

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.Ломоносова

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
(НИИМ МГУ)

УДК 532.685

№ госрегистрации _____

УТВЕРЖДАЮ

Директор НИИМ МГУ академик РАЕН

М.П. _____ Ю.М.Окунев

«____»_____ 2011 г.

ОТЧЕТ № 5153
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТЕЙ, ГАЗОВ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ
(шифр по плану НИР института на 2011 год: 01201152158)

Изучение работы фильтрационной установки
физико-механического практикума по гидромеханике

Заместитель директора института по НИР
д.ф.-м.н., ст.н.с., академик РАЕН _____ Н.А.Остапенко

И.о. заведующего лабораторией №103 экспери-
ментальной гидродинамики к.ф.-м.н. _____ Д.Ю.Жиленко

Научный руководитель НИР
д.ф.-м.н., гл.н.с., академик РАЕН _____ В.П.Карликов

Москва 2011

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Ответственный исполнитель

ст.н.с., к.ф.-м.н., доцент

_____ Н.Е.Леонтьев

РЕЦЕНЗЕНТ

ст.н.с., к.ф.-м.н., доцент

_____ С.Л.Толоконников

★ И Н С Т И Т У Т М Е Х А Н И К И ★

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Реферат | 4 |
| 1 Введение | 5 |
| 2 Устройство фильтрационной установки | 6 |
| 3 Изучение погрешностей при экспериментальном определении проницаемости в рамках однофазных моделей | 9 |
| 3.1 Оценка возможности отклонения закона фильтрации от закона Дарси | 9 |
| 3.2 Зависимость вязкости жидкости от температуры | 10 |
| 3.3 Влияние сопротивления решетки, поддерживающей пористый слой | 11 |
| 3.4 Влияние отклонения оси установки от вертикали. Учет образования свободной поверхности | 16 |
| 4 Исследование полноты пропитки пористой среды при подготовке к эксперименту | 22 |
| 4.1 Модель двухфазной фильтрации | 22 |
| 4.2 Оценка возможности описания пропитки в рамках одномерных уравнений | 25 |
| 4.3 Оценка необходимости учета капиллярной разности давлений | 26 |
| 4.4 Метод численного решения уравнения для насыщенности. Границные условия | 27 |
| 4.5 Результаты расчетов | 30 |
| Выводы и практические рекомендации | 33 |
| Список литературы | 34 |

Реферат

Объем отчета 35 стр., иллюстраций 22, таблиц 1, использованных источников 26.

Ключевые слова: пористая среда, закон Дарси, коэффициент фильтрации, проницаемость.

Изучается работа лабораторной фильтрационной установки физико-механического практикума по гидромеханике механико-математического факультета МГУ. Анализируются возможные источники ошибок при определении проницаемости пласта, среди которых температурная зависимость вязкости; сопротивление решетки, удерживающей пористый образец; отклонение оси установки от вертикали, приводящее к образованию свободной поверхности; неполнота пропитки пористого образца при подготовке к эксперименту. Даются практические рекомендации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00051, 11-01-00188).

1 Введение

В отчете обсуждаются некоторые методические задачи, возникшие при подготовке лабораторной работы по теории фильтрации на физико-механическом практикуме по гидромеханике механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова.

Основной целью лабораторной работы является ознакомление студентов-механиков с описанием течений в пористых средах в рамках механики сплошных сред и базовыми понятиями теории фильтрации. В цикле лабораторных занятий общих и специальных практикумов всех кафедр эта работа является единственной, в которой студенты на практике знакомятся с описанием многофазных сред, поэтому ее выполнение полезно для будущих специалистов также и в мировоззренческом плане.

В работе анализируются возможные источники погрешностей при определении коэффициента проницаемости в лабораторном эксперименте и даются рекомендации по уменьшению этих погрешностей.

2 Устройство фильтрационной установки

Фильтрационная установка физико-механического практикума, общий вид и схема которой показаны на рис. 1, представляет собой вертикальный цилиндрический канал 4, в котором на решетке 3 находится слой пористого материала 2. Во время работы установки жидкость 1, находящаяся над пористой средой, под действием тяжести фильтруется через проницаемый слой и собирается в емкость 5.

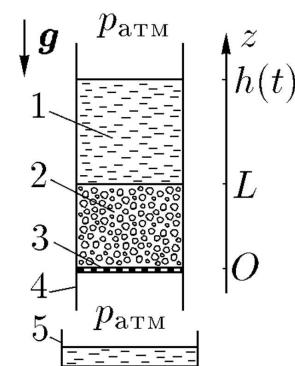
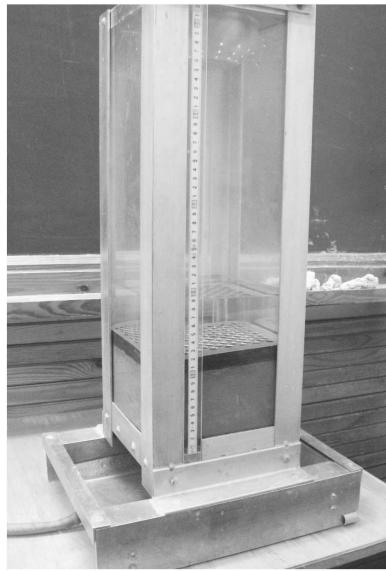


Рис. 1.

В предположении о том, что жидкость полностью насыщает пористый слой и движется с достаточно малой скоростью, математическая постановка задачи сводится к решению системы уравнений, состоящей из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

и закона Дарси

$$\mathbf{u} = -C \operatorname{grad} H, \quad C = \frac{k \rho g}{\mu}, \quad H = \frac{p}{\rho g} + z,$$

где \mathbf{u} — вектор скорости фильтрации, k и C суть коэффициенты проницаемости и фильтрации, ρ и μ — плотность и динамическая вязкость фильтрующейся жидкости, g — ускорение свободного падения, p и H — давление и напор в жидкости [16].

На боковых стенах трубы ставится условие непротекания $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (в терминах напора это условие имеет вид $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$). На нижней границе пористой среды давление в жидкости, в пренебрежении эффектами поверхностного натяжения, равно атмосферному, которое для простоты можно

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

положить нулевым, в силу чего на этой границе $H = 0$. На верхней границе пористого пласта давление равно гидростатическому давлению столба жидкости, находящегося над пластом, что дает на этой границе условие $H = h(t)$. Распределение напора удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta H = 0$, откуда с учетом граничных условий легко найти распределение напора: $H = h(t)z/L$, из которого следует, что скорость фильтрации имеет единственную ненулевую вертикальную компоненту $u_z = -Ch(t)/L$. С учетом закона сохранения массы в форме $u_z = \frac{dh}{dt} < 0$ отсюда получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $h(t)$, решением которого является функция

$$h(t) = h(0) \exp\left(-\frac{C}{L}t\right).$$

LES
FONTAINES PUBLIQUES
DE LA VILLE DE DIJON
EXPOSITION ET APPLICATION
DES PRINCIPES A SUIVRE ET DES FORMULES A EMPLOYER
DANS LES QUESTIONS
DE
DISTRIBUTION D'EAU

PARIS
PAR UN APPENDICE RELATIF AUX FOURNITURES D'EAU DE PLUSIEURS VILLES
AU FILTRAGE DES EAUX

A LA FABRICATION DES TUTAUX DE FONTES, DE PLUMB, DE TOLE ET DE BRASSÉE

PAR

HENRY DARCY

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES POSTES ET CHAUSSEES.

La bonne qualité des eaux dans une des sources qui alimentent la ville de Dijon a été mise en évidence par M. Darcy, qui a démontré que l'eau qui sort de la source est plus pure qu'il n'est nécessaire à la sécurité de celles qui servent à la pollution communale des humains et des animaux, et il recommande aux autorités de faire tout ce qu'il peut pour assurer la pureté de l'eau. Il a été décidé de faire ce qu'il peut pour assurer la pureté de l'eau dans les rues de Dijon, des rivières, des ruisseaux et autres cours d'eau, mais cela dans le cas où il n'y a pas de sources naturelles.

(De l'école, Ecole de l'Académie royale des sciences, 1782, p. 532.)

PARIS
VICTOR DALMONT, ÉDITEUR,
successeur de C. Dalmont et V. Dalmont,
LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAL DES PONTS ET CHAUSSEES ET DES MINES,
Quai des Augustins, 40.
1856

HISTOIRE DES FONTAINES PUBLIQUES DE DIJON.

La constance des rapports de la 7^e volume témoigne de la vérité de la loi déjà énoncée : on remarquera cependant qu'il existe les pressions sur et sous le filtre comprennent des limites très-étendues : sous le filtre, en effet, la pression a varié de $P+0,88$ à $P-3,60$, et sur le filtre de $P+12,88$ à $P+2,98$.

Ainsi, en appelant a l'épaisseur de la couche de sable, et sa superficie, P la pression atmosphérique, b la hauteur de l'eau sur cette couche, on aura $P+b$ pour la pression à laquelle sera soumise la base supérieure; soient, de plus, $P+\pm h_0$ la pression supportée par la surface inférieure, k un coefficient dépendant de la perméabilité de la couche, q le volume débité, on a

$$q = k \frac{\partial h}{\partial t} (h + a + b),$$

quand $h_0 = 0$, ou lorsque la pression sous le filtre est égale à la pression atmosphérique.

Il est facile de déterminer la loi de décroissance de la hauteur d'eau h sur le filtre; en effet, soit dt la quantité dont cette hauteur s'abaisse pendant un temps dt , sa vitesse d'abaissement sera $-\frac{dh}{dt}$; mais l'équation ci-dessus donne encore pour cette vitesse l'expression

$$\frac{q}{a} = v = \frac{k}{c} (h + a)$$

$$\text{On aura donc } -\frac{dh}{dt} = \frac{k}{c} (h + a); \text{ d'où } \frac{dh}{(h+a)} = -\frac{k}{c} dt,$$

$$\text{et } t(h+a) = C - \frac{k}{c} t.$$

Si la valeur h_0 correspond au temps t_0 , et h à un temps quelconque t , il viendra

$$t(h+a) = t(h_0+a) - \frac{k}{c} [t - t_0] \quad (1)$$

Si on remplace maintenant $h+a$ et h_0+a par $\frac{q^2}{k}$ et $\frac{q^2}{k}$, il viendra

$$tq = tq_0 - \frac{k}{c} (t - t_0) \quad (2)$$

et les deux équations (1) et (2) donnent, soit la loi d'abaissement de la hauteur sur le filtre, soit la loi de variation des volumes débités à partir du temps t_0 .

