Механико-математический факультет МГУ

Практикум по гидромеханике

Определение коэффициента фильтрации пористой среды

Цель работы

Целью работы является ознакомление с явлением фильтрации в пористой среде и его математическим описанием в рамках механики сплошной среды, а также экспериментальное определение коэффициента фильтрации.

Элементы теории

Описание фильтрации в рамках МСС. При изучении многих физических явлений приходится иметь дело с движением жидкостей в пористых средах — *фильтрацией*[1]). В таких фильтрационных процессах, примерами которых могут служить просачивание воды через почву, движение нефти в подземных пластах и т.п., жидкость движется по разветвленной системе сообщающихся между собой пор. У встречающихся на практике проницаемых сред (песка, глины, почвы, торфа и др.) поровое пространство имеет очень сложную и нерегулярную структуру, которая, к тому же, обычно не бывает известна с достаточной точностью, поэтому ясно, что прямое описание движения жидкости во всех деталях встретило бы значительные сложности. Однако в большинстве случаев характерные линейные размеры рассматриваемых задач много больше характерного размера пор (в случае зернистой среды типа песка — много больше характерного размера зерен), поэтому для описания крупномасштабных явлений пористый материал можно рассматривать как сплошную среду, характеристики которой (плотность, давление жидкости в порах и др.) в каждой точке получаются в результате осреднения по некоторой окрестности, содержащей достаточно большое число пор.

Пористость. Одной из характеристик пористой среды является *пористость* m, равная относительной объемной доле пор в материале. Пористость определяет количество жидкости, которое может содержаться в некотором объеме пористой среды. Для образца однородного пористого материала объемом V

$$m = \frac{V_\text{п}}{V}, \;\; 0 < m < 1,$$

[1]) Это слово происходит от средневекового латинского названия войлока (*filtrum*), который использовался в качестве фильтра.

где $V_п$ — объем пор в рассматриваемом образце. Отметим, что обычно при определении пористости учитывают только связанные между собой поры, которые могут быть заполнены жидкостью извне, и не учитывают объем изолированных пор, не участвующих в перемещении жидкости внутри пористой среды. Для неоднородных пористых сред, свойства которых могут меняться от точки к точке, пористость m будет известной функцией пространственных координат. Если пористая среда может деформироваться (это происходит, например, при утрамбовке грунта), то величина пористости может меняться и со временем.

Скорость фильтрации. В простейшем случае, когда жидкость движется вдоль тонкой трубки, заполненной пористым материалом, *скорость фильтрации* есть вектор $\boldsymbol{u}$, направленный в сторону движения жидкости, величина которого равна объемному расходу жидкости (объему жидкости, протекающей в единицу времени) в расчете на единицу площади *полного поперечного сечения* трубки (включающего как поры, так и пористую среду).

Здесь важно подчеркнуть, что скорость фильтрации не равна скорости движения отдельных частиц жидкости. В самом деле, если S — площадь поперечного сечения трубки, $S_п$ — часть площади этого сечения, приходящаяся на поры, то постоянство объемного расхода однородной несжимаемой жидкости можно записать в виде

$$Q = |\boldsymbol{u}|S = vS_п = \mathrm{const},$$

где Q — объемный расход жидкости через трубку, v — среднее значение проекции скорости *частиц жидкости* на ось трубки, вычисленное по площади сечения, занимаемой порами. Отсюда получаем

$$v = \frac{|\boldsymbol{u}|}{n}, \ \ n = \frac{S_п}{S} < 1,$$

т.е. средняя скорость частиц жидкости в ${}^1\!/_n$ раз больше скорости фильтрации. Введенная величина n называется *просветностью*; для многих пористых сред $n \approx m$.

В общем случае неодномерного движения жидкости в пористой среде *скорость фильтрации* определяется как вектор $\boldsymbol{u}$, проекция которого на некоторое направление равна объемному расходу жидкости через единичную площадку, перпендикулярную данному направлению.

