

Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 14

- I. Добавление о волнах Римана
- II. Малые возмущения со сферическими волнами

Литература. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды, том II глава VIII §17 и §18;
Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика том VI Гидродинамика §64, 68, 70; *Г.Г. Черный.* Газовая динамика Глава 2 §7.

Лекция 14. (Эглит М.Э.)

- 14.1. Волны Римана. Условия, при которых может происходить опрокидывание волны
- 14.2. Примеры задач, решения которых содержат волны Римана
- 14.3. Малые возмущения со сферическими волнами. Волновое уравнение
- 14.4. Распространение малых возмущений от точечного источника в неподвижной среде
- 14.5. Малые возмущения от источника, движущегося вдоль прямой. Эффект Доплера. Конус Маха

14.1. Волны Римана (простые волны)

Рассматриваем одномерные движения с плоскими волнами, считая, что движения баротропные, $p = p(\rho)$, и массовых сил нет. Система уравнений:

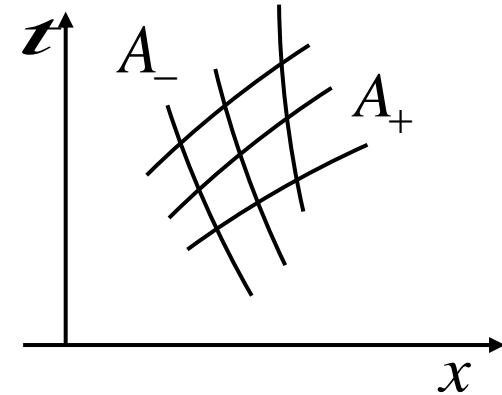
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \text{где } v = v_x, \quad a^2(\rho) = \frac{dp}{d\rho} \quad (14.1)$$

В Лекции 13 было показано, что для системы (14.1) можно на плоскости x, t ввести 2 системы линий (характеристики A_+ и A_-), уравнения которых

$$A_+ : \frac{dx}{dt} = c_+ = v + a \quad \text{и} \quad A_- : \frac{dx}{dt} = c_- = v - a$$

так, что система (14.1) сводится к следующим соотношениям

$$I_+ = v + \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho = \text{const} \quad \text{вдоль характеристик } A_+ \\ I_- = v - \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho = \text{const} \quad \text{вдоль характеристик } A_- \quad (14.2)$$



Было обозначение: $w = \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho$

I_+ и I_- называются инвариантами Римана

Волнами Римана называют решения одномерных уравнений с плоскими волнами, в которых искомые функции зависят не отдельно от x, t , а только от некоторой их комбинации $\varphi(x, t)$: $v = v(\varphi), \rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi = \varphi(x, t)$

Здесь φ – не потенциал скорости, а просто какая-то комбинация x, t

Замечание. Очевидно, что волны Римана можно определить как движения, в которых все параметры можно представить как функции одного из них. Например, выражая φ через ρ , получим $v = v(\rho)$.

2 класса волн Римана

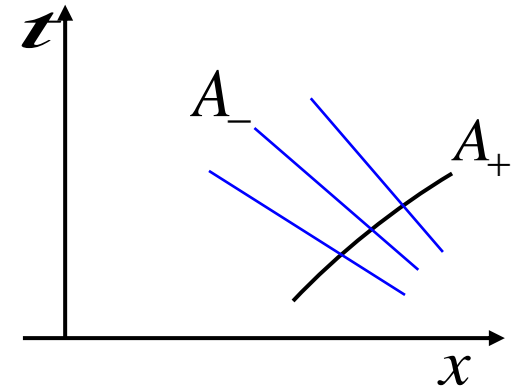
В Лекции 13 было показано, что существуют два класса решений системы (14.1), которые являются **волнами Римана**; они определяются формулами:

Класс I: $v = v(\varphi)$, $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi = \text{const}$ – это характеристики A_+ ,

$$I_- = v - \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho = \text{const} \text{ во всем потоке.}$$

Класс II: $v = v(\varphi)$, $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi = \text{const}$ – это характеристики A_- ,

$$I_+ = v - \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho = \text{const} \text{ во всем потоке.}$$



