Лекция 12
Об определяющих соотношениях в моделях сплошных сред. Жидкости и газы. Идеальная жидкость

12.1. Сводка уравнений, следующих из законов сохранения

Математическая модель сплошной среды – это

1) система количественных характеристик рассматриваемых процессов,

2) система уравнений, решая которые можно рассчитать характеристики любого изучаемого процесса в этой среде.

Для расчета конкретных процессов, кроме уравнений, обычно требуется задать так называемые граничные и начальные условия.

Полная система уравнений для любой среды состоит из

1) универсальных уравнений (то есть выполняющихся для всех сред),

2) определяющих соотношений, которые описывают свойства конкретной среды или группы сред.

Универсальные уравнения выводятся из законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии, а также второго закона термодинамики.

Система универсальных уравнений

для классических сред ($\vec{k}=0,\ \vec{h}=0,\ \vec{M}_n=0,\ dQ^{**}=0$)

$\dfrac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{\upsilon}=0$ - уравнение неразрывности (1 ур);

$\rho\dfrac{d\upsilon_k}{dt}=\rho F_k+\dfrac{\partial p_{ki}}{\partial x_i}$ - уравнения движения (3 ур);

$p_{ik}=p_{ki}$ - уравнения момента количества движения (3 ур);

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+u\right)=\rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})+\frac{\partial(p_{ik}\upsilon_i)}{\partial x_k}+\rho\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$ - уравнение энергии (1 ур);

$$\rho\frac{ds}{dt}=\frac{\rho}{T}\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}-\operatorname{div}\frac{\vec{q}}{T}+\rho\frac{d_i s}{dt},\qquad \frac{d_i s}{dt}\geq 0$$ - уравнение энтропии (1 ур).

Здесь 9 уравнений с 20 неизвестными величинами $\rho,\ \upsilon_i,\ p_{ik},\ u,\ q_i,\ T,\ s,\ d_i s$ (массовые силы и массовые притоки тепла обычно являются заданными).

Необходимы, по крайней мере, еще 11 соотношений.

Для многих сред выполняются следующие 3 соотношения для q_i (закон Фурье):

$$q_i=-\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{или} \quad q_i=-\kappa_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}$$, $\kappa,\ \kappa_{ij}$ - коэффициенты теплопроводности.

12.2. Понятие об определяющих соотношениях

Итак, необходимы еще 8 соотношений. Эти соотношения определяют свойства конкретной среды и называются определяющими соотношениями.

Это: 1) выражение для плотности внутренней энергии u,

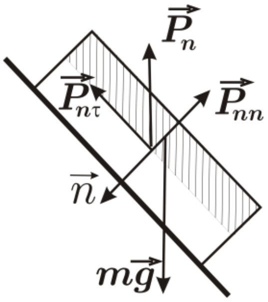
2) выражение для плотности производства энтропии $d_i s$ или некомпенсированного тепла dq' ,

3) выражения p_{ik} как функций ρ, T, компонент тензора скоростей деформаций e_{ij} или тензора деформаций ε_{ij} .

12.3. Жидкости и газы.

Определение жидкости или газа в МСС:

Жидкость или газ - это среда, в которой <u>в состоянии покоя</u> отсутствуют касательные напряжения, т.е. в состоянии покоя вектор напряжений на любой площадке параллелен нормали к площадке: $\vec{P}_n \parallel \vec{n}$, то есть $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$, где P_{nn} - проекция вектора $\vec{P}_n$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке.



В твёрдом теле это не так. Например, тяжёлый твердый кирпич может лежать на наклонной плоскости. На площадках, параллельных плоскости, действуют касательные силы, которые уравновешивают соответствующую составляющую силы тяжести. Жидкий «кирпич» на наклонной плоскости лежать не может, жидкость будет течь.

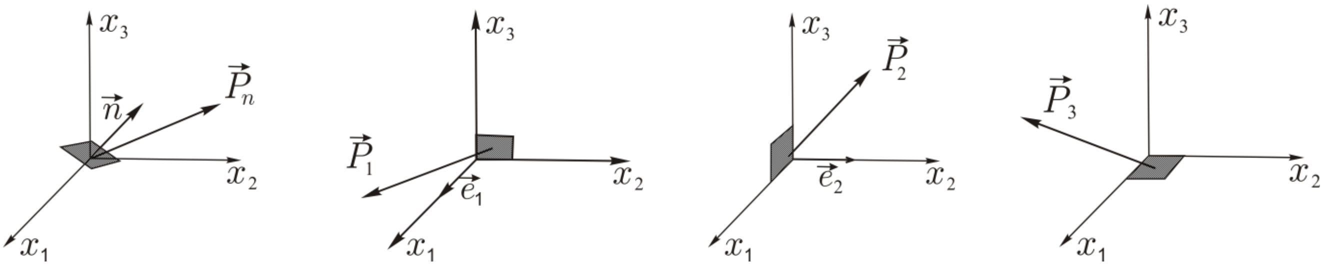
Физически газы и жидкости (иногда говорят «капельные жидкости») – разные среды. Однако математически они описываются одинаково, поэтому в дальнейшем мы часто будем употреблять термин «жидкость», имея в виду как капельную жидкость, так и газ.

