ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 211, № 2
май, 2022

А. В. Аксенов[*], А. Д. Полянин[†]

ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ОСНОВАННЫХ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ

Дан краткий обзор методов построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и функционально-дифференциальных уравнений с частными производными, которые основаны на использовании более простых решений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: 1) простые точные решения рассматриваемых уравнений могут использоваться для поиска более сложных решений этих же уравнений; 2) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений или других классов уравнений, имеющих аналогичные нелинейные члены. В частности, показано, как исходя из простых решений с помощью преобразований сдвига и масштабирования можно найти более сложные точные решения; продемонстрировано, что в некоторых случаях можно получать достаточно сложные решения путем добавления слагаемых к более простым решениям; рассматриваются ситуации, когда с помощью однотипных простых решений можно построить более сложное составное решение; описан метод поиска точных решений уравнений с несколькими пространственными переменными исходя из решений родственных уравнений с одной пространственной переменной. Большинство предложенных методов приводят к небольшому объему промежуточных вычислений, их эффективность иллюстрируется на конкретных примерах. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения гидродинамики и газовой динамики. Показано, что некоторые решения уравнений с частными производными можно использовать для построения точных решений более сложных уравнений с запаздыванием. Описан метод, позволяющий строить точные решения функционально-дифференциальных уравнений с частными производными, которые содержат искомые функции с растяжением или сжатием аргументов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № АААА-А20-120011690135-5).

[*]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: aksenov.av@gmail.com

[†]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: polyanin@ipmnet.ru

Ключевые слова: точные решения, нелинейные уравнения с частными производными, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, функционально-дифференциальные уравнения с постоянным и переменным запаздыванием, решения с обобщенным разделением переменных.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm10247

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предварительные замечания. Точные решения уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной и вычислительной математике, асимптотическим методам, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.). Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для формулировки тестовых задач, предназначенных для проверки корректности и оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Точные решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple и др.).

Среди методов поиска точных решений и построения редукций нелинейных уравнений с частными производными укажем следующие методы: метод группового анализа дифференциальных уравнений (метод поиска классических симметрий) [1]–[5], методы поиска неклассических симметрий [6]–[9], прямой метод Кларксона–Крускала [10]–[12], методы обобщенного разделения переменных [11]–[13], методы функционального разделения переменных [12], [14]–[16], метод дифференциальных связей [11], [12], [17], метод обратной задачи рассеяния [18]–[21], метод усеченных разложений Пенлеве [11], [22], [23]. Применение этих методов требует специальной подготовки и, как правило, сопровождается трудоемким анализом и большим объемом аналитических преобразований и промежуточных вычислений.

В настоящей работе описан ряд простых, но достаточно эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые обычно приводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: 1) простые точные решения рассматриваемых уравнений могут использоваться для поиска более сложных решений этих же уравнений; 2) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений или других классов уравнений, имеющих аналогичные нелинейные члены.

Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения Навье–Стокса и др. Помимо точных решений обычных уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения более сложных нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием или пропорциональными аргументами.

1.2. Точные решения нелинейных уравнений с частными производными (используемая терминология). В данной статье термин *точное решение* для нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными будем применять в следующих случаях, когда решение выражается:

1) через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда уравнение содержит произвольные функции), и неопределенные или/и определенные интегралы;

2) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допустимы комбинации решений из п. 1, 2. Точные решения из п. 1 могут быть представлены в явной, неявной или параметрической форме. Более детально терминология по данному вопросу обсуждается в книге [12].

Замечание 1. Для функционально-дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием (постоянным или переменным) к точным решениям дополнительно к решениям из п. 1 и 2 относятся также решения, которые выражаются через решения ОДУ с запаздыванием или систем таких уравнений [24].

2. ПОСТРОЕНИЕ СЛОЖНЫХ РЕШЕНИЙ ИСХОДЯ ИЗ ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СДВИГА И МАСШТАБИРОВАНИЯ

2.1. Некоторые определения. Простейшие преобразования. Будем говорить, что уравнение с частными производными

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \tag{1}$$

инвариантно относительно однопараметрического обратимого преобразования

$$x = X(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, a), \qquad t = T(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, a), \qquad u = U(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, a), \tag{2}$$

если после подстановки выражений (2) в (1) получим точно такое же уравнение

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{t}\bar{t}}, \dots) = 0.$$

Важно отметить, что параметр a, который может принимать значения на некотором интервале (a_1, a_2), не входит в рассматриваемое уравнение (1).

Преобразования (2), сохраняющие вид уравнения (1), преобразуют решение рассматриваемого уравнения в решение этого же уравнения.

Далее будут рассматриваться только однопараметрические преобразования вида

$$
\begin{aligned}
&x = \bar{x} + b_1, && t = \bar{t} + b_2, && u = \bar{u} + b_3 && (\textit{преобразование сдвига}),\\
&x = c_1\bar{x}, && t = c_2\bar{t}, && u = c_3\bar{u} && (\textit{преобразование масштабирования})
\end{aligned}
$$

и композиции этих преобразований. Здесь b_n и c_n, $n = 1, 2, 3$, – постоянные величины, зависящие от свободного параметра a. Такие преобразования будем называть *простейшими преобразованиями.*

2.2. Построение более сложных решений исходя из простых решений. Примеры. Простые одночленные решения в виде произведения функций различных переменных проще всего находить методом разделения переменных (простейшие решения данного типа $u = Ax^\alpha t^\beta$ легко определяются из рассматриваемых уравнений методом неопределенных коэффициентов). Ниже описаны способы построения более сложных решений исходя из таких решений.

Сначала будем рассматривать простые решения с разделением переменных специального вида

$$u = t^k\varphi_1(x), \tag{3}$$

где k – некоторая постоянная, а $\varphi_1(x)$ – некоторая функция. Такие решения не меняются (инвариантны) при преобразовании масштабирования

$$t = a\bar{t}, \qquad u = a^k\bar{u}. \tag{4}$$

Ниже в виде утверждения дано описание метода, позволяющего строить более сложные решения исходя из решений вида (3).

Утверждение 1. *Пусть уравнение*

$$F(t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \tag{5}$$

которое не зависит явно от переменной x, имеет простое решение вида (3) и не меняется при преобразовании масштабирования (4) (т. е. уравнение (5) имеет такое же свойство, что и исходное решение (3)). Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида

$$u = t^k\varphi_2(z), \qquad z = x + m\ln t, \tag{6}$$

где m – произвольная постоянная.

Доказательство утверждения 1 изложено в работе [25].

Замечание 2. В общем случае функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(z)$, входящие соответственно в исходное решение (3) и в более сложное решение (6), могут различаться, причем $\psi_2(z)|_{m=0} \neq \varphi_1(x)$.

Рассмотрим теперь простые решения с разделением переменных специального вида

$$u = x^n\psi_1(t), \tag{7}$$

где n – некоторая постоянная, а $\psi_1(t)$ – некоторая функция. Такие решения не меняются (инвариантны) при преобразовании масштабирования

$$x = a\bar{x}, \qquad u = a^n\bar{u}. \tag{8}$$

Более сложное, чем (7), решение можно получить с помощью утверждения 1, переобозначив соответствующим образом постоянные и переменные величины в соотношениях (3)–(6). Ниже описан другой эквивалентный способ построения более сложного решения, который иногда удобнее использовать на практике.

Утверждение 2. *Пусть уравнение*

$$F(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \tag{9}$$

которое не зависит явно от переменной t, имеет простое решение вида (7) и не меняется при преобразовании масштабирования (8) (т. е. уравнение (9) имеет такое же свойство, что и исходное решение (7)). Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида

$$u = e^{-npt}\psi_2(y), \qquad y = xe^{pt}, \tag{10}$$

где p – произвольная постоянная.

Доказательство утверждения 2 изложено в работе [25].

Замечание 3. Аргумент функции y линеен по x. Поэтому решение (10) легко дифференцировать по x. Это представление решения следует использовать для уравнений, которые содержат частные производные по x более высокого порядка, чем по t.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Буссинеска

$$u_t = a(uu_x)_x, \tag{11}$$

которое описывает нестационарное течение грунтовых вод в пористой среде со свободной поверхностью [26].