Решение из класса II

О характеристиках в волнах Римана

Покажем, что в волнах Римана одно из семейств характеристик – прямые линии

Рассмотрим, например, решение I, в котором
Это значит, в частности, что

$$I_- = v - \int \frac{a}{\rho} d\rho = \text{const} = M.$$

$$v = M + \int \frac{a}{\rho} d\rho = v(\rho), \quad I_+ = v + \int \frac{a}{\rho} d\rho = M + 2 \int \frac{a}{\rho} d\rho = I_+(\rho), \quad c_+ = M + \int \frac{a}{\rho} d\rho + a = c_+(\rho) \quad (*)$$

Так как **всегда** $I_+ = \text{const}$ вдоль характеристики A_+ , то в решении I вдоль A_+ : $\rho = \text{const}$ и $c_+ = \text{const}$

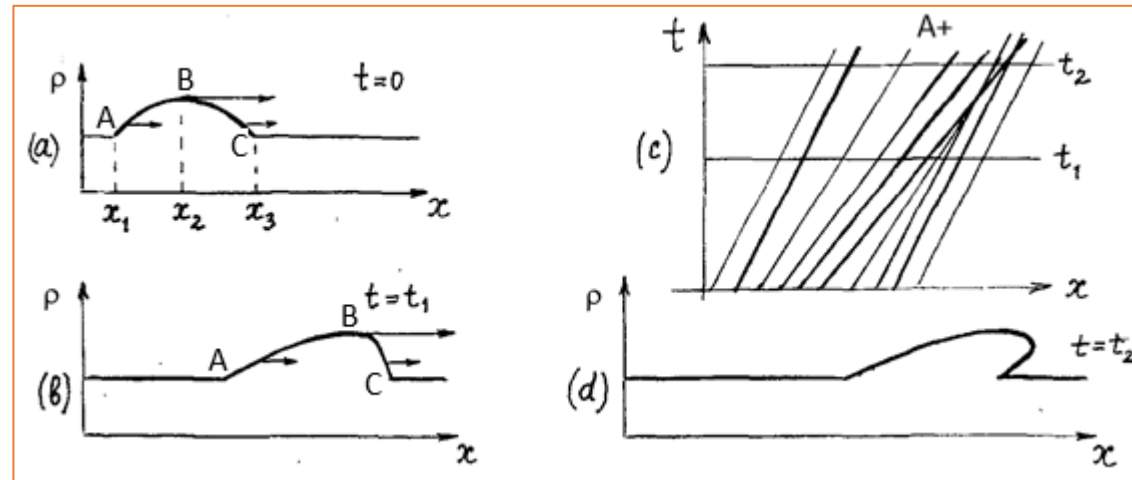
Значит, в решении I характеристики A_+ - **прямые линии**, их уравнения $x - c_+ t = \text{const}$

Так как семейство линий $\varphi = \text{const}$ совпадает с семейством A_+ , то $\varphi = x - c_+ t, \quad v = v(x - c_+ t), \quad \rho = \rho(x - c_+ t)$

Каждое значение ρ и соответствующее ему значение v переносятся без изменения вдоль оси x вправо со скоростью $c_+ = v + a$. Значит, это движущаяся волна. Так как $c_+ = c_+(\rho)$, то форма этой волны при перемещении меняется.

Определение. Волна называется **волной сжатия**, если при ее прохождении по среде плотность частиц среды увеличивается, и **волной разрежения** – если плотность убывает.

С учетом того, что $c_+ > v$ заключаем, что на рисунке область BC – волна сжатия, а область AB – волна разрежения. Если $c_+(\rho)$ возрастает с ростом ρ , то при движении волна разрежения растягивается, а волна сжатия укорачивается; со временем точки с большим ρ обгоняют передний фронт (опрокидывание волны). Характеристики A_+ показаны на рис (в).



Условия, при которых опрокидывается волна сжатия

Изменение формы волны в процессе ее движения определяется зависимостью c_+ от ρ . В рассматриваемой простой волне (см соотношения (*))

$$v = M + \int \frac{a}{\rho} d\rho, \quad c_+ = M + \int \frac{a}{\rho} d\rho + a = c_+(\rho), \quad a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

$$\frac{dc_+}{d\rho} = \frac{a}{\rho} + \frac{da}{d\rho} = \frac{a}{\rho} + \frac{1}{2a} \frac{d^2 p}{d\rho^2} = \frac{1}{2a\rho^4} \frac{d^2 p}{dV^2}, \quad V \equiv \frac{1}{\rho}$$

Если $\frac{d^2 p}{dV^2} > 0$, то есть, $\frac{da}{d\rho} > -\frac{a}{\rho}$ (**), то бóльшие значения ρ переносятся в простой волне с бóльшей скоростью.

