстановки $y|_{\Gamma}$, $\theta|_{\Gamma}$, $d(q)|_{\Gamma}$ определяется вид функции f . После того как f определена, функции $\theta(x, y)$, $q(x, y)$ в области простой волны находятся из уравнений (5.66). Значения θ , q на характеристике C^+ , выходящей из точки A , принадлежащей Γ , определяются следующим образом. Из точки A проводится характеристика $C_A^+ : y - y_A = (x - x_A) \operatorname{tg}(\theta(x_A) + \alpha(x_A))$. Вдоль характеристики полагаем $\theta(x, y)|_{C_A^+} = \theta(x_A)$, $q(x, y)|_{C_A^+} = q(x_A)$. Определив θ , q на каждой характеристике, мы будем знать $\theta(x, y)$, $q(x, y)$ в окрестности жесткой стенки. Вообще говоря, при продолжении решения в более широкую окрестность характеристики могут пересечься (возникает градиентная катастрофа) и решение задачи обтекания может стать разрывным.

Простая r -волна, центрированная в фиксированной точке $x = x_0$, $y = y_0$, определяется соотношениями

$$r = \theta - \mu(q) = r_0 (= \text{const}), \quad \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Простая центрированная l -волна определяется соотношениями

$$l = \theta + \mu(q) = l_0 (= \text{const}), \quad \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Рассмотрим установившееся течение, описываемое центрированной простой волной.

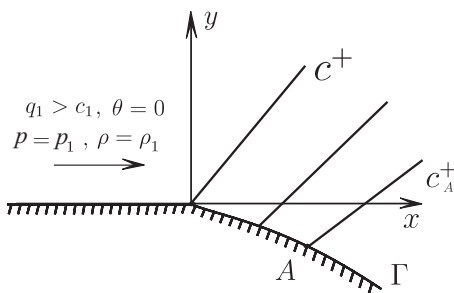


Рис. 5.1

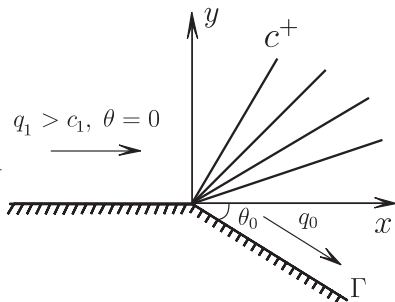


Рис. 5.2

Пример 5.2. Пусть в условиях примера (5.1) $h(x) = x \operatorname{tg} \theta_0$. Построить решение задачи сверхзвукового обтекания стенки с изломом.

Решение. Так же как в предыдущем примере, решение постоянно в области левее характеристики $C^+ : y = x \operatorname{tg} \alpha_1$ (рис. 5.2). По этой характеристике происходит примыкание постоянного решения к простой l -волне. Так как заданные значения $\theta|_{\Gamma}$ кусочно-постоянны, задача инвариантна относительно преобразования растяжения независимых переменных $x \rightarrow ax$, $y \rightarrow ay$ (a — параметр растяжения). Решение задачи будет автомодельным, соответственно, простая волна будет центрирована в точке $x = 0$, $y = 0$. В области центрированной волны

$$\theta + \mu(q) = \mu(q_1), \quad \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{y}{x}$$

Из этих двух уравнений определяются функции $\theta(\frac{y}{x})$, $q(\frac{y}{x})$. Область простой волны замыкается звуковой характеристикой C^+ , на которой достигается значение $\theta = -\theta_0$. Значение q_0 на этой характеристике определяется из первого соотношения (5.66). При этом замыкающая характеристика задается уравнением $y = x \operatorname{tg}(-\theta_0 + \alpha(q_0))$. Правее этой характеристики течение постоянно $\theta = -\theta_0$, $q = q_0$, соответственно плотность ρ_0 можно найти из интеграла Бернулли:

$$q_0^2 + 2i(\rho_0, s_1) = q_1^2 + 2i(\rho_1, s_1) = q_m^2,$$

а давление — с помощью уравнения состояния: $p_0 = f(\rho_0, s_1)$. Установившееся сверхзвуковое течение газа при обтекании угла большего π называется течением Прандтля — Мейера.

Следует отметить, что при некотором значении $\theta_0 = \theta_{0max}$ модуль скорости достигает значения $q_0 = q_m$, а плотность — значения $\rho_0 = 0$.

Это означает, что при $\theta_0 > \theta_{0max}$ происходит отрыв потока от стенки; на замыкающей характеристике простой волны $\theta = -\theta_{0max}$, $\rho = 0$, а в области между замыкающей характеристикой и стенкой появляется зона вакуума, где $p = 0$.

Переходы, описываемые решениями из класса простых волн, удобно изображать на плоскости переменных θ , p специальными кривыми — (θ, p) — диаграммами простых волн:

$$r - \text{волна:} \quad \theta - \widehat{\mu}_1(p) = \theta_1 - \widehat{\mu}_1(p_1);$$

$$l - \text{волна:} \quad \theta + \widehat{\mu}_1(p) = \theta_1 + \widehat{\mu}_1(p_1).$$

Здесь индекс “1” соответствует течению перед простой волной. Функция $\widehat{\mu}_1(p)$ задается так: интеграл Бернулли (5.2), в котором $q_m^2 = q_1^2 + 2i(\rho_1, s_1)$, уравнение состояния $p = f(\rho, s_1)$ определяют зависимость $q = q_1(p)$ и величину c_* ; тогда, по определению, $\widehat{\mu}_1(p) = \mu(q_1(p))$. Легко заметить, что $\widehat{\mu}_1'(p) < 0$. Будем называть l -волну обращенной вправо, r -волну обращенной влево (для наблюдателя, находящегося в точке 0 (см. рис. 5.2), обращенного лицом в сторону, противоположную направлению вектора скорости, фронт, ограничивающий область простой волны, отходит вправо от точки 0, так как $\theta + \alpha > \theta$).