Уравнение (11) имеет простое точное решение

$$u = -\frac{x^2}{6at}, \tag{12}$$

которое одновременно является решением двух видов (3) и (7). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений исходя из решения (12).

1. Решение (12) и уравнение (11) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $t = c\bar{t}$, $u = \bar{u}/c$. Поэтому в силу утверждения 1 уравнение (11) допускает более сложное точное решение

$$u = \frac{\varphi(z)}{t}, \qquad z = x + k\ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ

$$k\varphi'_z - \varphi = a(\varphi\varphi'_z)'_z. \tag{13}$$

Отметим, что уравнение (13) при $k = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде квадратичного многочлена

$$\varphi = -\frac{x^2}{6a} + Cx - \frac{3aC^2}{2},$$

где C – произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение совпадает с исходным решением (12).

2. Решение (12) и уравнение (11) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $x = c\bar{x}$, $u = c^2\bar{u}$. Поэтому в силу утверждения 2 уравнение (11) допускает другое точное решение

$$u = e^{-2pt}\psi(y), \qquad y = xe^{pt},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(y)$ описывается ОДУ

$$py\psi'_y - 2p\psi = a(\psi\psi'_y)'_y.$$

Пример 2. Рассмотрим теперь уравнение Гудерлея

$$u_{xx} = au_y u_{yy}, \tag{14}$$

которое используется для описания трансзвуковых течений газа [27].

Уравнение (14) допускает простое точное решение

$$u = \frac{y^3}{3ax^2}, \tag{15}$$

которое является частным случаем двух видов решений (3) и (7). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений исходя из решения (15).

1. Решение (15) и уравнение (14) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $x = c\bar{x}$, $u = c^{-2}\bar{u}$. Поэтому в силу утверждения 1 уравнение (14) имеет более сложное точное решение вида

$$u = x^{-2}\varphi(z), \qquad z = y + m\ln x,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ второго порядка

$$m^2\varphi''_{zz} - 5m\varphi'_z + 6\varphi = a\varphi'_z\varphi''_{zz}.$$

Это уравнение при $m = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде кубического многочлена

$$\varphi(z) = \frac{z^3}{3a} + Cz^2 + aC^2z + \frac{a^2C^3}{3},$$

где C – произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение совпадает с исходным решением (15).

2. Решение (15) и уравнение (14) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $y = c\bar{y}$, $u = c^3\bar{u}$. Поэтому в силу утверждения 2 можно получить также другое более сложное точное решение

$$u = e^{-3px}\psi(z), \qquad z = ye^{px},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(z)$ описывается ОДУ

$$p^2z^2\psi''_{zz} - 5p^2z\psi'_z + 9p^2\psi = a\psi'_z\psi''_{zz}.$$

Пример 3. В газовой динамике встречается нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = a(u^b u_x)_x, \qquad b \neq 0, \tag{16}$$

которое допускает простое точное решение

$$u = a^{-1/b} x^{2/b} t^{-2/b}. \tag{17}$$

Это решение принадлежит обоим классам решений (3) и (7). Поэтому исходя из решения (17) можно построить два более сложных решения, описанных ниже.

1. Решение (17) и уравнение (16) инвариантны относительно преобразования масштабирования $t = c\bar{t}$, $u = c^{-2/b}\bar{u}$. В силу утверждения 1 уравнение (16) имеет более сложное решение вида

$$u = t^{-2/b}\varphi(z), \qquad z = x + m\ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ

$$m^2\varphi''_{zz} - \frac{m(b+4)}{b}\varphi'_z + \frac{2(b+2)}{b^2}\varphi = a(\varphi^b\varphi'_z)'_z.$$

2. Решение (17) и уравнение (16) инвариантны также относительно преобразования масштабирования $x = c\bar{x}$, $u = c^{2/b}\bar{u}$. Поэтому в силу утверждения 2 уравнение (16) допускает другое решение

$$u = e^{-2pt/b}\psi(y), \qquad y = xe^{pt},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$p^2y^2\psi''_{yy} + \frac{p^2(b-4)}{b}y\psi'_y + \frac{4p^2}{b^2}\psi = a(\psi^b\psi'_y)'_y.$$

Утверждение 3. *Пусть уравнение*

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0,$$

которое не зависит явно от переменных x и t (и поэтому допускает решение типа бегущей волны), не меняется при преобразовании масштабирования искомой функции

$$u = c\bar{u}.$$

Тогда это уравнение допускает точное решение (более сложное, чем решение типа бегущей волны), которое можно представить в следующих двух альтернативных формах:

$$u = Ce^{kt}\varphi(px+qt) \qquad (\textit{первая форма}),$$
$$u = Ce^{mx}\psi(px+qt) \qquad (\textit{вторая форма}),$$

где C, k, p, q – произвольные постоянные ($pq \neq 0$), $m = kp/q$, $\psi(z) = e^{-mz/p}\varphi(z)$. Имеются и более простые решения с разделением переменных вида $u = Ce^{kt}\varphi(x)$ и $u = Ce^{mx}\psi(t)$.

2.3. Обобщение на случай произвольного числа пространственных переменных. Приведенные выше утверждения 1–3 допускают очевидные обобщения на случай произвольного числа пространственных переменных.

Пример 4. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с n пространственными переменными

$$u_t = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^k\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \qquad k \neq 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) допускает простое решение с разделением переменных

$$u = t^{-1/k}\varphi(x_1,\dots,x_n), \tag{19}$$

где функция $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\varphi = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^k\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right).$$

Решение (19) и уравнение (18) не меняются при преобразовании масштабирования $t = c\bar{t}$, $u = c^{-1/k}\bar{u}$. Поэтому в силу утверждения 1 уравнение (18) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/k}\theta(z_1,\dots z_n), \qquad z_i = x_i + m_i\ln t,$$

где m_i – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z_1,\dots z_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\theta + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\frac{\partial\theta}{\partial z_i} = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\theta^k\,\frac{\partial\theta}{\partial z_i}\right).$$

2.4. Обобщение на системы уравнений. Утверждения 1–3 могут быть также использованы для нахождения решений систем уравнений.

Пример 5. Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^b u_x)_x + uf\left(\frac{u}{v}\right),\\ v_t &= a(v^b v_x)_x + vg\left(\frac{u}{v}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

где a, b – некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные функции.

Система уравнений (20) имеет простое решение вида

$$u = x^{2/b}\varphi(t), \qquad v = x^{2/b}\psi(t), \tag{21}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \frac{2a(b+2)}{b^2}\varphi^{b+1} + \varphi f\left(\frac{\varphi}{\psi}\right),\\ \psi'_t &= \frac{2a(b+2)}{\mu^2}\psi^{\mu+1} + \psi g\left(\frac{\varphi}{\psi}\right). \end{aligned}$$

Решение (21) и система уравнений (20) не меняются при преобразовании масштабирования $x = c\bar{x}$, $u = c^{2/b}\bar{u}$, $v = c^{2/b}\bar{v}$. Поэтому в силу утверждения 2 система уравнений (20) имеет также более сложное решение вида

$$u = e^{-2mt/b}\Phi(z), \qquad v = e^{-2mt/b}\Psi(z), \qquad z = xe^{mt},$$

где функции $\Phi = \Phi(z)$ и $\Psi = \Psi(z)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} mz\Phi'_z - \frac{2m}{b}\Phi &= a(\Phi^b\Phi'_z)'_z + \Phi f\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right), \\ mz\Psi'_z - \frac{2m}{b}\Psi &= a(\Psi^b\Psi'_z)'_z + \Psi f\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right), \end{aligned}$$

m – произвольная постоянная ($m \neq 0$).

Пример 6. Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^b u_x)_x + u^{b+1} f\left(\frac{u}{v}\right), \\ v_t &= a(v^b v_x)_x + v^{b+1} g\left(\frac{u}{v}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

где a, b – некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные функции.

