Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 15
Ударные волны в жидкостях и газах

Литература. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды, том I глава VII §4, §6;
Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика том VI Гидродинамика §84-89 ;
Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред, Лекция 28

Лекция 15. (Эглит М.Э.)
Ударные волны в модели идеальной жидкости

15.1. Поверхности сильного разрыва в сплошных средах. Условия на поверхностях разрыва, следующие из законов сохранения

15.2. Условия на поверхностях разрыва в идеальной жидкости

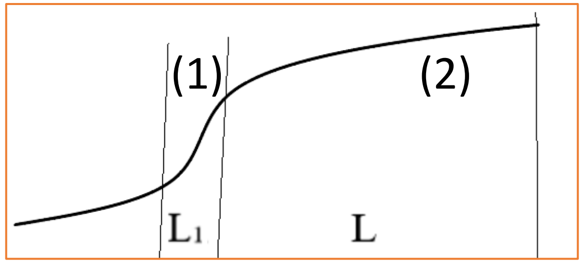
15.3. Тангенциальные разрывы и ударные волны. Свободная поверхность потока как тангенциальный разрыв. Граничные условия на свободной поверхности в идеальной жидкости

15.4. Ударные волны (скачки) в идеальной жидкости. Формулы, связывающие параметры по разные стороны скачка. Ударная адиабата

15.5. Скачки в совершенном газе

15.1. Поверхности разрыва в сплошных средах

Поверхность разрыва – модель узкой зоны резкого изменения скорости и других параметров среды: вся область (1) с малым масштабом L_1 заменяется разрывом. При построении решения в области (2) с большим линейным масштабом распределение параметров внутри области (1) (структура разрыва) не рассматривается.



$L_1 \ll L$

Такой подход сильно упрощает решение, так как позволяет использовать более крупную сетку при численном счете. К тому же в области с медленно меняющимся параметрами можно использовать более простые уравнения. Например, известно, что вязкие напряжения зависят от скоростей деформаций, то есть, от производных от скорости по координатам. В потоке вязкой жидкости в области (2), где производные малы, можно вязкие напряжения не учитывать, то есть, использовать вместо уравнений Навье – Стокса существенно более простые уравнения Эйлера.

Однако, хотя решение в зоне с малыми масштабами не рассматривается, его существование предполагается. В некоторых случаях требование существования решения, описывающего структуру разрыва, накладывает существенные ограничения на вид решения в крупномасштабной зоне.

Поверхности разрыва являются границами областей, в которых движение описывается дифференциальными уравнениями. На этих границах должны задаваться граничные условия.

Условия на поверхностях разрыва выводятся из законов сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии, а также из второго закона термодинамики. Они были выведены в курсе Основы механики сплошных сред.

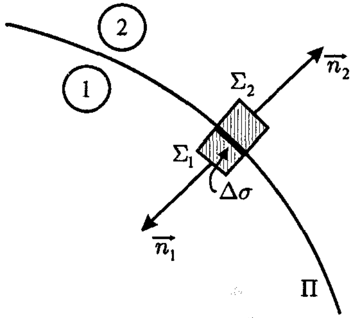


Рис. 28.2. Поверхность разрыва Π и малый цилиндрический объем, включающий участок $\Delta\sigma$ этой поверхности (вид сбоку)

М.Э. Эглит. Лекции по основам механики сплошных сред

Соотношения на разрыве, следующие из законов сохранения

Предположения. Собственных моментов количества движения и моментных напряжений нет, а из притоков энергии есть только работа сил. В частности, отсутствует приток тепла.

В системе координат, относительно которой поверхность разрыва неподвижна

$$(1)\ \rho_1 \upsilon_{n1} = \rho_2 \upsilon_{n2} = j$$

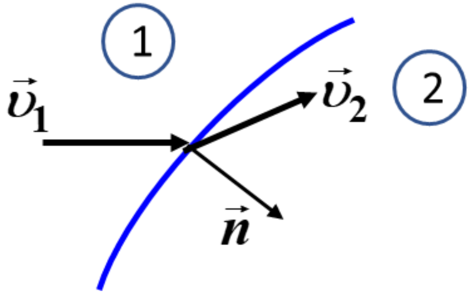
$$(2)\ j(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) = \vec{P}_{n2} - \vec{P}_{n1} \qquad (15.0)$$