5.3 Косые скачки уплотнения

В стационарном течении нормальная скорость ударного фронта $D_n = 0$. Вектор скорости при переходе через фронт в общем случае изменяет свое направление, так как проекция этого вектора на касательное к фронту направление сохраняется, а нормальная составляющая изменяется. Стационарные ударные волны называются косыми скачками уплотнения.

Если поток перед скачком уплотнения известен: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, то параметры течения за скачком \mathbf{v}_2 , p_2 , ρ_2 и вектор нормали к фронту $\mathbf{n} = (\cos(\delta), \sin(\delta))$, направленный в сторону состояния перед скачком, связаны четырьмя соотношениями на разрыве:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_{1n} &= \rho_2 v_{2n}, \quad \rho_1 v_{1n}^2 + p_1 = \rho_2 v_{2n}^2 + p_2, \quad v_{1l} = v_{2l}, \\ \varepsilon(\tau_1, p_1) + p_1 \tau_1 + \frac{v_{1n}^2}{2} &= \varepsilon(\tau_2, p_2) + p_2 \tau_2 + \frac{v_{2n}^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь $v_{il} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{l}$, $\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0$. Для течения перед скачком уплотнения должно выполняться неравенство $|\mathbf{v}_1| > c_1$, так как в силу теоремы

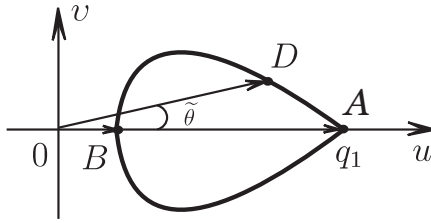


Рис. 5.3

Цемплена $|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}| > c_1$. Для определения всех параметров течения за скачком уплотнения необходимо дополнительное задание одной из величин за фронтом или величины δ .

Исключив p_2 , τ_2 , δ из (5.7), получим уравнение ударной поляры:

$$\frac{v^2}{(q_1 - u)^2} = \frac{\Gamma_1(M_1^2(q_1 - u)/q_1)}{(q_1 - u)/q_1} - 1. \quad (5.8)$$

Здесь u , v — компоненты вектора скорости за скачком в декартовой системе координат с осью абсцисс, направленной по вектору \mathbf{v}_1 ; функция Γ_1 определяется представлением уравнения адиабаты Гюгонио в виде

$$1 - \frac{\tau}{\tau_1} = \Gamma\left(\frac{p - p_1}{\rho_1 c_1^2}\right). \quad (5.9)$$

Индекс “1” означает, что Γ_1 зависит в общем случае от p_1 , τ_1 . Для политропного газа $\Gamma_1 = \Gamma$ (Γ не зависит от p_1 , τ_1), где

$$\Gamma(z) = \frac{2z}{2 + (\gamma + 1)z}. \quad (5.10)$$

График ударной поляры для политропного газа изображен на рис. 5.3. Если соединить начало координат с произвольной точкой D на ударной поляре, то вектор \vec{OD} определяет скорость за косым скачком уплотнения. Точка A соответствует скачку уплотнения нулевой интенсивности, точка B — прямому скачку, в котором вектор скорости не изменяет направления при переходе через разрыв (такой ударный переход возникает в случае, когда вектор скорости набегающего потока, перпендикулярен к фронту). Для модели нормального газа ударная поляра, симметричная относительно оси Ou , замкнутая кривая. В точке $u = u_0$, где $(q_1 - u_0)/q_1 = \Gamma_1(M_1^2(q_1 - u_0)/q_1)$, она имеет вертикальную касательную, в точке $u = q_1$: $dv/du = \pm \operatorname{ctg} \alpha_1$.

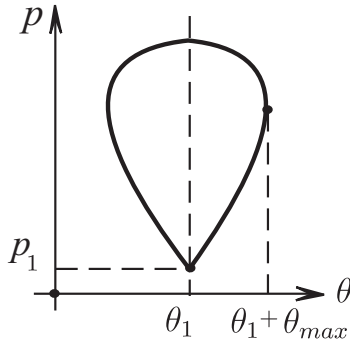


Рис. 5.4

Ударная поляра звезда относительно точки A , угол поворота вектора скорости θ не превышает значения $\theta_{max} < \pi/2$.

Из соотношений (5.7) можно получить связь между давлением p за скачком уплотнения и углом поворота вектора скорости $\tilde{\theta} = \theta - \theta_1$. Для этого нужно использовать следствия (5.7):

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|^2 = (p - p_1)(\tau_1 - \tau), \quad q^2 = q_1^2 - (p - p_1)(\tau_1 + \tau) \quad (5.11a)$$

и уравнение адиабаты Гюгонио $\tau = \tau(p, \tau_1, p_1)$.

В результате получается уравнение кривой на плоскости θ, p — (θ, p) -диаграммы косых скачков уплотнения:

$$\theta - \theta_1 = \pm \arcsin \left[\frac{(p - p_1)(\tau_1 - \tau - \tau_1^2 q_1^{-2}(p - p_1))}{q_1^2 - (p - p_1)(\tau_1 + \tau)} \right]^{1/2}. \quad (5.11)$$

Вид этой кривой в случае политропного уравнения состояния изображен на рис. 5.4. Знаки “ \pm ” соответствуют правой и левой ветвям кривой, симметричной относительно прямой $\theta = \theta_1$. Максимальное значение p на (θ, p) -диаграмме достигается при прямом скачке уплотнения, когда $\theta = \theta_1$.