Система уравнений (22) имеет простое решение вида

$$u = t^{-1/b}\varphi(x), \qquad v = t^{-1/b}\psi(x), \tag{23}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi}{b} &= a(\varphi^b\varphi'_x)'_x + \varphi^{b+1} f\left(\frac{\varphi}{\psi}\right), \\ -\frac{\psi}{b} &= a(\psi^b\psi'_x)'_x + \psi^{b+1} g\left(\frac{\varphi}{\psi}\right). \end{aligned}$$

Решение (23) и система уравнений (22) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $t = c\bar{t}$, $u = c^{-1/b}\bar{u}$, $v = c^{-1/b}\bar{v}$. В силу утверждения 1 система уравнений (22) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/b}\Phi(z), \qquad v = t^{-1/b}\Psi(z), \qquad z = x + m\ln t,$$

где m – произвольная постоянная, а функции $\Phi = \Phi(z)$ и $\Psi = \Psi(z)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi}{b} + m\Phi'_z &= a(\Phi^b\Phi'_z)'_z + \Phi^{b+1} f\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right), \\ -\frac{\Psi}{b} + m\Psi'_z &= a(\Psi^b\Psi'_z)'_z + \Psi^{b+1} g\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right). \end{aligned}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПУТЕМ ДОБАВЛЕНИЯ СЛАГАЕМЫХ К БОЛЕЕ ПРОСТЫМ РЕШЕНИЯМ

В некоторых случаях простые решения удается обобщить путем добавления к ним одного или нескольких дополнительных слагаемых, что приводит к более сложным решениям с обобщенным разделением переменных [11]–[13]. Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Буссинеска (11) и уравнения Гудерлея (14).

Пример 7. Как указывалось выше, уравнение Буссинеска (11) имеет квадратичное по x решение с простым разделением переменных (12), которое запишем в виде

$$u = \varphi(t)x^2, \qquad \varphi(t) = -\frac{1}{6at}. \tag{24}$$

Найдем более сложное решение в виде суммы

$$u(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x^k, \qquad k \neq 2, \tag{25}$$

первый член которой совпадает с решением (24). Во второе слагаемое формулы (25) входят функция $\psi(t)$ и коэффициент k, которые требуется найти.

Подставив (25) в (11), после элементарных преобразований получим

$$(\varphi'_t - 6a\varphi^2)x^2 + [\psi'_t - a(k+1)(k+2)\varphi\psi]x^k - ak(2k-1)\psi^2 x^{2k-2} = 0. \tag{26}$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при различных степенях x в (26) должны равняться нулю. Таким образом, возможны два случая $k = 0$ и $k = 1/2$ (оба соответствуют обращению в нуль коэффициента при x^{2k-2}), которые надо рассмотреть по отдельности.

1. *Первый случай.* Подставив $k = 0$ в (26), для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ имеем систему уравнений

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \qquad \psi'_t - 2a\varphi\psi = 0,$$

общее решение которой определяется формулами

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t+C_1)}, \qquad \psi(t) = \frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}}, \tag{27}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2. *Второй случай* (решение Баренблатта–Зельдовича дипольного типа [28]). Подставив $k = 1/2$ в (26), получим систему уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \qquad \psi'_t - \frac{15}{4}a\varphi\psi = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t+C_1)}, \qquad \psi(t) = \frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}. \tag{28}$$

Учитывая формулы (25), (27), (28), в итоге получим два трехпараметрических решения с обобщенным разделением переменных уравнения (11):

$$u = -\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2 + \frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}},$$
$$u = -\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2 + \frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}(x+C_3)^{1/2},$$

где в целях бо́льшей общности дополнительно добавлен произвольный сдвиг по пространственной переменной x.

Замечание 4. Волновое уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_{tt} = a(uu_x)_x$$

также допускает решения вида (25) при $k = 0$ и $k = 1/2$.

Пример 8. Вернемся теперь к уравнению Гудерлея (14). Это уравнение допускает простое точное решение (15), которое запишем в виде

$$u = f(x)y^3, \qquad f(x) = \frac{1}{3ax^2}.$$

Будем искать более сложные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнения (14) в виде

$$u(x,y) = \varphi(x)y^k + \psi(x), \tag{29}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и константа $k \neq 0$ являются искомыми (решение (15) является частным случаем решения (29) при $k = 3$ и $\psi = 0$). Важно отметить, что подобные двучленные решения уравнений с частными производными достаточно часто встречаются на практике и являются наиболее простыми решениями с обобщенным разделением переменных.

Подставив (29) в (14), после перестановки членов приходим к соотношению

$$\varphi''_{xx}y^k - ak^2(k-1)\varphi^2 y^{2k-3} + \psi''_{xx} = 0, \tag{30}$$

которое содержит степенные функции y^k и y^{2k-3} и должно удовлетворяться тождественно для любых y.

Рассмотрим два случая: $\psi''_{xx} = 0$ и $\psi''_{xx} \neq 0$.

1. *Первый случай.* При $\psi''_{xx} = 0$ получим двучленное уравнение с разделяющимися переменными, которому можно удовлетворить, если положить

$$k = 3, \qquad \varphi''_{xx} - 18a\varphi^2 = 0. \tag{31}$$

Общее решение автономного ОДУ (31) можно представить в неявной форме

$$x = \pm\int (12a\varphi^3 + C_1)^{-1/2}\,d\varphi + C_2.$$

Кроме того, это уравнение допускает частное решение степенного вида

$$\varphi = \frac{1}{3a}(x+C_1)^{-2},$$

что приводит к трехпараметрическому точному решению уравнения (14):

$$u = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}y^3 + C_2x + C_3, \tag{32}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

2. *Второй случай*. Чтобы сбалансировать функцию $\psi''_{xx} \neq 0$ со вторым членом в равенстве (30), надо положить $k = 3/2$. В результате получим двучленное уравнение, которому можно удовлетворить, если положить

$$\varphi''_{xx} = 0, \qquad \psi''_{xx} = \frac{9}{8}a\varphi^2.$$

Эти уравнения легко интегрируются и приводят к четырехпараметрическому точному решению уравнения (14):

$$u = (C_1x + C_2)y^{3/2} + \frac{3a}{32C_1^2}(C_1x + C_2)^4 + C_3x + C_4, \tag{33}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пример 9. Рассмотрим уравнение гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине [29]:

$$u_yu_{xy} - u_xu_{yy} = \nu u_{yyy}, \tag{34}$$

где u – функция тока, ν – кинематический коэффициент вязкости. Нетрудно проверить, что это уравнение допускает автомодельное решение [30]:

$$u = F(\xi), \qquad \xi = \frac{y}{x}, \tag{35}$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ третьего порядка $-(F'_z)^2 = \nu F'''_{zzz}$.

Ищем более общее решение уравнения (34), добавив к (35) функцию $\varphi(x)$:

$$u = F(\xi) + \varphi(x), \qquad \xi = \frac{y}{x}.$$

Несложные выкладки показывают, что $\varphi(x) = a\ln x$, где a – произвольная постоянная. В итоге получим неавтомодельное решение уравнения пограничного слоя (34) вида [11]

$$u = F(\xi) + a\ln x, \qquad \xi = \frac{y}{x},$$

где функция $F = F(\xi)$ описывается ОДУ

$$-(F'_z)^2 - aF''_{zz} = \nu F'''_{zzz}.$$

4. ПОСТРОЕНИЕ СОСТАВНЫХ РЕШЕНИЙ (НЕЛИНЕЙНАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЙ)

В некоторых случаях два однотипных, но различных решения рассматриваемого нелинейного уравнения удается объединить и получить более общее составное решение. Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Гудерлея и нелинейного уравнения диффузии с объемной химической реакцией второго порядка.

Пример 10. Из выражений (32) и (33) следует, что уравнение Гудерлея (14) имеет два однотипных решения $u_1 = \varphi y^{3/2} + \psi$ и $u_2 = \varphi y^3 + \psi$, отличающихся друг от друга показателем степени y. Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (14), включающее сразу оба члена с различными показателями степени. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x,y) = \varphi_1(x)y^3 + \varphi_2(x)y^{3/2} + \psi(x). \tag{36}$$

Подставим его в уравнение (14). После объединения членов при степенных функциях $y^{3n/2}$, $n = 0, 1, 2$, получим

$$(\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2)y^3 + \left(\varphi_2'' - \frac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2\right)y^{3/2} + \psi'' - \frac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось для любых y, надо приравнять к нулю коэффициенты при $y^{3n/2}$. В результате приходим к системе ОДУ

$$\begin{aligned} \varphi_1'' - 18a\varphi_1^2 &= 0, \\ \varphi_2'' - \frac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2 &= 0, \\ \psi'' - \frac{9}{8}a\varphi_2^2 &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, конструктивно доказано, что уравнение (14) допускает решение вида (36) (это решение было получено в работе [31]).