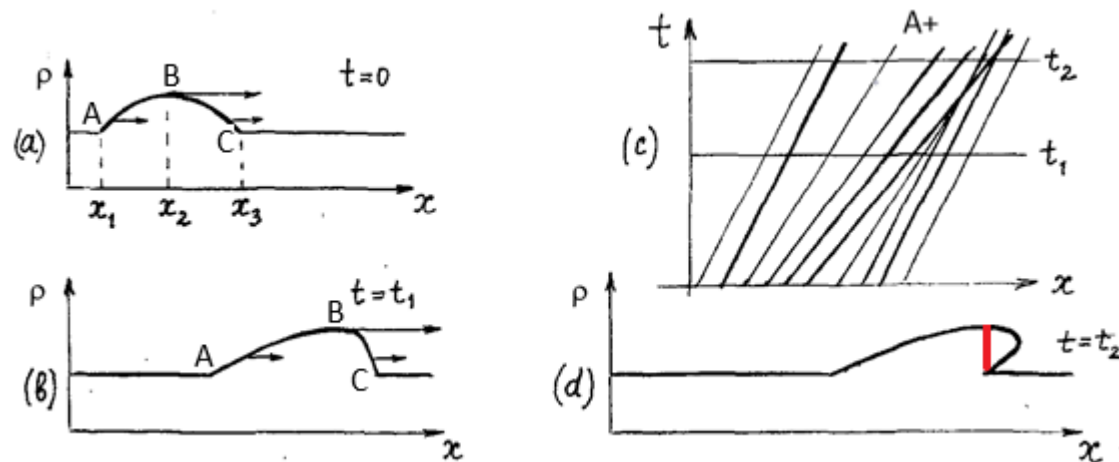
В средах, в которых выполняется неравенство (**), волна сжатия при распространении становится все круче, что со временем приводит к возникновению ударной волны сжатия, в которой плотность увеличивается скачком. Волны разрежения, напротив, становятся все более пологими, ударные волны разрежения не возникают.

Газы, в которых соотношения (**) выполняются, называют нормальными. В частности, они выполняются для адиабатических движений совершенного газа:

$$p = A\rho^\gamma, \quad a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}, \quad \frac{da}{d\rho} = \frac{1}{2a}(\gamma-1)A\gamma\rho^{\gamma-2} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho} > -\frac{a}{\rho} \text{ т.к. } \gamma > 1$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{R + c_V}{c_V} > 1$$

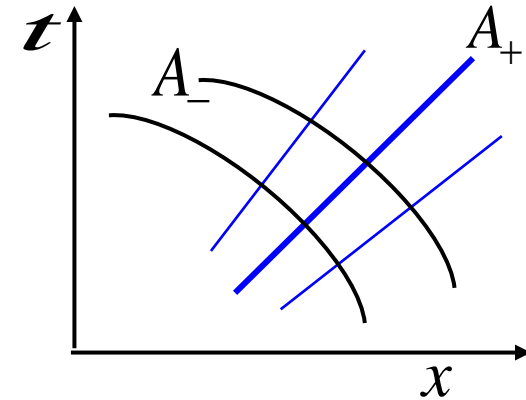
Если $\frac{d^2 p}{dV^2} > 0$, то есть, $\frac{da}{d\rho} > -\frac{a}{\rho}$ (***) , то возможны ударные волны разрежения, а скачки сжатия не возникают.



14.2. Примеры задач, решения которых содержат волны Римана

Теорема. Если в решении имеется одна прямолинейная характеристика, то в ее окрестности решение есть волна Римана.