Si k et c étaient inconnus, on voit qu'il faudrait deux expériences préliminaires pour faire disparaître de la seconde le rapport $\frac{k}{c}$.

Рис. 2.

Это решение было впервые получено А.Дарси в 1856 году. На рис. 2 приведены титульный лист книги Дарси [25] и страница, на которой содержится решение задачи (формула 1).

Из полученного решения следует, что величины $\ln(h(0)/h(t))$ и t связаны линейной зависимостью, в коэффициент пропорциональности которой входит коэффициент фильтрации C , что и позволяет легко определять значение C по экспериментальным данным.

В качестве пористой среды в лабораторной установке используется промытый песок, для которого, по данным экспериментов, коэффици-

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

ент проницаемости приблизительно равен 5 мкм^2 (5 Д), а коэффициент фильтрации (для воды) составляет $0,005 \text{ см}/\text{с}$.

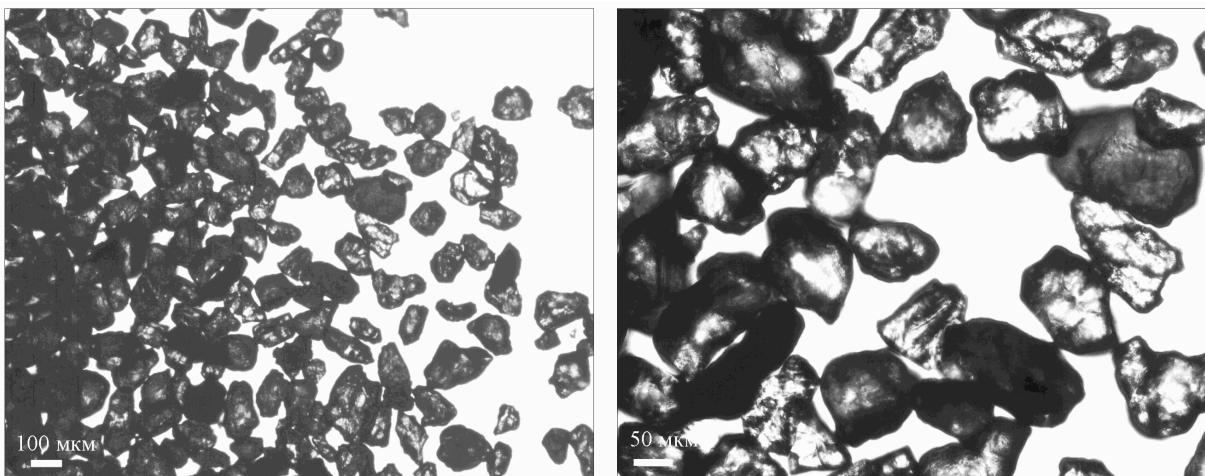


Рис. 3.

Это значение проницаемости согласуется с результатами исследования строения пористой среды с помощью оптического микроскопа. На рис. 3 показаны фотографии структуры песка, использующегося в установке¹⁾. Видно, что форма частиц близка к сферической со средним размером зерен d около $50\text{--}70 \text{ мкм}$. Используя известную формулу [24] для проницаемости среды из наиболее плотно упакованных сферических частиц одинакового диаметра

$$k = 0,002 d^2,$$

для рассматриваемого песка получим значения k в диапазоне $5\text{--}10 \text{ дарси}$.

¹⁾ Фотографии выполнены к.б.н. Н.В.Кошелевой.

3 Изучение погрешностей при экспериментальном определении проницаемости в рамках однофазных моделей

3.1 Оценка возможности отклонения закона фильтрации от закона Дарси

Приступая к обсуждению причин возможных систематических ошибок в определении проницаемости, обсудим прежде всего самую возможность применения закона Дарси к описанию фильтрационной установки практикума. Как известно, границы диапазона скоростей фильтрации, в котором применим закон Дарси, связаны, во-первых, с отклонениями от него при больших скоростях, когда нужно учитывать инерцию движения жидкости во внутриворовом пространстве, и, во-вторых, с необходимостью учета неньютоновского характера жидкости в области малых скоростей фильтрации.

Типичные значения скорости фильтрации u в лабораторном эксперименте лежат в диапазоне $(0,01 \dots 0,03)$ см/с, что для типичного значения пористости песка $m = 0,35$ дает реальные средние скорости движения жидкости v в диапазоне $(0,03 \dots 0,1)$ см/с. В этом случае, принимая в качестве характерного диаметра порового канала величину $l \sim 10$ мкм, в самом неблагоприятном случае получим для числа Рейнольдса оценку

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\mu} \sim 10^{-2} \ll 1,$$

говорящую о том, что характерные значения u лежат существенно ниже верхней скоростной границы применимости закона Дарси.

Возможность применения закона Дарси в области малых скоростей определяется оценкой

$$\frac{\mu v}{\tau_0 R} \gg 1,$$

где τ_0 — предельное касательное напряжение, при котором начинается течение вязкопластической жидкости, с помощью которой моделируется реальное вещество, R — радиус поры. Выбирая в качестве нижней границы средней скорости $v \sim 3 \cdot 10^{-2}$ см/с и радиус $R \sim 5$ мкм, получим, что в условиях применимости закона Дарси значения τ_0 должны удовлетворять оценке

$$\tau_0 \ll \frac{\mu u}{R} \sim 10^{-1} \text{ Па.}$$

Известно, что для течений воды по твердой поверхности значения τ_0 лежат в диапазоне $(10^{-4} \dots 10^{-3})$ Па [7], а для течений чистой жидкости эта

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

величина имеет порядок 10^{-6} Па [1], поэтому работа установки происходит выше нижней скоростной границы применимости закона Дарси.

Другие физико-химические эффекты, проявляющиеся при течениях на микроуровне, например проскальзывание на границе жидкости и твердой стенки, которое существенно при течениях в капиллярах с размерами менее 1 мкм [7], или повышение вязкости тонкого ($\sim 150 \text{ \AA}$) пристеночного слоя, также не влияют на применимость закона Дарси в наших условиях.

3.2 Зависимость вязкости жидкости от температуры

Вязкость капельных жидкостей сильно падает с ростом температуры, поэтому неучет этой зависимости может быть одним из наиболее существенных источников погрешностей при определении проницаемости (порядка десятков процентов).

Таблица 1

| $t, ^\circ\text{C}$ | $\mu, \text{ cП}$ | $t, ^\circ\text{C}$ | $\mu, \text{ cП}$ |
|---------------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| 0 | 1,79 | 18 | 1,06 |
| 1 | 1,73 | 19 | 1,03 |
| 2 | 1,67 | 20 | 1,00 |
| 3 | 1,62 | 21 | 0,98 |
| 4 | 1,57 | 22 | 0,96 |
| 5 | 1,52 | 23 | 0,94 |
| 6 | 1,48 | 24 | 0,91 |
| 7 | 1,43 | 25 | 0,89 |
| 8 | 1,39 | 26 | 0,87 |
| 9 | 1,35 | 27 | 0,85 |
| 10 | 1,31 | 28 | 0,84 |
| 11 | 1,27 | 29 | 0,82 |
| 12 | 1,24 | 30 | 0,80 |
| 13 | 1,21 | 31 | 0,78 |
| 14 | 1,17 | 32 | 0,77 |
| 15 | 1,14 | 33 | 0,75 |
| 16 | 1,11 | 34 | 0,73 |
| 17 | 1,08 | 35 | 0,72 |

Зависимость коэффициента динамической вязкости воды от темпера-

туры, некоторые данные о которой приводятся в справочниках [8, 13], была аппроксимирована соотношением

$$\mu = \frac{1900}{(t + 51,8)^{1,765}}, \quad (1)$$

где t — температура воды (в градусах Цельсия), μ — вязкость в сантиметрах, причем в интервале температур $t = (0 \dots 40)^\circ\text{C}$ максимальное абсолютное отклонение значения, определенного по этой формуле, от табличного не превосходит 0,007 сп. Определенные по (1) значения динамической вязкости приведены в табл. 1.

3.3 Влияние сопротивления решетки, поддерживающей пористый слой

При изучении фильтрации в сыпучих материалах, например в песке, для удержания пористого слоя в установке используется перфорированная металлическая пластина, которая должна выдерживать значительный вес пористого образца и поэтому имеет конечный коэффициент загромождения потока (отношение площади перфораций к габаритной площади пластины). Для устранения возможных погрешностей в определении коэффициента проницаемости между пластиной и основным слоем пористого материала помещается промежуточный слой из высокопроницаемого материала, предназначенный для «сглаживания» влияния перфорированной пластины.

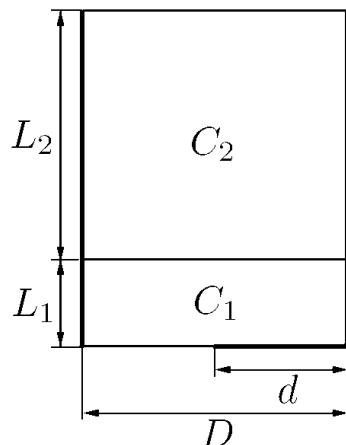


Рис. 4.