Можно показать, что система (37) допускает точное решение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}, \\ \varphi_2 &= C_2(x + C_1)^{5/2} + C_3(x + C_1)^{-3/2}, \\ \psi &= \frac{3a}{112}C_2^2(x + C_1)^7 + \frac{3}{8}aC_2C_3(x + C_1)^3 + \frac{9}{16}aC_3^2(x + C_1)^{-1} + C_4x + C_5. \end{aligned}$$

Пример 11. Рассмотрим теперь нелинейное уравнение диффузии с объемной химической реакцией второго порядка

$$u_t = a(uu_x) - bu^2. \tag{38}$$

Процедуру построения составного решения этого уравнения проведем в два этапа: сначала найдем два достаточно простых решения, а затем, используя эти решения, построим составное решение.

1. *Решение экспоненциального вида по x.* Точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (38) ищем в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \tag{39}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ и постоянная λ подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Подставив (39) в (38) и собрав подобные члены при экспонентах $e^{n\lambda x}$, $n = 0, 1, 2$, получим

$$(b - 2a\lambda^2)\varphi^2 e^{2\lambda x} + [\varphi_t' + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi]e^{\lambda x} + \psi_t' + b\psi^2 = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ надо приравнять к нулю. В результате приходим к простой дифференциально-алгебраической системе

$$\begin{aligned} b - 2a\lambda^2 &= 0, \\ \varphi'_t + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi &= 0, \\ \psi'_t + b\psi^2 &= 0, \end{aligned}$$

которая допускает два решения

$$\lambda = \pm\left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \qquad \varphi = \frac{C_1}{|t + C_2|^{3/2}}, \qquad \psi = \frac{1}{b(t + C_2)}, \tag{40}$$

где C_1 и C_2 –произвольные постоянные.

2. *Составное решение экспоненциального вида по x.* Из соотношений (39) и (40) следует, что уравнение (38) имеет два решения $u_{1,2} = \varphi e^{\pm\lambda x} + \psi$. По структуре они отличаются друг от друга только знаком показателя экспоненты λ.

Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (38), включающее сразу оба экспоненциальных члена. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x,t) = \varphi_1(t)e^{-\lambda x} + \varphi_2(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \qquad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}. \tag{41}$$

Подставив его в (38), после элементарных преобразований имеем

$$\left[(\varphi_1)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_1\psi\right]e^{-\lambda x} + \left[(\varphi_2)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_2\psi\right]e^{\lambda x} + \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0.$$

Приравнивая к нулю функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$, $n = 0, \pm 1$, приходим к системе ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} (\varphi_1)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_1\psi &= 0, \\ (\varphi_2)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_2\psi &= 0, \\ \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) &= 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Таким образом, доказано, что уравнение (38) допускает решение вида (41).

Исключив ψ из первых двух уравнений в (42), получим равенство $(\varphi_1)'_t/\varphi_1 = (\varphi_2)'_t/\varphi_2$. Отсюда следует, что $\varphi_1 = A\varphi(t)$, $\varphi_2 = B\varphi(t)$, где A и B – произвольные постоянные. Поэтому решение с обобщенным разделением переменных (41) приводится к виду

$$u(x,t) = \varphi(t)(Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}) + \psi(t), \qquad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \tag{43}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ, состоящей из двух уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t + \frac{3}{2}b\varphi\psi &= 0, \\ \psi'_t + b(2AB\varphi^2 + \psi^2) &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Эта автономная система путем исключения t сводится к одному ОДУ, которое является однородным и поэтому может быть проинтегрировано. Отметим, что система уравнений (44) при $AB > 0$ допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{1}{3b\sqrt{AB}(t+C)}, \qquad \psi = \frac{2}{3b(t+C)},$$

которые определяют решение (43) в виде произведения функций разных аргументов.

3. *Решение тригонометрического вида по x.* При записи формул (41) и (43) неявно подразумевалось, что $ab > 0$. При $ab < 0$ имеем

$$\lambda = i\beta, \qquad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \qquad i^2 = -1.$$

В этом случае в решении (43) вместо экспоненциальных функций появляются тригонометрические функции, т. е. его можно представить в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)[A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \tag{45}$$

где A_1 и B_1 – произвольные постоянные. Подставив (45) в уравнение (38) и проведя выкладки, аналогичные сделанным в п. 2, получим следующую нелинейную систему ОДУ для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\begin{gathered} \varphi_t' + \frac{3}{2}b\varphi\psi = 0, \\ \psi_t' + b\left[\frac{1}{2}(A_1^2 + B_1^2)\varphi^2 + \psi^2\right] = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Эта система допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{2}{3b\sqrt{A_1^2 + B_1^2}(t+C)}, \qquad \psi = \frac{2}{3b(t+C)},$$

которые определяют решение (45) в виде произведения функций разных аргументов.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Нелинейные уравнения с частными производными. Нередко для построения точных решений сложных нелинейных дифференциальных уравнений удается использовать решения более простых уравнений. Проиллюстрируем ход рассуждений в подобных случаях на конкретных примерах.

Следующий пример показывает, как точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений могут быть использованы для получения точных решений уравнений волнового типа.

Пример 12. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_t = a(uu_x)_x + bu, \tag{47}$$

которое допускает несколько простых точных решений, приведенных ниже (см., например, [11]):

1) решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t), \tag{48}$$

где $\psi_1(t) = -be^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-1}$, $\psi_2(t) = C_2e^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-1/3}$, C_1, C_2 – произвольные постоянные;

2) решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)\sqrt{x}, \tag{49}$$

где $\psi_1(t) = -be^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-1}$, $\psi_2(t) = C_2e^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-5/8}$, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение волнового типа с квадратичной нелинейностью

$$u_{tt} = a(uu_x)_x + bu. \tag{50}$$

Уравнения (47) и (50) различаются только порядком производной по переменной t в левой части уравнений. Поскольку правые части этих уравнений, включающие производные по переменной x и нелинейности, одинаковы, естественно предположить, что степенная структура решений по x обоих уравнений также будет одинаковой, а изменятся только зависящие от t функциональные множители при различных степенях x.

Другими словами, ищем точные решения уравнения волнового типа (50) в той же форме, что и решения реакционно-диффузионного уравнения (47). В результате получим два точных решения уравнения (50):

1) решение с обобщенным разделением переменных вида (48), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 6a\psi_1^2 + b\psi_1, \\ \psi_2'' &= 2a\psi_1\psi_2 + b\psi_2; \end{aligned}$$

2) решение с обобщенным разделением переменных вида (49), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 6a\psi_1^2 + b\psi_1, \\ \psi_2'' &= \frac{15}{4}a\psi_1\psi_2 + b\psi_2. \end{aligned}$$

Рассмотренный пример является хорошей иллюстрацией довольно общего факта, который является следствием результатов [13] (см. также [11], [12]) и может быть сформулирован в виде следующего утверждения.

Утверждение 4. *Пусть нелинейное уравнение с частными производными*

$$u_t = F[u],$$

где $F[u] \equiv F(u, u_x, \ldots, u_x^{(n)})$, *имеет решение с обобщенным разделением переменных*

$$u = \sum_{k=1}^{m} \psi_k(t)\varphi_k(x). \tag{51}$$

Тогда более сложное уравнение с частными производными

$$L_1[u] = L_2[w], \qquad w = F[u],$$

где L_1, L_2 *являются линейными дифференциальными операторами по переменной* t *вида*

$$L_1[u] = \sum_{i=0}^{k} a_i(t)u_t^{(i)}, \qquad L_2[w] = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)w_t^{(j)},$$

также имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (51) *с теми же функциями* $\varphi_k(x)$ (*но с другими функциями* $\psi_k(t)$).