Рассмотрим вектор σ , касательный к ударному фронту, такой что $\sigma \cdot \mathbf{v}_1 \geq 0$. Введем $\chi - \theta_1$ — угол между векторами \mathbf{v}_1 и σ ($|\chi - \theta_2| < \pi/2$). Знак $\chi - \theta_1$ совпадает со знаком $\theta - \theta_1$ в силу равенства, следующего из соотношений (5.7):

$$\text{ctg}(\chi - \theta_1) = \text{tg}(\theta - \theta_1)(\tau_1^{-1} q_1 (p - p_1)^{-1} - 1). \quad (5.12)$$

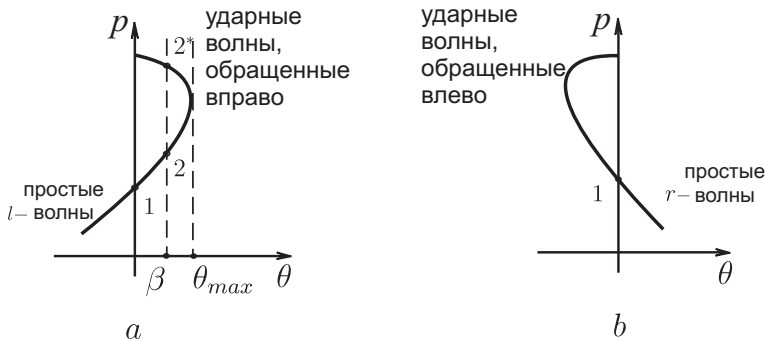


Рис. 5.5

Совпадение знаков $\chi - \theta_2$ и $\chi - \theta_1$ следует из закона сохранения массы на разрыве:

$$\rho_1 q_1 \sin(\chi - \theta_1) = \rho_1 q_2 \sin(\chi - \theta_2)$$

Будем называть скачки уплотнения, на которых выполняется неравенство $\chi - \theta > 0$, обращенными вправо (соответственно при $\chi - \theta < 0$ — обращенными влево). Учитывая сказанное выше, знак “+” в (5.11) соответствует скачкам, обращенным вправо, знак “-” — обращенным влево. С помощью (θ, p) — диаграмм ударных и простых волн можно построить общую (θ, p) — диаграмму переходов заданного состояния “1” в другие состояния (рис. 5.5).

Верхняя часть диаграммы ($p \geq p_1$) отвечает переходам с помощью ударных волн, нижняя ($p \leq p_1$) описывает переходы с помощью простых центрированных волн. Диаграмма “а” определяет переходы, обращенные вправо, диаграмма “б” — переходы, обращенные влево. С помощью этих диаграмм можно строить решения задач о взаимодействии косых скачков уплотнения по аналогии с построением решения задачи о распаде произвольного разрыва методом (u, p) — диаграмм. Точка пересечения двух (θ, p) -диаграмм, обращенных в разные стороны, соответствует переходу заданных состояний в состояния, которые можно связать соотношениями на контактном разрыве $[p] = 0$, $[\theta] = 0$.

Пример 5.3. Построить решение задачи обтекания бесконечного клина угла раствора 2β , расположенного симметрично относительно оси Ox (рис. 5.6), равномерным сверхзвуковым потоком политропного газа с параметрами $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = (q_1, 0)$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$ ($q_1 > c_1$).

Решение. Условие непротекания на стенках клина можно предста-

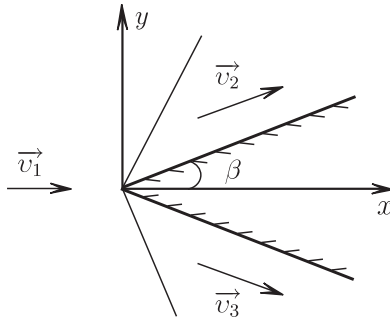


Рис. 5.6

вить в виде

$$\theta|_{y=x \operatorname{tg} \beta} = \beta, \quad \theta|_{y=-x \operatorname{tg} \beta} = -\beta.$$

Так как задача инвариантна относительно равномерных растяжений независимых переменных $x \rightarrow ax$, $y \rightarrow ay$ (a — параметр растяжения), решение ее будем искать в классе автомодельных решений (зависящих от $\frac{y}{x}$) уравнений газовой динамики. В силу того, что набегающий поток сверхзвуковой, возмущения этого потока будут распространяться только в область $x > 0$. Очевидно, что фронты ударных (или центрированных) волн должны располагаться при $y > 0$ так, что $\chi - \theta > 0$, а при $y < 0$ так, что $\chi - \theta < 0$. Рассмотрим (θ, p) -диаграмму переходов, обращенных вправо (рис. 5.5,а). Точки пересечения прямой $\theta = \beta$ и (θ, p) -диаграммы должны определять состояние за волной, возникающей при обтекании. Из свойств (θ, p) -диаграммы следует, что таких точек две (2 и 2*). Нижняя точка отвечает “слабому” скачку уплотнения, верхняя — “сильному”. В качестве решения принято выбирать состояние, отвечающее минимальному значению p ($p = p_2$), что согласуется с экспериментальными данными и теоретическими результатами по устойчивости таких течений. После определения p_2 с помощью уравнения адиабаты Гюгонио определяется величина ρ_2 ; соотношение (5.11а) определяет q_2 , при этом $\mathbf{v}_2 = q_2(\cos \beta, \sin \beta)$. Угол наклона фронта косого скачка уплотнения χ определяется из соотношения (5.12). Аналогичным образом определяются параметры течения за скачком уплотнения, обращенным влево (на нижней стороне клина). Таким образом, при сверхзвуковом обтекании клина образуются два скачка уплотнения, за которыми потоки равномерные.

Замечание. Приведенное выше построение возможно в том случае,

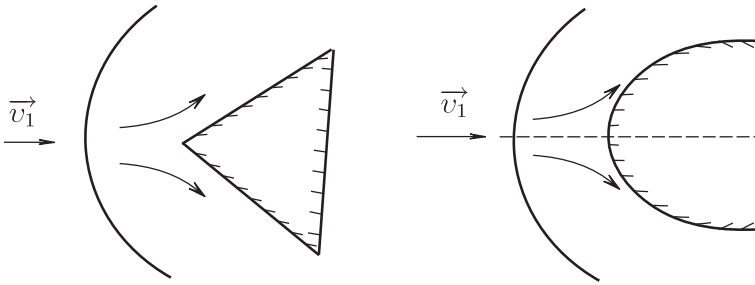


Рис. 5.7

когда $\beta < \theta_{max}$. Если $\beta > \theta_{max}$, то автомодельного решения задача обтекания не имеет. При сверхзвуковом обтекании конечного клина с углом раствора $2\beta > 2\theta_{max}$ и при обтекании затупленного тела возникает течение с отошедшим скачком уплотнения (рис. 5.7).

