

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

ПРАКТИКУМ ПО ГИДРОМЕХАНИКЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ
ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является ознакомление с математическим описанием нестационарных течений идеальной жидкости со свободной поверхностью на примере задачи о собственных колебаниях жидкости в сосуде.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Введение. Теория волновых движений на поверхности весомой капельной жидкости применяется для описания волн в реках, озерах и морях и их воздействия на суда и береговые сооружения; колебаний жидкостей в резервуарах, баках судов, наземных транспортных средств и летательных аппаратов и других природных и технологических процессов. В настоящей задаче практикума рассматривается один важный частный случай волнового движения — стоячие волны в прямоугольном сосуде.

Основные предположения. Для простоты будем рассматривать плоскую задачу о волнах на поверхности тяжелой капельной жидкости, налитой в неподвижный сосуд. Направим ось координат x вдоль свободной поверхности жидкости в отсутствие волн (вдоль невозмущенной свободной поверхности), а ось y — вертикально вверх, против направления вектора ускорения свободного падения \mathbf{g} (рис. 1).

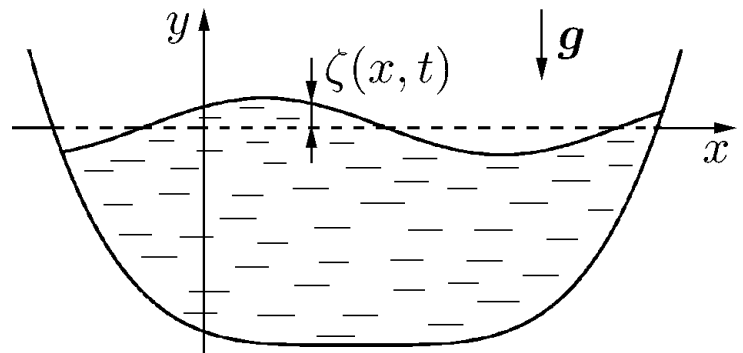


Рис. 1.

Сделаем следующие предположения.

- а) Плотность жидкости ρ постоянна, т.е. жидкость *однородна* и *несжимаема*.
- б) Жидкость *идеальная*, т.е. действием вязкости в колеблющейся жидкости (за исключением тонких пограничных слоев около стенок сосуда и поверхности жидкости) можно пренебречь. Оценим справедливость этого предположения. Если материальные частицы в верхнем слое жидкости совершают колебательное движение с круговой частотой ω и амплитудой a , величина которой (для не слишком малых глубин жидкости в сосуде) порядка отклонения $\zeta(x, t)$ свободной поверхности от невозмущенного уровня (рис. 1), то скорость \mathbf{v} частиц имеет порядок $a\omega$. Принимая во внимание то, что ха-

ракетные пространственный и временной масштабы явления соответственно порядка длины волны λ и $1/\omega$, для инерционных и вязкого членов в уравнении Навье — Стокса получим оценки

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\sim \rho a \omega^2} + \underbrace{\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\sim \rho a^2 \omega^2 / \lambda} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \underbrace{\mu \Delta \mathbf{v}}_{\sim \mu a \omega / \lambda^2},$$

где p — давление, μ — динамическая вязкость жидкости. С учетом того, что для поверхностных волн практически всегда можно считать, что амплитуда колебаний по порядку не превосходит длины волны, $a \lesssim \lambda$, условие пренебрежимости вязким слагаемым сводится к единственному условию на число Рейнольдса

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho \lambda a \omega}{\mu} \gg 1, \quad (1)$$

которое для установки практикума ($a \sim 1$ см, $\lambda \sim 10$ см, $\omega \sim 1$ с⁻¹, $\mu \sim 10^{-2}$ г/(см · с), $\rho \sim 1$ г/см³) выполняется с большим запасом¹⁾.

в) Действием *капиллярных сил* на поверхности жидкости можно *пренебречь*. Это приближение справедливо, если скачок давления при переходе через границу жидкости и газа (воздуха), пропорциональный кривизне свободной поверхности и коэффициенту поверхностного натяжения σ , много меньше перепада давления из-за действия тяжести, который возникает при отклонении свободной поверхности от равновесного положения. Из элементарной оценки

$$\underbrace{\sigma \zeta''_{xx}}_{\sim \sigma \zeta / \lambda^2} \ll \rho g \zeta$$

получаем условие²⁾ на безразмерное число Бонда

$$\text{Bo} \equiv \frac{\rho g \lambda^2}{\sigma} \gg 1,$$

¹⁾ Отметим, что предположение об идеальности жидкости применимо не всегда. Например, вязкость нужно учитывать при описании волновых процессов на поверхности тонких пленок жидкости.