5.2. Нелинейные уравнения в частных производных с запаздыванием. В биологии, биофизике, биохимии, медицине, теории управления, экологии, экономике и других областях встречаются системы, динамика которых зависит не только от текущего состояния системы в данный момент времени, но и от состояния системы в некоторый предыдущий момент времени [24], [32]. Дифференциальные уравнения, описывающие такие процессы, помимо неизвестной функции $u = u(x, t)$, включают также функцию $w = u(x, t - \tau)$, где t – время, $\tau > 0$ – постоянное запаздывание. В некоторых случаях запаздывание может зависеть от времени, $\tau = \tau(t)$.

Наличие запаздывания существенно усложняет анализ таких уравнений. Хотя многие нелинейные уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием допускают решения типа бегущей волны $u = u(x + \lambda t)$ (см., например, [32]–[35]), они не имеют автомодельных решений вида $u = t^\beta \varphi(xt^\lambda)$, которые часто имеют более простые уравнения в частных производных без запаздывания.

Более сложные, чем решения типа бегущей волны, точные решения нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием были получены в работах [36]–[43]. Точные решения нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием и связанных с ними нелинейных гиперболических уравнений приведены в работах [42], [44]–[46]. Ниже на конкретных примерах показано, как можно найти точные решения некоторых нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, используя решения более простых уравнений в частных производных без запаздывания.

Пример 13. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = a(uu_x)_x + bw, \qquad w = u(x, t - \tau). \tag{52}$$

Уравнение (52) является более сложным, чем уравнение без запаздывания (47), и совпадает с ним при $\tau = 0$. Наличие запаздывания в уравнении (52) не влияет на нелинейный член, содержащий производные по x. Следовательно, можно предположить, что степенная структура решений по переменной x в обоих уравнениях будет одинаковой и изменятся только функциональные коэффициенты, зависящие от t.

Другими словами, ищем точные решения уравнения в частных производных с запаздыванием (52) в той же форме, что и решения более простого уравнения без запаздывания (47). В результате получим два точных решения нелинейного уравнения в частных производных с запаздыванием (52), которые приведены ниже.

1. Решение с обобщенным разделением переменных вида (48), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 6a\psi_1^2 + b\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(t-\tau), \\ \psi_2' &= 2a\psi_1\psi_2 + b\bar{\psi}_2, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(t-\tau). \end{aligned}$$

2. Решение с обобщенным разделением переменных вида (49), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 6a\psi_1^2 + b\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(t-\tau), \\ \psi_2' &= \frac{15}{4}a\psi_1\psi_2 + b\bar{\psi}_2, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(t-\tau). \end{aligned}$$

Пример 14. Реакционно-диффузионное уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c) \tag{53}$$

имеет решение с функциональным разделением переменных [13]:

$$u(x,t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)], \tag{54}$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ являются решениями нелинейной системы ОДУ

$$\begin{aligned} \psi_2' &= 4a\psi_2^2 + b\psi_2, \\ \psi_1' &= 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1, \\ \psi_0' &= a(\psi_1^2 + 2\psi_2) + b\psi_0 + c. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь более сложное нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + u(b\ln w + c), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{55}$$

Уравнение в частных производных с запаздыванием (55) в частном случае при $\tau = 0$ совпадает с более простым уравнением без запаздывания (53). Решение уравнения с запаздыванием (55), как и решение уравнения без запаздывания (53), ищем в виде (54). В результате для функциональных коэффициентов $\psi_n = \psi_n(t)$ получим нелинейную систему ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi_2' &= 4a\psi_2^2 + b\bar{\psi}_2, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(t-\tau), \\ \psi_1' &= 4a\psi_1\psi_2 + b\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(t-\tau), \\ \psi_0' &= a(\psi_1^2 + 2\psi_2) + b\bar{\psi}_0 + c, & \bar{\psi}_0 &= \psi_0(t-\tau). \end{aligned}$$

6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

6.1. Линейные уравнения. В случае линейных уравнений с частными производными для построения более сложных решений исходя из более простых решений можно использовать следующее утверждение.

Утверждение 5. *Пусть линейное однородное уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными* x *и* t *имеет однопараметрическое решение вида* $u = \varphi(x, t, c)$, *где* c *– параметр, который не входит в исходное уравнение. Тогда рассматриваемое уравнение имеет также два двухпараметрических решения*

$$u_1 = \operatorname{Re} \varphi(x, t, a + ib), \qquad u_2 = \operatorname{Im} \varphi(x, t, a + ib),$$

где a *и* b *– произвольные действительные постоянные,* $\operatorname{Re} z$ *и* $\operatorname{Im} z$ *– действительная и мнимая части комплексного числа* z.

Из утверждения 5 следует справедливость двух следствий, сформулированных ниже.

Следствие 1. *Пусть левая часть линейного однородного уравнения с частными производными не зависит явно от независимой переменной* t *и имеет решение* $u = \varphi(x, t)$. *Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений*

$$u_1 = \operatorname{Re} \varphi(x, t + ia), \qquad u_2 = \operatorname{Im} \varphi(x, t + ia),$$

где a *– произвольная действительная постоянная.*

Следствие 2. *Пусть левая часть линейного однородного уравнения с частными производными не зависит явно от независимой переменной* x *и имеет решение* $u = \varphi(x, t)$. *Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений*

$$u_1 = \operatorname{Re} \varphi(x + ia, t), \qquad u_2 = \operatorname{Im} \varphi(x + ia, t),$$

где a *– произвольная действительная постоянная.*

Пример 15. Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x, \tag{56}$$

где x – радиальная координата, которое описывает двумерные процессы с осевой симметрией. Нетрудно проверить, что уравнение (56) допускает преобразование сдвига по переменной t и имеет частное решение

$$u = \frac{1}{t} e^{-x^2/(4t)}. \tag{57}$$

Делая в решении (57) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 1, находим два более сложных однопараметрических семейства решений:

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{Re} \frac{1}{t+ia} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t+ia)}\right) = \\ &= \frac{1}{t^2+a^2} \exp\left(-\frac{x^2 t}{4(t^2+a^2)}\right)\left(t\cos\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)} + a\sin\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)}\right), \\ u_2 &= \operatorname{Im} \frac{1}{t+ia} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t+ia)}\right) = \\ &= \frac{1}{t^2+a^2} \exp\left(-\frac{x^2 t}{4(t^2+a^2)}\right)\left(a\cos\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)} - t\sin\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)}\right). \end{aligned}$$

Пример 16. Рассмотрим линейное уравнение в частных производных с запаздыванием волнового типа

$$u_{tt} = w_{xx}, \qquad w = u(x, t-\tau).$$

Оно имеет частное решение

$$\tilde{u}(x,t) = \exp(\mu e^{\mu\tau/2} x + \mu t),$$

где μ – произвольная постоянная. Полагая в этом решении $\mu = i\alpha$, а затем выделяя действительную и мнимую части, получим два более сложных решения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp\left[-\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x\right]\cos\left[\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x + \alpha t\right], \\ u_2 &= \exp\left[-\alpha\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x\right]\sin\left[\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x + \alpha t\right]. \end{aligned}$$

Замечание 5. В работе [47] было рассмотрено линейное волновое уравнение с переменными коэффициентами, к которому сводится одномерная нелинейная система уравнений мелкой воды над наклонным дном. С помощью комплексного сдвига с параметром a было получено точное решение, описывающее распространение локализованных возмущений в одномерной мелкой воде над наклонным дном. В работе [48] интегрированием по параметру a было получено другое точное решение рассматриваемого волнового уравнения. В работе [49] было построено многопараметрическое семейство решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, описывающих движение мелкой воды над горизонтальным и наклонным дном.

Замечание 6. Другие примеры использования комплексных параметров для построения точных решений имеются в работе [25].

6.2. Нелинейные уравнения. В некоторых случаях из одного решения нелинейного уравнения можно получить другое решение, перейдя от действительных параметров к комплексным таким образом, чтобы преобразованные уравнение и решение оставались действительными. Поясним сказанное на конкретных примерах.