Скачки уплотнения, изображенные на рис. 5.6, называют присоединенными. В случае обтекания симметричного затупленного тела равномерным потоком, направленным вдоль оси симметрии, в точке пересечения фронта и оси симметрии скачок будет прямым. При движении вдоль фронта интенсивность скачка меняется, при этом всевозможные значения θ , p за фронтом соответствуют различным точкам кривой на рис. 5.4. Построение решений с отошедшими скачками уплотнения сводится к достаточно сложной задаче с неизвестной границей (фронтом скачка).

Задача о взаимодействии косых скачков уплотнения возникает при сверхзвуковом обтекании двух клиньев (рис. 5.8). Фронты косых скачков уплотнения AO и BO , возникших при обтекании каждого клина, пересекаются в точке O .

Пример 5.4. Пусть заданы прямолинейные фронты взаимодействующих скачков уплотнения AO , BO ; параметры сверхзвукового равномерного течения в областях “0”, “1”, “2”. Требуется найти параметры течения в окрестности точки O вниз по потоку.

Решение. Поместим начало координат в точку O . Рассмотрим (θ, p) -диаграмму переходов, обращенных вправо, для состояния “1” и (θ, p) -диаграмму переходов, обращенных влево, для состояния “2” (рис. 5.9). Пусть (θ_3, p_3) — точка пересечения указанных (θ, p) -диаграмм (p_3 — наименьшее значение по сравнению со значениями давления в других точках пересечения). Так как пересекаются ударные ветви (θ, p) -

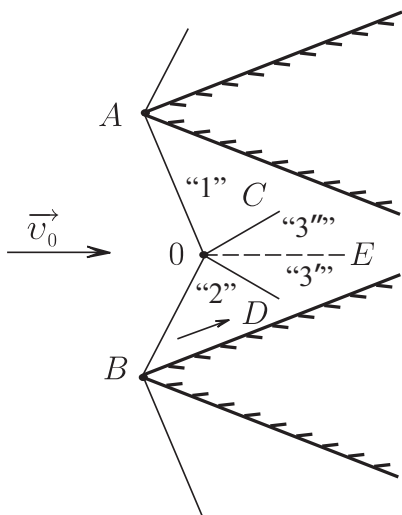


Рис. 5.8

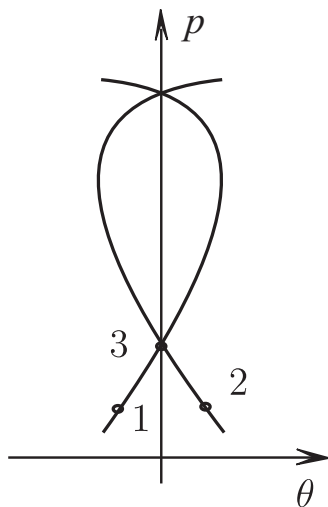


Рис. 5.9

диаграмм, при переходах из состояния “1” в “3'”, из состояния “2” в “3'” возникают косые скачки уплотнения. По известному значению p_3 можно определить параметры течения в областях “3'”, “3'''”, углы наклона фронтов OC и OD точно так же, как в примере 5.1. Угол наклона фронта контактного разрыва OE совпадает с углом наклона вектора скорости \mathbf{v}_3 . Решение задачи построено.

5.4 Уравнения Чаплыгина. Дозвуковые и околозвуковые течения

Потенциал вектора скорости φ ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$) в изэнтропическом безвихревом установившемся течении удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$(\varphi_x^2 - c^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (\varphi_y^2 - c^2)\varphi_{yy} = 0 \quad (5.13)$$

Величину $c^2 = c^2(\rho, s_0)$ можно выразить через $|\nabla\varphi|^2$ с помощью интеграла Бернулли (5.2).

Если течение дозвуковое ($\varphi_x^2 + \varphi_y^2 < c^2$), то уравнение (5.13) имеет эллиптический тип, если течение сверхзвуковое ($\varphi_x^2 + \varphi_y^2 > c^2$), то уравнение (5.13) гиперболическое.

Введем функцию тока ψ с помощью равенств

$$\psi_x = -\rho v, \quad \psi_y = \rho u.$$

Квазилинейное уравнение (5.13) можно преобразовать в линейное дифференциальное уравнение, если в качестве независимых переменных выбрать компоненты вектора скорости u , v либо q и θ ($u = q \cos \theta$, $v = q \sin \theta$). Действительно, по определению φ и ψ

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\cos \theta}{q} d\varphi - \frac{\sin \theta}{\rho q} d\psi = \\ &= \left(\frac{\cos \theta}{q} \varphi_q - \frac{\sin \theta}{\rho q} \psi_q \right) dq + \left(\frac{\cos \theta}{q} \varphi_\theta - \frac{\sin \theta}{\rho q} \psi_\theta \right) d\theta; \\ dy &= \frac{\sin \theta}{q} d\varphi + \frac{\cos \theta}{\rho q} d\psi = \\ &= \left(\frac{\sin \theta}{q} \varphi_q + \frac{\cos \theta}{\rho q} \psi_q \right) dq + \left(\frac{\sin \theta}{q} \varphi_\theta + \frac{\cos \theta}{\rho q} \psi_\theta \right) d\theta \end{aligned} \quad (5.14)$$

Условия полных дифференциалов дают уравнения Чаплыгина:

$$\varphi_q = \frac{M^2 - 1}{\rho q} \psi_\theta, \quad \varphi_\theta = \frac{q}{\rho} \psi_q. \quad (5.15)$$

Исключение φ из системы (5.15) приводит к уравнению Чаплыгина для функции тока:

$$\frac{1 - M^2}{\rho q} \psi_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{\rho} \psi_q \right) = 0. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) является линейным, коэффициенты в этом уравнении, стоящие при производных неизвестной функции ψ , зависят только от независимой переменной q .

Уравнение (5.16) допускает разделение переменных — на этом факте основан метод Чаплыгина решения стационарных задач газовой динамики.

