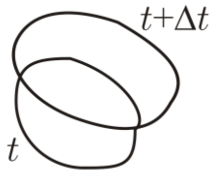
Лекция 4
Тензор скоростей деформаций (продолжение). Вектор вихря.

4.1. Тензор скоростей деформаций. Напоминание

Определение. Тензором скоростей деформаций называется тензор, компоненты e_{ij} которого определяются формулами

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

Здесь $\Delta \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора малых деформаций в момент $t+\Delta t$ по отношению к состоянию в момент t.



Частица в моменты времени t и $t+\Delta t$

Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций

e_{ii} — это скорости относительного удлинения отрезков, лежащих в данный момент времени t вдоль координатных осей;

e_{ij} при $i \neq j$ — это половины скорости изменения углов между отрезками, которые в данный момент времени t параллельны осям x_i и x_j, соответственно.

Выражение компонент тензора скоростей деформаций через производные от компонент вектора скорости:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.2}$$

4.2. Формулы для скорости относительного изменения объема. Механический смысл дивергенции скорости

Обозначим $\Delta\theta$ - относительное изменение объема при деформировании от момента t до момента $t+\Delta t$. Скорость относительного изменения объема — это

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{dV-dV_0}{dV_0}.$$

Были 2 формулы для $\Delta\theta$ при малых относительных перемещениях:

1) $\Delta\theta=\Delta\varepsilon_{11}+\Delta\varepsilon_{22}+\Delta\varepsilon_{33}$, 2) $\Delta\theta=\mathbf{div}\,\Delta\vec{w}$

Отсюда

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varepsilon_{11}+\Delta\varepsilon_{22}+\Delta\varepsilon_{33}}{\Delta t}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=I_1(e)$$

а также

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{div}\,\Delta\vec{w}}{\Delta t}=\mathbf{div}\,\vec{\upsilon}$$, так как $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{w}}{\Delta t}=\vec{\upsilon}$

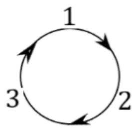
Итак, скорость относительного изменения объема равна первому инварианту тензора скоростей деформаций и равна дивергенции вектора скорости.

Механический смысл дивергенции скорости: $\mathbf{div}\,\vec{\upsilon}$ — это скорость относительного изменения объема в малой окрестности точки, в которой вычисляется $\mathbf{div}\,\vec{\upsilon}$.

4.3. Вектор вихря

Определение. Вектором вихря $\vec{\omega}$ называется вектор, компоненты которого в правой декартовой системе координат задаются формулами

$$\omega_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_j}-\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_k}\right)$$, где i,j,k - круговая перестановка из 1,2,3.



То есть, $\omega_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\upsilon_2}{\partial x_3}\right)$, $\omega_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}\right)$, $\omega_3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}\right)$

Для вектора вихря верна формула $\vec{\omega}=\dfrac{1}{2}\mathbf{rot}\,\vec{\upsilon}$.

Ротором вектора $\vec{a}$ называется вектор $\mathbf{rot}\,\vec{a}$, который в декартовых координатах ($\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ - векторы базиса) можно записать так:

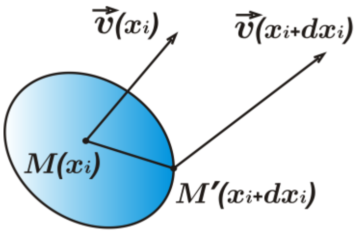
$$\mathbf{rot}\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\vec{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)+\vec{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)+\vec{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right).$$

4.4. Механический смысл вектора вихря

Теорема Коши-Гельмгольца
о распределении скоростей в малой частице среды

«Движение малой частицы сплошной среды можно представить в виде суммы трех движений:1) поступательного движения,2) деформирования, 3) вращения частицы как твёрдого тела, причем угловая скорость этого вращения равна **вектору вихря**»

Доказательство теоремы Коши-Гельмгольца



Рассмотрим малую частицу среды – окрестность точки M. Координаты точки M: x_1, x_2, x_3, скорость $\vec{\upsilon}(M)=\vec{\upsilon}(x_1,x_2,x_3)$. Рассмотрим еще точку M' с координатами x_i+dx_i из окрестности точки M, ее скорость $\vec{\upsilon}(M')=\vec{\upsilon}(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$.