Приближенную оценку влияния пластины и промежуточного слоя можно получить, рассматривая плоскую стационарную задачу о фильтрации под действием вертикального перепада напора в двухслойной пористой среде (с коэффициентами фильтрации C_1 и C_2) с частично загроможденным выходным сечением (рис. 4). Решение этой задачи сводится к сов-

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

местному решению уравнений Лапласа для напора в верхнем и нижнем слоях со стандартными граничными условиями: во входном и выходном сечениях задаются постоянные значения напора, на непроницаемых стенах ставится условие непротекания, на границе слоев ставятся условия непрерывности давления и потока массы:

$$[H] = 0, \quad \left[C \frac{\partial H}{\partial n} \right] = 0.$$

Для численного решения краевой задачи использовалась конечно-разностная схема типа «крест» второго порядка аппроксимации на прямоугольной расчетной сетке с различными пространственными шагами в верхнем и нижнем слоях.

При проверке правильности расчетного определения характеристик проводилось сравнение с точным решением этой задачи в случае одинаковых коэффициентов фильтрации ($C_1 = C_2 = C$, геометрические характеристики показаны на плоскости xy на рис. 5). Точное решение строится отображением области течения на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ на прямоугольную область на плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$, где $\varphi = -C(p/(\rho g) + y)$ — потенциал скорости фильтрации, ψ — функция тока (на рисунке Q — расход жидкости, H — перепад напоров; выше символом H обозначался напор), и задается в неявном виде отображениями, использующими вспомогательные комплексные переменные t и ζ :

$$z = F_1(t) = \alpha \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \zeta = F_2(t) = \frac{at+b}{t+c},$$

$$w = F_3(\zeta) = \beta \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\gamma^2\zeta^2)}},$$

где $\alpha, \beta, a, b, c, k, \gamma$ — постоянные.

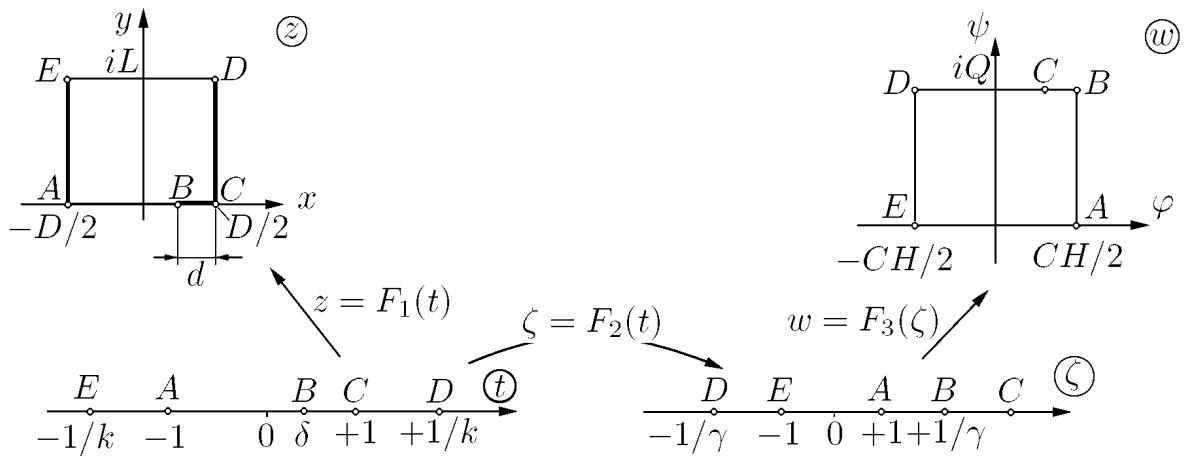


Рис. 5.

При заданных значениях L, D, d, CH значения модуля эллиптического интеграла 1-го рода [15] k и масштабного множителя α определяются из уравнений

$$\frac{D}{2} = \alpha \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad L = \alpha \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}},$$

и затем из уравнения

$$\frac{D}{2} - d = \alpha \int_0^\delta \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

находится координата δ точки B на плоскости t . Далее из соответствия точек при отображении $\zeta = F_2(t)$ элементарно находятся коэффициенты дробно-линейного отображения a, b, c и величина модуля $\gamma \in [0; 1]$, после чего множитель β и интересующий нас расход Q определяются из системы

$$\frac{CH}{2} = \beta \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\gamma^2\zeta^2)}}, \quad Q = \beta \int_1^{1/\gamma} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-\gamma^2\zeta^2)}}.$$

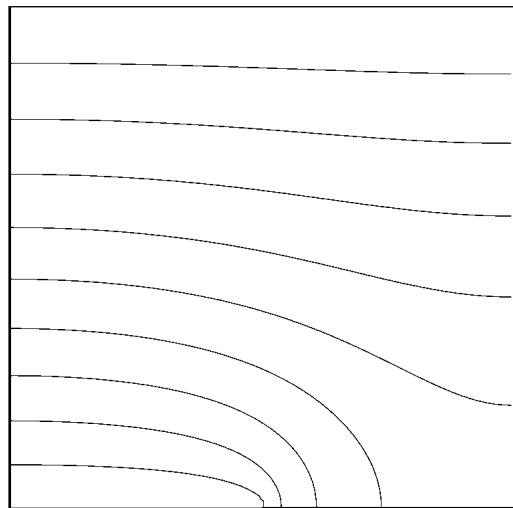


Рис. 6.

Пример картины линий равного потенциала, полученной в тестовом расчете на сетке 60×60 при $L/D = 1$, $d/D = 0,5$, показан на рис. 6. На рис. 7 приведено сравнение точной зависимости безразмерного расхода (сплошные линии) с численным решением, полученным на сетке 20×20 (точки).

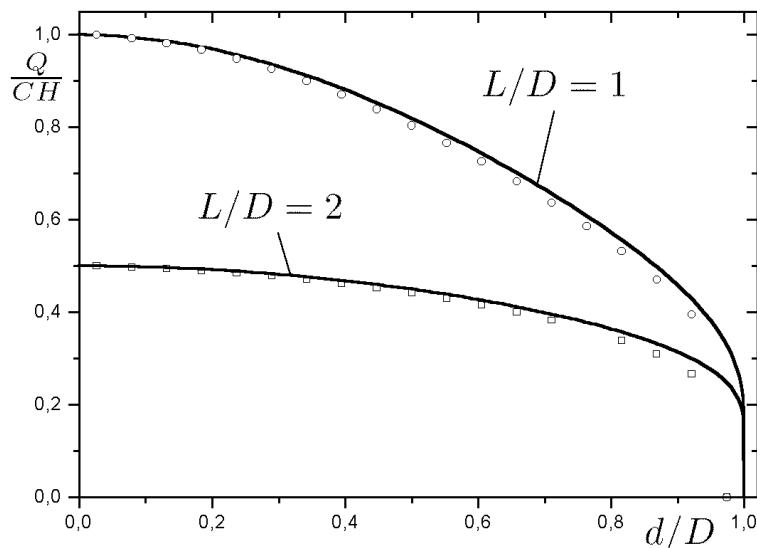


Рис. 7.

Влияние решетки и дополнительного слоя удобно характеризовать отношением кажущегося коэффициента фильтрации $C_{\text{каж}}$ (т.е. того коэффициента, который получился бы при обработке лабораторных данных без учета экспериментатором сетки, а также толщины и проницаемости промежуточного слоя) к реальному коэффициенту фильтрации C_2 основного слоя. Расчеты показали, что даже при существенном загромождении выходного сечения введение тонкого промежуточного высокопроницаемого слоя позволяет практически полностью исключить влияние перфори-

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

рованной пластины. Например, при $L_1/L_2 = 0,1$, $L_2/D = 1$, $d/D = 0,5$ при $C_1/C_2 = 1$ величина $C_{\text{каж}}/C_2$ составляет 0,75, а при увеличении C_1/C_2 до значений 10 и 100 она повышается соответственно до 0,94 и 0,994.

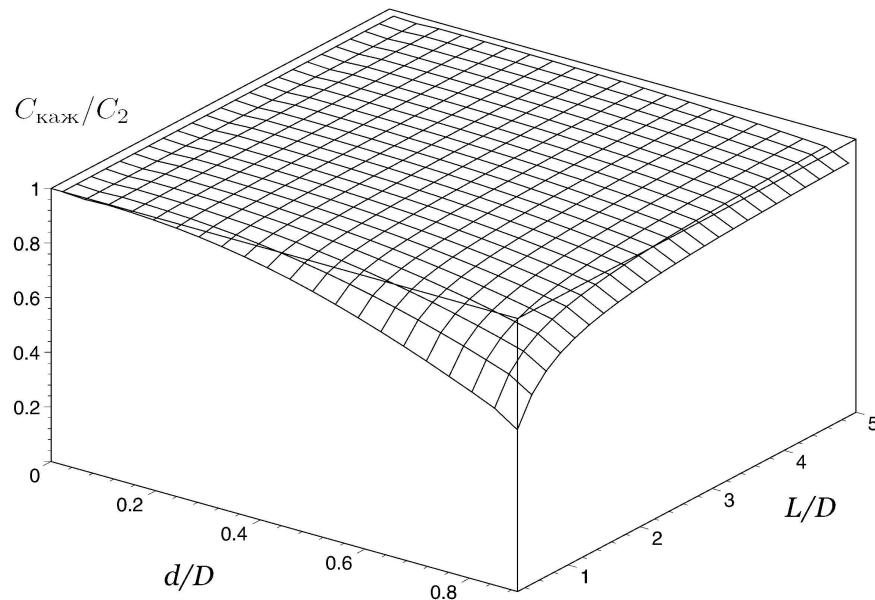


Рис. 8.

Для иллюстрации этого вывода на рис. 8 показана зависимость $C_{\text{каж}}/C_2$ от геометрических параметров установки при $L_1/L_2 = 0,01$, $L_2/D = 1$, $C_1/C_2 = 100$. Видно, что по сравнению со случаем однородного пластина, для которого аналогичный график приведен на рис. 9, значительное ослабление влияния решетки происходит даже для сравнительно тонкой высокопроницаемой прослойки.