Если решение уравнения (5.16) известно, то производные функции φ , найденные с помощью (5.15), а также производные функции ψ подставляются в (5.14). Интегрированием уравнений в полных дифференциалах (5.14) определяются функции $x = x(q, \theta)$, $y = y(q, \theta)$. Если это отображение удастся обратить, то определяется решение $q = q(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$. Поэтому преобразование к переменным годографа применяется к тем задачам, решения которых взаимно однозначно отображают область определения решения плоскости x , y на некоторую область в плоскости годографа. Примером решения уравнений

(5.4), для которого нет указанной взаимной однозначности, является простая волна: двумерной области определения простой волны в плоскости переменных x, y соответствует одномерное многообразие — кривая ($\theta \pm \mu(q) = \text{const}$).

Пример 5.5. Пусть известно частное решение $\psi = a\theta$ ($a = \text{const}$) уравнения Чаплыгина (5.16). Построить картину течения в плоскости (x, y) .

Решение. Из уравнений (5.15) следует, что

$$\varphi_q = \frac{M^2 - 1}{\rho q} a, \quad \varphi_\theta = 0.$$

С учетом этих равенств первое уравнение (5.14) можно представить в виде

$$dx = \frac{\cos \theta}{\rho q^2} (M^2 - 1) a dq - \frac{\sin \theta}{\rho q} a d\theta. \quad (5.17)$$

Из (5.17) следует, что

$$x_\theta = -a \frac{\sin \theta}{\rho q}.$$

Интегрированием этого уравнения определяем

$$x = a \frac{\cos \theta}{\rho q} + x_0(q) \quad (5.18)$$

($x_0(q)$ — произвольная функция). Из (5.17) следует также, что

$$x_q = a \frac{\cos \theta}{\rho q^2} (M^2 - 1). \quad (5.19)$$

Если подставить x , заданный формулой (5.18), в уравнение (5.19) и учесть следствие интеграла Бернулли

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\rho q} \right) = \frac{M^2 - 1}{\rho q^2}, \quad (5.20)$$

получится равенство $x'_0(q) = 0$. Следовательно $x_0 = \text{const}$, а

$$x - x_0 = \frac{a \cos \theta}{\rho q}.$$

Аналогично возникают соотношения

$$y - y_0 = a \frac{\sin \theta}{\rho q} \quad (y_0 = \text{const});$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \text{tg } \theta; \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|a|}{\rho q},$$

из которых следует, что линии тока — прямые, проходящие через точку (x_0, y_0) . Согласно (5.20), $|a|/\rho q$ монотонно зависит от q при $M > 1$, либо при $M < 1$. В первом случае $|a|/\rho q$ монотонно возрастает при возрастании q , а тогда и q монотонно возрастает с ростом $|\vec{x} - \vec{x}_0|$. Если $|\vec{x} - \vec{x}_0| \rightarrow \infty$, то $q \rightarrow q_m$, а $\rho \rightarrow 0$. Построенное решение определено при

$$\frac{|a|}{\rho_* c_*} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \infty. \quad (5.21)$$

В итоге найдено сверхзвуковое течение типа источника при $a > 0$ и типа стока при $a < 0$.

Аналогичный анализ второго решения, соответствующий неравенству $M < 1$, показывает, что оно определено в области (5.21), $q \rightarrow 0$ при $|\vec{x} - \vec{x}_0| \rightarrow \infty$. Это решение описывает дозвуковое течение типа источника или стока. Величина $2\pi|a| = 2\pi\rho q\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ задает расход газа в источнике (стоке).

Уравнение Чаплыгина (5.16) с помощью замены переменных

$$\sigma = g \int_q^{c_*} \frac{\rho}{q} dq, \quad g = \text{const},$$

преобразуется к следующему виду:

$$K(\sigma)\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0. \quad (5.22)$$

Здесь $K(\sigma) = (1 - M^2)/\rho^2 g^2$, постоянная g выбирается из условия $K'(0) = 1$.

Околозвуковые течения характеризуются неравенством $|M - 1| \ll 1$. *Звуковой линией* называется кривая на плоскости (x, y) , вдоль которой $M = 1$. Важное качественное свойство околозвуковых течений связано с поведением вектора скорости на звуковой линии: если при перемещении вдоль звуковой линии область дозвукового течения остается слева, то вектор скорости монотонно поворачивается по часовой стрелке (теорема А. А. Никольского, Г. И. Таганова).

При моделировании околозвуковых течений часто используется следующая аппроксимация функции K : $K(\sigma) \cong \sigma$. Возникающее при этой аппроксимации уравнение

$$\sigma\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0 \quad (5.23)$$

называется уравнением Трикоми. Уравнение (5.23) используется для приближенного описания поведения околозвуковых течений в окрестности звуковой линии.

5.5 Задачи

5.1. Пусть функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $\rho = \rho(x, y)$, $s = s(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений, описывающей плоскопараллельные установившиеся течения политропного газа, уравнение состояния которого имеет вид $p = A(s)\rho^\gamma$. Показать, что формулами

$$\tilde{u} = (A(s))^{-1/(2\gamma)}u, \quad \tilde{v} = (A(s))^{-1/(2\gamma)}v, \quad \tilde{\rho} = (A(s))^{1/\gamma}\rho$$

определено решение системы уравнений изэнтропических плоскопараллельных установившихся течений газа с уравнением состояния $\tilde{p} = \tilde{\rho}^\gamma$.

5.2. Показать, что соотношениями

$$u = \cos \alpha f(y \cos \alpha - x \sin \alpha), \quad v = \sin \alpha f(y \cos \alpha - x \sin \alpha), \\ \rho = g(y \cos \alpha - x \sin \alpha), \quad p = p_0$$

(f, g — произвольные функции, $g > 0$; α, p_0 — произвольные постоянные, $p_0 > 0$) задано частное решение системы уравнений установившегося плоскопараллельного движения газа.