²⁾ Фактически это условие говорит о том, что длина волны λ велика по сравнению с характерным линейным масштабом $\sqrt{\sigma/(\rho g)}$, в котором начинает существенно проявляться действие поверхностного натяжения. Заметим, что в противоположном случае коротких волн (ряби) поверхностным натяжением пренебрегать уже нельзя, т.к. его влияние становится доминирующим.

которое также выполняется для установки практикума ($\sigma \sim 10^2$ г/с², $g \sim 10^3$ см/с²).

- г) Течение *потенциально*, т.е. поле скоростей является градиентом потенциала скорости $\varphi(x, y, t)$:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi.$$

Это условие вытекает из теоремы Лагранжа о сохранении потенциальности [1], которая утверждает, что если в начальный момент в некоторой массе идеальной несжимаемой жидкости в потенциальном поле массовых сил не было завихренности, то ее не будет в этой массе жидкости и в дальнейшем. Поэтому если в начальный момент жидкость в сосуде покоилась (что имеет место при выполнении практикума до приведения жидкости в колебательное движение), то в последующие моменты течение можно считать потенциальным.

- д) *Плотность газа (воздуха) над свободной поверхностью пренебрежимо мала* по сравнению с плотностью жидкости, и, как следствие, *давление в газе* (атмосферное давление $p_{\text{атм}}$) *постоянно*.

Замкнутая система уравнений. Для потенциальных течений замкнутая система уравнений для нахождения давления $p(x, y, t)$ и вектора скорости $\mathbf{v}(x, y, t)$ в идеальной несжимаемой жидкости, состоящая из уравнения неразрывности и уравнения движения (уравнения Эйлера)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g},$$

сводится к системе уравнений для давления $p(x, y, t)$ и потенциала скорости $\varphi(x, y, t)$, состоящей из уравнения Лапласа и интеграла Коши — Лагранжа

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi'_t + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = F(t),$$

где $F(t)$ — функция времени, которая исключается с помощью переопределения потенциала¹⁾

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho} \cdot t - \int F(t) dt,$$

¹⁾ Поле скоростей, определяемое пространственными производными от потенциала скорости, не меняется при добавлении к φ произвольной функции времени. В рассматриваемом случае для последующего удобства в замену также добавлена линейная функция времени.

в результате чего получается система (для сокращения записи тильда над потенциалом скорости далее опускается)

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi'_t + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{p - p_{\text{атм}}}{\rho} + gy = 0. \quad (2)$$

Граничные условия. На смоченной стенке сосуда — границе жидкости с непроницаемой твердой стенкой — в общем случае ставится граничное условие непротекания

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к границе, откуда для потенциального течения непосредственно следует условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \equiv \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3)$$

На заранее неизвестной границе жидкости с воздухом, который также считается идеальной жидкостью, в общем случае ставятся два граничных условия, выражающих баланс массы и импульса¹⁾:

$$[\rho(v_n - D)] = 0, \quad [\rho\mathbf{v}(v_n - D) + p\mathbf{n}] = 0,$$

где D и \mathbf{n} — скорость движения границы и вектор единичной нормали к ней, а квадратные скобки обозначают разность соответствующих величин по разные стороны от поверхности разрыва. Поскольку плотность воздуха считается пренебрежимо малой, в нашем случае отсюда сразу следует, что на свободной поверхности одновременно выполнены условия

$$v_n = D, \quad p = p_{\text{атм}}.$$

Первое из этих условий обычно называют *кинематическим*, а второе условие, выражающее непрерывность давления при переходе через поверхность границы, — *динамическим*.

Полученные граничные условия удобно выразить в терминах функции $y = \zeta(x, t)$. Записав уравнение поверхности в виде

$$f(x, y, t) \equiv y - \zeta(x, t) = 0$$

¹⁾ Напомним, что в рассматриваемых условиях влияние поверхностного натяжения мало и при написании второго уравнения его можно не учитывать.

и воспользовавшись известными формулами для вектора единичной нормали и скорости движения поверхности [5]

$$\mathbf{n} = \frac{(f'_x, f'_y)}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2}} = \frac{(-\zeta'_x, 1)}{\sqrt{1 + (\zeta'_x)^2}},$$

$$D = -\frac{f'_t}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2}} = \frac{\zeta'_t}{\sqrt{1 + (\zeta'_x)^2}},$$

а также потенциальностью течения, получим *кинематическое условие* в виде

$$\zeta'_t = \varphi'_y|_{y=\zeta(x,t)} - \zeta'_x \cdot \varphi'_x|_{y=\zeta(x,t)}. \quad (4)$$

Отметим, что условие (4) также можно получить из требования того, что материальная частица, находившаяся в некоторый момент на свободной поверхности, в последующие моменты времени также будет находиться на ней [1].

