Гидравлический удар в трубе постоянного сечения

Гидравлический удар это явление, которое может возникать в трубопроводе, по которому течет жидкость, при резком перекрытии его сечения.Частицы жидкости, прилежащие к границе перекрытия (задвижке), образуют пробку, в которой их скорость равна нулю, а давление резко повышается. При этом в остальном трубопроводе течение жидкости продолжается, что объясняется проявлением свойства сжимаемости жидкости.

Кроме того, в области повышения давления может увеличиться диаметр сечения трубы из-за упругой деформации ее стенок. Если же материал стенок трубы не достаточно упругий (хрупкий) , резкое повышение давления может привести к разрушению стенок трубы. Именно это явление при эксплуатации первых водопроводов послужило причиной изучения явления гидравлического удара.

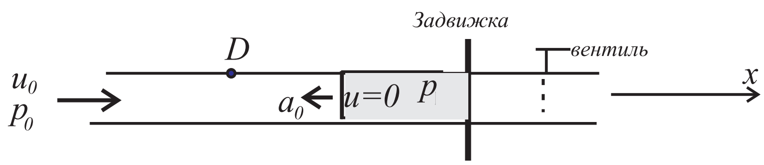

Рис. 1:

В результате в трубопроводе образуется некоторый фронт, по одну сторону от которого еще продолжается течение с начальной скоростью u_0 и давлением p_0, а по другую сторону – область, где скорость $u_1 = 0$ и давление $p_1 > p_0$ значительно больше первоначального (рис.1). Продолжающая двигаться жидкость натыкается на пробку и тоже вынуждена остановиться и присоединиться к области, где $u_1 = 0$ и $p = p_1 > p_0$. В результате граница между областями течения и покоя перемещается вверх по течению с некоторой скоростью a_0.

Эту границу можно назвать фронтом ударной волны, а скачок давления называют ударным давлением $p_1 - p_0 = p_{yg}$. Именно p_{yg} является угрозой для разрушения стенок труб из-за недостаточной упругости материала, из которого они сделаны.

Величины ударного давления $p_{yg} = p_1 - p_0$ и скорости a_0 фронта скачка давления вдоль трубопровода являются предметом изучения и измерения в эксперименте в задаче о гидравлическом ударе.

Фронт скачка давления распространяется вверх по потоку пока не достигнет некоторой границы с областью, где поддерживается постоянное давление. Например, в резервуаре, откуда подается вода в трубопровод, это свободная поверхность с атмосферным давлением $p = p_0$.

Чтобы обеспечить выполнение граничных условий непрерывности давления на границе двух областей, возникает отраженная волна, на фронте которой скачком меняется давление от значения p_1 в пришедшей волне до значения $p_2 = p_0 < p_1$. При этом возникает движение частиц жидкости в сторону меньшего давления. В этой области возникает течение в сторону резервуара со скоростью $u_2 < 0$.

Фронт отраженной волны, за которым $p = p_2$ и $u_2 < 0$, идет по трубе с то же скоростью a_0 вплоть до задвижки. На этой границе должно быть обеспечено выполнение условия непротекания $u = 0$. Это потребует образования отраженной волны с $u_3 = 0$ и понижением давления $p_3 < p_2$. Таким образом, вверх по трубопроводу идет еще одна волна разрежения. Этот процесс периодически продолжается, затухая вследствие реальных свойств жидкости.

Для измерения ударного давления $p_{yg} = p_1 - p_0$ и скорости фронта ударной волны a_0 достаточно знать изменение давления со временем в какой-либо точке трубопровода. График такой зависимости имеет вид, представленный на рис.2. В эксперименте для получения этой зависимо-

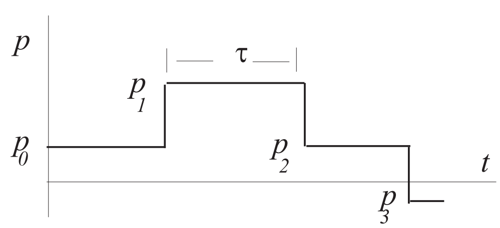

Рис. 2:

сти нужно поместить прибор, измеряющий изменение давления со временем с самозаписывающим устройством в некоторой точке трубопровода. Согласно полученной диаграмме, $p_{yg} = p_1 - p_0$ и $a_0 = \frac{2l}{\tau}$, где l- расстояние от точки измерения давления до свободной поверхности в резервуаре, а τ - время между прохождением через точку измерения ударной волны и волны разрежения, отраженной от свободной поверхности.