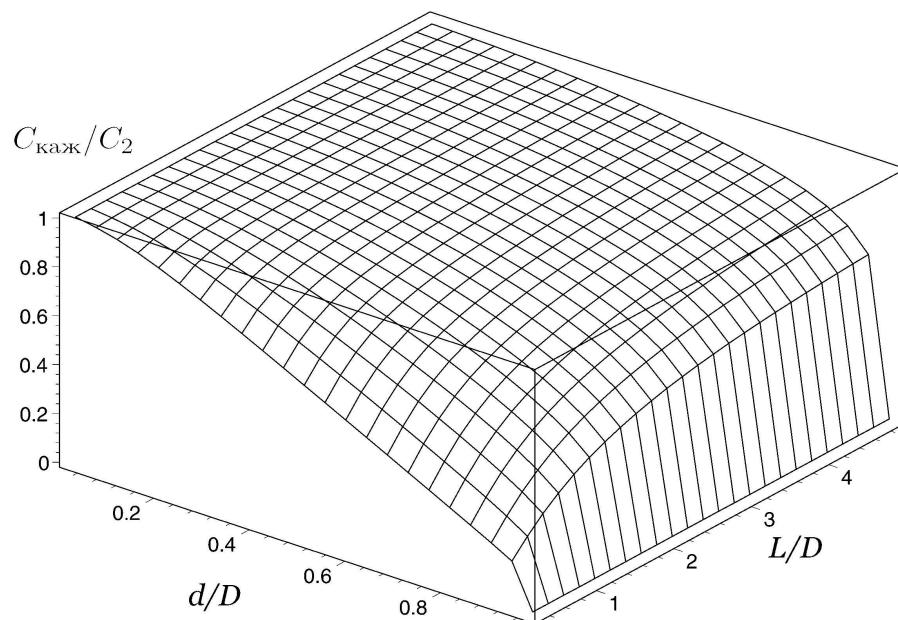


Рис. 9.

3.4 Влияние отклонения оси установки от вертикали. Учет образования свободной поверхности

Рассмотренные выше решения фильтрационных задач были получены в предположении о том, что ось установки расположена строго вертикально, чего, конечно, не может быть на практике. Замечательной особенностью этой задачи является то обстоятельство, что при любом, сколь угодно малом отклонении оси установки от вертикали качественная картина течения (в рамках предположения о полном насыщении смоченной части пористой среды) существенно меняется: внутри пористой среды возникает свободная поверхность (поверхность депрессии) и, более того, в выходном сечении пласта появляется точка, в окрестности которой скорость фильтрации стремится к бесконечности. По этой причине в этом разделе мы обсудим влияние наклона оси установки на фильтрационный расход в рамках модели напорно-безнапорной фильтрации.

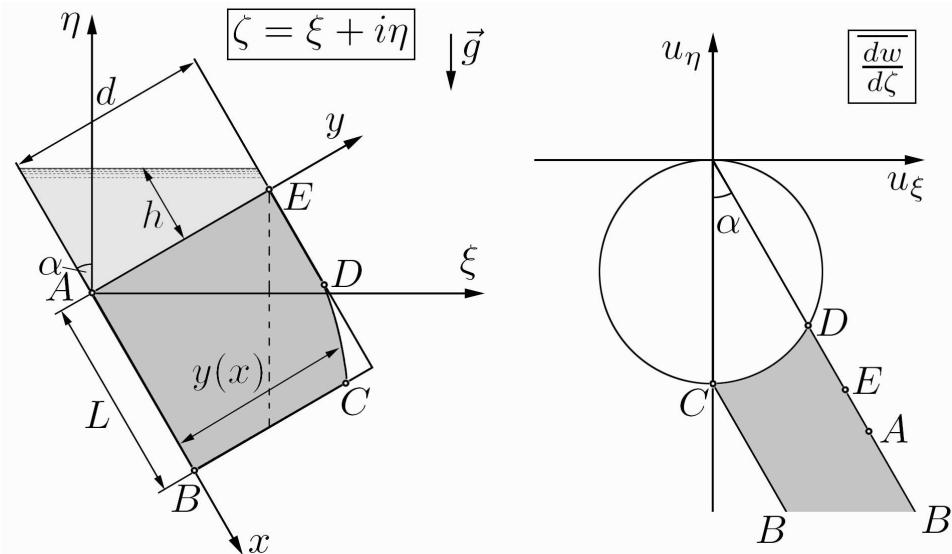


Рис. 10.

Картина течения в физической плоскости $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ и на плоскости комплексно-сопряженной скорости $\overline{dw/d\zeta}$ (на плоскости годографа) показана на рис. 10. В рамках принятой схематизации свободная поверхность образуется при любых, даже очень больших средних высотах водяного столба h , а при $\alpha = 0$ область течения на плоскости годографа скачкообразно превращается в точку, соответствующую однородному вертикальному потоку.

С использованием подхода, предложенного И.А.Чарным [22] для задач безнапорной фильтрации, несложно получить явное выражение для зависимости расхода Q от (заранее неизвестной) смоченной площади пласта S (т.е. от площади криволинейного многоугольника $ABCDE$ на плоскости ζ). В самом деле, вводя зависящий от продольной координаты x

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

интеграл от давления

$$P(x) = \int_0^{y(x)} p(x, y) dy,$$

где $y = y(x)$ — функция, задающая форму свободной поверхности и тождественно равная d для напорного участка, и полагая атмосферное давление равным нулю, получим выражение для производной

$$\frac{dP(x)}{dx} = p(x, y(x)) \cdot y'(x) + \int_0^{y(x)} \frac{\partial p}{\partial x} dy,$$

в котором первое слагаемое обращается в нуль как на напорном участке, где $y'(x) = 0$, так и на безнапорном, где $p(x, y(x)) = 0$. Выражая производную от давления из проекции закона Дарси

$$u_x = -C \left(\frac{p'_x}{\rho g} - \cos \alpha \right),$$

получим дифференциальное уравнение

$$P'(x) = \rho g \cos \alpha \int_0^{y(x)} dy - \frac{\rho g}{C} \int_0^{y(x)} u_x dy = \rho g y(x) \cos \alpha - \frac{\rho g Q}{C},$$

интегрирование которого дает

$$P(L) - P(0) = \rho g S \cos \alpha - \frac{\rho g Q L}{C}.$$

Значения функции P в точках $x = 0$ и $x = L$ явно вычисляются с использованием граничных условий:

$$P(0) = \int_0^d \rho g (h - (y - d/2) \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha dy = \rho g h d \cos \alpha, \quad P(L) = 0,$$

что окончательно дает выражение для расхода

$$Q = \frac{C}{L} (S + h d) \cos \alpha,$$

совпадающее при $\alpha = 0$ с известным соотношением

$$Q = C d \left(1 + \frac{h}{L} \right).$$

Смоченная площадь S не превосходит всей площади пористого слоя Ld , а с другой стороны, не меньше площади левой части прямоугольника, которая отсекается вертикальной прямой, проходящей через точку E (на рис. 10 эта прямая показана пунктирной линией), поэтому для малых углов наклона α ($\operatorname{tg} \alpha < d/L$) можно дать простую априорную двухстороннюю оценку расхода:

$$\left(Cd \left(1 + \frac{h}{L} \right) - CL \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \cos \alpha \leq Q \leq Cd \left(1 + \frac{h}{L} \right) \cos \alpha. \quad (2)$$

Например, при $\alpha = 3^\circ$ в случае $h = L = d$ при использовании обычной формулы без учета наклона относительная ошибка в определении расхода заведомо не превосходит 3%.

Для изучения влияния относительно больших углов наклона на расход были выполнены расчеты формы свободной поверхности и расходов с помощью варианта метода граничных элементов (МГЭ), описанного в статье [10]¹⁾.

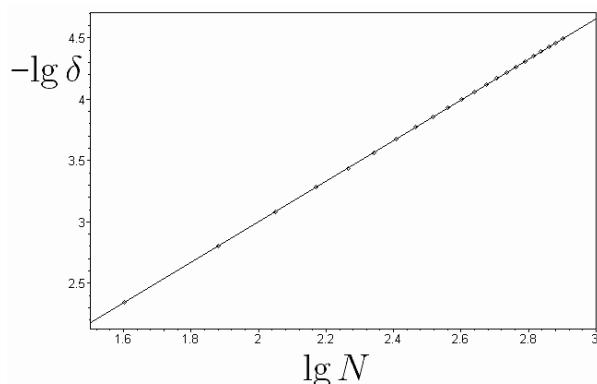


Рис. 11.

В случае фильтрации в областях с заданной геометрией точность расчетов проверялась сравнением вычисленного расхода с точными решениями. Тестовые расчеты показали, что относительная ошибка δ в определении фильтрационного расхода зависит от числа N отрезков разбиения границы по степенному закону и быстро падает с ростом N . Это иллюстрирует рис. 11, на котором точками указаны данные для различных расчетов задачи о течении через прямоугольную область, а сплошная кривая соответствует аппроксимации $\delta \sim (1/N)^{1.65}$.

¹⁾ Подробное описание методики расчета приведено в дипломной работе Е.И.Рощина, защищенной на кафедре гидромеханики механико-математического факультета МГУ в 2010 году.

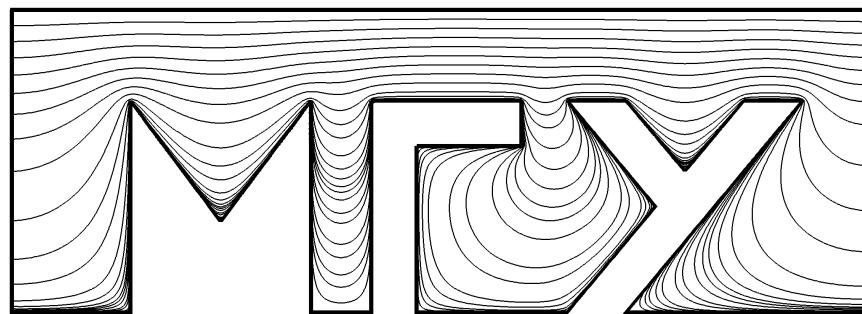


Рис. 12.