$$(3)\ j\left(\frac{\upsilon_2^2}{2} + u_2 - \frac{\upsilon_1^2}{2} - u_1\right) = (\vec{P}_{n2} \cdot \vec{\upsilon}_2) - (\vec{P}_{n1} \cdot \vec{\upsilon}_1)$$

$$(4)\ j(s_2 - s_1) = \Omega$$

В системе координат, в которой поверхность разрыва движется со скоростью $\vec{D} = D\vec{n}$, в соотношениях (15.0) $\vec{\upsilon}$ заменяется на $\vec{\upsilon} - D\vec{n}$. При этом меняется только первое соотношение, выражающее закон сохранения массы. Оно заменяется на:

$$\rho_1(\upsilon_{n1} - D) = \rho_2(\upsilon_{n2} - D) = j$$



Здесь u – плотность внутренней энергии, $\vec{P}_n$ – вектор напряжений, Ω – производство энтропии при переходе через разрыв, j – обозначение потока массы через единицу площади поверхности разрыва

15.2. Условия на поверхности разрыва в идеальной жидкости

В идеальной жидкости

$$\vec{P}_{n1} = -p_1\vec{n}, \qquad \vec{P}_{n2} = -p_2\vec{n}$$

Закон сохранения количества движения принимает вид

$$j(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) = -p_2\vec{n} + p_1\vec{n}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\rho_1(\upsilon_{n1} - D) = \rho_2(\upsilon_{n2} - D) = j \\
&j(\upsilon_{n2} - \upsilon_{n1}) = p_1 - p_2 \\
&j(\vec{\upsilon}_{\tau 2} - \vec{\upsilon}_{\tau 1}) = 0 \qquad (15.1) \\
&j\left(\frac{\upsilon_2^2}{2} + u_2 - \frac{\upsilon_1^2}{2} - u_1\right) = p_1\upsilon_{n1} - p_2\upsilon_{n2} \\
&j(s_2 - s_1) = \Omega \quad (?)
\end{aligned}}$$

2 типа разрывов:

1. $j = 0$ - тангенциальный разрыв
2. $j \neq 0$ - ударная волна

15.3.Тангенциальные разрывы и ударные волны

I. $j = 0$ - тангенциальный разрыв.

Частицы среды не пересекают поверхность разрыва

$$\begin{aligned}
&\rho_1(\upsilon_{n1} - D) = \rho_2(\upsilon_{n2} - D) = j \\
&j(\upsilon_{n2} - \upsilon_{n1}) = p_1 - p_2 \\
&j(\vec{\upsilon}_{\tau 2} - \vec{\upsilon}_{\tau 1}) = 0 \\
&j\left(\frac{\upsilon_2^2}{2} + u_2 - \frac{\upsilon_1^2}{2} - u_1\right) = p_1\upsilon_{n1} - p_2\upsilon_{n2} \\
&j(s_2 - s_1) = \Omega \quad (?)
\end{aligned} \qquad (15.1)$$

Соотношения (15.1) дают: $\boxed{\upsilon_{n1} = \upsilon_{n2} = D; \quad p_1 = p_2}$ (15.2)

$\vec{\upsilon}_\tau, \rho, u, s$ по разные стороны разрыва любые.

При расчете потоков со свободными поверхностями, условия (15.2) – это кинематическое и динамическое граничные условия на свободной границе:

$$\upsilon_n\big|_{\text{на границе}} = D, \qquad p\big|_{\text{на границе}} = p_a,$$

p_a – давление во внешней среде

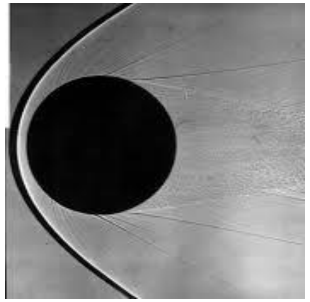
II. $j \neq 0$: скачок или ударная волна.