Уравнение неразрывности. Изменение массы жидкости в произвольном объеме V внутри неподвижной пористой среды происходит за счет притока жидкости через границу объема Σ:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho m\, dV + \int\limits_\Sigma \rho \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0,$$

где ρ — плотность жидкости, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Σ. Если плотность жидкости постоянна, а пористая среда не деформируется (т.е. пористость зависит только от координат), то первое слагаемое обращается в ноль и закон сохранения массы приобретает вид

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0.$$

В том случае, когда скорость фильтрации $\boldsymbol{u}$ является гладкой функцией координат, отсюда получается уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \tag{1}$$

Закон Дарси. Многочисленные эксперименты показали, что при медленном стационарном движении несжимаемой жидкости в неподвижной изотропной пористой среде скорость фильтрации линейно зависит от градиента давления. Для движения жидкости в поле силы тяжести эта зависимость, называемая *законом Дарси*[1]), может быть записана в виде

$$\boldsymbol{u} = -\frac{k}{\mu}(\operatorname{grad} p - \rho \boldsymbol{g}), \tag{2}$$

где p — давление в жидкости, $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения, μ — коэффициент вязкости жидкости, k — коэффициент пропорциональности, называемый *проницаемостью* пористой среды. Знак минус перед выражением в правой части (2) учитывает тот факт,

[1]) В честь французского гидравлика Анри Дарси, экспериментально установившего этот закон около 1856 г.

что в отсутствие силы тяжести жидкость движется в пористой среде из областей с бóльшим давлением в области с меньшим давлением. Если жидкость в порах покоится ($\boldsymbol{u} = 0$), то закон Дарси превращается в обычное уравнение равновесия жидкости. Коэффициент проницаемости k зависит только от свойств пористой среды (но не от свойств жидкости), и определяется, в основном, геометрией порового пространства. Для неоднородных пористых сред коэффициент проницаемости является функцией пространственных координат.

Закон Дарси часто записывают в виде

$$\boldsymbol{u} = -C \operatorname{grad} H, \quad H = \frac{p}{\rho g} + z, \quad C = \frac{k\rho g}{\mu}, \tag{3}$$

где z — вертикальная координата рассматриваемой точки (ось Oz направлена вверх, противоположно $\boldsymbol{g}$), C — *коэффициент фильтрации* (зависящий, очевидно, как от свойств пористой среды, так и от свойств жидкости). Для примера укажем, что типичные значения C при движении воды в песке имеют порядок $(10^{-5} \div 10^{-2})$ м/с, в глине — $(10^{-8} \div 10^{-7})$ м/с. Введенная в (3) функция H называется *напором.*

Некоторые дополнительные сведения о законе Дарси приводятся в приложении 1.

Граничные условия. Рассмотрим типичные условия, выставляемые на границах пористой среды с другими средами.

Если пористая среда граничит с ***непроницаемой*** для жидкости средой (например, песок соприкасается с бетонными основаниями гидротехнических сооружений), то поток жидкости через границу, а следовательно, и нормальная компонента скорости фильтрации равны нулю:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{4}$$

На границе пористой среды с атмосферой заполняющая пористую среду жидкость может выходить на поверхность и, например, стекать вдоль границы. Примером такой границы, называемой ***поверхностью высачивания***, являются стенки колодца, вырытого в водонасыщенном грунте. На поверхности высачивания давление жидкости совпадает с атмосферным:

$$p = p_{\text{атм}}. \tag{5}$$

При этом, естественно, подразумевается, что жидкость *вытекает* из пористой среды, т.е. на границе $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} > 0$.

Во многих задачах встречаются границы пористой среды со ***свободной жидкостью***. Типичный пример такой границы — дно водоема, через которое жидкость (вода) может просачиваться из водоема в грунт или, наоборот, через которое грунтовые воды могут проникать в водоем. Как правило, скорости движения жидкости в водоемах малы, поэтому можно считать, что давление на дне определяется по *гидростатическому* закону:

$$p = p_{\text{атм}} + \rho g l, \tag{6}$$

где l — глубина водоема в рассматриваемой точке границы.