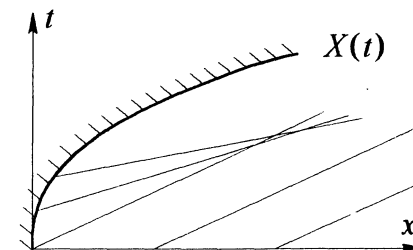
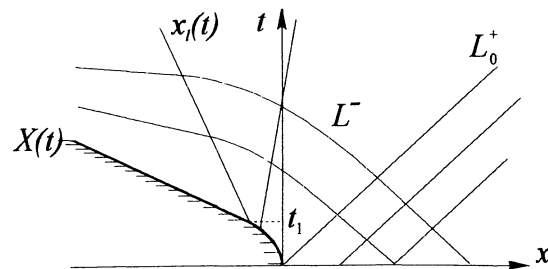
Доказательство. Пусть, например, эта прямолинейная характеристика есть A_+ . На этой характеристике $\frac{dx}{dt} = v + a(\rho) = \text{const}$, и, кроме того, $I_+ = v + \int (a/\rho) d\rho = \text{const}$, поэтому $v = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$. Рассмотрим характеристики A_- , пересекающие прямолинейную характеристику A_+ . На A_- всегда $I_- = v - \int (a/\rho) d\rho = \text{const}$. В общем случае на разных характеристиках A_- эти константы разные. Но в данном случае, так как во всех точках, где разные A_- пересекают нашу характеристику A_+ , величины v и ρ одинаковы, $I_- = v - \int (a/\rho) d\rho$ равен **одной и той же константе** на всех этих A_- . В области, занятой этими характеристиками, решение есть волна Римана, в частности, все A_+ прямолинейные.



Из этой теоремы, в частности, следует, что с областями покоя или однородного потока может граничить только волна Римана

Задачи о поршне

См. задачи 25.30 и 25.31 из Механика сплошных сред в задачах. Под ред. М.Э. Эглит <http://gidropraktikum.narod.ru/>



14.3. Малые возмущения со сферическими волнами. Волновое уравнение

Трёхмерные уравнения для малых возмущений состояния покоя в случае потенциального баротропного движения приводятся к волновым уравнениям для потенциала скорости φ и плотности ρ (см. Лекцию 12)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \rho'$$

Рассмотрим одномерное движение со сферическими волнами: все параметры являются функциями времени и расстояния от начала координат $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и имеется только компонента скорости вдоль r . Удобно использовать сферические координаты. Выражение для $\Delta \varphi$ в криволинейных координатах имеет вид

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \nabla_i (g^{ik} \nabla_k \varphi) = g^{ik} \nabla_i \nabla_k \varphi = g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (\nabla_k \varphi) - \nabla_m \varphi \Gamma_{ik}^m \right) = g^{ik} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \Gamma_{ik}^m \right)$$

В сферических координатах при условии, что $\varphi = \varphi(r, t)$:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}$$

Волновое уравнение для сферически-симметричного движения:

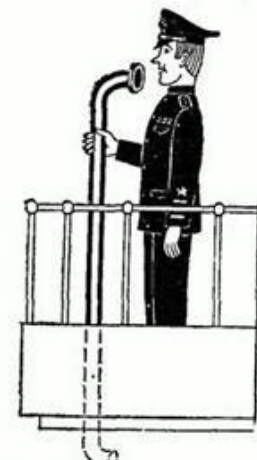
$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}$$

Общее решение

$$\varphi = \frac{f_1(r - a_0 t)}{r} + \frac{f_2(r + a_0 t)}{r}$$

Второе слагаемое: сходящаяся волна с возрастающей амплитудой

Первое слагаемое: расходящаяся волна с **убывающей** амплитудой



14.4. Малые возмущения в покоящейся сжимаемой жидкости от источника в начале координат.

Рассмотрим расходящуюся волну $\varphi = \frac{f_1(r - a_0 t)}{r}$

Запишем этот потенциал в виде $\varphi = -\frac{Q(t - r/a_0)}{4\pi r}$

Этот потенциал можно назвать потенциалом источника с расходом $Q(t)$:

Расход через сферу $r = R$:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q(t - r/a_0)}{4\pi r^2} + \frac{Q'(t - r/a_0)}{4\pi r a_0}$$

$$\int_{r=R} v_r d\sigma = v_r|_{r=R} \cdot 4\pi R^2 = Q(t - R/a_0) + Q'(t - R/a_0) \frac{R}{a_0} \text{ стремится к } Q(t) \text{ при } R \rightarrow 0$$

Пусть $Q(t) \neq 0$ только при $0 < t < t_1$. Тогда $\varphi \neq 0$ при $0 < t - r/a_0 < t_1$