Частицы среды проходят через ударную волну, касательные составляющие скорости непрерывны $\boxed{\vec{\upsilon}_{2\tau} = \vec{\upsilon}_{1\tau}}$ (15.3)

$$\begin{aligned}
&(1)\ \rho_1(\upsilon_{n1} - D) = \rho_2(\upsilon_{n2} - D) = j \\
&(2)\ j(\upsilon_{2n} - \upsilon_{1n}) = p_1 - p_2 \\
&(3)\ j\left(\frac{\upsilon_2^2}{2} + u_2 - \frac{\upsilon_1^2}{2} - u_1\right) = p_1\upsilon_{n1} - p_2\upsilon_{n2}
\end{aligned} \qquad (15.4)$$

В (15.4) плотность внутренней энергии $u = u(p, \rho)$ – известная функция плотности и давления, $u_1 = u(p_1, \rho_1)$, $u_2 = u(p_2, \rho_2)$

Пусть параметры, например, со стороны (1) заданы. Для вычисления параметров со стороны (2), надо еще задать либо скорость скачка, либо значение одного из параметров со стороны (2).



Энтропия как функция плотности и давления – известна. Поэтому изменение энтропии при переходе через скачок вычисляется, если известны скачки плотности и давления.

15.4. Свойства ударных волн

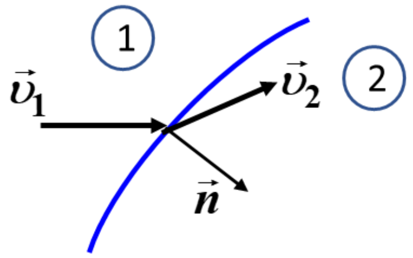
$$(1)\ \rho_1(\upsilon_{n1}-D)=\rho_2(\upsilon_{n2}-D)=j$$

$$(2)\ j(\upsilon_{n2}-\upsilon_{n1})=p_1-p_2 \qquad (15.4)$$

$$(3)\ j\left(\frac{\upsilon_2^2}{2}+u_2-\frac{\upsilon_1^2}{2}-u_1\right)=p_1\upsilon_{n1}-p_2\upsilon_{n2}$$

Передняя и задняя стороны скачка

Назовем передней ту сторону скачка, с которой среда поступает в скачок, тогда с задней стороны среда уходит от скачка.



Если скачок неподвижен и $\vec{n}$ направлена в сторону (2), то сторона (1) – передняя, если $\upsilon_{n1}>0$. Если скачок движется и $\vec{n}$ направлена в сторону (2), то сторона (1) – передняя, если $\upsilon_{n1}>D$;
$\upsilon_{n1}-D$ – скорость частиц среды относительно скачка; $D-\upsilon_{n1}$ – скорость скачка относительно среды перед скачком

Формулы, связывающие скорости по разные стороны скачка с давлениями и удельными объемами

$$V=\frac{1}{\rho}$$

Из (1) $\upsilon_{n1}-D=jV_1,\quad \upsilon_{n2}-D=jV_2,\quad \upsilon_{n2}-\upsilon_{n1}=j(V_2-V_1),\quad V\equiv 1/\rho$

Из (2) $j^2(V_2-V_1)=-(p_2-p_1)$

то есть

$$j^2=-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1} \qquad (15.5)$$

$$\upsilon_{n1}-D=jV_1=\sqrt{-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}}V_1,\qquad \upsilon_{n2}-D=jV_2=\sqrt{-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}}V_2 \qquad (15.6)$$

Здесь индексом 1 отмечена передняя сторона скачка

Из (15.5) и (15.6.) следуют 2 факта:

1. Либо $p_2>p_1$, то $V_2<V_1$ и $\rho_2>\rho_1$ - скачок уплотнения. Либо $p_2<p_1$, то $V_2>V_1$ и $\rho_2<\rho_1$ - скачок разрежения.

2. Слабые скачки (когда $V_2\to V_1$) распространяются по среде со скоростью звука:

$$(\upsilon_{n1}-D)^2\to-\frac{dp}{dV}V_1^2=\frac{dp}{d\rho}$$

Преобразование закона сохранения энергии (3). Ударная адиабата

$$(1)\ \rho_1(\upsilon_{n1}-D)=\rho_2(\upsilon_{n2}-D)=j$$

$$(2)\ j(\upsilon_{n2}-\upsilon_{n1})=p_1-p_2 \qquad (15.4)$$

$$(3)\ j\left(\frac{\upsilon_2^2}{2}+u_2-\frac{\upsilon_1^2}{2}-u_1\right)=p_1\upsilon_{n1}-p_2\upsilon_{n2}$$

