Лекция 16

Уравнения Навье – Ламе.
Граничные условия для уравнений теории упругости.

16.0. Система уравнений линейной изотермической теории упругости

1) Уравнение неразрывности; 2) Уравнения движения или 2a) равновесия; 3) Закон Гука; 4) Связи между компонентами тензора деформаций и вектора перемещения или, *что равносильно*, 4a) Уравнения совместности деформаций.

Уравнение неразрывности
$$\rho = \rho_0(1 - I_1(\varepsilon)) = \rho_0 - \rho_0 I_1(\varepsilon) \qquad (1)$$

Уравнения движения
$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \qquad (2)$$

или равновесия
$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = -\rho_0 F_i \qquad (2a)$$

Закон Гука
$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \qquad (3)$$

Связи между w_k и ε_{ij}
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \qquad (4)$$

или уравн. совместности
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} = 0 \qquad (4a)$$

Здесь 16 неизвестных; уравнений (1) – (4) тоже 16.
Уравнение (1) отделяется от остальных; остается 15 уравнений для w_i, p_{ij}, ε_{ij}.

16.1. Уравнения Навье - Ламе

Уравнения Навье - Ламе — это уравнения движения (2), в которых p_{ij} выражены через производные от компонент вектора перемещения $\vec{w}$.
Это можно сделать с помощью закона Гука (3) и выражений ε_{ij} через компоненты вектора перемещения (4).

Таким образом, для вывода уравнений Навье - Ламе надо исключить p_{ij} и ε_{ij} из соотношений

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}, \quad \text{используя, что}$$

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = \lambda \operatorname{div}\vec{w}\,\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right).$$

Если $\lambda,\ \mu$ - константы, то

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{w} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) = (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{w} + \mu \Delta w_i$$

Уравнения движения для линейно-упругого тела- уравнения Навье - Ламе

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\vec{w}) + \mu \Delta w_i \qquad (16.1)$$

Уравнения Навье – Ламе в векторном виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{w}) + \mu \Delta \vec{w}$$

Отметим, что эти уравнения получаются при $T = T_0,\ \lambda,\ \mu = \mathrm{const}$.

Итак, вместо 15 уравнений (2)-(4) можно решать систему 3х уравнений!

Об аналогии уравнений Навье-Ламе и уравнений Навье-Стокса

Для линейно-вязкой жидкости:

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}, \quad p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij},\ \tau_{ij} = \lambda \operatorname{div}\vec{\upsilon}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij},\ e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right)$$

Исключая τ_{ij} и e_{ij} в уравнениях движения, и считая, что $\lambda,\ \mu = \mathrm{const}$, выводим, что $\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\vec{\upsilon}) + \mu \Delta \upsilon_i$ и получаем уравнения Навье – Стокса:

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\vec{\upsilon}) + \mu \Delta \upsilon_i\ .$$

Уравнения Навье–Ламе для линейно упругой среды формально аналогичны уравнениям Навье–Стокса для линейной вязкой жидкости при замене $\vec{\upsilon}$ на $\vec{w}$, упрощении выражения для ускорения, замене τ_{ij} на p_{ij} и зачеркивании дополнительного члена с давлением.

Габриéль Ламé (*Gabriel Lamé*; 1795 — 1870) французский математик, механик, физик и инженер. В 1820—1831 работал в России (в Институте корпуса инженеров путей сообщения в Петербурге).

16.2. Типичные граничные условия в задачах теории упругости

В задачах теории упругости встречаются разные типы граничных условий на поверхности тела. Обозначим поверхность рассматриваемого тела через Σ .

1) Граничные условия первого типа: заданы перемещения всех точек поверхности упругого тела Σ, то есть

$$w_i\big|_{\Sigma} = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \varphi_i \text{ - заданные функции.} \qquad (16.2)$$

2) Граничные условия второго типа: на всей поверхности тела Σ заданы поверхностные силы, точнее вектор напряжений $\overrightarrow{P_n}$, то есть 3 компоненты P_{ni} вектора $\overrightarrow{P_n}$

$$P_{ni}\big|_{\Sigma} = f_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad f_i \text{ - заданные функции.} \qquad (16.3a)$$

Условия (16.3а) есть условия на компоненты тензора напряжений p_{ik}, так как компоненты P_{ni} вектора $\overrightarrow{P_n}$ выражаются через p_{ik} по формуле Коши

$$P_{ni} = p_{ik} n_k ,$$

где n_1, n_2, n_3 - компоненты вектора нормали $\vec{n}$ к той площадке, где действует $\overrightarrow{P_n}$. Поэтому граничное условие второго типа (16.3а) записывается в виде следующих трех условий на p_{ik}

$$p_{ik} n_k\big|_{\Sigma} = f_i(x_1, x_2, x_3, t), \; i = 1, 2, 3 \;, \; f_i \text{ - заданные функции.} \qquad (16.3)$$

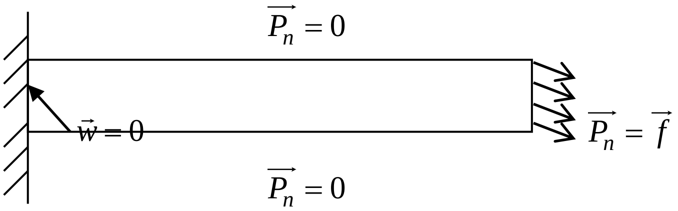
3) Граничные условия третьего типа - смешанные граничные условия: на части Σ_w поверхности тела Σ заданы перемещения, а на остальной части Σ_p – вектор напряжений:

$$\Sigma = \Sigma_w + \Sigma_p, \qquad w_i\big|_{\Sigma_w} = \varphi_i, \qquad p_{ik} n_k\big|_{\Sigma_p} = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (16.4)$$

где $\varphi_i, \; f_i$ - заданные функции.