Именно такая задача предлагается для выполнения в лабораторном практикуме.

Теоретическое решение

Теоретическое решение для описания процесса гидравлического удара дано в работе Н.Е.Жуковского "О гидравлическом ударе в водопроводных трубах". Предлагаем его краткое изложение.

Для описания движения принимаем модель идеальной жидкости. Считаем, что труба расположена в горизонтальной плоскости, так что силу тяжести можно не учитывать.

Интегральные законы сохранения массы и импульса для жидкого объема V^* имеют вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} \rho\, dV = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} \varrho\bar{v}\, dV = -\int\limits_{\Sigma} p\bar{n}\, dS$$

Основное течение и изменение его параметров происходит вдоль оси трубы, которую примем за ось x. Начало координат $x = 0$ на задвижке в точке резкого перекрытия трубы. Так что течение происходит в области $x < 0$.

Стенки трубы выполнены из упругого материала и могут деформироваться при изменении давления внутри трубы. При .том площадь сечения трубы S меняется, в результате чего появляется радиальная составляющая скорости течения $v_r(x, r, t)$. Течение неодномерное.

Однако, радиальная компонента v_r мала по сравнению с основным течением и поэтому может быть принята приближенная модель квазиодномерного движения, в котором в качестве скорости будет принята средняя по сечению S скорость $u(x, t)$

$$u(x,t) = \frac{1}{S}\int\limits_{S} v_x\, dS$$

При этом радиальное течение учитывается изменением площади поперечного сечения трубы $S = S(x, t)$.

Величина $\int\limits_S v_x\, dS = Q$ представляет поток жидкости через сечение трубы, то есть объемный расход. Так что $u = \frac{Q}{S}$.

Запишем дифференциальные уравнения неразрывности и движения для одномерного течения со скоростью $u(x, t)$ в трубке тока переменного сечения $S(x, t)$

Система уравнений для осредненного движения

Рассмотрим неподвижный элемент трубки тока малой длины Δx.

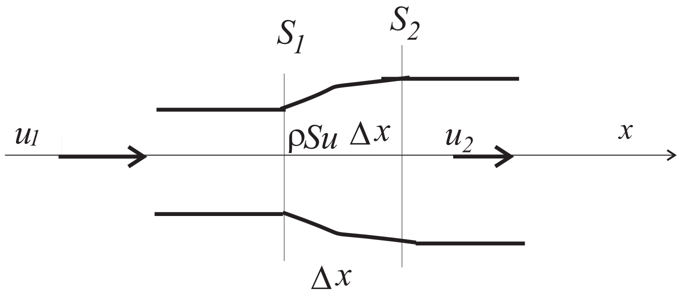

Рис. 3:

Масса жидкости внутри него $\rho S \Delta x$. Ее изменение со временем равно разнице потоков массы через сечения S_1 и S_2 трубки

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S)\,\Delta x = \rho_1 S_1 u_1 - \rho_2 S_2 u_2$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Аналогично, изменение со временем количества движение $\rho S u \Delta x$ в этом же элементе объема равно разности потоков количества движения $\rho S u$ через сечения S_1 и S_2 сумме сил давления $S_1 p_1$ и $S_2 p_2$ в этих сечениях. После перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial \rho S u}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^2}{\partial x} + S\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

С учетом уравнения неразрывности это уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Полученные два уравнения содержат четыре функции ρ, u, p, S, зависящие от x, t. Для замкнутой системы нужны еще два уравнения.

Уравнение состояния

Уравнение состояния жидкости можно представить в виде $p = p(\rho, T)$ (или $p = p(\rho, s)$), где T -температура, s - энтропия.

Вода - слабо сжимаемая среда и при не слишком больших изменениях давления влияние температуры можно не учитывать и принять $p = p(\rho)$. эту зависимость можно представить разложением в ряд Тейлора, ограничившись первым (линейным) членом разложения.

$$p = p_0 + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s (\rho - \rho_0)$$

Коэффициент $K = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s$ называется модулем объемного адиабатического сжатия жидкости. Для воды при температуре $20^o C$ $K \simeq 22000$кгс/см^2.

