Лекция 10
Уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии). Закон теплопроводности Фурье

На прошлой лекции мы формулировали закон сохранения энергии

$$dE_{\text{полн}} \equiv d(E_{\text{кин}} + U) = dA^e + dQ^e + dQ^{**}$$

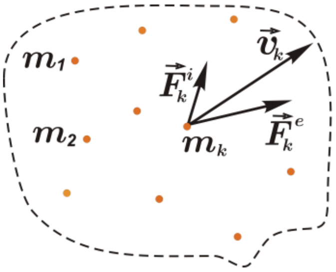
для индивидуального объема сплошной среды и выводили из него дифференциальное уравнение энергии (предполагая, что $dQ^{**} = 0$)

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u\right) = \rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}) + \frac{\partial(\vec{P}_k\cdot\vec{\upsilon})}{\partial x_k} + \rho\frac{dq}{dt} \qquad (10.1)$$

где u – внутренняя энергия единицы массы, $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dq_{\text{масс}}}{dt} + \dfrac{dq_{\text{теплопр}}}{dt}$ – приток тепла за счет массового притока и за счет теплопроводности (в расчете на единицу массы и за единицу времени), $\dfrac{dq_{\text{теплопр}}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}$, $\vec{q}$ – вектор потока тепла.

В этой лекции мы выведем уравнения отдельно для кинетической энергии и для внутренней энергии.

10.1. Уравнение кинетической энергии (теорема живых сил) для системы материальных точек



N точек, их массы $m_1, m_2, \ldots$, скорости $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \ldots$

$\vec{F}_k^e$ - сила, действующая на точку с номером k со стороны объектов, не принадлежащих системе (внешняя сила), $\vec{F}_k^i$ - сила, действующая на эту точку со стороны других точек этой же системы (внутренняя сила).

Закон Ньютона для материальной точки с массой m_k: $m_k \frac{d\vec{\upsilon}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$.

Умножим левую и правую части этого уравнения скалярно на $\vec{\upsilon}_k\, dt$:

$$m_k(\vec{\upsilon}_k \cdot d\vec{\upsilon}_k) = (\vec{F}_k^e \cdot \vec{\upsilon}_k\, dt) + (\vec{F}_k^i \cdot \vec{\upsilon}_k\, dt) \ ,$$

По правилу вычисления скалярного произведения

$$(\vec{\upsilon}_k \cdot d\vec{\upsilon}_k) = \upsilon_{k1} d\upsilon_{k1} + \upsilon_{k2} d\upsilon_{k2} + \upsilon_{k3} d\upsilon_{k3} = d\,\frac{\upsilon_{k1}^2 + \upsilon_{k2}^2 + \upsilon_{k3}^2}{2} = d\,\frac{\upsilon_k^2}{2} \, .$$

Итак, для к-той материальной точки изменение кинетической энергии равно сумме работ внешней и внутренней сил: $d\,\frac{m_k \upsilon_k^2}{2} = \left(\vec{F}_k^e \cdot \vec{\upsilon}_k dt\right) + \left(\vec{F}_k^i \cdot \vec{\upsilon}_k dt\right)$.

Сложим эти равенства для всех N точек рассматриваемой системы:

$$d\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \upsilon_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k^e \cdot \vec{\upsilon}_k) dt + \sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k^i \cdot \vec{\upsilon}_k) dt \, .$$

Полученное равенство можно переписать в виде

$$dE_{\text{кин}} = dA^e + dA^i \, ,$$

Здесь $E_{\text{кин}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \upsilon_k^2}{2}$ – кинетическая энергия системы точек,

$dA^e = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^e \cdot \vec{\upsilon}_k\right) dt$ – работа всех внешних сил за время dt

$dA^i = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^i \cdot \vec{\upsilon}_k\right) dt$ – работа внутренних сил за время dt

Таким образом, изменение кинетической энергии системы материальных точек равно сумме работ внешних и внутренних сил. Это утверждение называется теоремой живых сил для системы материальных точек.

10.2. Теорема живых сил для сплошной среды

Напишем уравнение движения $\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{P}_k}{\partial x_k}$ и умножим левую и правую части скалярно на $\vec{\upsilon} dt$. Получим

$$\rho\left(\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}\right) = \rho\left(\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\right) dt + \left(\vec{\upsilon} \cdot \frac{\partial \vec{P}_k}{\partial x_k}\right) dt \, ,$$

Или

$$\rho d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = \rho\left(\vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt\right) + \frac{\partial(\vec{\upsilon} \cdot \vec{P}_k)}{\partial x_k} dt - \left(\vec{P}_k \cdot \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_k}\right) dt \, . \qquad (10.2)$$

Равенство (10.2) есть уравнение кинетической энергии или теорема живых сил для сплошной среды в дифференциальной форме.

