Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 12

Движение сжимаемой жидкости (газа)

Литература. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. Гл.V §44; Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика том VI Гидродинамика §64, 70

Лекция 12. (Эглит М.Э.)

Распространение малых возмущений в сжимаемой жидкости (газе)

12.1. Баротропные движения сжимаемой жидкости (газа). Полная система уравнений
12.2. Система уравнений для потенциальных движений
12.3. Движения, возникающие в результате малых возмущений состояния покоя. Линеаризация уравнений
12.4. Малые возмущения в виде плоских волн
12.5. Свойства решений одномерного волнового уравнения
12.6. Характеристики для уравнений, описывающих произвольное баротропное одномерное движение газа

1

12.1. Баротропные движения идеальной сжимаемой жидкости (газа). Полная система уравнений

Предположения (1) о среде и процессах.

1) Жидкость идеальная (трение не учитывается, применимы уравнения Эйлера);
2) массовые силы отсутствуют; 3) движение баротропное, $\rho = \rho(p)$, то есть, $p = p(\rho)$

Примеры баротропных движений :

1) Изотермическое движение совершенного газа с одинаковой для всех частиц температурой:
$p = RT\rho, \quad RT = const$
2) Адиабатическое движение совершенного газа с одинаковой для всех частиц энтропией
$p = A\rho^{\gamma}, \quad A = A_1 e^{s/c_V} = const$

Обычно, если выполнены предположения (1), то движение потенциальное, $\vec{\upsilon} = \operatorname{grad} \varphi$; в частности, оно потенциальное, если возникает из состояния покоя, когда в начальный момент вихрь во всей области равен нулю.

Система уравнений в декартовых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \operatorname{div} \vec{\upsilon} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \upsilon_k \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0$$

$$p = p(\rho)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \operatorname{div} \vec{\upsilon} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \upsilon_k \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_k} + \frac{a^2}{\rho} \operatorname{grad} \rho = 0 \qquad (*)$$

где $a^2 = \dfrac{dp}{d\rho} = a^2(\rho)$

Это квазилинейная система уравнений : производные от искомых функций входят линейно, но коэффициенты при них сами зависят от искомых функций.

12.2. Система уравнений для потенциальных баротропных движений сжимаемой жидкости

Если движение потенциальное, то $\upsilon_k = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, а уравнения движения интегрируются и превращаются в интеграл Коши – Лагранжа. Система уравнений принимает вид (в декартовых координатах):

Уравнение неразрывности
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\rho}{\partial x_k} + \rho\Delta\varphi = 0$$

Интеграл Коши-Лагранжа
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2 + P(\rho) = f(t)$$

где
$$P(\rho) = \int\frac{1}{\rho}dp = \int\frac{a^2}{\rho}d\rho, \quad a^2(\rho) = \frac{dp}{d\rho}$$

$f(t)$ – можно положить равной нулю или любой удобной константе *C*, т.к. можно заменить φ на $\varphi_1 + \int(f(t) - C)dt$, не изменяя поля скорости. Для φ_1 получим интеграл Коши – Лагранжа, в котором в правой части стоит *C*.

12.3. Движения, которые возникают в результате малых возмущений состояния покоя. Линеаризация уравнений (см. также Лекцию 7)

Пусть вначале был покой: $\upsilon_k = \upsilon_{0k} = 0,\ p = p_0 = \text{const},\ \rho = \rho_0 = \text{const}\ ,\ a = a_0 = \text{const}$

Из-за какого-то малого возмущения возникает движение, в котором $\upsilon_k = \upsilon'_k,\ p = p_0 + p',\ \rho = \rho_0 + \rho',\ a^2 = a_0^2 + (a^2)'$

$\boxed{\upsilon',\ p',\ \rho',\ (a^2)' - \text{малые добавки}}$, (малые возмущения исходного состояния). Подставим выражения υ_k, p, ρ, a^2 в уравнения и отбросим члены с произведениями малых величин (проведем линеаризацию системы).