Второе граничное условие (по смыслу оно является *динамическим*) получается простой подстановкой значений параметров на границе в интеграл Коши — Лагранжа:

$$\left(\varphi'_t + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} \right) \Big|_{y=\zeta(x,t)} + g \cdot \zeta(x,t) = 0. \quad (5)$$

В итоге мы получили систему, которая состоит из уравнений (2) и граничных условий (3), (4), (5)¹⁾. Важной особенностью этой системы, существенно осложняющей ее изучение в случае волн конечной амплитуды, является наличие нелинейных слагаемых как в граничных условиях на свободной (и, к тому же, заранее неизвестной) поверхности, так и в уравнениях.

Линеаризованная модель для волн малой амплитуды. Система уравнений и граничных условий значительно упрощается в случае волн *малой амплитуды*, когда амплитуда волны ζ и перемещения материальных частиц a в верхнем слое жидкости ($\zeta \lesssim a$) много меньше длины

¹⁾ Приведенная постановка задачи о гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности несжимаемой жидкости принадлежит Лагранжу (1781).

волны¹⁾):

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1. \quad (6)$$

В этом случае, во-первых, всеми нелинейными слагаемыми можно пренебречь: квадратичное слагаемое в интеграле Коши — Лагранжа, в силу оценки $\varphi \sim v\lambda \sim a\omega\lambda$, пренебрежимо мало по сравнению со слагаемым, учитывающим нестационарность:

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2}_{\sim a^2\omega^2} \ll \underbrace{\varphi'_t}_{\sim a\omega^2\lambda},$$

а нелинейное слагаемое в граничном условии (4) можно отбросить в силу оценки²⁾)

$$\zeta'_x \sim \frac{\zeta}{\lambda} \lesssim \frac{a}{\lambda} \ll 1.$$

Во-вторых, в рассматриваемом приближении (6) все слагаемые, вычисляемые при $y = \zeta(x, t)$ (т.е. на неизвестной свободной поверхности), можно вычислять на невозмущенной свободной поверхности (при $y = 0$), например:

$$\begin{aligned} \varphi'_t|_{y=\zeta(x,t)} &= \varphi'_t|_{y=0} + \underbrace{\varphi''_{ty}|_{y=0} \cdot \zeta(x,t)}_{\sim \varphi'_t|_{y=0} \cdot \frac{\zeta}{\lambda} \lesssim \varphi'_t|_{y=0} \cdot \frac{a}{\lambda}} + \dots \approx \varphi'_t|_{y=0}. \end{aligned}$$

В результате получается линейная система уравнений

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi'_t + \frac{p - p_{\text{атм}}}{\rho} + gy = 0$$

с линейными граничными условиями как на стенке сосуда:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

¹⁾ Строго говоря, амплитуда волны также не должна быть слишком малой: условие применимости модели идеальной жидкости (1) накладывает на величину a ограничение снизу, которое на практике обычно выполнено.

²⁾ В сущности, это требование пологости свободной поверхности (малости угла ее наклона к горизонту).

так и на невозмущенной поверхности жидкости¹⁾:

$$\zeta'_t = \varphi'_y|_{y=0}, \quad \varphi'_t|_{y=0} + g \cdot \zeta(x, t) = 0.$$

Из последних двух условий можно исключить отклонение свободной поверхности ζ и получить систему из уравнения и граничных условий только для потенциала φ :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на стенке сосуда,} \\ \varphi''_{tt} + g\varphi'_y = 0 \text{ при } y = 0, \end{cases} \quad (7)$$

после решения которой давление и форма свободной поверхности найдутся по явным формулам:

$$p(x, y, t) = p_{\text{атм}} - \rho g y - \rho \varphi'_t, \quad \zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \varphi'_t|_{y=0}.$$

Стоячие волны в прямоугольном сосуде. Рассмотрим колебания в прямоугольном сосуде шириной L и глубиной H (рис. 2). Разыскивая периодическое по времени частное решение системы (7) с разделением переменных:

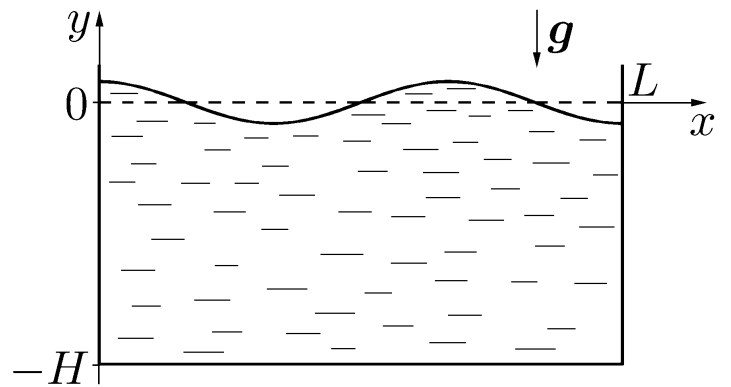


Рис. 2.