Проинтегрируем равенство (10.2) по объему V сплошной среды

$$\int_V \rho d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)dV = \int_V \rho\left(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}dt\right)dV + \int_V \frac{\partial(\vec{\upsilon}\cdot\vec{P}_k)}{\partial x_k}dtdV - \int_V\left(\vec{P}_k\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k}\right)dtdV \qquad (10.2a)$$

Преобразуем второй член в правой части в поверхностный интеграл по формуле Гаусса-Остроградского и учтем, что по формуле Коши $\vec{P}_k n_k = \vec{P}_n$:

$$\int_V \frac{\partial(\vec{\upsilon}\cdot\vec{P}_k)}{\partial x_k}dtdV = \int_\Sigma (\vec{\upsilon}\cdot\vec{P}_k)n_k dtd\sigma = \int_\Sigma (\vec{\upsilon}\cdot\vec{P}_n)dtd\sigma,$$

а в левой части поменяем местами операции интегрирования по объему и дифференцирования по времени. В итоге (10.2a) примет вид:

$$\underbrace{d\int_{V_{\text{инд}}}\frac{\upsilon^2}{2}\rho dV}_{dE_{\text{кин}}} = \underbrace{\int_V \rho(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})dt\,dV + \int_\Sigma(\vec{P}_n\cdot\vec{\upsilon})dt\,d\sigma}_{dA^e} + \underbrace{\left(-\int_V(\vec{P}_k\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k})dt\,dV\right)}_{dA^i} \qquad (10.3)$$

В правой части первые 2 члена – это сумма работ внешних сил над средой, а последний член – работа внутренних сил. Равенство (10.3) есть уравнение кинетической энергии или теорема живых сил для индивидуального объема V сплошной среды. В символическом виде соотношение (10.3) записывается так

$$dE_{\text{кин}} = dA^e + dA^i.$$

Выражение для работы внутренних сил dA^i в объеме V за время dt таково:

$dA^i = -\int_V(\vec{P}_k\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k})dt\,dV = -\int_V p_{ik}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}dt\,dV$, их работа в малой частице $-p_{ik}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}dt\,dV$.

Масса малой частицы ρdV, значит, плотность работы внутренних сил за время dt (то есть, работа внутренних сил, приходящаяся на единицу массы) равна

$$\left(dA^i\right)_{\substack{\text{на}\\\text{един.}\\\text{массы}}} = -\frac{1}{\rho}p_{ik}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}dt. \qquad (10.4)$$

10.3. Уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии)

Вычтем уравнение кинетической энергии $dE_{\text{кин}} = dA^e + dA^i$ из уравнения первого закона термодинамики $d(E_{\text{кин}} + U) = dA^e + dQ^e + dQ^{**}$. Получим

$$dU = -dA^i + dQ^e + dQ^{**} \qquad (10.5)$$

Уравнение (10.5) называют уравнением внутренней энергии или уравнением притока тепла (в символической форме). Смысл двух названий виден из того, что при $dQ^{**} = 0$ уравнение (10.5) показывает а) за счет чего меняется U : $dU = -dA^i + dQ^e$, или, с другой стороны, б) на что тратится приток тепла извне: $dQ^e = dU + dA^i$.

Дифференциальное уравнение притока тепла

(дифференциальное уравнение внутренней энергии)

Оно получается вычитанием теоремы живых сил в дифференциальной форме (10.2) из дифференциального уравнения энергии (10.1). При $dQ^{**}=0$ получаем

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\rho}p_{ik}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{dq}{dt} \qquad (10.6)$$

Это дифференциальное уравнение притока тепла; $\frac{dq}{dt}$ — это приток тепла к малой частице в расчете на единицу времени и единицу массы, сумма массового притока и притока за счет теплопроводности

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq_{\text{масс}}}{dt}+\frac{dq_{\text{теплопр}}}{dt}, \qquad \frac{dq_{\text{теплопр}}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}$$

10.4. Закон теплопроводности Фурье

Закон теплопроводности Фурье связывает вектор потока тепла $\vec{q}$ с градиентом температуры. Для изотропной среды закон Фурье записывается так:

$$\vec{q}=-\kappa\,\mathrm{grad}\,T, \text{ то есть, } q_i=-\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i} \qquad (10.7)$$

Здесь T – температура, κ (каппа) – коэффициент теплопроводности.

Для анизотропной среды закон Фурье имеет вид $q_i=-\kappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}$,

κ_{ik} - компоненты тензора коэффициентов теплопроводности.

Если верен закон Фурье, среда изотропна и коэффициент теплопроводности – константа, то для притока тепла за счет теплопроводности к единице массы за единицу времени получаем:

$$\frac{dq_{\text{тепл}}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=\frac{\kappa}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)=\frac{\kappa}{\rho}\Delta T\ . \qquad (10.8)$$

Здесь $\Delta T=\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа от температуры T.

10.5. Пример. Уравнение притока тепла для покоящейся теплопроводной среды

Рассмотрим в качестве примера уравнение притока тепла при следующих условиях

1) среда покоится ($\vec{\upsilon} = 0$).