Отметим, что в некоторых задачах могут встречаться и другие типы граничных условий.

Нестационарная фильтрация. Соотношения (1) и (2) образуют полную систему уравнений, описывающих *стационарную* фильтрацию несжимаемой жидкости. Функции $\boldsymbol{u}$ и p могут быть найдены из этой системы с использованием соответствующих граничных условий. Опыт показывает, что закон Дарси (2) остается справедливым и для *нестационарных* фильтрационных процессов (если изменения скорости фильтрации происходят не слишком резко), поэтому система уравнений в этом случае не меняется. Граничные условия (4), (5) и (6) в случае медленно меняющихся фильтрационных процессов также сохраняют свой вид, с той лишь разницей, что теперь входящие в них величины (например, $p_{\text{атм}}$ или l) могут зависеть от времени как от параметра.

Задача о нестационарной фильтрации через слой пористого материала

Рассмотрим вертикальный цилиндрический канал *4*, в котором находится слой пористого материала *2* толщиной L, выше которого налита несжимаемая жидкость *1* (рис. 1). Под действием силы тяжести жидкость просачивается сквозь пористый материал и собирается в находящемся снизу сосуде *5*; при этом уровень жидкости над пористым материалом понижается. Слой пористого материала удерживается снизу горизонтальной проницаемой перегородкой *3*, сопротивлением которой движению жидкости можно пренебречь.

При решении задачи будет предполагаться, что в начальный момент времени все поровое пространство целиком заполнено жидкостью[1]).

Направим ось Oz вертикально вверх, выбрав начало координат на уровне нижней границы проницаемого слоя. Если коэффициент фильтрации C постоянен, то вектор скорости фильтрации $\boldsymbol{u}$, очевидно, направлен вертикально вниз, а давление p и проекция u скорости фильтрации на вертикальную ось могут зависеть только от времени и координаты z. Из уравнения неразрывности

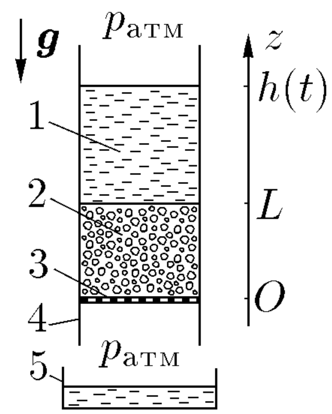

Рис. 1.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

следует, что скорость фильтрации зависит только от времени, причем $u = \frac{dh}{dt} < 0$, где $h(t)$ — координата свободной поверхности жидкости.

Закон Дарси (3) имеет вид

$$\frac{dh}{dt} = -C\frac{\partial H}{\partial z}, \quad H = \frac{p}{\rho g} + z,$$

откуда после интегрирования по z получаем соотношение

$$z\frac{dh}{dt} + f(t) = -C\left(\frac{p}{\rho g} + z\right), \tag{7}$$

где $f(t)$ — постоянная интегрирования, зависящая, вообще говоря, от времени.

Условие на боковой стенке канала — условие непротекания (4) — в рассматриваемой задаче выполняется автоматически. Нижняя граница $z = 0$ пористого материала является поверхностью высачивания, на которой выполнено условие (5), что позволяет найти постоянную интегрирования:

$$f(t) = -\frac{Cp_{\text{атм}}}{\rho g} = \text{const}.$$

[1]) Иными словами, мы не рассматриваем процесс заполнения пор в сухой среде (пропитку). Заметим, что математическое описание такого процесса требует более сложной модели, учитывающей, в частности, капиллярные силы и неполное заполнение пор.