$$\varphi(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot \cos(\omega t),$$

стандартным образом находим выражения для потенциала и формы свободной поверхности в *стоячих волнах*:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{A g}{\omega \operatorname{ch}(kH)} \cos(kx) \cdot \operatorname{ch}(k(y + H)) \cdot \cos(\omega t),$$

$$\zeta(x, t) = A \cos(kx) \cdot \sin(\omega t),$$

¹⁾ Первое из этих условий говорит о том, что если амплитуда волн мала, то вертикальная скорость материальной частицы на поверхности приблизительно равна скорости подъема (опускания) поверхности (как геометрического объекта) в этой точке.

где A — амплитуда колебаний свободной поверхности (наибольшее значение $\zeta(x, t)$). В этих формулах волновое число k связано с круговой частотой ω дисперсионным соотношением¹⁾

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH) \quad (8)$$

и может принимать дискретный набор значений

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Приведенные формулы показывают, что при заданных геометрических параметрах сосуда в нем возможен счетный набор собственных колебаний жидкости с фиксированными различными частотами ω , зависящими от n . Число n указывает количество полуволн на свободной поверхности, которое укладывается на длине сосуда, и часто называется *номером тона колебаний* (для первых трех тонов форма свободной поверхности показана на рис. 3). Точки, в которых свободная поверхность не отклоняется от невозмущенного положения, $\zeta = 0$, называются *узлами*, а точки, в которых отклонение свободной поверхности максимально, $\zeta = A$, — *пучностями*. Для n -го тона колебаний в прямоугольном сосуде число узлов и пучностей равно соответственно n и $n + 1$.

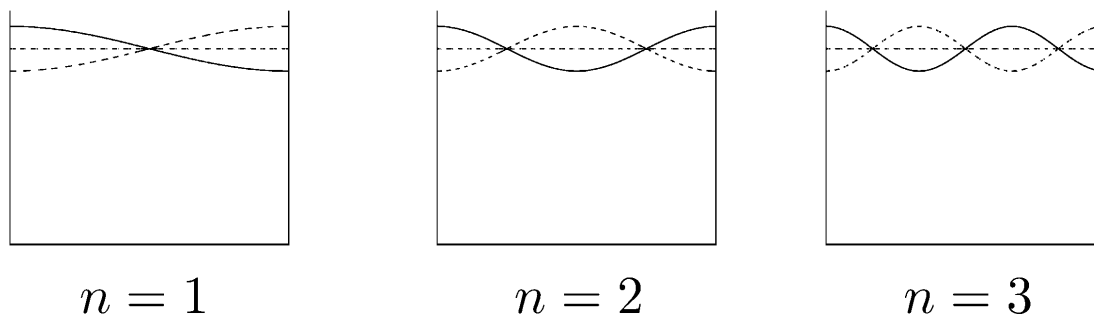


Рис. 3.

Картина течения. Рассмотрим картину течения для *первого тона колебаний* ($n = 1$), который представляет наибольший интерес в ряде практических приложений и который, собственно, и будет изучаться при выполнении практикума²⁾.

¹⁾ Название связано с тем, что для волновых движений другого вида — бегущих волн $\zeta = A \cos(kx - \omega t)$ при нелинейной зависимости $\omega(k)$ наблюдается *дисперсия*: волны с разной длиной $\lambda = 2\pi/k$ распространяются с разными скоростями ω/k .

²⁾ При колебаниях с другими значениями n , как нетрудно видеть, область течения разбивается на n пространственных областей, в каждой из которых происходит движение, аналогичное первому тону колебаний.

Поле *линий тока* в любой фиксированный момент t_0 (за исключением отдельных моментов, когда во всей области течения скорость на мгновение становится нулевой) находится из решения системы

$$\frac{dx(s)}{ds} = v_x(x(s), y(s), t_0) \equiv \varphi'_x(x(s), y(s), t_0),$$

$$\frac{dy(s)}{ds} = v_y(x(s), y(s), t_0) \equiv \varphi'_y(x(s), y(s), t_0),$$

где s — параметр, меняющийся вдоль линии тока, и в случае стоячих волн, как легко проверить, задается неявной зависимостью:

$$\sin(kx) \cdot \text{sh}(k(y + H)) = \text{const.}$$

Для нескольких характерных моментов времени картина линий тока (с указанием мгновенного направления движения материальных частиц) и формы свободной поверхности показаны на рис. 4 ($T = 2\pi/\omega$ — период колебаний). В рассматриваемом случае поле линий тока не зависит от времени, а направление мгновенного движения материальных частиц периодически меняется.