Формула Тейлора для компоненты $\upsilon_1(M')$ скорости точки M':

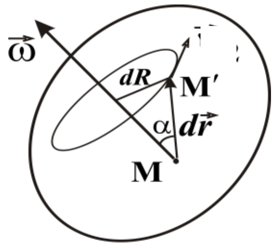
$$\upsilon_1(M')=\upsilon_1(M)+\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}dx_3=\upsilon_1(M)+\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}dx_1+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}\right)dx_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}\right)dx_3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}\right)dx_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}\right)dx_3=$$

$$=\upsilon_1(M)+e_{11}dx_1+e_{12}dx_2+e_{13}dx_3-\omega_3 dx_2+\omega_2 dx_3=$$

$$=\upsilon_1(M)+e_{11}dx_1+e_{12}dx_2+e_{13}dx_3+\left[\vec{\omega}\times d\vec{r}\right]_1$$

Первый член в этой формуле одинаков для <u>всех точек</u> частицы, он соответствует поступательному движению. Члены, отмеченные синим цветом, обусловлены деформированием частицы. Последний член описывает вращение без деформации с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

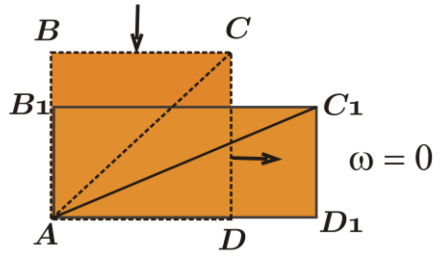


Механический смысл вектора вихря: $\vec{\omega}$ — это угловая скорость вращения частицы, которую частица имела бы, если бы она мгновенно затвердела.

Если среда движется как твердое тело (без деформации), то вектор вихря – это угловая скорость тела (проверить, используя формулу Эйлера для распределения скоростей в абсолютно твердом теле).

Если среда при движении деформируется, вектор $\vec{\omega}$ в разных точках разный.

Если частица деформируется, то разные материальные отрезки вращаются по-разному.



AB, AD не поворачиваются
AC переходит в AC_1

Что же вращается со скоростью $\vec{\omega}$?

Ответ. Со скоростью $\vec{\omega}$ вращаются отрезки, направленные по главным осям тензора скоростей деформации. В этих осях $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$, углы между отрезками, лежащими в данный момент вдоль главных осей тензора скоростей деформаций, за малое время не меняются. Поэтому триэдр из отрезков, лежащих в данный момент времени вдоль главных осей, вращается как твердое тело, с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

4.5. Безвихревое движение – потенциальное движение

Движение, в котором всюду вектор вихря равен нулю, называется <u>безвихревым.</u>

Движение называется <u>потенциальным,</u> если существует такая функция $\varphi(t, x, y, z)$, что для компонент вектора скорости выполняются соотношения

$$\upsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \upsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \upsilon_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

В векторном виде эти соотношения записываются так: $\vec{\upsilon} = \mathbf{grad}\,\varphi$.

Функция $\varphi(t, x, y, z)$, такая, что $\vec{\upsilon} = \mathbf{grad}\,\varphi$, называется потенциалом скорости.

Что такое вектор $\mathbf{grad}\,\varphi$? Это вектор с компонентами $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, то есть,

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\vec{e}_3$$

Теорема 1

Если движение потенциальное, то вектор вихря равен нулю.

Доказывается проверкой. Например, $\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) = 0$

Теорема 2

Если вектор вихря во всем течении равен нулю, то есть,

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right) = 0,\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}\right) = 0,\ \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right) = 0$$

то существует такая функция $\varphi(t,x,y,z)$, что для компонент вектора скорости выполняются соотношения

$$\upsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \upsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \upsilon_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то есть, течение потенциальное.

4.6. Примеры вихревых движений

Пример 1.

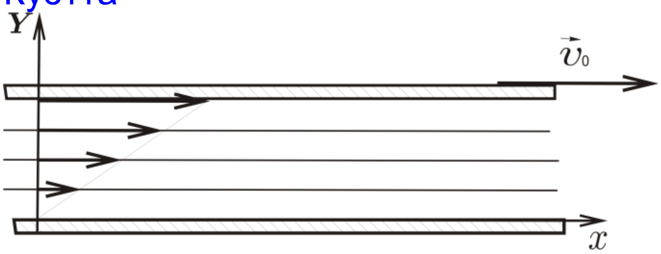
Вращение как твердого тела (т.е. без деформации) с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. В этом случае $\vec{\upsilon} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]$, $\vec{r}$ - радиус-вектор (формула Эйлера).

Вычисления показывают, что $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$.

Пример 2. Течение Куэтта – вихревое движение с прямолинейными траекториями.

В сплошной среде наряду с вращением происходит деформирование, и могут существовать вихревые движения с прямолинейными траекториями.