Наконец, верхняя граница $z = L$ пористого материала является границей со свободной жидкостью. Подстановка граничного условия (6), в данной задаче принимающего вид $p = p_{\text{атм}} + \rho g(h - L)$, в соотношение (7) дает уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{C}{L}h,$$

откуда

$$h(t) = h(0)\exp\left(-\frac{C}{L}t\right),$$

где $h(0)$ — координата свободной поверхности жидкости в начальный момент времени. Последнее соотношение можно переписать в виде линейной зависимости между логарифмом безразмерной координаты поверхности $(-\eta)$ и временем t:

$$\eta = \frac{C}{L}t, \ \ \eta = -\ln\frac{h(t)}{h(0)} > 0. \qquad (8)$$

Таким образом, определив в эксперименте координаты свободной поверхности жидкости для нескольких моментов времени, можно найти коэффициент пропорциональности в зависимости (8) и определить значение коэффициента фильтрации C.

Выполнение эксперимента и обработка результатов

Установка для проведения эксперимента представляет собой вертикальную прозрачную трубу, в нижней части которой между двумя мелкоячеистыми сетками находится слой пористого материала. Свободная жидкость, находящаяся в верхней части установки, просачивается через пористый материал и стекает в сосуд, установленный в нижней части установки.

Перед началом эксперимента измеряется толщина слоя пористого материала L. Через верхний конец трубы в установку наливается жидкость. После того как колебания свободной поверхности прекратятся, а пористый материал полностью заполнится жидкостью (при этом некоторое количество жидкости профильтруется через пористый материал и соберется в сосуде под установкой), включается секундомер и одновременно фиксируется начальная координата свободной поверхности $h(0)$ по шкале, укрепленной на установке.

По мере опускания свободной поверхности определяются ее координаты h для нескольких моментов времени t.

При оформлении работы необходимо изложить цель работы, постановку и решение задачи о нестационарной фильтрации через слой пористого материала, а также дать схему экспериментальной установки. Следует привести значения всех измеренных и вычисленных параметров; результаты удобно заносить в следующую таблицу.

h, см	t, с	$\eta = \ln \frac{h(0)}{h(t)}$

Кроме того, необходимо представить график линейной зависимости η от t, построенной по экспериментальным точкам, которые также указываются на графике. Коэффициент фильтрации C определяется по углу наклона аппроксимирующей прямой на графике или методом наименьших квадратов (см. приложение 2).

Вопросы к зачету

1. Описание фильтрации в рамках механики сплошной среды. Геометрические характеристики пористой среды (понятия пористости, просветности, проницаемости).
2. Вектор скорости фильтрации. Вывод уравнения неразрывности при фильтрации несжимаемой жидкости.
3. Закон Дарси. Понятие напора. Коэффициент фильтрации.
4. Типичные условия на границе пористой среды.
5. Решение задачи о нестационарной фильтрации через слой пористого материала.
6. Экспериментальное определение коэффициента фильтрации.

Литература

1. Вилькер Д. С. Лабораторный практикум по гидромеханике. М.: Физматлит, 1959. 352 с. (гл. VII).
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с. (гл. I, § 1–8, 12; гл. II, § 1, 2).
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с. (гл. I, § 1; гл. II, § 1).

Приложение 1

Вывод зависимости градиента давления от скорости фильтрации с помощью теории размерностей

В отсутствие массовых сил зависимость градиента давления от скорости фильтрации может быть получена с использованием теории размерностей. Кроме модуля скорости фильтрации u, величина градиента давления $|\operatorname{grad} p|$ зависит, с одной стороны, от свойств жидкости — плотности ρ, определяющей инерционные свойства жидкости, и вязкости μ [1]) — и, с другой стороны, от свойств пористой среды — характерного размера пор d, пористости m и, возможно, других скалярных безразмерных параметров a_i, определяющих геометрию порового пространства:

$$|\operatorname{grad} p| = F(u, \rho, \mu, d, m, a_i).$$

Будем работать в классе систем единиц $\{L, M, T\}$. Выбирая в качестве величин с независимыми размерностями u, μ и d, на основании π-теоремы получим:

$$|\operatorname{grad} p| = \frac{\mu u}{d^2} \cdot \Phi\left(\frac{\rho u d}{\mu}, m, a_i\right).$$

Первый аргумент функции Φ можно назвать числом Рейнольдса Re, вычисленным по скорости фильтрации u и характерному размеру пор d.