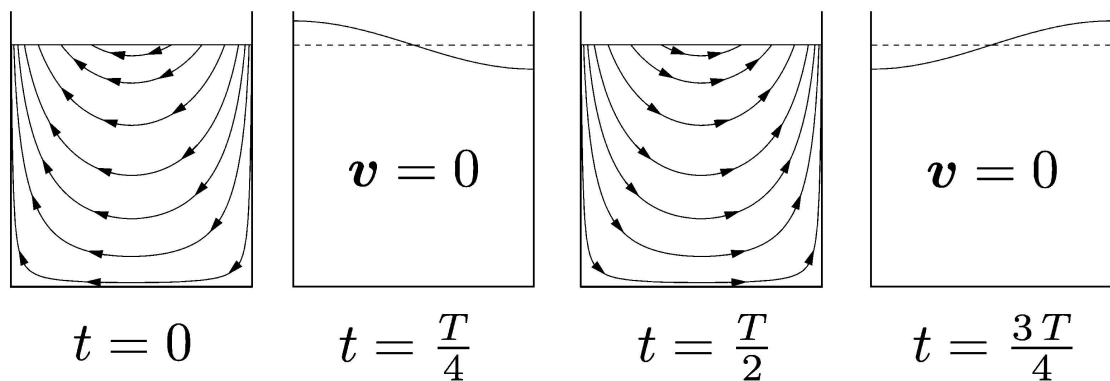


Рис. 4.

Для нахождения *траекторий материальных частиц* необходимо решить систему

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= v_x(x(t), y(t), t) \equiv \varphi'_x(x(t), y(t), t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= v_y(x(t), y(t), t) \equiv \varphi'_y(x(t), y(t), t). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку в рассматриваемой (линейной) теории изучаются малые колебательные отклонения частиц от их равновесного положения (x_0, y_0) ,

а поле скоростей меняется на расстояниях порядка длины волны $\lambda \sim 1/k \gg a$, при расчете траектории частицы в правой части системы (9) можно приближенно заменить скорость $\mathbf{v}(x, y, t)$ значением $\mathbf{v}(x_0, y_0, t)$, соответствующим положению частицы в отсутствие волн¹⁾. В результате интегрирования получается параметрическое представление траекторий частиц

$$x(t) = x_0 - A \frac{\text{ch}(k(y_0 + H))}{\text{sh}(kH)} \sin(\omega t) \cdot \sin(kx_0),$$

$$y(t) = y_0 + A \frac{\text{sh}(k(y_0 + H))}{\text{sh}(kH)} \sin(\omega t) \cdot \cos(kx_0),$$

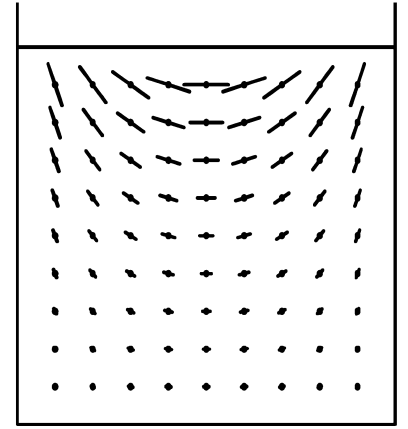


Рис. 5.

показывающее, что частицы жидкости совершают гармонические колебания, двигаясь по отрезкам, направленным вдоль линий тока. Для иллюстрации на рис. 5 показаны траектории частиц, находящихся в разных местах сосуда.

Частота $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ первого тона колебаний находится из общего дисперсионного уравнения (8) при $\lambda = 2L$:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{4\pi L} \text{th}\left(\frac{\pi H}{L}\right)}. \quad (10)$$

Предельные случаи глубокой и мелкой воды. Если сосуд достаточно *глубокий* (его глубина много больше ширины, $kH \sim H/L \gg 1$), то величина смещения жидкой частицы, определяемая приближенным выражением

$$\delta(t) \equiv \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \sim A \exp(ky_0) \cdot |\sin(\omega t)|,$$

очень быстро — экспоненциально — убывает с удалением от поверхности. Это означает, что в глубоком сосуде (с практической точки зрения достаточно того, чтобы глубина была порядка ширины, $H \sim L$) волновое движение происходит только в приповерхностном слое жидкости, а

¹⁾ Такое упрощение эквивалентно разложению поля скорости в ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) и отбрасыванию членов выше нулевого порядка по малому параметру a/λ . Поскольку исходная линейная теория сама учитывает только старшие члены в разложении по a/λ , эта операция не приводит к потере точности (в главных членах).