Пример такого движения – ламинарное течение вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами. Расстояние между пластинами равно h. Одна из пластин неподвижна, а другая движется со скоростью υ_0. Движущаяся пластина увлекает за собой жидкость и возникает течение, которое называется течением Куэтта



В этом течении $\upsilon_y = 0,\ \upsilon_z = 0,\ \upsilon_x = \frac{\upsilon_0}{h} y$

Вычислим вектор вихря:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right) = 0,\quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}\right) = 0,\quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right) = -\frac{\upsilon_0}{2h} \neq 0,$$

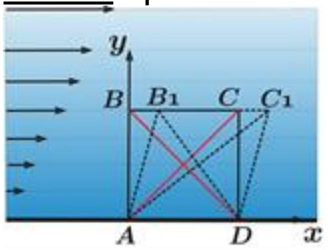
$$\vec{\omega} = -\frac{\upsilon_0}{2h}\vec{e}_z\ !$$

Заметим, что при этом отрезки, параллельные оси x, вообще не поворачиваются.

Есть ли отрезки, которые поворачиваются со скоростью $\vec{\omega}$?
Да! Они лежат вдоль главных осей тензора скоростей деформаций.
Найдем главные оси тензора скоростей деформаций. Вычислим компоненты e_{ij}:

$$e_{xx}=e_{yy}=e_{zz}=e_{xz}=e_{yz}=0,\; e_{xy}=e_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}\right)=\frac{\upsilon_0}{2h}$$

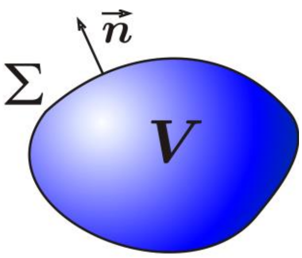
Видно, что длины материальных отрезков, лежащих вдоль координатных осей, за малое время не меняются.



Поэтому квадрат $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям, за малое время превращается в ромб AB_1C_1D, а взаимно перпендикулярные диагонали квадрата – во взаимно перпендикулярные диагонали ромба. Следовательно, углы между отрезками, в данный момент направленными по диагоналям квадрата, за малое время не меняются. Главные оси тензора скоростей деформаций направлены по диагоналям квадрата. Материальные отрезки, направленные по этим диагоналям, вращаются с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

4.7. Формула Гаусса –Остроградского (Г – О)

Формула Г – О дает преобразование интеграла по замкнутой поверхности Σ в интеграл по объему V, ограниченному этой поверхностью.



В декартовых координатах x, y, z формула Г – О:

$$\int_{\Sigma}(P\cos(\widehat{nx})+Q\cos(\widehat{ny})+R\cos(\widehat{nz}))d\sigma=\int_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

Здесь P, Q, R - произвольные дифференцируемые функции координат,

$\cos(\widehat{nx}),\ ,\cos(\widehat{ny}),\ \cos(\widehat{nz})$ – косинусы углов между $\vec{n}$ и осями координат,

$\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности Σ, $|\vec{n}|=1$.

Компоненты $\vec{n}$: $n_x=\cos(\widehat{nx}),\ n_y=\cos(\widehat{ny}),\ n_z=\cos(\widehat{nz})$.

Формула Г - О (другой вид):

$$\int_\Sigma (Pn_x + Qn_y + Rn_z)d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

Если $P = \upsilon_x,\ Q = \upsilon_y,\ R = \upsilon_z$, то (формула Г – О)

$$\int_\Sigma (\upsilon_x n_x + \upsilon_y n_y + \upsilon_z n_z)d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)dV$$

Или $$\int_\Sigma \upsilon_n d\sigma = \int_V \operatorname{div}\vec{\upsilon}\, dV$$

(так как $\upsilon_x n_x + \upsilon_y n_y + \upsilon_z n_z = (\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}) = |\vec{\upsilon}||\vec{n}|\cos(\widehat{\vec{\upsilon}\vec{n}}) = |\vec{\upsilon}|\cos(\widehat{\vec{\upsilon}\vec{n}}) = \upsilon_n$)

Задачи к лекциям 3, 4

Задача 1. Пусть величины перемещений и декартовы координаты измеряются в метрах, скорости – в метрах в секунду. Каковы размерности компонент тензора деформаций, тензора скоростей деформаций, вектора вихря?

Задача 2. Поле скорости в некоторой среде имеет вид

$$\upsilon_x = ax,\ \ \upsilon_y = ay,\ \ \upsilon_z = az,\ \ a > 0 - \text{константа}$$

Вычислить
1) компоненты тензора скоростей деформаций
2) компоненты вектора ускорения
3) компоненты вектора вихря
4) $\operatorname{div}\vec{\upsilon}$.
5) Является ли течение потенциальным?
6) Меняется ли объем частиц при этом движении?

Задача 3. Потенциал скорости имеет вид

$$\varphi = At^3(x^2 - y^2),\ \ A = const,\ \ t - \text{время}$$

Чему равны
1) компоненты вектора скорости?
2) компоненты вектора вихря?
3) компоненты тензора скоростей деформаций.
4) первый инвариант тензора скоростей деформаций.
5) Меняется ли со временем объем индивидуальных частиц?
6) Является ли течение стационарным?
7) Вычислить компоненты вектора ускорения