Пример 17. Вернемся к уравнению (38). Легко проверить, что решение с тригонометрическими функциями (45) и нелинейная система ОДУ (46) могут быть получены из экспоненциального решения (43) и системы нелинейных ОДУ (44), если формально положить

$$\begin{gathered} \lambda = i\beta, \qquad e^{\lambda x} = e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x), \\ e^{-\lambda x} = e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x), \\ A = \frac{1}{2}(A_1 + iB_1), \qquad B = \frac{1}{2}(A_1 - iB), \qquad A_1 = A + B, \qquad B_1 = i(B - A). \end{gathered} \tag{58}$$

Пример 18. Рассмотрим нелинейное уравнение параболического типа

$$u_t = au_{xx} + uf(u_x^2 - bu^2), \tag{59}$$

где $f(w)$ – произвольная функция.

Легко проверить, что уравнение (59) имеет простое точное решение с мультипликативным разделением переменных, экспоненциальное по переменной x:

$$u = \psi(t)e^{\lambda x}, \tag{60}$$

где параметр λ и функция $\psi(t)$ определяются в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (60) в уравнение (59), получаем два решения вида (60), где

$$\lambda = \pm\sqrt{b}, \qquad \psi'_t = [ab + f(0)]\psi.$$

Наличие двух однотипных решений, соответствующих $\pm\lambda$, наводит на мысль попробовать взять их линейную комбинацию и искать более общее составное решение вида

$$u = \psi(t)(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}), \tag{61}$$

где A и B – некоторые постоянные. Прямая проверка показывает, что функция (61) при произвольных A и B действительно является решением уравнения (59), причем функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\psi'_t = ab\psi + \psi f(-4ABb\psi^2). \tag{62}$$

Подставляя (58) в (61) и (62), получаем новое решение, содержащее тригонометрические функции аргумента x:

$$u = \varphi(t)[A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x)], \qquad \beta = \sqrt{-b},$$

где A_1 и B_1 – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка

$$\psi'_t = ab\psi + \psi f(-(A_1^2 + B_1^2)b\psi^2).$$

Утверждение 6. *Пусть нелинейное уравнение в частных производных имеет точное решение, содержащее тригонометрические функции, вида*

$$u = F(x, t, A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x), \beta^2), \tag{63}$$

где A, B, β – свободные действительные параметры, которые не входят в рассматриваемое уравнение. Тогда это уравнение имеет также точное решение, содержащее гиперболические функции:

$$u = F(x, t, \bar{A}\ \mathrm{ch}(\lambda x) + \bar{B}\ \mathrm{sh}(\lambda x), -\lambda^2), \tag{64}$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, λ – свободные действительные параметры. Верно и обратное: если уравнение имеет решение вида (64), то оно имеет также точное решение вида (63).

Решение (64) получается из (63) путем переобозначения параметров $\beta = i\lambda$, $A = \bar{A}$, $B = -i\bar{B}$, $i^2 = -1$.

Пример 19. Рассмотрим нелинейное уравнение четвертого порядка

$$u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \tag{65}$$

к которому сводятся стационарные уравнения Навье–Стокса в плоском случае [50].

Уравнение (65) имеет точное решение

$$u(x, y) = [\bar{A}\ \mathrm{sh}(\lambda x) + \bar{B}\ \mathrm{ch}(\lambda x)]e^{-\gamma y} + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 + \lambda^2)x.$$

Поэтому это уравнение имеет также точное решение

$$u(x, y) = [A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]e^{-\gamma y} + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 - \beta^2)x.$$

Приведенные решения и другие примеры такого рода можно найти в книге [11].

7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В некоторых случаях решения нелинейных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной x можно использовать для построения решений родственных уравнений с несколькими пространственными переменными $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Как это можно делать на практике, поясним на конкретных примерах.

Пример 20. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с одной пространственной переменной

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \frac{a}{f(u)} + b, \tag{66}$$

где $f(u)$ – произвольная функция, a и b – произвольные постоянные. Можно показать, что уравнение (66) допускает точное решение в неявной форме

$$\int f(u)\,du = at + \theta(x), \tag{67}$$

где $\theta(x) = -bx^2/2 + C_1x + C_2$, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пространственное обобщение уравнения (66) записывается в виде

$$u_t = \operatorname{div}[f(u)\nabla u] + \frac{a}{f(u)} + b.$$

Точное решение этого уравнения ищем в неявном виде, заменив в (67) x на $\mathbf{x}$ [11]:

$$\int f(u)\,du = at + \theta(\mathbf{x}).$$

Отсюда имеем $f(u)u_t = a$ и $f(u)\nabla u = \nabla\theta$. В результате для функции $\theta = \theta(\mathbf{x})$ получим уравнение Пуассона $\Delta\theta + b = 0$.

Пример 21. Нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с одной пространственной переменной и постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf\left(\frac{\bar{u}}{u}\right), \qquad \bar{u} = u(x, t-\tau), \qquad \tau > 0, \tag{68}$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t), \tag{69}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\varphi''_{xx} = C\varphi, \tag{70}$$

$$\psi'_t = aC\psi + \psi f\left(\frac{\bar{\psi}}{\psi}\right), \qquad \bar{\psi} = \psi(t-\tau), \tag{71}$$

где C – произвольная постоянная. ОДУ (70) является линейным и легко интегрируется, а ОДУ с запаздыванием (71) имеет точное решение экспоненциального вида $\psi = Ae^{\lambda t}$, где A – произвольная постоянная, а λ – корень трансцендентного уравнения $\lambda = aC + f(e^{-\lambda\tau})$.

Рассмотрим теперь реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = a\Delta u + uf\left(\frac{\bar{u}}{u}\right), \qquad \bar{u} = u(\mathbf{x}, t-\tau), \tag{72}$$

которое является пространственным обобщением уравнения (68). Точное решение уравнения (72) можно получить, заменив в (69) x на $\mathbf{x}$:

$$u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t). \tag{73}$$

Подставим (73) в (72). После разделения переменных для функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ получим уравнение Гельмгольца $\Delta\varphi = C\varphi$, а для функции $\psi = \psi(t)$ – ОДУ с постоянным запаздыванием (71).

8. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Опишем метод построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, который основан на использовании решений специального вида вспомогательных более простых уравнений без запаздывания.

Будем рассматривать нелинейные уравнения в частных производных без запаздывания с двумя независимыми переменными вида

$$\Phi(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots; \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0, \tag{74}$$

где $u = u(x, t)$ – искомая функция, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ – свободные параметры.

Покажем, что в некоторых случаях точные решения уравнения (74) можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений с запаздыванием. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7. *Пусть уравнение (74) допускает решение типа обобщенной бегущей волны, которое можно представить в неявном виде*

$$F(u) = kt + \theta(x), \tag{75}$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$P(k, \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0, \tag{76}$$

а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет ОДУ

$$Q(x, \theta, \theta'_x, \theta''_{xx}, \ldots; \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0. \tag{77}$$

Тогда более сложное нелинейное уравнение в частных производных с запаздыванием, которое получается из (74) формальной заменой свободных параметров $\beta_1, \ldots$, β_m на функции по правилу

$$\beta_i \Longrightarrow \varphi_i(F(u) - F(w)), \qquad w = u(x, t-\tau), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

где $w = u(x, t-\tau)$, а $\varphi_i(z)$ – заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (75). В этом случае константа k и функция $\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (76) и (77), в которых следует положить

$$\beta_i = \varphi_i(k\tau), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство утверждения 7 приведено в работе [42].

Замечание 7. В простейших случаях вместо ОДУ (77) может быть явно задана функция $\theta = \theta(x, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ (см. [43]).

Пример 22. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)}, \tag{78}$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра σ и β. Это уравнение в частных производных допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде [14]:

$$\int f(u)\,du = kt - \sigma \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \tag{79}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β линейным соотношением

$$k = \beta. \tag{80}$$

Решение (79) является решением вида (75) при $F(u) = \int f(u)\,du$.