5.3. Установившееся движение политропного газа определено формулами

$$u = \frac{\sqrt{2}c_0 l^2}{l^2 + (y-x)^2}, \quad v = \frac{\sqrt{2}c_0 l^2}{l^2 + (y-x)^2}, \quad \rho = \rho_0 \frac{l^2 + (y-x)^2}{l^2}, \quad p = p_0$$

(p_0, ρ_0, l — положительные постоянные, $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$). Указать область в плоскости (x, y) , где движение является сверхзвуковым, и найти минимальное и максимальное значения плотности в этой области.

Ответ: $|y - x| < l/\sqrt{3}$, $\rho_{min} = \rho_0$, $\rho_{max} = 4\rho_0$.

5.4. Установившееся течение политропного газа определено формулами

$$u = c_0 \frac{y + 2l}{y + l}, \quad v = 0, \quad \rho = \rho_0 \frac{y + l}{y + 2l}, \quad p = p_0$$

в полуплоскости $y \geq l$ (l, p_0, ρ_0 — положительные постоянные, $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$). Показать, что это течение сверхзвуковое, и найти уравнения характеристических кривых C^+ , C^- , исходящих из точки $x = 0, y = l$.

Ответ:

$$C^+ : \quad y = l[(x/(2l) + \sqrt{2})^2 - 1], \quad x \geq 0;$$

$$C^- : \quad y = l[(x/(2l) - \sqrt{2})^2 - 1], \quad x \leq 0.$$

5.5. Для каждой линии тока определим p_0, ρ_0 как давление и плотность в точке торможения (в точке, где $q = 0$). Для установившегося

движения политропного газа найти p/p_0 как функцию числа M (p , M — давление и число Маха в произвольной точке линии тока).

Ответ:
$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}.$$

5.6. В установившемся течении политропного газа приведенная скорость $\lambda = q/c_*$ вдоль линии тока является функцией числа Маха M . Найти эту функцию.

Ответ:
$$\lambda^2 = \frac{\gamma + 1}{2} M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}.$$

5.7. Показать, что соотношения на звуковых характеристиках установившегося плоскопараллельного сверхзвукового течения можно преобразовать к виду

$$C^\pm : \theta_x + \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha)\theta_y \mp \operatorname{ctg} \alpha (\rho q^2)^{-1} (p_x + \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha)p_y) = 0.$$

5.8. Показать, что в области безвихревого движения линии тока $\psi = \operatorname{const}$ и линии равного потенциала $\varphi = \operatorname{const}$ образуют ортогональную сетку на плоскости (x, y) .

5.9. Затупленное тело обтекается установившимся дозвуковым воздушным потоком (уравнение состояния политропное, $\gamma = 1,4$), равномерным на бесконечности (при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$). Определить диапазон скоростей потока, в границах которого определение плотности в точке торможения с помощью модели несжимаемой жидкости приводит к ошибке не более чем в 2%. Скорость звука в воздушном потоке считается равной 1200 км/ч.

Ответ: $0 \leq q \leq 239,25 \text{ км/ч}.$

5.10. Показать, что функцию $\mu(q)$ для газа с политропным уравнением состояния можно представить в виде

$$\mu(q) = \alpha - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Найти явные выражения для функций $\alpha(x, y)$, $\theta(x, y)$ в l -волне Прандтля — Мейера ($l \equiv l_0$).

Ответ:

$$\alpha = \operatorname{arccg} \left[\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} (l_0 - \beta + \frac{\pi}{2}) \right) \right];$$

$$\theta = \beta - \alpha \quad \left(\beta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right).$$

5.11. Проинтегрировать уравнения линий тока в простой центрированной l -волне (газ политропный).

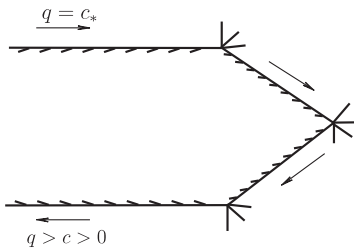


Рис. 5.10

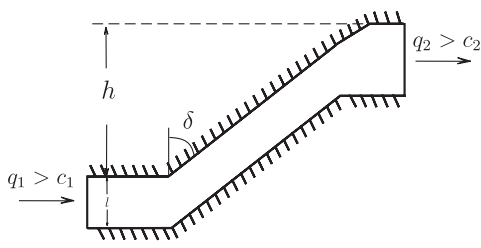


Рис. 5.11

Ответ: $r = r_0 \left\{ \cos \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \left(l_0 + \frac{\pi}{2} - \beta \right) \right] \right\}^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$. Здесь r_0 — произвольная постоянная, r, β — полярные координаты в плоскости (x, y) .

5.12. При каких значениях показателя политропы γ возможна картина обтекания, изображенная на рис. 5.10?

Ответ: $1 < \gamma < 5/4$.

5.13. Равномерный сверхзвуковой поток газа ($q = q_1, p = p_1, \rho = \rho_1$) движущийся вдоль прямолинейной стенки $y = 0$ ($x < 0$), обтекает ее криволинейный участок, форма которого задана уравнением $y = -x^2$ ($x > 0$). Найти точку на стенке, где происходит отрыв потока.

Ответ: координаты точки: $x = x_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\mu(q_m) - \mu(q_1))$; $y = -x_0^2$.

5.14. Вывести уравнение (θ, p) -диаграммы установившихся плоскопараллельных простых волн для модели политропного газа:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_1 = & \pm \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_1^2 + \frac{2}{\gamma+1} \right) P^{(1-\gamma)/\gamma} - 1 \right)^{1/2} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right)^{1/2} \right\} \mp \\ \mp & \left\{ \operatorname{arctg} \left(\left(M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1} \right) P^{(1-\gamma)/\gamma} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} - \operatorname{arctg} (M_1^2 - 1)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $P = p/p_1$; величины с индексом “1” соответствуют течению перед простой волной.

5.15. Известно, что установившееся течение политропного газа в канале, изображенном рис. 5.11, описывается кусочно-постоянными решениями и простыми волнами Прандтля — Мейера. На входе и выходе из канала потоки равномерные и сверхзвуковые. Найти уравнения

кривых, соответствующие верхней и нижней стенкам канала, если известны ширина входного сечения l , угол δ , расстояние h и параметры потока на входе $q = q_1$, $p = p_1$, $c = c_1$.