В интеграле Коши – Лагранжа полагаем
$$P(\rho) = P(\rho_0 + \rho') = P(\rho_0) + \left.\frac{dP}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}\cdot\rho' = P(\rho_0) + \frac{a_0^2}{\rho_0}\rho'$$
и $f(t) = P(\rho_0)$

Система уравнений для малых возмущений состояния покоя

1. Уравнение неразрывности $$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0,$$

2. Интеграл Коши - Лагранжа $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \rho' = 0, \quad \text{где} \quad a_0^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}$$

Из этой системы можно получить уравнения отдельно для φ и для ρ'. Например, подставляя в первое уравнение выражение ρ' через $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ из второго уравнения, получим уравнение для φ, а дифференцируя по t первое уравнение и применяя оператор Лапласа ко второму уравнению – уравнение для ρ'. Эти уравнения имеют одинаковый вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \varphi, \qquad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \rho'$$

Более того, аналогичным уравнениям удовлетворяют в случае потенциального движения также компоненты вектора скорости и возмущения давления

$$\frac{\partial^2 \upsilon_k'}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \upsilon_k', \qquad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta p'$$

В этом легко убедиться, дифференцируя уравнение для φ по x_k, а в уравнение для ρ' подставляя соотношение $\rho' = p'/a_0^2$, которое обосновывается следующим равенством

$$\rho = \rho(p) = \rho(p_0 + p') = \rho(p_0) + p' \left.\frac{d\rho}{dp}\right|_{p=p_0} = \rho_0 + \frac{1}{a_0^2} p' = \rho_0 + \rho'$$

Уравнение вида $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta f$$ называется волновым уравнением

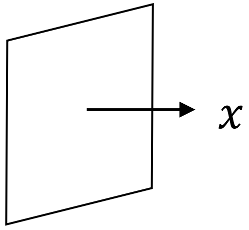
Итак, все параметры возмущенного движения удовлетворяют (в линейном приближении) волновым уравнениям (если нет вихрей)

12.4. Малые возмущения в виде плоских волн

Рассмотрим движение идеальной сжимаемой жидкости, в котором все параметры зависят только от x и t и отлична от нуля только скорость вдоль оси x :

$$v_y = 0\,,\; v_z = 0\,, v_x = v(t,x),\quad p = p(t,x),\quad \rho = \rho(t,x)$$

(одномерное движение с плоскими волнами). Тогда волновые уравнения принимают вид:



$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 v_k'}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 v_k'}{\partial x^2}$$

Общий вид одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,\quad a_0^2 = \text{const}$$

Общее решение этого уравнения называется решением Даламбера. Оно имеет вид:

$$f = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t)$$

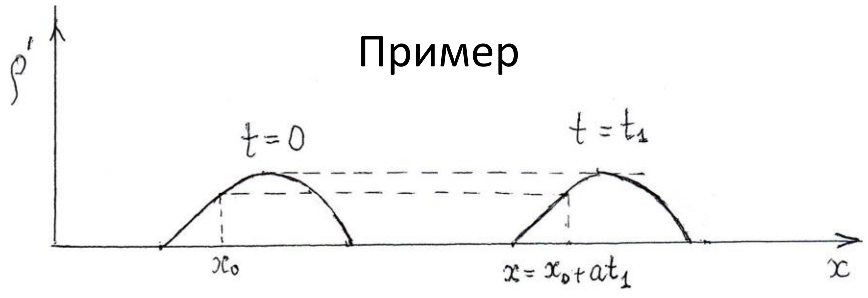
Здесь f_1 , f_2 - произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов.
Эти функции при решении конкретных задач определяются из начальных и граничных условий.

Физический смысл слагаемых в общем решении одномерного волнового уравнения (см. Лекцию 7)

$$\boxed{f = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t)} \quad \text{или} \quad \boxed{f = f_1(\xi) + f_2(\eta)\,, \quad \xi = x - a_0 t,\ \eta = x + a_0 t}$$

Физический смысл $f_1(x - at)$: это волна, распространяющаяся без изменения формы вдоль оси x вправо со скоростью a_0; $f_2(x + at)$ - волна, распространяющаяся без изменения формы вдоль оси x влево со скоростью a_0

Пример



Если $\rho' = f(x - at)$, то $\rho' = \mathrm{const}$ при $x - at = \mathrm{const}$. Пусть при $t = 0$ в точке $x = x_0$: $\rho' = \rho_0'$. При $t = t_1$ то же самое значение $\rho' = \rho_0'$ будет в точке $x - at_1 = x_0$, то есть $x = x_0 + at_1$. Итак, согласно этому решению любое значение ρ' с течением времени переносится вправо вдоль оси x со скоростью a.