Используя утверждение 7, заменим в уравнении (78) параметры σ и β на функции $\varphi(F(u) - F(w))$ и $\psi(F(u) - F(w))$ соответственно, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные функции. В результате приходим к более сложному нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)),$$
$$F(u) = \int f(u)\,du,$$

которое зависит от четырех произвольных функций и имеет точное решение

$$\int f(u)\,du = kt - \varphi(k\tau) \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(k\tau)$$

(получено из (80) при $\beta = \psi(k\tau)$).

Замечание 8. В [24], [42] приведены другие примеры использования утверждения 7 для построения нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, допускающих точные решения.

9. ПРИНЦИП АНАЛОГИИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ АРГУМЕНТАМИ

Рассмотрим нелинейные уравнения в частных производных с пропорциональными аргументами, которые помимо искомой функции $u = u(x,t)$ содержат также функции с растяжением одной или нескольких независимых переменных вида $u(px,t)$, $u(x,qt)$ или $u(px,qt)$, где p и q – параметры масштабирования ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$).

Опишем достаточно общий метод построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных с пропорциональными аргументами, который основан на использовании следующего принципа [25], [43].

Принцип аналогии решений. Структура точных решений уравнений в частных производных с пропорциональными аргументами

$$\begin{gathered} F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\dots,w,w_x,w_t,w_{xx},w_{xt},w_{tt},\dots)=0, \\ w=u(px,qt), \end{gathered} \tag{81}$$

часто (но не всегда) определяется структурой решений более простых уравнений в частных производных с обычными аргументами

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\dots,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\dots)=0. \tag{82}$$

Уравнение (82) не содержит искомой функции с пропорциональными аргументами и получено из (81) формальной заменой w на u.

Проиллюстрируем использование принципа аналогии решений на примерах трех уравнений в частных производных с пропорциональными аргументами, имеющих различные типы решений.

Пример 23. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональными аргументами

$$u_t=au_{xx}+bw^k,\qquad w=u(px,qt), \tag{83}$$

содержащее нелинейность степенного вида.

Следуя принципу аналогии решений, положим $w=u$ в уравнении (83). В результате приходим к более простому нелинейному уравнению теплопроводности (диффузии) с обычными аргументами

$$u_t=au_{xx}+bu^k. \tag{84}$$

Это уравнение допускает автомодельное решение [51]:

$$u(x,t)=t^{1/(1-k)}U(z),\qquad z=xt^{-1/2},\qquad k\neq 1.$$

Используя принцип аналогии решений, ищем решение нелинейного уравнения с пропорциональными аргументами (83) в таком же виде (84). В результате для функции $U=U(z)$ получим нелинейное ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\begin{gathered} aU''_{zz}+\frac{1}{2}zU'_z-\frac{1}{1-k}U+bq^{k/(1-k)}W^k=0, \\ W=U(sz),\qquad s=pq^{-1/2}. \end{gathered}$$

Пример 24. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональными аргументами и экспоненциальной нелинейностью

$$u_t=au_{xx}+be^{\lambda w},\qquad w=u(px,qt), \tag{85}$$

где $\lambda\neq 0$.

Следуя принципу аналогии решений, положим $w = u$ в уравнении (85). В результате приходим к более простому нелинейному уравнению теплопроводности (диффузии) с обычными аргументами и источником экспоненциального вида

$$u_t = au_{xx} + be^{\lambda u}.$$

Это уравнение допускает инвариантное решение вида [51]

$$u(x,t) = U(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \qquad z = xt^{-1/2}. \tag{86}$$

Используя принцип аналогии решений, ищем решение нелинейного уравнения в частных производных с пропорциональными аргументами (85) в виде (86). В итоге для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\begin{gathered} aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + \frac{1}{\lambda} + \frac{b}{q}e^{\lambda W} = 0, \\ W = U(sz), \qquad s = pq^{-1/2}. \end{gathered}$$

Пример 25. Рассмотрим уравнение в частных производных с пропорциональными аргументами и логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w + d), \qquad w = u(px, qt). \tag{87}$$

Положив $w = u$ в уравнении (87), приходим к более простому нелинейному уравнению с обычными аргументами

$$u_t = au_{xx} + u[(b+c)\ln u + d],$$

допускающему точное решение с мультипликативным разделением переменных [11]

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{88}$$

Используя принцип аналогии решений, ищем решение нелинейного уравнения в частных производных с пропорциональными аргументами (87) в виде (88). После разделения переменных для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получим нелинейные ОДУ с пропорциональными аргументами

$$\begin{aligned} &a\varphi''_{xx} + \varphi(b\ln\varphi + c\ln\bar{\varphi}) = K\varphi, && \bar{\varphi} = \varphi(px), \\ &\psi'_t = \psi(b\ln\psi + c\ln\bar{\psi}) + (d+K)\psi, && \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned}$$

где K – произвольная постоянная.

Замечание 9. В [24], [52] описано много точных решений других нелинейных уравнений в частных производных с пропорциональными аргументами и уравнений в частных производных с переменным запаздыванием общего вида.

10. МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Опишем метод построения точных решений некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных с запаздыванием с помощью более простых решений отдельных (изолированных) уравнений с запаздыванием.

Рассмотрим два различных независимых (изолированных) нелинейных уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием $\tau > 0$:

$$F(u, \bar{u}, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, f(z_1)) = 0, \qquad \bar{u} = u(x, t - \tau), \qquad z_1 = z_1(u, \bar{u}); \tag{89}$$

$$G(v, \bar{v}, v_x, v_t, v_{xx}, v_{xt}, v_{tt}, g(z_2)) = 0, \qquad \bar{v} = v(x, t - \tau), \qquad z_2 = z_2(v, \bar{v}), \tag{90}$$

которые содержат заданные функции F, G, z_1, z_2 и произвольные функции одного аргумента $f(z_1)$ и $g(z_2)$.

Будем считать, что уравнения (89) и (90) имеют точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{n=1}^{N_1} \varphi_{1n}(x)\psi_{1n}(t), \qquad v = \sum_{n=1}^{N_2} \varphi_{2n}(x)\psi_{2n}(t) \tag{91}$$

и что оба эти решения удовлетворяют любым функциональным связям одинакового типа, т. е. допустим любой из следующих двух вариантов:

$$\begin{aligned} &z_1(u, \bar{u}) = p_1(x), \quad z_2(v, \bar{v}) = p_2(x) \quad \text{(функциональные связи первого рода);} \\ &z_1(u, \bar{u}) = q_1(t), \quad z_2(v, \bar{v}) = q_2(t) \quad \text{(функциональные связи второго рода).} \end{aligned} \tag{92}$$

Метод порождающих уравнений основан на использовании следующего принципа.

Принцип построения систем с запаздыванием и их точных решений [53]. Пусть изолированные нелинейные уравнения в частных производных с запаздыванием (89) и (90) допускают решения с обобщенным разделением переменных (91), каждое из которых удовлетворяет двум функциональным связям одинакового вида (92). Тогда более сложная нелинейная система, состоящая из двух связанных нелинейных уравнений с запаздыванием

$$F(u, \bar{u}, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, f(z_1, z_2)) = 0, \qquad \bar{u} = u(x, t - \tau), \qquad z_1 = z_1(u, \bar{u}), \tag{93}$$

$$G(v, \bar{v}, v_x, v_t, v_{xx}, v_{xt}, v_{tt}, g(z_1, z_2)) = 0, \qquad \bar{v} = v(x, t - \tau), \qquad z_2 = z_2(v, \bar{v}), \tag{94}$$

где $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ – произвольные функции двух аргументов, допускает точное решение вида (91).

Далее исходные независимые уравнения (89) и (90) будем называть *порождающими* (или *генерирующими*) *уравнениями*.

Замечание 10. В простейших случаях порождающие уравнения (89) и (90) могут быть одинаковыми с точностью до элементарных переобозначений определяющих параметров и произвольных функций.

Пример 26. В качестве порождающих уравнений используем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf\left(\frac{\bar{u}}{u}\right), \qquad \bar{u} = u(x, t - \tau), \tag{95}$$

где $z = \bar{u}/u$. Это уравнение допускает решение с мультипликативным разделением переменных $u = \varphi(x)\psi(t)$, которое удовлетворяет функциональной связи второго рода (92).