Численная реализация МГЭ позволяет эффективно определять течения в областях с достаточно сложной геометрией, что демонстрируется на рис. 12, где показаны линии тока для фильтрационного течения в пористом канале с перегородками сложной формы.

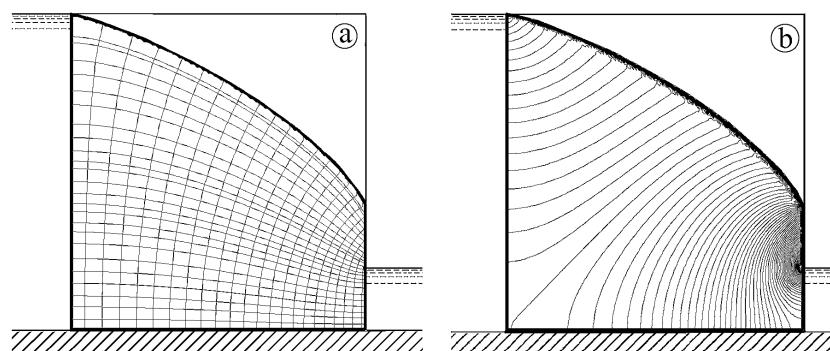


Рис. 13.

В случае течений с неизвестной свободной границей точность расчетов проверялась путем сравнения с известным решением задачи о фильтрации через прямоугольную перемычку¹). Тестирование, проводившееся путем сравнения расчетного расхода через плотину с точным аналитическим выражением, а также сравнением длины промежутка высачивания с данными графиков, приведенных в [17], показало высокую точность метода. В качестве примера расчета на рис. 13 показаны линии тока и линии равного потенциала (a) и изолинии модуля скорости фильтрации (изотахи) (b) для фильтрации через плотину квадратного поперечного сечения, когда высота жидкости в нижнем бьефе составляет 0,2 высоты плотины. В окрестности точки касания промежутка высачивания и нижнего бьефа скорость фильтрации стремится к бесконечности, поэтому около этой точки изотахи сгущаются.

¹⁾ С помощью методов комплексного анализа решение было получено Б.Б.Девисоном [6] в 1932 г. и Гамелем в 1934 г. (результаты последнего излагаются в монографии [18]); другим способом решение было найдено П.Я.Полубариновой-Кочиной [17].

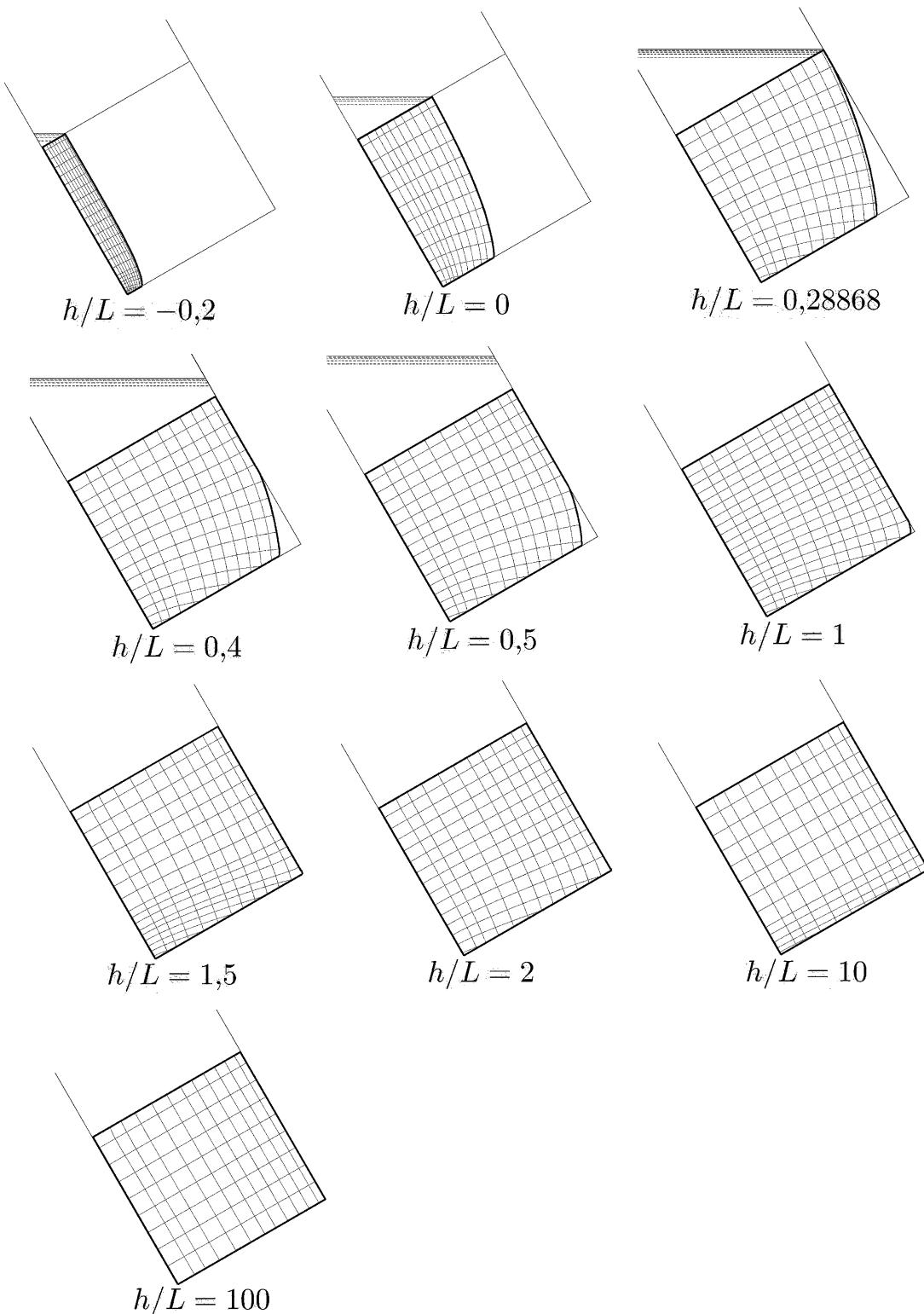


Рис. 14.

Расчеты фильтрации в наклоненной установке показали, что уже при значениях h/L порядка единицы даже при значительных углах наклона оси установки площадь области над поверхностью депрессии мала, что означает, что с хорошей точностью можно пользоваться верхней оценкой

из формулы (2):

$$Q \approx Cd \left(1 + \frac{h}{L} \right) \cos \alpha, \quad (3)$$

т.е. фактически расчетом без учета образования свободной поверхности. Например, при $\alpha = 30^\circ$, $d/L = 1$ даже при минимальном значении уровня жидкости, при котором вся верхняя граница пласта покрыта водой ($h/L = 0,289$), расчет по формуле (3) дает относительную ошибку около 6%, а при дальнейшем повышении уровня жидкости относительная ошибка при использовании (3) быстро падает (для значений h/L 0,4, 0,5 и 1 погрешность составляет соответственно 2, 1 и 0,04 процента). Динамика изменения картины линий тока и линий равного потенциала при увеличении высоты слоя жидкости показана для этого случая на рис. 14.

В заключение этого раздела отметим, что при описании работы наклонной фильтрационной установки в рамках моделей двухфазной фильтрации принципиальных отличий в выводах не должно наблюдаться, т.к. для фильтрационных расходов в задачах со свободной поверхностью эти модели дают близкие результаты [12].

4 Исследование полноты пропитки пористой среды при подготовке к эксперименту

4.1 Модель двухфазной фильтрации

Во всех моделях, рассматривавшихся в предыдущих разделах, предполагалось, что при фильтрации жидкость (в тех областях, где она присутствовала) целиком насыщала пористый скелет, так что фильтрация описывалась с помощью классического закона Дарси. Однако при практическом проведении эксперимента на полное заполнение пор жидкостью требуется некоторое время, и поэтому при недостаточном насыщении пористой среды установка может работать в режиме двухфазной фильтрации, что может приводить к ошибке в определении коэффициента проницаемости.

Для оценки влияния неполноты первоначальной пропитки была рассмотрена модель совместного движения воды и воздуха во внутриворовом пространстве в процессе подготовки установки к эксплуатации. В этой модели вводятся объемные доли фаз во внутриворовом пространстве, которые являются функциями координат и времени: насыщенность более смачивающей фазой (водой) $s_1 = s$ (водонасыщенность) и насыщенность менее смачивающей фазой (газом) $s_2 = 1 - s^1$. Эти величины, как всегда при континуальном описании, имеют смысл для физически бесконечно малых объемов, размеры которых велики по сравнению с размерами пор и отдельных включений жидкости и газа. Кроме этого вводятся зависящие от координат и времени скорости фильтрации фаз \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 , определяемые аналогично однофазному случаю, истинные плотности фаз ρ_1 и ρ_2 , а также давления в фазах p_1 и p_2 . В рассматриваемых нами задачах перепады давлений относительно невелики, поэтому в дальнейшем плотности газа и жидкости полагаются постоянными. Система уравнений для перечисленных величин [2–4, 11, 19, 21] состоит из двух уравнений неразрывности для фаз

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 m s) + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 m(1 - s)) + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) = 0, \quad (4)$$

двух обобщенных законов Дарси в случае движения в поле тяжести

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{k f_1(s)}{\mu_1} (\operatorname{grad} p_1 - \rho_1 \mathbf{g}), \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{k f_2(s)}{\mu_2} (\operatorname{grad} p_2 - \rho_2 \mathbf{g}) \quad (5)$$

¹) Вместо индексов «1» и «2» для обозначения фаз также будут применяться индексы «l» (от англ. «liquid») и «g» (от англ. «gas»).