Что касается направления вектора $\operatorname{grad} p$, то, как нетрудно видеть, он должен быть параллелен вектору $\boldsymbol{u}$. Действительно, в прямоугольной декартовой системе координат зависимость компонент вектора $\operatorname{grad} p$ от компонент вектора скорости фильтрации $\boldsymbol{u}$ и других определяющих параметров имеет вид

$$\nabla_k p = \varphi_k(u_l, \rho, \mu, d, m, a_i), \quad k, l = 1, 2, 3,$$

причем вид функций φ_k не зависит от выбора системы координат. Предположим, что векторы $\operatorname{grad} p$ и $\boldsymbol{u}$ не параллельны. Направим

[1]) Вязкость жидкости нужно обязательно учитывать, ибо если бы жидкость не обладала вязкостью (была идеальной), то в силу парадокса Даламбера жидкость не испытывала бы сопротивления при стационарном движении в тонкой трубке, заполненной пористой средой.

ось Ox вдоль вектора $\boldsymbol{u}$, так чтобы он имел только одну отличную от нуля компоненту. Тогда при повороте системы координат относительно оси Ox все аргументы функций φ_k останутся неизменными, в то время как компоненты вектора $\operatorname{grad} p$ будут изменяться, что приводит к противоречию[1]).

Итак, общий вид закона фильтрации несжимаемой жидкости в изотропной пористой среде можно записать так:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{d^2}\,\mathscr{F}(\mathsf{Re}, m, a_i)\cdot \boldsymbol{u}, \quad \mathsf{Re} = \frac{\rho u d}{\mu}. \tag{9}$$

В случае *очень медленных* (ползущих) течений жидкости внутри пор зависимость (9) существенно упрощается, так как в этом случае функция $\mathscr{F}$ не зависит от числа Рейнольдса. В самом деле, стационарное ламинарное движение вязкой жидкости в порах описывается уравнением неразрывности

$$\nabla_k v^k = 0$$

и уравнениями Навье — Стокса

$$\rho v^i \nabla_i v^k = -\nabla^k p + \mu\,\triangle v^k.$$

Член, стоящий в левой части уравнений Навье — Стокса, по порядку величины равен $\rho v^2/d$, второй член в правой части порядка $\mu v/d^2$, где v — характерное значение скорости частиц жидкости[2]). Поэтому отношение первого названного члена ко второму, характеризующее отношение *инерционных* сил к силам *вязкого трения*, имеет порядок $\rho v d/\mu$ или $\rho u d/\mu = \mathsf{Re}$, т.к. характерная скорость частиц жидкости v и скорость фильтрации u отличаются лишь множителем порядка единицы (см. стр. 4). Мы видим, что при $\mathsf{Re} \ll 1$ стоящей

[1]) Это рассуждение опирается на предположение об *изотропности* пористой среды. Для *анизотропных* сред (в которых, конечно, векторы $\boldsymbol{u}$ и $\operatorname{grad} p$ могут быть не параллельны) в число аргументов функций φ_k нужно дополнительно включать компоненты тензоров, характеризующих анизотропию (например, для слоистой среды — компоненты вектора нормали, задающего ориентацию слоев в пространстве).

[2]) Мы пользуемся тем, что производная $\frac{\partial A}{\partial x}$ имеет порядок A/L, где L — характерный масштаб переменной x.