Используя метод порождающих уравнений, приходим к нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(u^k u_x)_x + uf\left(\frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{v}}{v}\right), \qquad \bar{u} = u(x, t-\tau), \\ v_t &= a_2(v^m v_x)_x + vg\left(\frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{v}}{v}\right), \qquad \bar{v} = v(x, t-\tau). \end{aligned} \tag{96}$$

Система (96) наследует вид решений порождающих ее уравнений (которые с точностью до элементарных переобозначений определяющих параметров и произвольных функций совпадают с уравнением (95)), т. е. допускает точные решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi_1(x)\psi_1(t), \qquad v = \varphi_2(x)\psi_2(t). \tag{97}$$

Подставив (97) в (96), после несложных преобразований для функций $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ получим систему, состоящую из двух независимых ОДУ и двух связанных ОДУ с запаздыванием

$$\begin{gathered} a_1(\varphi_1^k \varphi_1')' = C_1\varphi_1, \\ a_2(\varphi_2^m \varphi_2')' = C_2\varphi_2, \\ \psi_1' = C_1\psi_1^{k+1} + \psi_1 f\left(\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1}, \frac{\bar{\psi}_2}{\psi_2}\right), \qquad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau), \\ \psi_2' = C_2\psi_2^{m+1} + \psi_2 g\left(\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1}, \frac{\bar{\psi}_2}{\psi_2}\right), \qquad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau), \end{gathered} \tag{98}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Общие решения первых двух автономных ОДУ в (98) можно представить в неявной форме. При $k, m \neq 0$ и $k, m \neq -2$ эти уравнения имеют частные решения

$$\varphi_1 = \left[\frac{C_1 k^2 x^2}{2a_1(k+2)}\right]^{1/k}, \qquad \varphi_2 = \left[\frac{C_2 m^2 x^2}{2a_2(m+2)}\right]^{1/m}.$$

Другие примеры практического применения метода порождающих уравнений имеются в [24], [53].

Замечание 11. Уравнения (89) и (90) и система (93), (94) могут дополнительно явно зависеть от x и t и включать старшие производные искомых величин по этим переменным.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описаны методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и функционально-дифференциальных уравнений с частными производными, которые основаны на использовании более простых решений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: 1) простые точные решения рассматриваемых уравнений могут использоваться для поиска более сложных решений этих же уравнений; 2) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений или других классов уравнений, имеющих аналогичные нелинейные члены. Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров построения точных решений нелинейных уравнений теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамики и других уравнений. Помимо точных решений уравнений с частными производными, описаны также некоторые точные решения более сложных нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.

[2] G. W. Bluman, J. D. Cole, *Similarity Methods for Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **13**, Springer, New York, 1974.

[3] *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, v. 1: *Symmetries*, *Exact Solutions and Conservation Laws*, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

[4] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.

[5] В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов, *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике*, Наука, Новосибирск, 1994.

[6] G. W. Bluman, J. D. Cole, “The general similarity solution of the heat equation”, *J. Math. Mech.*, **18**:11 (1969), 1025–1042.

[7] D. Levi, P. Winternitz, “Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation”, *J. Phys. A*: *Math. Gen.*, **22**:15 (1989), 2915–2924.

[8] M. C. Nucci, P. A. Clarkson, “The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation”, *Phys. Lett. A*, **164**:1 (1992), 49–56.

[9] R. Cherniha, M. Serov, O. Pliukhin, *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations*: *Lie and Conditional Symmetry*, *Exact Solutions and Their Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.

[10] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal, “New similarity reductions of the Boussinesq equation”, *J. Math. Phys.*, **30**:10 (1989), 2201–2213.

[11] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.

[12] А. Д. Полянин, А. И. Журов, *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*, ИПМех РАН, М., 2020.

[13] V. A. Galaktionov, S. R. Svirshchevskii, *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*, CRC, Boca Raton, FL, 2007.

[14] A. D. Polyanin, “Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction–diffusion equations with variable coefficients”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **111** (2019), 95–105.

[15] A. D. Polyanin, “Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations”, *Mathematics*, **8**:1 (2020), 90, 38 pp.

[16] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, “Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction–diffusion type equations”, *Appl. Math. Lett.*, **100** (2020), 106055, 7 pp.

[17] А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко, *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике*, Наука, Новосибирск, 1984.

[18] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.

[19] F. Calogero, A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons: Tolls to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations* I, Studies in Mathematics and Its Applications, **13**, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[20] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.

[21] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[22] Н. А. Кудряшов, *Методы нелинейной математической физики*, Уч. пособие, Изд. дом "Интеллект", Долгопрудный, 2010.

[23] Р. М. Конт, М. Мюзетт, *Метод Пенлеве и его приложения*, Ин-т компьютер. исслед., М.; РХД, Ижевск, 2011.

[24] А. Д. Полянин, В. Г. Сорокин, А. И. Журов, *Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели*, ИПМех РАН, М., 2022.

[25] A. V. Aksenov, A. D. Polyanin, "Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions", *Mathematics*, **9**:4 (2021), 345, 30 pp.

[26] J. Boussinesq, "Recherches théorique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources", *J. Math. Pures Appl.*, **10**:1 (1904), 5–78.

[27] К. Г. Гудерлей, *Теория околозвуковых течений*, ИЛ, М., 1960.

[28] Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, "О решении типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическом режиме", *ПММ*, **21**:5 (1957), 718–720.

[29] Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, Наука, М., 1974.

[30] Ю. Н. Павловский, "Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **1**:2 (1961), 280–294.

[31] С. С. Титов, "Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики", *Аэродинамика*, Межвуз. научн. сб., ред. Т. П. Иванова, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 1988, 104–110.

[32] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **119**, Springer, New York, 1996.

[33] M. Mei, C.-K. Lin, C.-T. Lin, J. W.-H. So, "Traveling wavefronts for time-delayed reaction-diffusion equation: (I) Local nonlinearity", *J. Differ. Equ.*, **247**:2 (2009), 495–510.

[34] G. Lv, X. Wang, "Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation", *J. Dyn. Control Syst.*, **21**:2 (2015), 173–187.

[35] A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, "Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions", *Appl. Math. Lett.*, **46** (2015), 38–43.

[36] S. V. Meleshko, S. Moyo, "On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay", *J. Math. Anal. Appl.*, **338**:1 (2008), 448–466.

[37] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, "Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **19**:3 (2014), 409–416.

[38] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, "Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **19**:3 (2014), 417–430.

[39] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, "New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction–diffusion equations", *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **59** (2014), 16–22.

[40] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, "Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions", *Appl. Math. Lett.*, **37** (2014), 43–48.

[41] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, “The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **67** (2014), 267–277.

[42] A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, “Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **95** (2021), 105634, 14 pp.

[43] A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, “A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs”, *J. Math. Anal. Appl.*, **494**:2 (2021), 124619, 6 pp.

[44] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **19**:8 (2014), 2676–2689.

[45] F.-S. Long, S. V. Meleshko, “On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **39**:12 (2016), 3255–3270.

[46] A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, “New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay”, *Appl. Math. Lett.*, **108** (2020), 106512, 6 pp.

[47] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, “Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c=\sqrt{x}$”, *УМН*, **65**:1(391), 185–186.

[48] А. В. Аксенов, С. Ю. Доброхотов, К. П. Дружков, “Точные решения типа ‘ступеньки’ одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном”, *Матем. заметки*, **104**:6 (2018), 930–936.

[49] Ю. А. Чиркунов, С. Ю. Доброхотов, С. Б. Медведев, Д. С. Миненков, “Точные решения одномерных нелинейных уравнений мелкой воды над ровным и наклонным дном”, *ТМФ*, **178**:3 (2014), 322–345.

[50] Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, Наука, М., 1973.

[51] В. А. Дородницын, “Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **22**:6 (1982), 1393–1400.

[52] A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, “Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy”, *Mathematics*, **9**:5 (2021), 511, 23 pp.

[53] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, “The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs”, *Internat. J. NonLinear Mech.*, **71** (2015), 104–115.

Поступила в редакцию 12.01.2022,
после доработки 15.01.2022,
принята к публикации 17.01.2022