Так что уравнение состояния имеет вид

$$p - p_0 = K\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \tag{3}$$

Для замыкания системы необходимо еще уравнение, представляющее изменение площади сечения трубы $S(x,t)$ при изменении давления внутри нее.

Уравнение, определяющее деформацию трубы

Рассмотрим квазистационарное изменение внутреннего радиуса R тонкостенной трубы при изменении давления внутри нее.

В состоянии, когда давление внутри $p = p_0 = \text{const}$, труба имеет внутренний радиус R_0 и толщину стенок трубы $\delta \ll R_0$.

Сечениями, ортогональными оси трубы, вырежем из нее элемент в виде кольца единичной длины вдоль оси трубы. Рассечем его плоскостью, проходящей через ось трубы. Образовалось полукольцо с торцевыми сечениями в виде двух площадок с площадью $\delta \cdot 1$ (рис. 4).

Рассмотрим равновесие полученной фигуры под действием сил давления p_0 снаружи и p_1 внутри трубы и упругих сил на торцевых сечениях, заменивших действие отрезанной части кольца.

Вычислим суммарную силу, действующую на внешней и внутренней поверхности полукольца. Для внутреннего полукольца замкнем контур

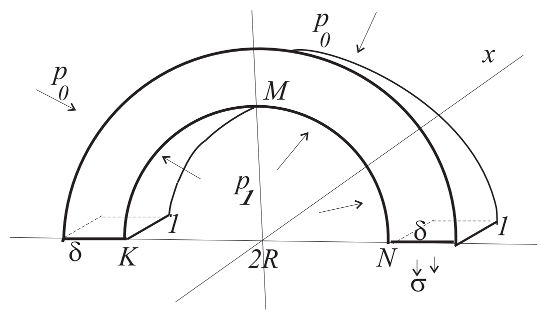

Рис. 4:

полуокружности отрезком диаметра KN. Так как$p_1 = \text{const}$,то интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{KMNK} p\bar{n}\,dl = 0$. Тогда интеграл по полуокружности равен по величине интегралу по диаметру, то есть $2Rp$, и имеет направление ортогональное диаметру.

Применим этот способ вычисления и к внешней полуокнужности радиуса $R + \delta$, где давление равно p_0.

Суммарная сил для полукольца единичной длины вдоль оси xа равна

$$p_1 2R - p_0 2(R + \delta)$$

Здесь $R = R(x,t) = R_0 + \Delta R$, то есть учтена деформация сечения трубы.

Эта сила должна быть уравновешена упругими силами на торцевых площадках разреза кольца. Согласно закону Гука, напряжение на этих площадках $\sigma = E\varepsilon$,где E - модуль Юнга, а ε - относительная деформация вдоль направления, ортогонального разрезу.

Эта компонента деформации есть относительное изменение длины окружности кольца $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta R}{R_0}$.

Упругие силы действуют на двух площадках разреза кольца, общая площадь которых $2\delta \cdot 1$. Так что упругие силы, действующие на торцах, равны $2E\frac{\Delta R}{R_0}\delta$.

Таким образом уравнение равновесия полукольца принимает вид

$$p_1 2R - p_0 2(R + \delta) = 2E\frac{\Delta R}{R_{\ 0}}\delta$$

Это уравнение следует переписать, используя вместо радиуса R площадь поперечного сечения $S(x,t)$. При этом учитываем, что

$$R \sim \sqrt{S}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\sqrt{S} - \sqrt{S_0}}{\sqrt{S_0}} = \sqrt{\frac{S}{S_0}} - 1, \quad R = R_0 + \Delta R = \sqrt{\frac{S}{S_0}}R_0$$

Подставляя выражение R через $\sqrt{S}$, получим

$$\sqrt{\frac{S}{S_0}} = 1 - \frac{(p_1 - p_0)\sqrt{\frac{S}{S_0}}R_0 + p_0\delta}{E\delta}$$

или

$$\frac{S}{S_0} = \frac{(1 + \frac{p_0}{E}))^2}{\left(1 - \frac{(p_1 - p_0)}{E}\frac{R_0}{\delta}\right)^2}$$