Теорема о давлении (закон Паскаля)

Если на всех площадках в данной точке вектор напряжений $\vec{P}_n$ перпендикулярен площадке, то есть $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$, то величина P_{nn} на всех площадках в данной точке одна и та же.

Доказательство теоремы Паскаля.

Рассмотрим формулу Коши $\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3$, где $\vec{P}_i$ $(i = 1,2,3)$ - векторы напряжений на площадках, перпендикулярных соответственно осям x_i, $i = 1,2,3$.



Запишем векторы $\vec{P}_i$, $\vec{n}$ в виде разложений по векторам базиса $\vec{e}_i$

$$\vec{P}_1 = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + p_{31}\vec{e}_3$$

$$\vec{P}_2 = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + p_{32}\vec{e}_3 \qquad \vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$$

$$\vec{P}_3 = p_{13}\vec{e}_1 + p_{23}\vec{e}_2 + p_{33}\vec{e}_3$$

Для вектора $\vec{P}_1$ величины p_{21} и p_{31} - это касательные составляющие. По условию теоремы они равны нулю, поэтому $\vec{P}_1 = p_{11}\vec{e}_1$. Аналогично $\vec{P}_2 = p_{22}\vec{e}_2$; $\vec{P}_3 = p_{33}\vec{e}_3$. Кроме того, $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n} = P_{nn}(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3)$.

Поэтому формула Коши принимает вид:

$$P_{nn}\vec{n} = P_{nn}n_1\vec{e}_1 + P_{nn}n_2\vec{e}_2 + P_{nn}n_3\vec{e}_3 = p_{11}n_1\vec{e}_1 + p_{22}n_2\vec{e}_2 + p_{33}n_3\vec{e}_3$$

Отсюда следует, что $P_{nn} = p_{11} = p_{22} = p_{33}$.

Теорема доказана.

Далее вводится обозначение $P_{nn} = p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p$, тогда $\vec{P}_n = -p\vec{n}$

Величина p называется давлением.

Итак, в любой жидкости и любом газе в состоянии покоя вектор напряжений имеет вид $\vec{P}_n = -p\vec{n}$, а матрица компонент тензора напряжений в декартовой системе координат такова:

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \text{ то есть, } p_{ij} = -p\delta_{ij},$$

где δ_{ij} - символы Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$).

В движущихся жидкостях и газах, конечно, возникают касательные напряжения. Это свойство жидкостей называется вязкостью, а сами касательные напряжения в жидкостях и газах называют вязким трением.

12.4. Идеальная жидкость и идеальный газ

Во многих случаях вязкие касательные напряжения, возникающие при движении, оказываются малыми по сравнению с силами, связанными с давлением. Модель жидкости, в которой вязкими касательными напряжениями пренебрегается, называется идеальной (невязкой) жидкостью.

Определение

Идеальная жидкость или идеальный газ – это жидкость или газ, в которых

1) не только в покое, но и при движении нет касательных напряжений, т.е. всегда на любой площадке $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$;
2) механические процессы (движение) обратимы, $dq' = 0$

Из условия $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$ следует, что в идеальной жидкости всегда, а не только в покое $\vec{P}_n = -p\vec{n}$, а компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат имеют вид $p_{ij} = -p\delta_{ij}$.

12.5. Уравнения движения идеальной жидкости или газа (уравнения Эйлера)

Уравнения движения идеальной жидкости или газа называются уравнениями Эйлера. Они получаются из общих уравнений движения с использованием формулы $p_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Уравнения движения любой среды $\rho\dfrac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i + \dfrac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}$.

Используем, что в идеальной жидкости

$$p_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = -\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} .$$

Получим уравнения движения идеальной жидкости или газа (уравнения Эйлера) в проекциях на декартовы координатные оси: $\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$.

Уравнение Эйлера в векторном виде: $\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \vec{F} - \mathbf{grad}\, p$

12.6. Уравнение энергии и уравнение притока тепла для идеальной жидкости или газа

Уравнение энергии для любой среды (при $dq^{**} = 0$):

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u\right) = \rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}) + \underline{\frac{\partial(p_{ki}\upsilon_k)}{\partial x_i}} + \rho \frac{dq}{dt} \ ,$$

где $\frac{dq}{dt} = \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}$ - приток тепла к единице массы в единицу времени.