Цель: исключить скорости из (3) и получить соотношение, связывающее давления и плотности по разные стороны ударной волны

Перепишем (3), заменяя $\vec{\upsilon}$ на $\vec{\upsilon}-D\vec{n}$. Учтем, что $\upsilon^2=\upsilon_n^2+\upsilon_\tau^2$ и что касательная составляющая скорости на скачке непрерывна:

$$j\left(\frac{(\upsilon_{n2}-D)^2-(\upsilon_{n1}-D)^2}{2}+u_2-u_1\right)=p_1(\upsilon_{n1}-D)-p_2(\upsilon_{n2}-D) \qquad (3')$$

В правой части используем формулы $\upsilon_{n1}-D=jV_1,\quad \upsilon_{n2}-D=jV_2,\quad V\equiv 1/\rho$

получаем $$\frac{(\upsilon_{n2}-D)^2-(\upsilon_{n1}-D)^2}{2}+u_2+\frac{p_2}{\rho_2}-u_1-\frac{p_1}{\rho_1}=0$$

Вводим энтальпию $i=u+\dfrac{p}{\rho}=u+pV$ Энтальпия (на единицу массы)

Далее используем, что $$\upsilon_{n1}-D=jV_1=\sqrt{-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}}V_1,\qquad \upsilon_{n2}-D=jV_2=\sqrt{-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}}V_2$$

Окончательно $$\frac{1}{2}(p_2-p_1)(V_2+V_1)+i_2-i_1=0 \qquad (15.7)$$

Это ударная адиабата или адиабата Гюгонио

Это соотношение связывает давления и плотности (или удельные объемы) по разные стороны скачка. Если перед скачком давление и плотность заданы, то ударная адиабата дает связь между плотностью и давлением за скачком.

Скачки в совершенном газе

$$\frac{V_2}{V_1} \to \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$i = u + \frac{p}{\rho} = c_V T + \frac{p}{\rho} = c_V \frac{p}{R\rho} + \frac{p}{\rho} = \frac{p}{\rho}\left(\frac{1}{\gamma-1}+1\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} pV$$

$$j^2 = -\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}$$ наклон хорды

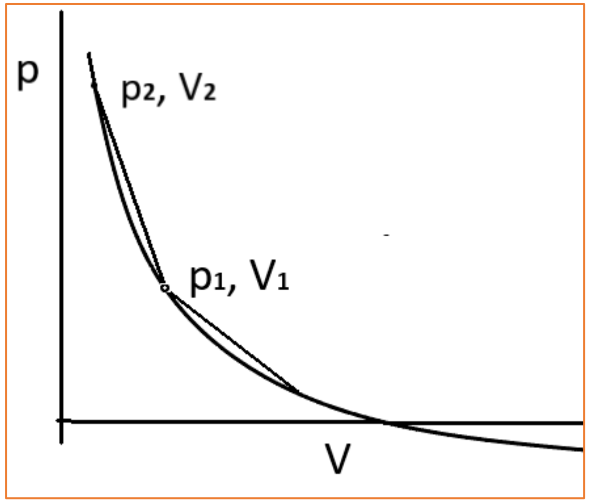
$$\upsilon_{n1} - D = jV_1 = \sqrt{-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}}\, V_1,$$

Подставляя это выражение в (15.7), получаем адиабату Гюгонио для совершенного газа

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)V_1-(\gamma-1)V_2}{(\gamma+1)V_2-(\gamma-1)V_1}} \qquad (15.8)$$

Адиабата Пуассона

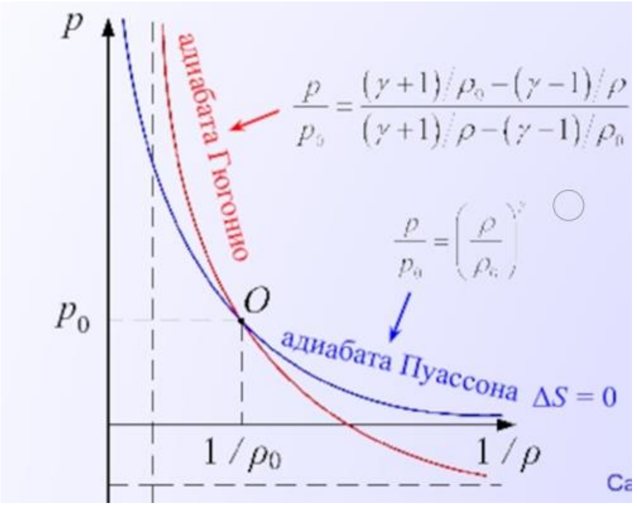
$$\boxed{s = \text{const} \to \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}, \text{ т. е. } \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}}$$