Принимая во внимание, что для железных труб модуль упругости $E \simeq 22 \cdot 10^5$кcc/cм^2, это уравнение можно записать в линейном приближении. Так как $p_0 \ll E$, то этой величиной можно пренебречь. А малый добавок в знаменателе учесть в линейном приближении.Уравнение для изменения площади сечения примет вид

$$\frac{S}{S_0} = 1 + 2\frac{(p_1 - p_0)}{E}\frac{R_0}{\delta} \tag{4}$$

Таким образом для функций u, p, ρ, S получена система четырех уравнений (1) -(4).

Будем искать ее решение в линейном приближении.

Система уравнений в линейном приближении

Для этого проведем линеаризацию уравнений неразрывности и движения

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho S}{\partial t} + \rho_0 S_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ p - p_0 - K\dfrac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \\ \dfrac{S}{S_0} = 1 + 2\dfrac{(p - p_0)}{E}\frac{R_0}{\delta} \end{array} \tag{5}$$

Последние два уравнения позволяют выразить ρS через давление

$$\rho S = \rho_0 S_0 \left[1 + 2R_0\frac{p - p_0}{E\delta}\right]\left(1 + \frac{p - p_0}{K}\right)$$

Учитывая малость величин $\frac{p-p_0}{E\delta}$ и $\frac{p-p_0}{K}$, их произведением следует пренебречь. Так что

$$\rho S = \rho_0 S_0 \left[1 + \left(2\frac{R_0}{E\delta} + \frac{1}{K}\right)(p - p_0)\right]$$

Подставим это выражение для ρS в уравнение неразрывности. Тем самым исключим S и ρ из системы (5).

$$\rho_0 S_0 \left(2\frac{R_0}{E\delta} + \frac{1}{K}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 S_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{\rho_0\left(2\frac{R_0}{E\delta} + \frac{1}{K}\right)} = a_0^2 \tag{6}$$

(Заметим, что величин a_0 имеет размерность скорости.)

В результате получили систему двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 a_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Перекрестным дифференцированием по x, t получим волновое уравнение для функции u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Его общее решение можно представить в виде двух волн, движущихся со скоростью a_0 в положительном и отрицательном направлении оси x.

$$u = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t) + \text{const}$$

Это указывает на механический смысл введенной выше формулой (6) величины a_0 – это скорость распространения фронтов волн вдоль оси x.

Тогда из второго уравнения системы (7) для давления получим

$$p = \rho_0 a_0 \left(f_1(x - a_0 t) - f_2(x + a_0 t)\right) + \text{const}$$

Задача с начальными и граничными условиями. В начальный момент времени во всей области течения $u = u_0$, $p = p_0$.

После перекрытия течения задвижкой в точке $x = 0$ от границы вверх по течению в область $x < 0$ идет фронт скачка давления p_1. Для него решение следует искать в виде волны, идущей в одну сторону – в сторону $x < 0$, то есть в виде

$$u = u_0 + f(x + a_0 t), \quad p = p_0 - \rho_0 a_0 f(x + a_0 t)$$

На границе при $x = 0$ должно быть выполнено условие $u = o$. Это определяет значение функции $f = -u_0$. В результате скорость течения и давление за фронтом волны принимают значения

$$u_1 = 0, \qquad p_1 = p_0 + \rho_0 a_0 u_0$$

Эти параметры состояния распространяется вверх по течению со скоростью a_0, величина которой дана полученной выше формулой (6). Скачок давления на фронте этой волны назван выше ударным давлением p_{yg}

$$p_{yg} = p_1 - p_0 = \rho_0 a_0 u_0 \tag{8}$$

В эксперименте предполагается измерять скорость фронта скачка давления a_0 (5) и величину ударного давления $p_{yg} = p_1 - p_0$ (8).

Такие значения $p_1 = \rho_0 a_0 u_0$, $u_1 = 0$ будут во всей области за фронтом вплоть до выхода фронта на свободную поверхность при $x = -L$ в резервуаре, откуда подается вода в трубопровод. На этой границе должно быть выполнено условие $p = p_0$.