5.16. Показать, что уравнение (θ, p) -диаграммы косых скачков уплотнения для газа с политропным уравнением состояния можно представить в виде

$$\theta - \theta_1 = \pm \arcsin \frac{P - 1}{\gamma M_1} \left[\frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1 - (\gamma + 1)P}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2 + (\gamma + 1)PM_1^2 - 2P^2} \right]^{1/2}.$$

Здесь $P = p/p_1$; p_1 , M_1 , θ_1 — давление, число Маха и угол наклона вектора скорости к оси Ox перед скачком уплотнения.

5.17. Установившийся воздушный сверхзвуковой поток с постоянным давлением $p = p_1$, плотностью $\rho = \rho_1(y)$, числом Маха $M_1 = 5\sqrt{3}/2$ набегаёт на фронт косоугольного скачка уплотнения. Определить угол поворота вектора скорости в косом скачке уплотнения, если известно, что перед скачком $v_1 = 0$, а за скачком уплотнения $p_2 = 11,5 p_1$ (угол поворота вектора скорости считать положительным).

Ответ: $\theta = \arcsin(\sqrt{7}/5)$.

5.18. В условиях предыдущей задачи найти вектор скорости, плотность газа за скачком уплотнения и определить форму ударного фронта, если известно, что точка $x = 0$, $y = 0$ принадлежит фронту.

Ответ:

$$\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{21}{40} \frac{p_1}{\rho_1(y)}} (3\sqrt{2}, \sqrt{7}), \quad \rho = 4\rho_1(y); \quad y = 2\sqrt{2/7}x.$$

5.19. Используя результаты задач 5.17, 5.18, определить течение в области за скачком уплотнения.

Указание: Использовать решения, введенные в условии задачи 5.2.

Ответ:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{105}{8} \frac{p_1}{\rho_1(2\sqrt{2}(\frac{3\sqrt{2}}{5}y - \frac{\sqrt{7}}{5}x))}} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{7}}{5} \right),$$

$$\rho = 4\rho_1 \left(2\sqrt{2} \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}y - \frac{\sqrt{7}}{5}x \right) \right),$$

$$p = 11,5 p_1.$$

5.20. Пусть χ — угол наклона косоугольного скачка уплотнения, θ — угол поворота вектора скорости в косом скачке (углы отсчитываются от

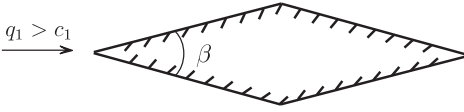


Рис. 5.12

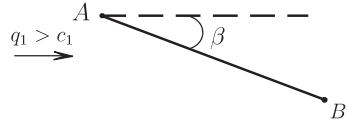


Рис. 5.13

направления вектора скорости перед скачком). Доказать соотношение (газ политропный)

$$\operatorname{ctg} \theta = \operatorname{tg} \chi \left[\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 (M_1^2 \sin^2 \chi - 1)^{-1} - 1 \right] \quad \left(M_1 = \frac{q_1}{c_1} \right).$$

5.21. Найти максимальный угол поворота течения в косом скачке уплотнения θ_{max} как функцию числа Маха набегающего потока. Рассмотреть случай $M_1 \rightarrow \infty$.

5.22. Показать, что течение политропного газа за косым скачком с максимальным углом поворота потока ($\theta = \theta_{max}$) дозвуковое.

5.23. Доказать соотношение Прандтля для косых скачков в политропном газе:

$$v_{1n} v_{2n} = c_*^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_l^2.$$

5.24. Доказать, что если равномерный сверхзвуковой поток проходит через криволинейный скачок уплотнения, то течение за скачком вихревое. Вывести формулу для величины вихря, образующегося на скачке

$$\omega = v_x - u_y = \kappa v_l (\tau_1 - \tau_2)^2 (\tau_1 \tau_2)^{-1}$$

Здесь κ — кривизна фронта скачка, v_l — касательная составляющая скорости, τ_1, τ_2 — величины удельного объема до и после скачка.

5.25. Доказать, что в плоскопараллельном установившемся течении политропного газа невозможна конфигурация из трех прямолинейных скачков уплотнения, выходящих из одной точки, если в каждом секторе течение считается постоянным.

Указание: Рассмотреть уравнения адиабат Гюгонио, связывающие состояния газа в трех секторах.

5.26. Построить решение задачи симметричного обтекания ромба равномерным сверхзвуковым потоком, если вектор скорости набегающего потока направлен вдоль большой диагонали (угол β считать достаточно малым) (рис. 5.12).

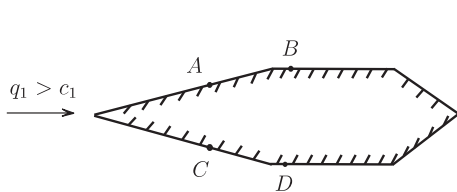


Рис. 5.14

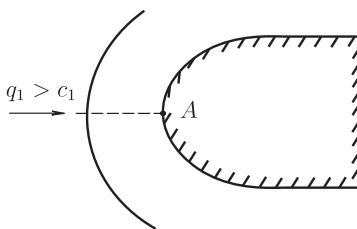


Рис. 5.15

5.27. Построить решение задачи обтекания пластины конечной длины равномерным сверхзвуковым потоком, считая угол β между направлением потока и пластиной достаточно малым (рис. 5.13).

5.28. Дать качественное описание картины сверхзвукового обтекания тела, изображенного на рисунке 5.14 (CD и AB — дуги окружностей, остальные участки границы прямолинейны).

5.29. Определить основные параметры течения политропного газа за прямым скачком уплотнения через известные параметры $M = M_1$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$ течения перед скачком.

Ответ:

$$p_2 = (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)p_1, \quad \rho_2 = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \rho_1,$$

$$q_2 = q_1 \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2}, \quad M_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}}.$$

5.30. Рассматривается симметричное обтекание затупленного тела равномерным сверхзвуковым потоком политропного газа при наличии отошедшего скачка уплотнения (рис. 5.15). Найти давление на теле в точке торможения A , если известны параметры $p = p_1$, $M = M_1$ ($M_1 > 1$) набегающего потока.