частота колебаний практически перестает зависеть от глубины:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{4\pi L}}. \quad (11)$$

В противоположном случае *неглубокого* сосуда ($kH \ll 1$) почти во всем его объеме жидкие частицы движутся практически параллельно дну, а их смещения, описываемые приближенным выражением

$$\delta(t) \equiv \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \sim \frac{A}{kH} |\sin(kx_0)| \cdot |\sin(\omega t)|,$$

становятся много больше амплитуды волны A и перестают зависеть от глубины (так что становится применимой *теория мелкой воды*, см. приложение 2). В этом случае общее выражение (10) дает приближенную формулу¹⁾ для периода колебаний $T = 1/\nu$:

$$T = \frac{2L}{\sqrt{gH}}. \quad (12)$$

которая удовлетворительно описывает одноузловые *сейши*²⁾ — колебания в озерах и закрытых морях, возникающие из-за влияния ветра и перепадов атмосферного давления.

Сопоставление общей зависимости (10) частоты колебаний от глубины и ее предельных случаев (11) и (12) с использованием безразмерных параметров (см. приложение 1) приводится на графике на рис. 6.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Экспериментальная установка представляет собой прозрачный сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда. В ходе выполнения эксперимента в сосуд наливается вода, уровень H которой измеряется по шкале, находящейся на установке, после чего путем движения сосуда в нем возбуждаются колебания, близкие к первому тону. После того как

¹⁾ В океанографической литературе выражение (12) часто называют *формулой Мерьяна* (J.R. Merian, 1828) по имени швейцарского ученого, впервые получившего дисперсионное уравнение (8) для колебаний в прямоугольном сосуде. Для бесконечного слоя жидкости конечной постоянной глубины решение в виде стоячих волн было получено Пуассоном около 1815 г.

²⁾ Название «сэйша» происходит от французского слова *seiche* с тем же значением.

высшие тона колебаний затухнут из-за действия вязкости, проводится измерение частоты ν первого тона: с помощью секундомера измеряется время нескольких десятков колебаний. Далее часть жидкости выливается из сосуда и измерения частоты повторяются для нового уровня жидкости. В целом проводится около десяти измерений, причем выбор глубин жидкости делается с таким расчетом, чтобы охватить как область больших глубин ($H/L \gtrsim 0,8$), в которой частота почти не зависит от H , так и область малых глубин ($H/L \lesssim 0,2$), в которой применима теория мелкой воды (см. рис. 6).