и эмпирического соотношения для разности давлений в фазах, связанной с действием капиллярных сил на искривленных границах между фазами на микроуровне:

$$p_2 - p_1 = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J(s), \quad (6)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе воды и воздуха, θ — краевой угол (угол смачивания) в точке контакта линии границы фаз со стенкой поры, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $J(s)$ — известные из экспериментов функции насыщенности.

Вид функций $f_1(s)$ и $f_g(s)$, которые называются относительными fazовыми проницаемостями, показан на рис. 15, заимствованном из [19].

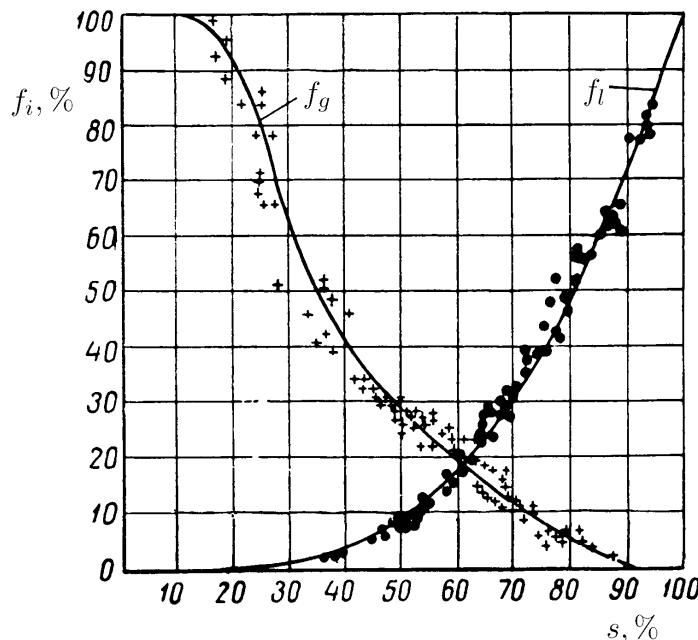


Рис. 15.

При численных расчетах для описания этих функций использовались следующие аппроксимации [21]:

$$f_1(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < 0,2, \\ \left(\frac{s - 0,2}{0,8}\right)^{3,5} & \text{при } s \geq 0,2, \end{cases}$$

$$f_2(s) = \begin{cases} \left(\frac{0,9 - s}{0,9}\right)^{3,5} (3s + 1) & \text{при } s < 0,9, \\ 0 & \text{при } s \geq 0,9. \end{cases}$$

Экспериментальная зависимость $J(s)$ [11], обычно называемая j -функцией Леверетта (Leverett) в задачах нефтедобычи [19] и кривой водоудержива-

ния (water retention curve) в гидрогеологических приложениях [23], для случая несцементированных песков показана на рис. 16 а.

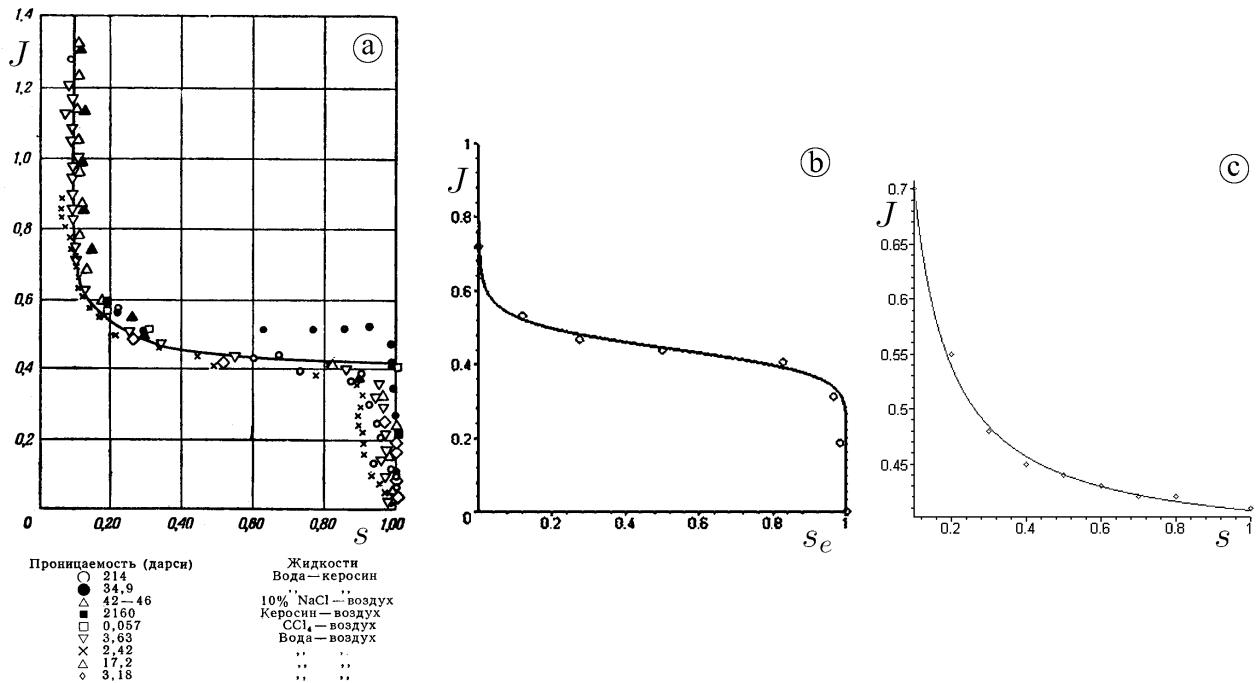


Рис. 16.

Для аппроксимации кривой $J(s)$ как правило применяются предложенные ван Генуختеном [26] зависимости вида

$$s_e = \left(\frac{1}{1 + (\alpha J)^N} \right)^M, \quad s_e = \frac{s - s_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}}, \quad M = 1 - \frac{1}{N}, \quad (7)$$

где s_{\min} , s_{\max} — наименьшая и наибольшая водонасыщенности, α , N — параметры аппроксимации. Явная зависимость $J(s)$ для аппроксимации (7) имеет вид

$$J(s) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{s_e^{1/M} - 1} \right)^{1/N}.$$

Для данных, приведенных на рис. 16 а, были получены значения параметров $1/\alpha = 0,45$, $N = 12$, $s_{\min} = 0,1$, $s_{\max} = 1$; график этой аппроксимации сопоставляется с экспериментальными данными на рис. 16 б. Аппроксимация ван Генухтена достаточно громоздка, поэтому для интервала $0,2 \leq s \leq 0,9$ была получена более простая аппроксимация $J(s) = 0,375 + 0,0327/s$ (рис. 16 с), использовавшаяся в расчетах.

4.2 Оценка возможности описания пропитки в рамках одномерных уравнений

Процессы вытеснения одной жидкости другой внутри пористой среды, как известно, могут сопровождаться потерей устойчивости плоского фронта вытеснения, в результате чего вытесняющая жидкость начинает проникать в вытесняемую в виде так называемых «вязких пальцев». В этом случае процесс вытеснения носит существенно неодномерный характер и для его описания необходимо решать пространственную задачу [9].

Для приближения поршневого вытеснения в случае вытеснения воздуха водой, движущейся сверху вниз в поле силы тяжести, известный критерий устойчивости, полученный И.А.Чарным [21], принимает вид

$$\left(\frac{\mu_g}{\mu_l} - 1 \right) u_g + \frac{k}{\mu_l} (\rho_l - \rho_g) g < 0$$

в предположении о том, что проницаемости для обеих фаз совпадают, а ось координат направлена вниз (в направлении силы тяжести). Для типичных параметров фильтрационной установки ($\mu_l = 10^{-2}$ г/(см · с), $\mu_g/\mu_l = 0,02$, $k = 5 \cdot 10^{-8}$ см², $g = 10^3$ см/с², $\rho_l - \rho_g = 1$ г/см³) этот критерий дает для расхода в случае устойчивого вытеснения оценку

$$u = u_g > 5 \cdot 10^{-3} \text{ см/с.}$$

Расходы, наблюдаемые в экспериментах на установке физико-механического практикума, оказываются, как правило, выше критического значения, и поэтому процесс вытеснения можно рассматривать в рамках одномерных уравнений.

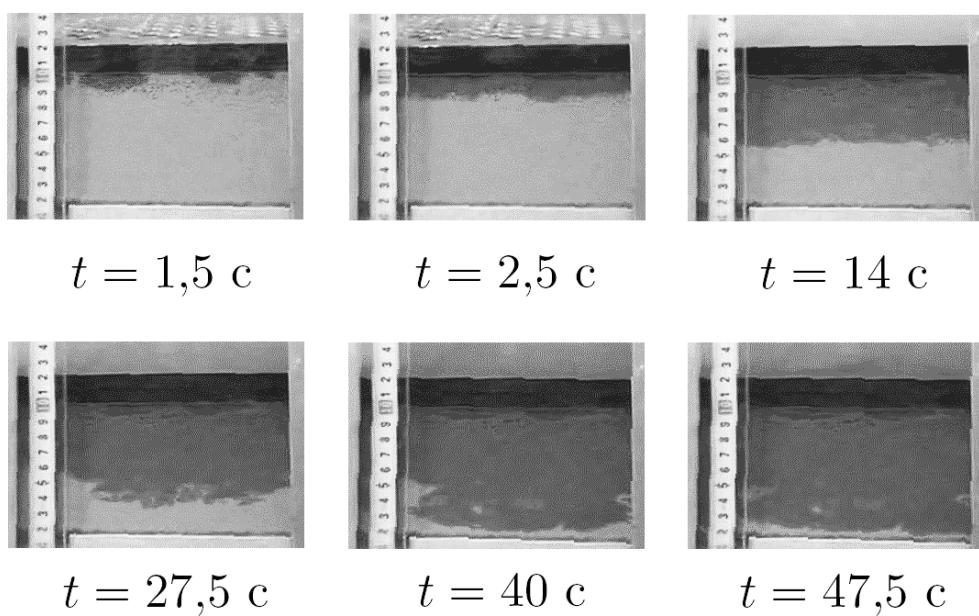


Рис. 17.