В идеальной жидкости $p_{ki} = -p\delta_{ki}$, $\frac{\partial(p_{ki}\upsilon_k)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(p\upsilon_i)}{\partial x_i}$

Поэтому уравнение энергии для идеальной жидкости:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u\right) = \rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}) - \frac{\partial(p\upsilon_i)}{\partial x_i} + \rho \frac{dq}{dt}$$

Уравнение притока тепла для любой среды (см. лекцию 10):

$$\rho \frac{du}{dt} = p_{ik}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \rho \frac{dq}{dt}$$

В идеальной жидкости $p_{ki} = -p\delta_{ki}$, $p_{ki}\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} = -p\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} = -p\,\mathbf{div}\,\vec{\upsilon} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$

(здесь было использовано уравнение неразрывности $\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathbf{div}\,\vec{\upsilon} = 0$)

Поэтому уравнение притока тепла для идеальной жидкости имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{dq}{dt}.$$

Уравнение притока тепла для идеальной жидкости иногда пишут в виде

$du + pdV = dq$ где $V = \frac{1}{\rho}$ - объем единицы массы

12.7. Полная система уравнений идеальной жидкости

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\vec{\upsilon} = 0 \quad -\text{ур.неразрывности}$$

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}\, p \; - \text{ ур.движения}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{dq}{dt} \quad -\text{ур.притока тепла} \qquad (12.1)$$

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{dq}{dt} \quad -\text{ур.энтропии (IIзакон термодинамики)}$$

+ 2 уравнения состояния:

1) $f(p,\rho,T) = 0$ - **уравнение состояния,**

2) $u = u(\rho,T)$ - **калорическое уравнение состояния**.

Дополнительно нужны сведения о плотности притока тепла dq.
Обычно приток тепла dq выражается через температуру с помощью закона Фурье (коэффициент теплопроводности рассматриваемой среды надо задавать). Для многих процессов можно считать, что $dq = 0$. Поэтому число неизвестных в системе (12.1) равно 8: $\rho, \upsilon_i, p, u, T, s$, и уравнений тоже 8.

Примеры уравнений состояния

Совершенный газ:

$$p = R\rho T \quad - \text{ уравнение Клапейрона,} \qquad (12.2)$$

$$u = c_V T + const \quad \text{выражение для плотности внутренней энергии}$$

Здесь $R = \dfrac{R_0}{\mu} = const$, $c_V = const$

$R_0 \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная,

μ – молекулярный вес газа,

c_V – удельная теплоемкость в процессах, в которых объем частиц газа постоянен

Пояснение: если $V = const$, то $\rho = const, \dfrac{d\rho}{dt} = 0$; уравнение притока тепла принимает вид: $du \equiv c_V dT = dq$, то есть, $c_V = \dfrac{dq}{dT}$ – удельная теплоемкость.

Замечание. В физике газ, удовлетворяющий условиям (12.2), называют идеальным газом. Но в механике сплошных сред термин «идеальный газ» означает газ без трения. Поэтому для газа, удовлетворяющего условиям (12.2), используется название «совершенный газ».

Несжимаемая жидкость

$\rho = const$ в индивидуальной частице, то есть, $\frac{d\rho}{dt} = 0$

$u = u(T) = \int c(T)dT$; обычно $u = cT + const$, c – удельная теплоемкость

12.8. Граничные условия на твердой границе для уравнений идеальной жидкости

Границы области, занятой жидкостью, бывают двух типов:

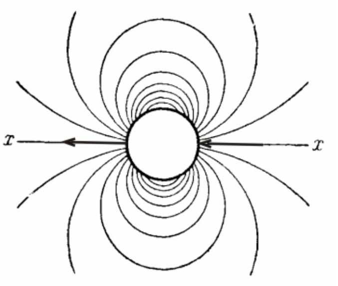
а) твёрдые (границы тел, погружённых в жидкость, стенки трубы, дно и берега);

б) свободные, форма которых заранее не известна (например, покрытая волнами поверхность моря).

Граничное условие на поверхности твёрдых тел в идеальной жидкости называется условием непроницаемости и записывается в виде:

$$\upsilon_n\big|_{\text{на пов. тела}} = \upsilon_{n\ \text{тела}},$$

где $\upsilon_{n\ \text{тела}}$ - нормальная составляющая скорости соответствующей точки поверхности движущегося тела. Это условие означает, что жидкость не проникает внутрь тела и не отрывается от него.



Если тело неподвижно, то условие непроницаемости на его поверхности имеет вид $\upsilon_n\big|_{\text{на пов. тела}} = 0$.

Задачи к лекции 12.

1.12. Напишите уравнение Эйлера в проекции на ось y в раскрытом виде.

2.12. Напишите уравнения <u>равновесия</u> жидкости в проекциях на координатные оси при условии, что массовая сила – это сила тяжести, а ось z направлена вертикально вверх.