Если $\rho' = f(x + at)$, то $\rho' = \mathrm{const}$ при $x + at = \mathrm{const}$, то есть, при $x = -at + \mathrm{const}$.
Значит, любое значение ρ' переносится вдоль оси x со скоростью (- a).

Распространение одномерных малых возмущений в сжимаемой жидкости. Решение задачи Коши

Пусть движение происходит в безграничном пространстве. При $t = 0$ заданы малые возмущения состояния покоя, в котором было $v_x = 0, \rho = \rho_0$, то есть, при $t = 0$ заданы $v_x = v'(x), \rho = \rho_0 + \rho'(x)$; это значит, что заданы φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

так как $\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \text{ то есть, } \varphi = \int v_x dx, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a_0^2}{\rho_0}\rho'}$

Задача Коши: найти решение уравнения $\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},}$

если при $t = 0$ заданы $\varphi(0,x)=F(x)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,x)=\Phi(x)$

Решение

Всегда $\boxed{\varphi = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t)}$

Начальные условия: $\boxed{f_1(x) + f_2(x) = F(x), \quad -a_0 f_1'(x) + a_0 f_2'(x) = \Phi(x)}$

Здесь штрихом обозначены производные!

Дифференцируя первое нач. условие, умножая его на a_0 и затем складывая и вычитая из второго, получим

$$\boxed{2a_0 f_1'(x) = a_0 F'(x) - \Phi(x), \quad 2a_0 f_2'(x) = a_0 F'(x) + \Phi(x)}$$

Интегрируя, получаем

$$\boxed{f_1(x) = \frac{1}{2}[F(x) - G(x)], \quad f_2(x) = \frac{1}{2}[F(x) + G(x)]}$$

где

$$\boxed{G(x) = \int \frac{\Phi(x)}{a_0} dx}$$

Решение нашей задачи

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{2}[F(x - a_0 t) - G(x - a_0 t) + F(x + a_0 t) + G(x + a_0 t)]}$$

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{a_0^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{2a_0}\left[-F'(x - a_0 t) + \frac{\Phi(x - a_0 t)}{a_0} + F'(x + a_0 t) + \frac{\Phi(x + a_0 t)}{a_0}\right]$$

Тогда

$$v' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[F'(x - a_0 t) - \frac{\Phi(x - a_0 t)}{a_0} + F'(x + a_0 t) + \frac{\Phi(x + a_0 t)}{a_0}\right]$$

12.5. Свойства решений одномерного волнового уравнения

I. Связь между скоростью и плотностью в волне, бегущей вправо

В общем случае решение представляет собой сумму двух волн, бегущих вправо и влево вдоль оси x.

Рассмотрим одну из этих волн: $\boxed{\varphi = f_1(x - a_0 t)}$

В этой волне $\boxed{\rho' = -\dfrac{\rho_0}{a_0^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \dfrac{\rho_0}{a_0} f_1'(x - a_0 t), \quad \upsilon' = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = f_1'(x - a_0 t)}$ то есть, $\boxed{\upsilon' = a_0 \dfrac{\rho'}{\rho_0}}$ (12.1)

Замечание. В волне, бегущей влево, когда $\varphi = f_1(x + a_0 t)$, получим $\boxed{\upsilon' = -a_0 \dfrac{\rho'}{\rho_0}}$

Полученный результат позволяет ответить на следующий вопрос.

Мы рассматриваем поведение малых возмущений состояния покоя -- движение, в котором

$\upsilon_k = \upsilon_k', \ p = p_0 + p', \ \rho = \rho_0 + \rho', \ a^2 = a_0^2 + (a^2)'$, где $\upsilon', \ p', \ \rho', \ (a^2)'$ – малые добавки

Это значит, в частности, что $\boxed{\rho' \ll \rho_0, \ \ p' \ll p_0, \ \ (a')^2 \ll (a_0)^2}$