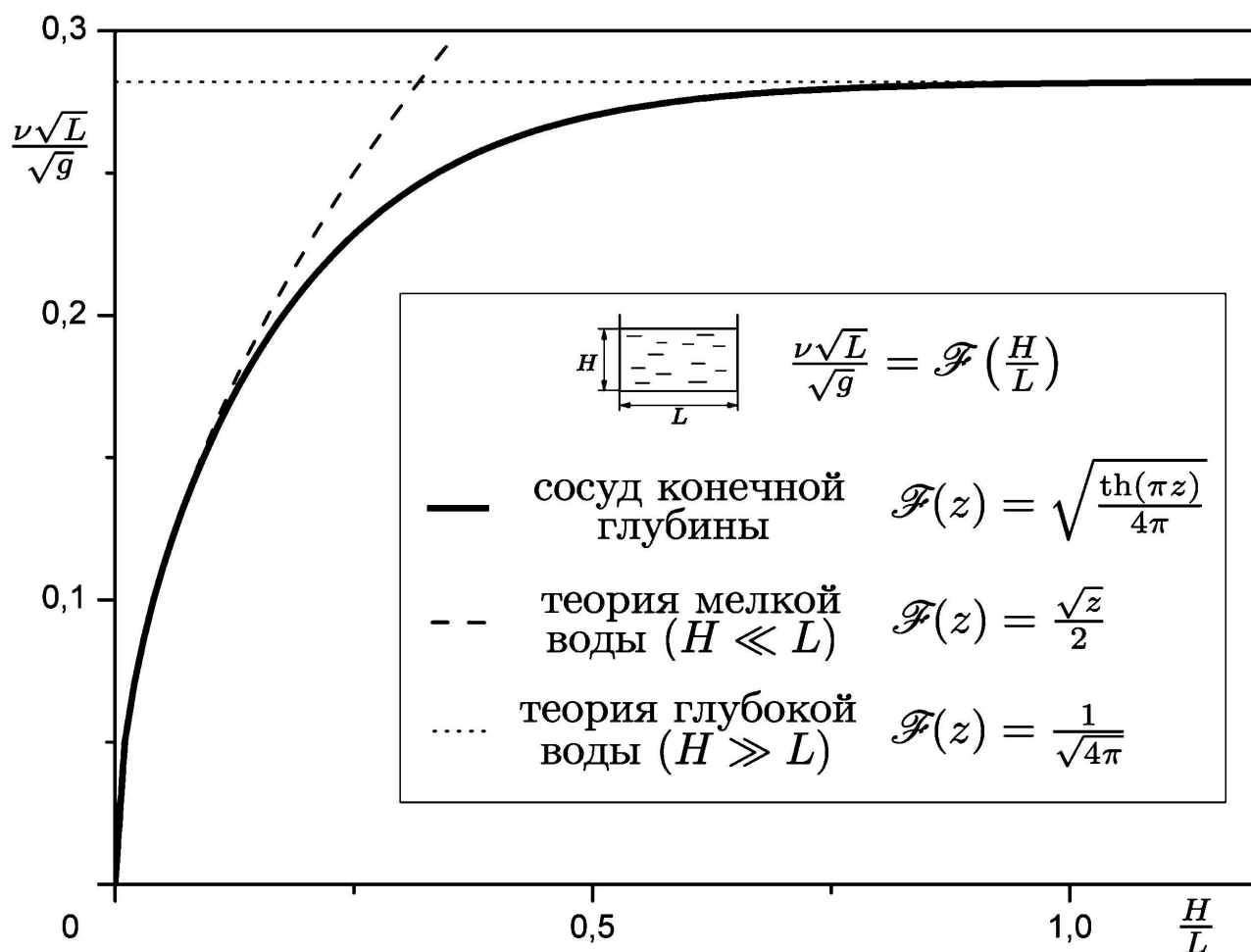


Рис. 6.

При малой относительной глубине горизонтальные перемещения жидких частиц у поверхности много больше вертикальных, поэтому для отсчета колебаний в этом случае удобно следить за перемещениями пенопластовых крошек или небольших кусочков бумаги, плавающих на поверхности.

При обработке экспериментальных данных требуется построить экспериментальную зависимость безразмерной частоты колебаний $\frac{\nu\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$ от безразмерной глубины жидкости $\frac{H}{L}$ и сопоставить эти данные с теоретической зависимостью (рис. 6).

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ

Общий вид выражения для частот малых собственных колебаний несжимаемой весомой жидкости в сосуде произвольной формы может быть найден с использованием пи-теоремы теории размерностей.

Задача о нахождении стоячих волн сводится к разысканию решения системы (7) в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) \cdot \cos(\omega t),$$

что приводит к системе для одновременного нахождения числа ω (собственной круговой частоты) и функции пространственных координат $\Phi(x, y, z)$ (собственной формы колебаний):

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на стенке сосуда,} \\ -\omega^2 \Phi + g \Phi'_y = 0 \text{ при } y = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Оказывается, что эта система имеет нетривиальное (ненулевое) решение Φ только для счетного числа значений круговой частоты ω [4], причем одному значению ω может, вообще говоря, соответствовать несколько решений Φ (несколько форм колебаний)¹). Из постановки задачи (13) видно, что каждая частота собственных колебаний $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, например наименьшая, зависит от ускорения свободного падения g и от геометрических размеров a_1, a_2, \dots, a_N , определяющих форму сосуда²). Работая в классе систем единиц $\{L, M, T\}$ и выбирая в качестве величин с независимыми размерностями g и a_1 , на основании пи-теоремы получим зависимость

$$\frac{\nu\sqrt{a_1}}{\sqrt{g}} = \mathcal{F}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_N}{a_1}\right), \quad (14)$$

¹) Простейший пример — колебания в вертикальном цилиндрическом сосуде, например малые колебания воды в стакане. Разные собственные формы соответствуют в этом случае разным направлениям качания свободной поверхности.

²) Плотность жидкости не входит в систему уравнений, определяющую *кинматику* идеальной жидкости и, в частности, частоту ее колебаний, однако при определении *силового воздействия* на сосуд со стороны жидкости плотность ρ , характеризующую инерционные свойства жидкости и явно входящую в выражение для давления, нужно обязательно включать в число определяющих параметров.

которая говорит о том, что безразмерные частоты колебаний зависят только от формы сосуда. В простейших случаях вид функции \mathcal{F} можно определить аналитически (например, для первого тона рассматривавшихся выше колебаний в прямоугольном сосуде

$$\mathcal{F}(z) = \sqrt{\frac{\text{th}(\pi z)}{4\pi}},$$

если $a_1 = L$, $a_2 = H$), в общем случае для ее нахождения нужно использовать численные методы или эксперимент.