Устойчивость фронта вытеснения подтверждается также и прямым визуальным наблюдением процесса пропитки сухой пористой среды. На рис. 17 приведены фотографии пропитывающейся пористой среды для нескольких моментов времени (масштабная линейка проградуирована в сантиметрах), из которых видно, что на протяжении большей части процесса граница сухой и смоченной частей практически прямолинейна, а имевшиеся на начальной стадии неоднородности фронта в дальнейшем выравниваются. На поздних стадиях пропитки, когда скорость вытеснения становится достаточно малой, граница фронта становится более извилистой, но за счет действия капиллярных сил граница постепенно выравнивается. Это согласуется с известным выводом о том, что при крупномасштабном асимптотическом описании учет капиллярных сил способствует стабилизации фронта [2].

4.3 Оценка необходимости учета капиллярной разности давлений

При описании крупномасштабных явлений система уравнений (4) — (6) обычно упрощается за счет предположения о равенстве давлений в фазах (модель Бакли — Леверетта). В рассматриваемой задаче, вообще говоря, это упрощение неприменимо, т.к. слагаемые, описывающие капиллярные эффекты, могут быть сравнимы с остальными членами уравнений. Этот факт виден, например, из рассмотрения задачи о структуре скачка насыщенности при вытеснении воздуха водой. Предполагая течение одномерным (с плоскими волнами) и направив ось координат вниз, из системы (4) — (6) можно получить одно параболическое уравнение для насыщенности (уравнение Рапопорта — Лиса [4])

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} A(s, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right), \quad (8)$$

где

$$A(s, t) = \frac{q(t)}{m} \cdot \frac{f_1(s)/\mu_1}{f_1(s)/\mu_1 + f_2(s)/\mu_2} + \frac{k(\rho_1 - \rho_2)g}{m} \cdot \frac{f_1(s)f_2(s)/(\mu_1\mu_2)}{f_1(s)/\mu_1 + f_2(s)/\mu_2},$$

$$B(s) = -\frac{\beta k}{m} \cdot \frac{f_1(s)f_2(s)/(\mu_1\mu_2)}{f_1(s)/\mu_1 + f_2(s)/\mu_2} \cdot \frac{d J(s)}{ds} \geqslant 0,$$

$$\beta = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}}, \quad q(t) = u_1(x, t) + u_2(x, t).$$

Рассматривая решение в виде бегущей волны, в котором насыщенность зависит от переменной $\xi = x - Vt$, $V = \text{const}$, несложно получить

обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для изменения насыщенности внутри скачка. Зависимости $s(\xi)$, полученные численным интегрированием, для параметров экспериментальной установки в случае расхода $q = 10^{-2}$ см/с, показаны на рис. 18 (кривая 1 — с учетом тяжести, кривая 2 — для вытеснения в отсутствие тяжести). Видно, что, во-первых, учет тяжести не оказывает существенного влияния на структуру фронта, и, во-вторых, фронт имеет ширину около сантиметра, что всего лишь на один порядок меньше толщины пласта.

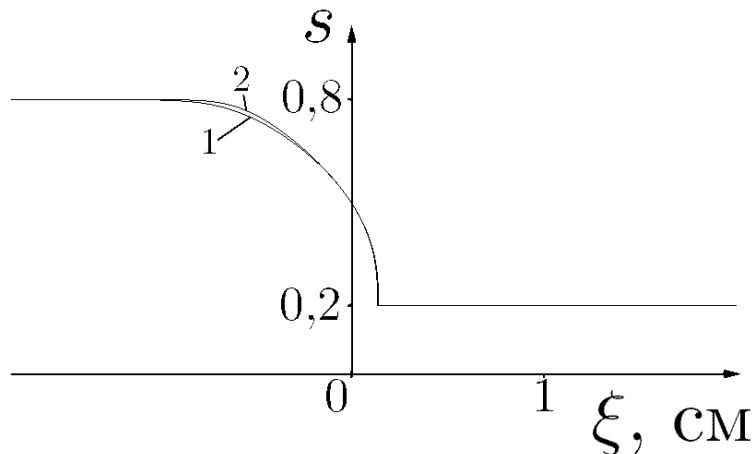


Рис. 18.

Кроме этого, капиллярные эффекты необходимо учитывать при постановке граничных условий на выходе из пласта. Из экспериментов известно, что при пропитке вытесняющая жидкость не вытекает из пласта до тех пор, пока насыщенность в выходном сечении не достигнет наибольшего допустимого значения, а после прорыва остается равной этому максимальному значению (т.н. «концевой эффект» [11]). Если же в уравнении (8) отбросить старшее слагаемое, то уравнение для насыщенности станет гиперболическим и на выходе никакого дополнительного условия не требуется (в противном случае нарушилось бы условие эволюционности [14]).

4.4 Метод численного решения уравнения для насыщенности. Границные условия

Для численного решения уравнения (8) использовалась явная конечно-разностная схема первого порядка аппроксимации по временной переменной и второго порядка — по пространственной:

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} + \frac{A(s_{i+1}^n, t^n) - A(s_{i-1}^n, t^n)}{2h} =$$

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

$$= \frac{1}{h} \left(\frac{B(s_{i+1}^n) + B(s_i^n)}{2} \cdot \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{h} - \frac{B(s_i^n) + B(s_{i-1}^n)}{2} \cdot \frac{s_i^n - s_{i-1}^n}{h} \right),$$

где τ, h — шаги сетки по времени и пространству. Временной шаг интегрирования определяется из условия устойчивости $\tau \lesssim h^2$. Задача решается на отрезке $x \in [0; L]$ (система координат показана на рис. 19, определение величины $h(t)$ отличается от использовавшегося в разделе 2). В начальный момент задается распределение насыщенности в пласте.

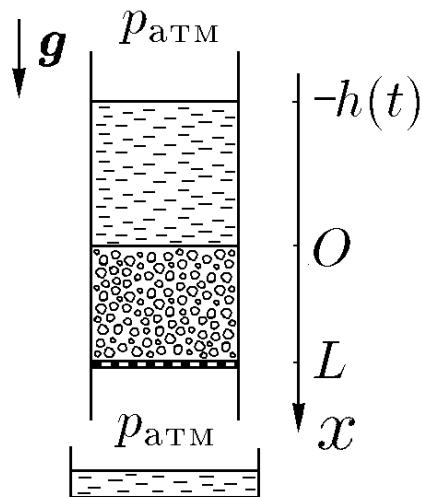


Рис. 19.

Перейдем теперь к обсуждению граничных условий. Скорости фильтрации фаз однозначно находятся по текущему распределению насыщенности $s(x, t)$ и текущему значению суммарного расхода $q(t)$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(q(t) f_1(s) + \frac{\beta k f_1(s) f_2(s) (J(s))'_x}{\mu_2} + \frac{k g f_1(s) f_2(s) (\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2} \right) \times \\ &\quad \times \left(f_1(s) + \frac{\mu_1}{\mu_2} f_2(s) \right)^{-1}, \\ u_2 &= \left(q(t) \frac{\mu_1}{\mu_2} f_2(s) - \frac{\beta k f_1(s) f_2(s) (J(s))'_x}{\mu_2} - \frac{k g f_1(s) f_2(s) (\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2} \right) \times \\ &\quad \times \left(f_1(s) + \frac{\mu_1}{\mu_2} f_2(s) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Во входном сечении ($x = 0$) пористая среда контактирует со свободной жидкостью и насыщенность все время равна максимально допустимому значению s^* . При этом воздух не выходит в находящуюся выше пласта жидкость, что подтверждается экспериментально, поэтому расход газа в этом сечении равен нулю, как это и следует из выражения для u_2 .

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

В выходном сечении ($x = L$) до момента прорыва расход жидкости u_1 равен нулю, что дает граничное условие, связывающее градиент насыщенности и самое значение насыщенности:

$$\frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x=L} = -\frac{1}{J'(s)} \left(\frac{\mu_2}{k\beta} \cdot \frac{q(t)}{f_2(s)} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\beta} \right) \Big|_{x=L}. \quad (9)$$

После прорыва воды в выходном сечении сохраняется максимальное допустимое значение насыщенности: $s(L, t) = s^*$.

Еще одно соотношение, позволяющее связать уровень жидкости над пористым слоем $h(t)$ и суммарный расход жидкости $q(t)$, получается из условий того, что во входном сечении давление в жидкой фазе определяется гидростатическим законом:

$$p_1(0, t) = p_{\text{атм}} + \rho_1 g h(t),$$

а в выходном сечении давление в газовой фазе, в пренебрежении гидростатической разностью давлений в окружающем воздухе, равно атмосферному:

$$p_2(L, t) = p_{\text{атм}}.$$

Интегрируя выражение для градиента давления в жидкой фазе

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \left(-\frac{q(t)}{k} + \left(\frac{f_1(s)\rho_1}{\mu_1} + \frac{f_2(s)\rho_2}{\mu_2} \right) g - \frac{\beta f_2(s)(J(s))'_x}{\mu_2} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

и учитывая соотношение (6), из указанных граничных условий можно получить выражение для расхода

$$q(t) = (\beta J(s(L, t)) + \rho_1 g h(t) + I_2(t)) k / I_1(t),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^L \frac{dx}{\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2}}, \\ I_2(t) &= \int_0^L \frac{\left(\frac{f_1(s)\rho_1}{\mu_1} + \frac{f_2(s)\rho_2}{\mu_2} \right) g - \frac{\beta f_2(s)(J(s))'_x}{\mu_2}}{\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2}} dx. \end{aligned}$$

Для численной реализации граничного условия (9) использовались значения насыщенности в дополнительной фиктивной ячейке, находящейся за пределами расчетной области [20]. Кроме перечисленных условий,

нужно добавлять условия на $h(t)$ и $q(t)$, специфические для конкретного способа подачи жидкости. Так, если с какого-то момента долив жидкости в установку прекращается, то эти величины связаны условием $\frac{dh}{dt} = -q(t) < 0$, а в случае поддержания уровня свободной жидкости на постоянной высоте таким условием будет $h(t) = \text{const}$.