Ответ:

$$p_0 = p_1 (\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma + 1)M_1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

5.31. В условиях предыдущей задачи вычислить предельные значения ρ_0/ρ_1 при $M_1 \rightarrow \infty$ (ρ_0 — плотность газа в точке торможения, ρ_1 — плотность газа в набегающем потоке).

Ответ: $\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \rho_0/\rho_1 = (\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (4\gamma)^{-\frac{1}{\gamma-1}} (\gamma - 1)^{-1}$.

5.32. Доказать, что константа в интеграле Бернулли при переходе через скачок уплотнения меняется непрерывно. Верно ли это для критической скорости c_* ?

5.33. Получить явные выражения для модуля скорости, плотности и давления в стационарном изэнтропическом течении типа дозвукового или сверхзвукового источника (газ политропный, $\gamma = 3$). Считаются заданными расход Q , давление p_* , плотность газа ρ_* на звуковой линии.

Ответ:

$$\begin{aligned} q &= c_* \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - (r_0/r)^2}}, \quad r_0 = Q/(2\pi\rho_*c_*), \\ \rho &= \rho_* \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - (r_0/r)^2}}, \quad c_* = \sqrt{3p_*/\rho_*}, \\ p &= p_* (1 \pm \sqrt{1 - (r_0/r)^2})^{3/2}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ &(x_0 = \text{const}, y_0 = \text{const}). \end{aligned}$$

5.34. Пусть в некоторой точке линии тока \mathcal{L} известны параметры стационарного течения политропного газа: $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, $q = q_1$. Выразить величины p_* , ρ_* , c_* через эти параметры.

Ответ:

$$\begin{aligned} c_* &= c_1 \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}, \\ \rho_* &= \rho_1 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad \left(c_1^2 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}, M_1^2 = \frac{q_1^2}{c_1^2} \right), \\ p_* &= p_1 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

5.35. Рассматривается стационарное течение газа в секторе, изображенном на рис. 5.16. При $r_1 < r < r_2$ реализуется сверхзвуковое течение типа источника, на окружности $r = r_2$ расположен фронт скачка уплотнения, при $r > r_2$ реализуется дозвуковое течение типа источника. Для политропного газа с показателем политропы $\gamma = 3$ определить давление p_∞ , если при $r = r_1$ заданы $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, $q = q_1$ ($q_1 > c_1$).

Ответ:

$$\begin{aligned} p_\infty &= 8p_1 \sqrt{\frac{(M_1^2 + 1)(1 + \sqrt{1 - (r_0/r_2)^2})^3}{1 + 2\sqrt{1 - (r_0/r_2)^2}}}, \\ &(r_0 = 2M_1(1 + M_1^2)^{-1}r_1). \end{aligned}$$

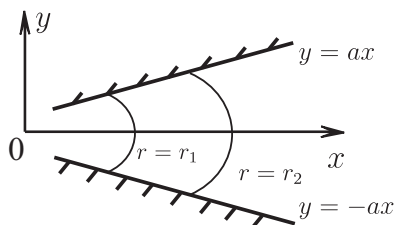


Рис. 5.16

5.36. С помощью частного решения уравнения Чаплыгина вида

$$\psi = \psi_1(q)$$

построить течение на плоскости (x, y) (течение типа потенциального вихря).

5.37. С помощью частного решения уравнения Чаплыгина вида

$$\psi = \psi_1(q) + a\theta$$

построить течение на плоскости (x, y) ($a = \text{const}$).

5.38. Показать, что если вдоль звуковой линии $\theta = \text{const}$, то звуковая линия — прямая на плоскости течения.

5.39. Найти вид функции $K(\sigma)$ для модели политропного газа с показателем $\gamma = 3$ (см. уравнение (5.22)).

Ответ: функция $K(\sigma)$ определена параметрическими формулами:

$$K(\sigma) = 2^{-1/3} \nu^{-2} (1 - \nu^{-2}),$$

$$\sigma = 2^{2/3} \left[1 - \nu + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{(\sqrt{2} + \nu)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - \nu)(\sqrt{2} + 1)} \right], \quad \left(\nu = \frac{\rho}{\rho_*} \right).$$

5.40. Найти характеристики уравнения Трикоми.

Ответ: $\theta \pm \frac{2}{3} (-\sigma)^{3/2} = \text{const}$.

5.41. Найти преобразования растяжения, допускаемые уравнением Трикоми.

5.42. Получить аналог уравнений (5.15) в переменных θ, σ , соответствующий аппроксимации Трикоми для уравнения Чаплыгина.

Ответ: $\varphi_\sigma = g\sigma\psi_\theta, \quad \varphi_\theta = -g\psi_\sigma$.

5.43. Построить решения уравнения Трикоми, имеющие вид полиномов от θ, σ , однородных относительно преобразования растяжения независимых переменных, допускаемого этим уравнением.

Ответ:

$$\psi_s(\sigma, \theta) = \sum_{r=0}^s a_r \sigma^{3r} \theta^{2(s-r)},$$

где коэффициенты a_r связаны соотношением

$$a_{r+1} = -\frac{2(s-r)(2(s-r)-1)}{3(r+1)(3r+2)} a_r, \quad r = 0, \dots, s-1;$$

a_0 — произвольная постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

- (а) Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.: Наука, 1981. 368 с.
- (б) Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003. 336 стр.
- (в) Черный Г. Г. *Газовая динамика*. М.: Наука, 1988. 424 стр.
- (г) Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика. Т. 2*. М.: Физматгиз, 1963. 720 стр.
- (д) Курант Р., Фридрихс К. *Сверхзвуковое течение и ударные волны*. М.: Иност. лит., 1950. 427 стр.
- (е) Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*. М.: Наука, 1978. 687 стр.
- (ж) Сивухин Д. В. *Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика*. М.: Наука, 1990. 591 стр.