При получении зависимости (14) мы пренебрегали действием вязкости, поверхностного натяжения, а также конечностью амплитуды колебаний¹⁾. При учете этих факторов в число определяющих параметров следовало бы дополнительно включить плотность ρ и вязкость μ жидкости, ее коэффициент поверхностного натяжения σ и угол смачивания θ на границе жидкости и стенки сосуда, а также характерную величину \mathcal{A} отклонения свободной поверхности от невозмущенного положения:

$$\nu = G(g, a_1, a_2, \dots, a_N, \rho, \mu, \sigma, \theta, \mathcal{A}).$$

В этом случае применение пи-теоремы дало бы

$$\frac{\nu\sqrt{a_1}}{\sqrt{g}} = \mathcal{G}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_N}{a_1}, \frac{\rho\sqrt{ga_1^3}}{\mu}, \frac{\rho ga_1^2}{\sigma}, \theta, \frac{\mathcal{A}}{a_1}\right). \quad (15)$$

Экспериментальные исследования показали, что в случае достаточно крупных сосудов появившиеся в (15) дополнительные (по сравнению с (14)) аргументы мало влияют на частоты колебаний.

¹⁾ Естественно, что за счет вязкости, всегда проявляющейся у реальных жидкостей, колебания будут затухать со временем, поэтому течение жидкости не будет строго периодическим процессом. Однако если влияние диссипативных процессов мало (в том смысле, что мало изменение амплитуды колебаний за период), то можно приближенно говорить о частоте колебаний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В случае *малой глубины* жидкости в прямоугольном баке ($H \ll \ll L$) приближенная формула (12) для периода собственных колебаний может быть получена с использованием *теории мелкой воды*. Напомним, что в этой теории предполагается, что скорость жидкости в вертикальном сечении приближенно направлена горизонтально (вдоль дна) и постоянна по высоте сечения (рис. 7)¹⁾, откуда для распределения давления получается гидростатическое распределение. С использованием интегральных соотношений, выражающих баланс массы и горизонтальной проекции импульса, для глубины $h(x, t)$ и горизонтальной скорости жидкости $v(x, t)$ получается замкнутая система из двух уравнений²⁾

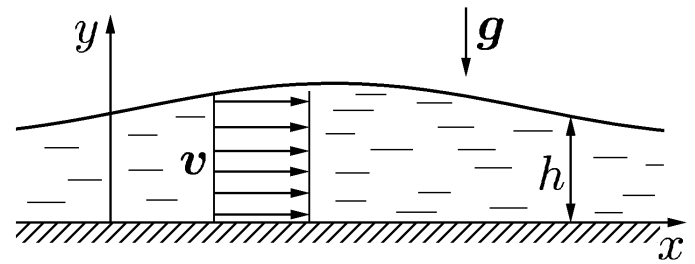


Рис. 7.

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + v \cdot v'_x = -g \cdot h'_x,$$

которая после линеаризации в окрестности состояния равновесия ($h = H, v = 0$) приобретает вид

$$h'_t + H \cdot v'_x = 0, \quad v'_t + g \cdot h'_x = 0.$$

С помощью перекрестного дифференцирования отсюда получается система из двух независимых волновых уравнений для h и v :

$$h''_{tt} = c^2 \cdot h''_{xx}, \quad v''_{tt} = c^2 \cdot v''_{xx},$$

где постоянная $c = \sqrt{gH}$ имеет смысл скорости распространения малых возмущений на поверхности жидкости.

¹⁾ При этом граничное условие на свободной поверхности в точности не выполняется.

²⁾ Вывод уравнений излагается в методической разработке к задаче «Изучение обтекания тел сверхзвуковым потоком газа методом газогидравлической аналогии» специального физико-механического практикума по гидромеханике (www.gidropraktikum.narod.ru/shallow-water.htm) и здесь не повторяется.

Для отыскания *стоячих волн* ищем периодическое по времени решение второго уравнения

$$v(x, t) = V(x) \cdot \cos(\omega t)$$

с граничными условиями

$$V(0) = 0, \quad V(L) = 0,$$

соответствующими боковым вертикальным стенкам прямоугольного сосуда. В результате для периода колебаний получаем формулу

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2L}{n\sqrt{gH}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

совпадающую с (12) для первого тона колебаний ($n = 1$), а для глубины и скорости — формулы

$$h(x, t) = H - A \sin(\omega t) \cdot \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

$$v(x, t) = \frac{A\sqrt{g}}{\sqrt{H}} \cos(\omega t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 584 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
4. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1966. 270 с. (Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып. 3).
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1. 492 с.
6. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.