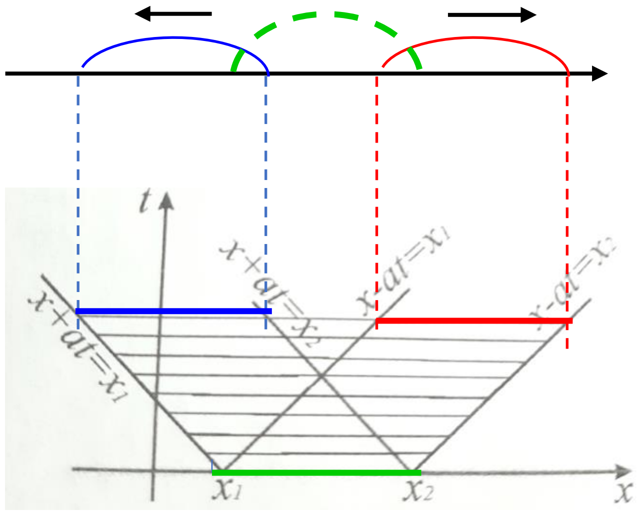
Вопрос: по сравнению с чем должны быть малы возмущения скорости?

Ответ получается из равенства (12.1). Так как по условию $\rho' \ll \rho_0$, то $\boxed{\upsilon' \ll a_0}$

Это одно из условий применимости теории малых возмущений

II. Область влияния начальных данных

Посмотрим, как распространяются возмущения, созданные в начальный момент в области $x_1 \leq x \leq x_2$



При $t > 0$ они представляются в виде суммы двух волн, бегущих вправо и влево вдоль направления x. В этих волнах величины скорости и плотности постоянны, если $x = x_0 + a_0 t$ и $x = x_0 - a_0 t$, соответственно (x_0- координата точки области начального состояния) . На плоскости x, t это прямые линии с углами наклона $\frac{dx}{dt} = \pm a_0$. Эти линии называются характеристиками.

Координата переднего фронта правой волны: $x = x_2 + a_0 t$, а левой волны: $x = x_1 - a_0 t$. Соответственно, область, где в момент t решение определяется начальными данными из отрезка $x_1 \leq x \leq x_2$, есть $x_1 - a_0 t \leq x \leq x_2 + a_0 t$.

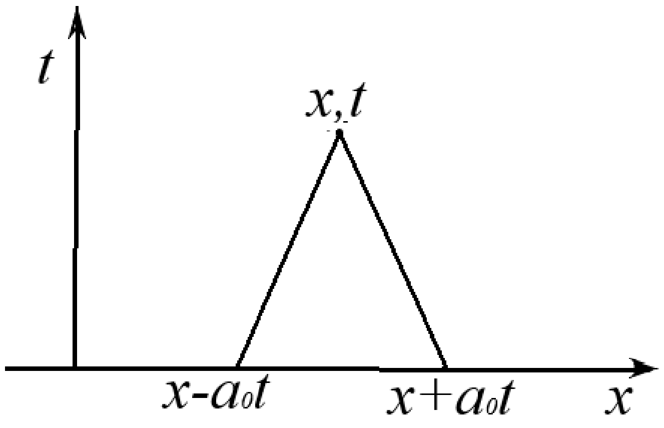
Эту область называют областью влияния начальных данных.

На плоскости x, t область влияния начальных данных из отрезка *t=0,* $x_1 \leq x \leq x_2$ – это область внутри угла, образованного характеристиками $x = x_2 + a_0 t$ и $x = x_1 - a_0 t$, обрезанная снизу осью *t=0.*

На течение правее и левее этой области начальные данные из отрезка *t=0,* $x_1 \leq x \leq x_2$ не влияют. Можно их менять, не меняя решение в остальных областях, при условиях, что при переходе через границы скорость и плотность непрерывны. Это значит, что характеристики могут быть поверхностями слабого разрыва (на которых сами параметры непрерывны, а некоторые из их производных терпят разрыв). Вдоль характеристик можно склеивать разные решения, например, волну и невозмущенное состояние.

Замечание. Доказывается, что слабые разрывы, если они есть, то обязательно совпадают с характеристикой. Но, конечно, вообще характеристика не обязана быть слабым разрывом.