Пример

Пусть требуется найти деформации и напряжения в балке, левым концом заделанной в стену, причем боковые поверхности балки свободны от нагрузки, а на правом торце действует распределенная заданным образом нагрузка (фиг. 16.1). Такая закрепленная одним концом в стене балка называется консолью. Граничные условия таковы: на левом торце $\vec{w} = \mathbf{0}$, на боковой поверхности $\overrightarrow{P_n} = \mathbf{0}$, на правом торце $\overrightarrow{P_n} = \vec{f}$.



Фиг.16.1. Равновесие консоли.

Замечание. В теории с малыми перемещениями можно считать, что граничные условия заданы на известной поверхности тела, которая была до деформации, даже в тех случаях, когда фактически они должны выполняться на деформированной (часто не известной заранее) поверхности тела.

Объяснение. При малых перемещениях деформированная поверхность мало отличается от исходной, то есть координаты точек деформированной поверхности мало отличаются от координат точек поверхности до деформации. Но для любой непрерывной функции ее значения в близких точках отличаются мало:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x,$$

второй член в правой части этого равенства мал, если Δx мало. Поэтому условие, выполняющееся в точках с координатами $x+\Delta x$ можно приближенно заменить на условие, выполняющееся в точках с координатами x.

16.3. Принцип Сен-Венана

Принцип Сен-Венана формулируется только для задач о равновесии упругих сред на основе опытных фактов. Математическое доказательство имеется для некоторых классов задач.

Формулировка принципа Сен-Венана

Пусть на некотором участке границы упругого тела заданы силы. Обозначим этот участок через $\boldsymbol{\Omega}$, а его характерный размер через $\boldsymbol{l}$. Принцип Сен-Венана утверждает, что напряжения и деформации в точках тела, удаленных от $\boldsymbol{\Omega}$ на расстояния, много большие $\boldsymbol{l}$, зависят лишь от суммарной силы и суммарного момента сил, действующих на $\boldsymbol{\Omega}$, и (приближенно) не зависят от деталей распределения этих сил.

Фиг. 16.2. Разные способы приложения сил в областях вблизи торцов стержня приводят к одинаковым напряжениям и деформациям вдали от торцов

В силу принципа Сен-Венана при постановке статических задач о вычислении напряжений и деформаций в упругих телах можно заменять на некоторых участках границы Ω_k заданные системы сил более простыми, например, с равномерным распределением. Решение такой более простой задачи будет сильно отличаться от решения исходной задачи лишь в малой окрестности областей Ω_k.

16.4. Постановка задач теории упругости в перемещениях.

Если в задаче на границе заданы перемещения (граничные условия первого типа), то удобно в качестве системы уравнений взять уравнения Навье - Ламе. В этом случае имеем постановку задачи «в перемещениях» (в уравнениях и граничных условиях искомыми являются компоненты вектора перемещения w_i).

.Замечание. Постановка задачи в перемещениях возможна и тогда, когда граничными условиями являются условия второго и третьего типа, то есть на всей границе или ее части ставятся условия на компоненты тензора напряжений: граничные условия на p_{ij} превращаются в условия на w_i с помощью закона Гука и выражений ε_{ij} через производные от w_i.

16.5. Постановка задач теории упругости в напряжениях

На практике часто бывает нужно вычислить напряжения, а величины деформаций и перемещений не существенны, так как они очень малы. Можно ли поставить задачу в напряжениях, то есть, написать уравнения и граничные условия так, чтобы в них входили только $\boldsymbol{p_{ij}}$ и не входили $\boldsymbol{w_i}$, ε_{kl}?

Ответ. Это возможно, если выполнены 2 условия:

1) это задача о равновесии, то есть $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w_i}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = \mathbf{0}$;

2) граничные условия — это условия 2-го типа, то есть на всей поверхности заданы компоненты вектора напряжений (а не перемещения).

Система уравнений линейной теории упругости в напряжениях включает в себя, прежде всего, уравнения равновесия

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 F_i = 0. \qquad (16.5)$$

Здесь 3 уравнения, а неизвестных p_{ij} — 6! Иногда из физической постановки задачи следует, что отличны от нуля не более трех компонент p_{ij}. Тогда уравнений равновесия (16.5) достаточно, чтобы их вычислить. Такие задачи называются статически определимыми. В общем случае это не так. Тогда используются добавочные уравнения, которые получаются следующим образом. Берем уравнения совместности для компонент тензора деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} = 0.$$

(Отметим, что в этой системе уравнений независимых уравнений 6).
Подставляем в уравнения совместности выражения ε_{ij} через p_{ij} по закону Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} p_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1(p) \delta_{ij}.$$

Тогда получаем уравнения для компонент тензора напряжений, которые и замыкают систему уравнений равновесия.
Часто полученные уравнения преобразовывают с использованием уравнений равновесия. Эти преобразованные уравнения называются уравнения Бельтрами – Митчелла. В этом курсе мы не будем выводить уравнения Бельтрами – Митчелла.