2) добавочного притока энергии нет ($dq^{**} = 0$).

3) массового притока тепла нет ($dq_{\text{масс}} = 0$), приток тепла происходит только за счёт теплопроводности

4) верен закон теплопроводности Фурье: $\vec{q} = -\kappa \, \mathrm{grad}\, T$,

5) коэффициент теплопроводности $\kappa = \mathrm{const}$.

При условиях 1 – 3 уравнение притока тепла $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\rho} p_{ik} \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \dfrac{dq}{dt}$ принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt}, \qquad \text{где} \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\vec{q}$$

Рассмотрим плотность внутренней энергии u. Она может меняться за счёт изменения температуры T и за счёт деформации. В нашем примере $du \neq 0$ только за счёт изменения T, так как деформации не происходят, среда покоится; поэтому $du = \dfrac{du}{dT} dT$. Введем обозначение $\dfrac{du}{dT} = c$; тогда уравнение притока тепла записывается в виде $c dT = dq$. Из этого соотношения видно, что в рассматриваемом случае $c = \dfrac{dq}{dT}$, то есть, c — это удельная теплоёмкость (то есть, теплоемкость единицы массы) в процессе, в котором деформирования среды не происходит.

Итак, уравнение притока тепла в нашем случае имеет вид

$$c\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\vec{q}$$

Рассмотрим правую часть этого уравнения. Если выполнен закон Фурье и коэффициент теплопроводности $\kappa = \mathrm{const}$, то $-\dfrac{1}{\rho}\mathrm{div}\vec{q} = \dfrac{\kappa}{\rho}\Delta T$ (формула (10.8)).

Рассмотрим теперь левую часть уравнения притока тепла. В общем случае $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_1 \dfrac{\partial T}{\partial x_1} + \upsilon_2 \dfrac{\partial T}{\partial x_2} + \upsilon_3 \dfrac{\partial T}{\partial x_3}$. В рассматриваемом примере составляющие скорости $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ равны нулю, поэтому $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$.

Итак, уравнение притока тепла при выполнении условий 1 - 5 приводится к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \Delta T$$

Оно служит для определения температуры в покоящейся теплопроводной среде.

Коэффициент $\lambda = \dfrac{\kappa}{\rho c}$ называется коэффициентом температуропроводности.

Отметим, что в математике уравнение вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{где} \quad \lambda = \mathrm{const} > 0 \tag{10.6}$$

называется уравнением теплопроводности.

Итак, если выполнены условия 1 – 5 и, кроме того, теплоемкость c, а также плотность ρ - константы, то уравнение притока тепла приводится к классическому уравнению теплопроводности. Но в общем случае, когда эти условия не выполнены, процесс теплопроводности в сплошной среде описывается гораздо более сложным уравнением, чем классическое уравнение теплопроводности (10.6).

Задачи к лекции 10

Задача 1

Написать дифференциальное уравнение притока тепла для адиабатического движения среды (то есть, для движения, в котором для каждой частицы среды $dq = 0$).

Задача 2

Дано, что компоненты тензора напряжений всюду в среде имеют вид:

$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p, \quad p > 0$, остальные компоненты равны нулю.

2.1. Доказать, что в этом случае вектор напряжений на любой площадке с нормалью $\vec{n}$ имеет вид $\vec{P}_n = -p\vec{n}$.

2.2. Какой вид в этом случае принимает выражение для плотности работы внутренних сил за время dt , то есть, величина $\left(dA^i\right)_{\substack{\text{на} \\ \text{един.} \\ \text{массы}}}$?

2.3. Пусть, кроме того, дано, что $\upsilon_x = ax, \ \upsilon_y = ay, \ \upsilon_z = az, \ a > 0$ – константа и движение адиабатическое. Увеличивается или уменьшается со временем плотность внутренней энергии в индивидуальных частицах среды?

2.4. Используя уравнение неразрывности, доказать, что при заданном виде тензора напряжений $\left(dA^i\right)_{\substack{\text{на} \\ \text{един.} \\ \text{массы}}} = pdV$, где $V = \dfrac{1}{\rho}$ – объем единицы массы.

Задача 3 (8.9 пункты а) – г))

а) Найти стационарное распределение температуры в наружной стене дома, если температура наружного воздуха равна $\boldsymbol{T_1 = -15^\circ\,\mathrm{C}}$, а температура внутри дома поддерживается равной $\boldsymbol{T_2 = +25^\circ\,\mathrm{C}}$. Толщина стены $\boldsymbol{h = 0.5\,\text{м}}$, высота $\boldsymbol{H = 3\,\text{м}}$, длина $\boldsymbol{L = 5\,\text{м}}$.

б) Какое количество тепла уходит наружу через эту стену за один час? Коэффициент теплопроводности материала, из которого сделана стена, равен $\boldsymbol{\kappa = 0.2\text{кал} / (\text{м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град})}$