III. Область начальных данных, от которых зависит решение в данной точке в данный момент времени (область зависимости)

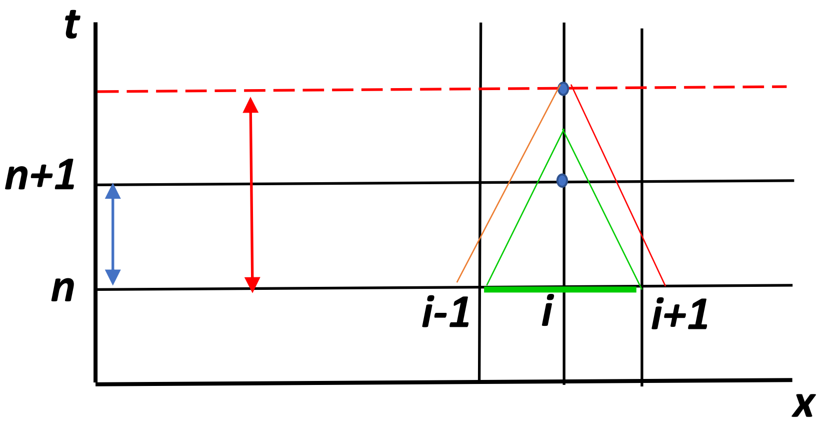


Областью зависимости решения в точке (x,t) называется такой интервал на оси $t = 0$, что решение в точке (x,t) зависит от начальных данных, заданных только на этом интервале.

Условие Куранта для выбора шагов сетки при численном счете методом конечных разностей (явная схема)

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\Delta x = x(i+1) - x(i), \quad \Delta t = t(n+1) - t(n)$$



Условие Куранта

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max a}$$

Итак, важные свойства решений волнового уравнения:

- *конечная область зависимости*
- *распространение возмущений с конечной скоростью* $a_0 > 0$.

12.6. Характеристики для уравнений, описывающих произвольное одномерное движение газа

Полная система уравнений для баротропного движения идеальной сжимаемой жидкости (газа) без массовых сил

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{\upsilon}=0$$

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k}+\frac{a^2}{\rho}\mathrm{grad}\,\rho=0$$

где $a^2=\dfrac{dp}{d\rho}=a^2(\rho)$

Для одномерного движения с плоскими волнами система принимает вид:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial x}=0\\ \frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0\\ \text{где}\quad \upsilon=\upsilon_x\end{gathered}} \qquad (12.2)$$

В каждое уравнение системы (12.2) входят производные по двум направлениям в плоскости x,t. Можно ли, комбинируя эти уравнения, получить другие два уравнения, таких, что каждое из них содержит производные от ρ и υ *только по одному (своему для каждого уравнения) направлению* в плоскости x,t ? Для системы (12.2) это возможно.

Производная f(x,t) по направлению в плоскости x,t , задаваемому условием $\dfrac{dx}{dt}=\alpha$, это $\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial x}\alpha$.

Умножим первое из уравнений (12.2) на некоторый множитель l , а второе на m и сложим их. Получим

$$l\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\upsilon+\frac{m}{l}\frac{a^2}{\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]+m\left[\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\left(\upsilon+\frac{l}{m}\rho\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right]=0$$

Выражения в квадратных скобках являются производными по одному и тому же направлению, если

$$\upsilon+\frac{m}{l}\frac{a^2}{\rho}=\upsilon+\frac{l}{m}\rho,\quad \text{то есть,}\quad \frac{l}{m}=\pm\frac{a}{\rho}$$

Уравнения в характеристической форме и уравнения характеристик

Система уравнений записывается в характеристической форме

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\upsilon}{dt} + \frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0 \\ \frac{d\upsilon}{dt} - \frac{a}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0 \end{aligned}} \qquad (12.3)$$

Здесь символ $\frac{d}{dt}$ означает производные по направлениям,

для которых $\boxed{\frac{dx}{dt} = c_{\pm} = \upsilon \pm a}$ (12.4)

то есть $\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{\pm}\frac{\partial}{\partial x}}$

Знак + надо брать для первого уравнения (12.3)

Знак - надо брать для второго уравнения (12.3)

Линии $x = x(t)$, определяемые равенствами (12.4), есть характеристики рассматриваемой системы уравнений, а сами уравнения в характеристической форме (12.3) называют условиями на характеристиках.

Горими́р Горими́рович Чёрный (1923-2012)

Сэр Джефри Инграм Те́йлор 1886-1975

Дж. Тейлор (слева) и Л. И. Седов

Конец Лекции 12