в левой части уравнений Навье — Стокса конвективной производной можно пренебречь по сравнению с остальными членами, так что в этом случае плотность ρ не будет входить в постановку задачи (в условие на стенках пор — условие прилипания $\boldsymbol{v} = 0$ — плотность также не входит), и поэтому она должна быть исключена из числа определяющих параметров. Таким образом, при $\mathsf{Re} \ll 1$ зависимость (9) должна иметь вид

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{k}\boldsymbol{u}, \quad k = \frac{d^2}{\mathscr{F}(m, a_i)},$$

где величина k, имеющая размерность квадрата длины, зависит только от свойств пористой среды. Этот закон совпадает с законом Дарси (2) при $\boldsymbol{g} = 0$.

Опытные данные показывают, что закон Дарси остается справедливым при значениях Re, не превосходящих нескольких единиц. При бо́льших значениях Re во встречающихся на практике случаях движение жидкости в порах остается ламинарным, но инерцией жидкости при движении в порах уже нельзя пренебрегать. В этом случае зависимость градиента давления от скорости фильтрации нелинейная (часто ее считают квадратичной) и необходимо пользоваться законом (9).

Приложение 2

Метод наименьших квадратов

Предположим, мы знаем или предполагаем, что между некоторыми физическими величинами x и y существует приближенная линейная зависимость $y = Ax$, причем коэффициент пропорциональности нам не известен. Если в эксперименте было получено n пар чисел (x_i, y_i) — значений рассматриваемых величин, то эти точки, вообще говоря, не будут лежать на одной прямой на плоскости (x, y) вследствие неизбежно возникающих при измерениях ошибок, неучета второстепенных факторов и т.п. Поэтому полученные экспериментальные данные можно по-разному приближать линейной зависимостью исходя из естественного требования, чтобы аппроксимирующая прямая была бы наиболее близка (в некотором смысле) к экспериментальным точкам. Часто в качестве такого условия выбирают требование, чтобы сумма квадратов отклонений d_i измеренных значений функции y_i от предполагаемых нами значений Ax_i была минимальна (рис. 2):

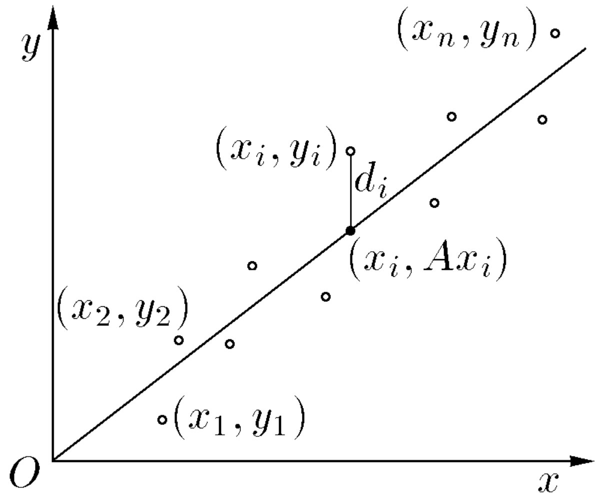

Рис. 2.

$$J(A) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i)^2 \to \min .$$

Необходимое условие минимума $J'(A) = 0$ дает линейное уравнение относительно A, откуда

$$A = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Такой способ аппроксимации экспериментальных данных является простейшим вариантом *метода наименьших квадратов*[1]). Этот

[1]) Метод наименьших квадратов был предложен независимо Лежандром и

метод легко обобщается на случай аппроксимирующих функций с бо́льшим числом параметров. Так, если мы приближаем экспериментальные данные линейной зависимостью вида $y = Ax + B$, где A и B суть неизвестные постоянные, то условие минимума функции

$$I(A, B) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B)^2$$

дает систему двух линейных уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial B} = 0$$

относительно A и B, из которой

$$A = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2}, \quad B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2}.$$

Эти формулы могут быть использованы при обработке экспериментальных данных в работе «Определение периода автоколебаний плоских затопленных фонтанов» физико-механического практикума по гидромеханике.

Гауссом (последний успешно использовал этот метод в 1801 г. для определения орбиты вновь открытой малой планеты Цереры по данным астрономических наблюдений).