В расчетах принимались, если не оговорено противное, следующие значения определяющих параметров: $L = 10$ см, $k = 6 \cdot 10^{-8}$ см², $\mu_1 = 10^{-2}$ г/(см · с), $\mu_2 = 1,82 \cdot 10^{-4}$ г/(см · с), $m = 0,35$, $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $g = 981$ см/с², $\sigma = 75$ дин/см, $\cos \theta = 1$, нижняя достижимая насыщенность $s_* = 0,2$, $s^* = 0,9$.

Для проведения тестирования численная схема была реализована для уравнения (8), в правую часть которого добавлялся алгебраический источниковый член, что позволяло получать точные решения «расширенной» краевой задачи путем подстановки известной функции $s(x, t)$ и нахождения требуемого вида источникового члена и соответствующих начальных и краевых условий [5]. Кроме того, проверялось совпадение численных решений и точных аналитических решений в случае полной насыщенности.

4.5 Результаты расчетов

Численные расчеты показали, что качественное поведение решений при фильтрации воды и воздуха совпадает с известным поведением решений для течений воды и нефти [11]: при пропитке слоя по нему проходит волна повышения насыщенности, после чего насыщенность на выходе из пласта повышается до максимальной и происходит прорыв, и далее насыщенность во всем пласте становится близкой к максимальной.

В качестве иллюстрации на рис. 20 показаны зависимости насыщенности при постоянном расходе $q = 0,02$ см/с для моментов времени 3,5, 18,6, 39,4, 60,5, 81,5, 100,0, 107,6, 109,5, 111,3, 112,1, 120,7, 151,8 и 164,9 с.

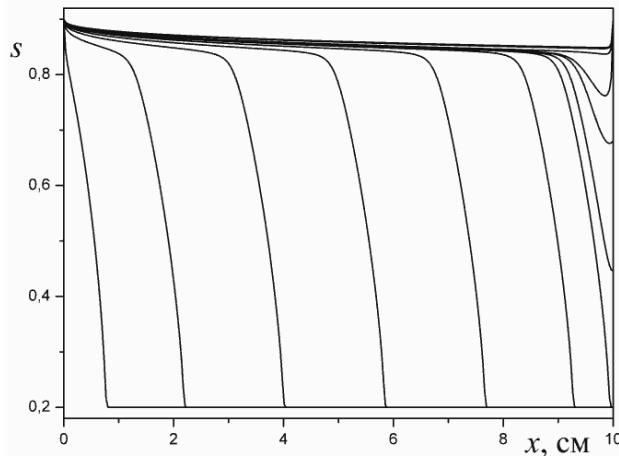


Рис. 20.

Прорыв воды происходит в момент $t = 112$ с, когда объем жидкости, закачанной в пласт, составлял около 0,65 порового объема. Это время качественно совпадает с экспериментальными измерениями, в которых при переменном расходе, уменьшавшемся от 0,04 до 0,013 см/с, прорыв происходил примерно через 2 минуты после начала пропитки.

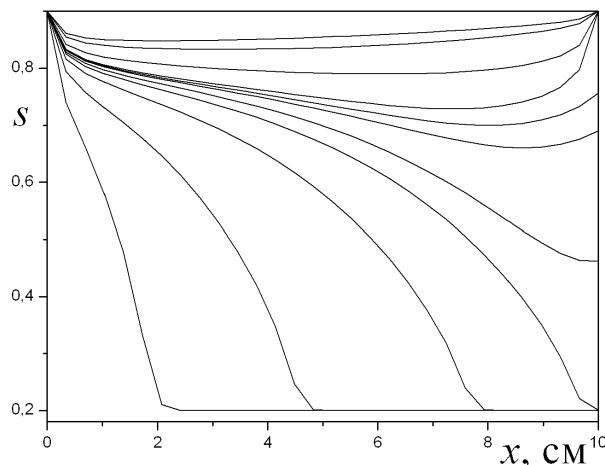


Рис. 21.

Для сравнения на рис. 21 показаны аналогичные зависимости при уменьшении расхода на один порядок по сравнению с предыдущим рисунком. Показаны распределения насыщенности для моментов времени 34, 126, 303, 444, 529, 620, 650, 685, 1000, 3000 и 5000 секунд. В этом случае прорыв воды происходит при $t = 688$ с (когда в пласт закачано 0,38 порового объема). Для двух последних кривых в пласт закачано 1,7 и 2,9 порового объема. Видно, что качественное поведение решения не меняется при изменении скорости закачки, которая влияет, в основном, на ширину фронта пропитки.

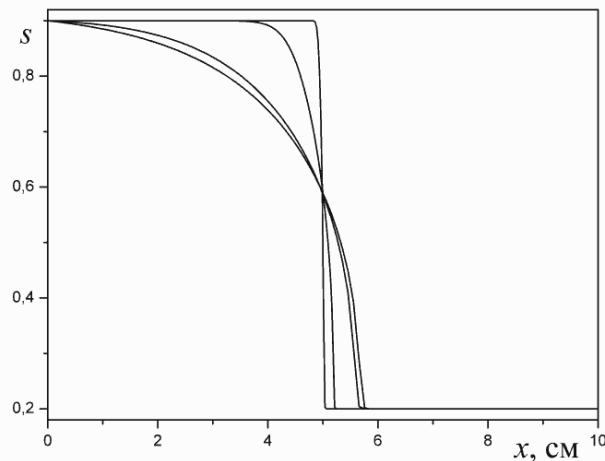


Рис. 22.

Для иллюстрации последнего утверждения на рис. 22 приведены зависимости насыщенности в случае $f_2(s) = 1 - s$ для значений расхода 1,0, 0,1, 0,01 и 0,002 см/с в тот момент, когда $s(L/2) = 0,6$. Большим значениям q соответствуют более узкие скачки насыщенности, и, как известно [11], формально при $q \rightarrow \infty$ в этой модели получаются разрывы, описываемые моделью Бакли — Леверетта.

Обращает на себя внимание тот факт, что финальное поведение насыщенности зависит от вида функций $f_i(s)$ и $J(s)$, принятых при расчетах, и, в частности, от значения максимальной достижимой насыщенности s^* . При приближении насыщенности к s^* (после прокачки нескольких поровых объемов) скорость фильтрации воздуха в этой модели стремится к нулю, и его дальнейшее удаление из пласта происходит очень медленно, даже после закачивания в пласт значительных объемов жидкости. В то же время эффективная проницаемость для воды в окрестности s^* быстро растет, поэтому даже незначительные объемы защемленного воздуха (около 10 %) могут приводить к занижению экспериментально измеренного значения проницаемости k на несколько десятков процентов (скажем, при $s = 0,9$ $f_l \approx 0,7$). По-видимому, именно с этим обстоятельством связан и разброс экспериментально определяемых значений проницаемости, достигающий нескольких десятков процентов.

Выводы и практические рекомендации

1. Изучена работа лабораторной фильтрационной установки физико-механического практикума по гидромеханике механико-математического факультета МГУ. Проанализированы некоторые возможные источники ошибок при определении проницаемости пласта.
2. Показано, что одними из основных источников систематических погрешностей при определении проницаемости могут быть температурная зависимость вязкости жидкости и неполнота пропитки пористого образца при подготовке к эксперименту. Для устранения этих ошибок необходимы точный учет температуры рабочей жидкости и насыщение пористой среды в течение как можно более долгого времени.
3. Установлено, что незначительное отклонение оси установки от вертикали даже с учетом образования свободной поверхности не приводит к существенной погрешности в определении проницаемости.
4. Показано, что влияние сопротивления решетки, удерживающей пористый образец, может быть практически устранено за счет введения между основным образцом и решеткой тонкого промежуточного слоя с высокой проницаемостью.

Список литературы

1. А пакашев Р. А., Павлов В. В. Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1997, № 1, с. 3–7.
2. Баренблatt Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
3. Баренблatt Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
4. Басниев К. С., Власов А. М., Коцина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 303 с.
5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
6. Девисон Б. Б. Движение грунтовых вод. В кн.: Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Под ред. Н.Е.Кочина. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1938, с. 217–356.
7. Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 400 с.
8. Енохович А. С. Справочник по физике. М.: Просвещение, 1978. 415 с.
9. Индельман П. В., Кац Р. М., Швидлер М. И. Численное моделирование процессов неустойчивого фильтрационного вытеснения // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1979, № 2, с. 20–27.
10. Кашеваров А. А. Сравнение решений профильной фильтрационной задачи в гидродинамической и гидравлической постановках. В сб.: Фильтрация и массоперенос в пористых средах. Вып. 90. Новосибирск: СО АН СССР. Институт гидродинамики, 1989, с. 40–52.
11. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. Пер. с англ. под ред. Г. И. Баренблатта. М.: Мир, 1964. 352 с.
12. Королев А. В., Швидлер М. И. О моделировании безнапорной фильтрации // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1979, № 6, с. 144–148.
13. Краткий справочник химика. Сост. В.И.Перельман. М.-Л.: Госхимиздат, 1951. 676 с.
14. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
15. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
16. Леонтьев Н. Е. Основы теории фильтрации. М.: Изд-во ЦПИ при

★ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ★

- механико-математическом факультете МГУ, 2009. 88 с.
- 17. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
 - 18. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 640 с.
 - 19. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 606 с.
 - 20. Флечер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х томах. М.: Мир, 1991. Т. 1. Основные положения и общие методы. 504 с. Т. 2. Методы расчета различных течений. 552 с.
 - 21. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
 - 22. Чарный И. А. Строгое доказательство формул Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания // Доклады АН СССР, 1951, Т. 79, № 6, с. 937–940.
 - 23. Шеин Е. В. Курс физики почв. М.: Изд-во МГУ, 2005. 432 с.
 - 24. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 736 с.
 - 25. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Dalmont, Paris, 1856. vii + 647 p.
 - 26. van Genuchten M. Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, Vol. 44, p. 892–898.