В результате возникает новое возмущение u_2, p_2, идущее от этой границы в сторону роста x с той же скоростью a_0

$$u_2 = u_1 + F(x - a_0 t), \qquad p_2 = p_1 + \rho_0 a_0 F(x - a_0 t)$$

На границе $x = -L$ должно быть выполнено условие $p_2 = p_0$. Это определяет величину нового возмущения $F = -u_0$. Вниз по трубе идет отраженная волна, в которой давление p_2 уменьшается (волна разрежения) до значения p_0 и движение воды со скоростью $u_2 = -u_0$ происходит в отрицательном направлении оси x.

Аналогично, когда этот фронт приходит к границе $x = 0$ на задвижке, должно быть выполнено условие непроницаемости где $u = 0$ и следующая отраженная волна будет тоже волной разрежения, в которой $p_3 = p_0 - \rho_0 a_0 u_0$ и $u_3 = 0$.

Проведение эксперимента

Схема установки

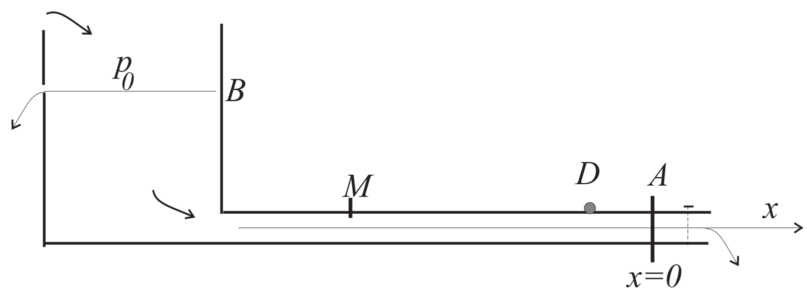

Рис. 5:

Установка состоит из достаточно длинной железной трубы постоянного сечения, расположенной в горизонтальной плоскости. Внутренний диаметр трубы $d = 32$мм, толщина стенок трубы $\delta = 3$мм.

В трубу подается вода из напорного бака, в котором поддерживается постоянный уровень. На открытой свободной поверхности давление p_0. Расход в трубе регулируется вентильным краном на ее конце.

В некоторой точке трубы D (рис. 5) установлен прибор, позволяющий измерять давление p в зависимости от времени (датчик давления) . Прибор работает на основе тензодатчика. Его показания записываются с помощью компьютера. Расстояние от датчика до свободной поверхности воды в баке $BD = l$=57м.

Устанавливается некоторый стационарный режим течения.

Измеряется объемный расход жидкости Q и находится скорость начального течения $u_0 = Q/S$.

Включается запись датчика давления. Он записывает показание давления в стационарном потоке p_0 (рис. 2).

Резко (по возможности мгновенно) перекрывается течение в трубе задвижкой (A). Датчик давления записывает скачок давления до значения p_1. Это давление сохраняется в точке D в течение времени пока фронт идет до свободной поверхности в баке и отражается в виде волны разрежения. Когда волна разрежения дойдет от бака до датчика, на диаграмме давление упадет до значения p_2.

На диаграмме давления (рис.2) время τ между этими скачками соответствует двум расстояниям l от места расположения датчика до свободной поверхности в баке (В).

Полученная диаграмма позволяет получить значения для скорости скачка a_0 и величины ударного давления p_{yg} для данного режима течения

$$a_0 = \frac{2l}{\tau}, \qquad p_{yg} = p_1 - p_0$$

Полученные в эксперименте величины следует сравнить с полученными по теории Жуковского.

Эксперимент проводят несколько раз при разных начальных режимах, чтобы обнаружить теоретически обнаруженную линейную зависимость p_{yg} от начальной скорости потока u_0.

Явление гидравлического удара можно использовать для диагностики повреждения трубы. Если труба в некотором месте (М) повреждена, в ней появилось отверстие, контактирующее с атмосферой, то давление в этом месте равно p_0. Фронт повышения давления доходит до этого места, где происходит отражение в виде волны разрежения.

Скорость a_0 известна, так что с помощью диаграммы давления для этого случая можно найти величину l_* расстояния от датчика давления до места повреждения, измерив на диаграмме отрезок τ_* времени прохождения волн $l_* = \dfrac{a_0\tau_*}{2}$.