В некоторой точке r : $\varphi \neq 0$ при $r/a_0 < t < t_1 + r/a_0$

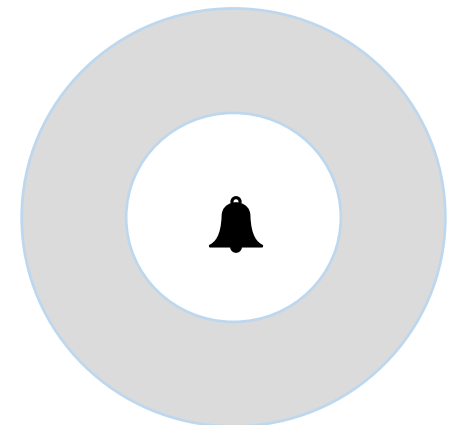
1) Хотя источник начинает действовать в момент $t = 0$, в точке r возмущения начинаются только в момент $t = r/a_0$

Поэтому этот потенциал называется запаздывающим

2) В любой момент времени возмущения не равны нулю только в области $a_0(t - t_1) < r < a_0 t$

Имеется передний фронт, а при $t > t_1$ - также и задний фронт

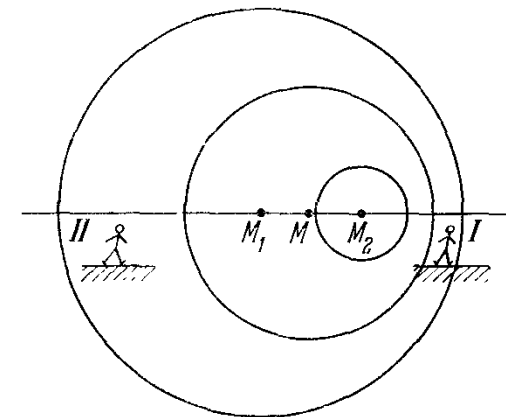
При $t_1 \rightarrow 0$ (источник вспыхнул и сразу исчез) возмущения сосредоточены на сфере $r = a_0 t$



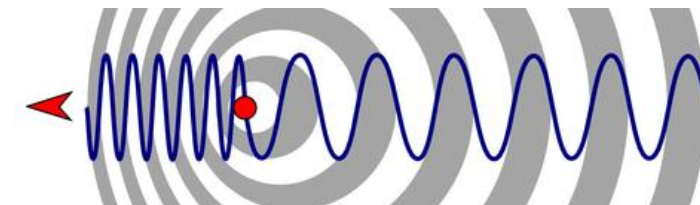
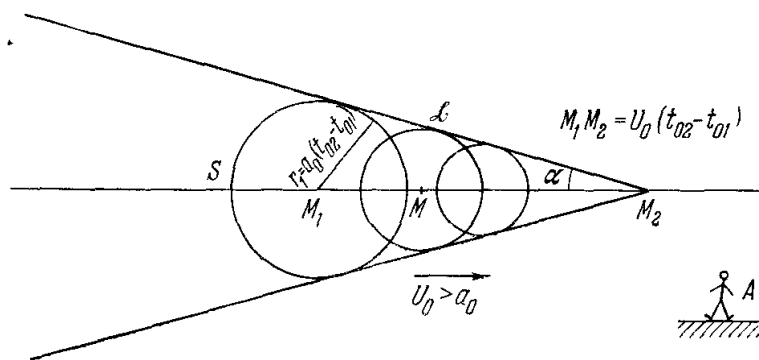
14.5. Возмущения от движущегося источника

I. Источник движется с дозвуковой скоростью, $U < a_0$

1. Возмущения от источника обгоняют источник и возмущают среду перед ним.
2. Картина распространения возмущений не симметрична. Впереди источника звук имеет большую частоту, чем за ним. Наблюдатель, находящийся впереди приближающегося источника звука, слышит звук более высокого тона, чем наблюдатель, стоящий позади удаляющегося источника звука (Эффект Доплера)



II. Источник движется со сверхзвуковой скоростью, $U > a_0$



1. Источник обгоняет волны возмущений. Среда перед ним не возмущена
 2. Все возмущения лежат внутри конуса, который называют **конусом Маха**.
- Угол при вершине конуса определяется формулой

$$\sin \alpha = \frac{a_0}{U} = \frac{1}{M}, \quad M - \text{число Маха}$$



МАХ, ЭРНСТ (Mach Ernst) (1838–1916)

Конец Лекции 14



Георг Фридрих Бернхард Риман (1826 – 1866)