1. Чем больше p_2, тем больше скорость скачка относительно среды перед ним

2. Наклон касательной в точке p_1, V_1 определяет скорость звука перед скачком. Если $p_2 > p_1$ (скачок уплотнения), то скорость скачка по среде перед ним больше скорости звука

3. $p_2 \to \infty$ при $\frac{V_2}{V_1} \to \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ то есть, при $\frac{\rho_2}{\rho_1} \to \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ Для воздуха $\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 6$

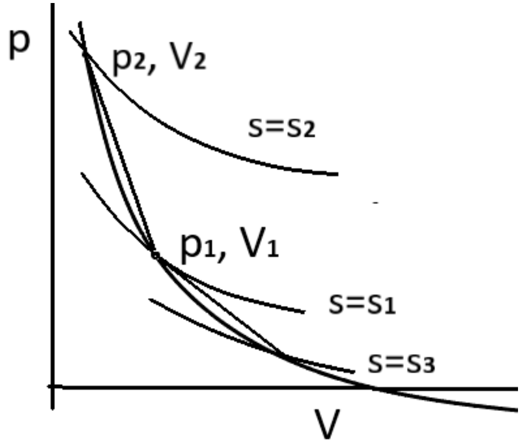


Из лекции П.С. Уткина МФТИ

4. При $p_2 < p_1$ будет $s_2 < s_1$.

В совершенном газе скачки уплотнения возможны, а скачки разрежения невозможны (Теорема Цемплена)

См задачу 25.34б в книге Механика сплошных сред в задачах. Под ред. М.Э. Эглит



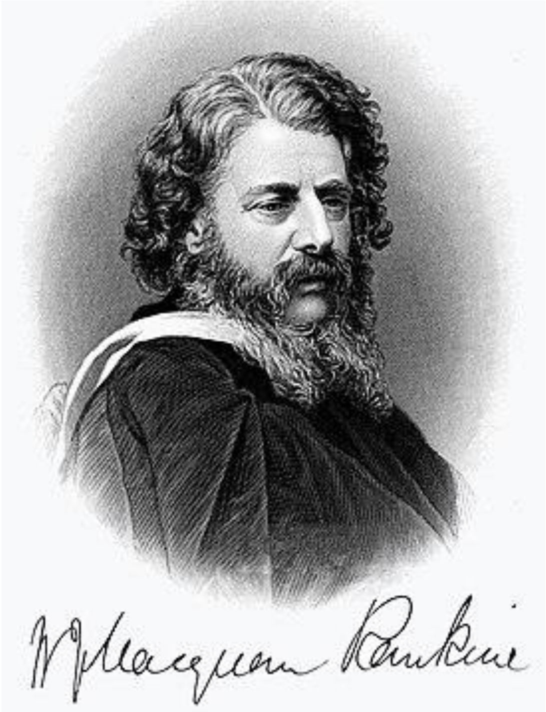
О поверхностях разрыва в произвольных средах

- Ударная волна бесконечно малой интенсивности распространяется относительно газа со скоростью звука.
- Фронт ударной волны распространяется относительно фона со сверхзвуковой скоростью.
- Теорема Цемплена: не существует ударных волн разрежения.

Эти утверждения верны для жидкостей и газов, уравнение состояния которых удовлетворяет условию

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{s=const} > 0}$$

Доказательства находим в учебниках



Ударная адиабата. Ранкин 1870, Гюгонио 1985 (публикация 1889)

Конец Лекции 15

Уильям Джон Макуорн Ранкин (**Ренкин**) (англ. *William John Macquorn Rankine)*;
1820, - 1872) шотландский инженер, физик и механик

Пьер-Анри́ Гюгонио́[2] (*Pierre-Henri Hugoniot*; 1851 - 1887) — французский математик и механик.