Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 9
Потенциальные течения несжимаемой жидкости

Литература. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Т.I   Гл.7 §4;   Л.И. Седов Механика сплошной среды Т. I §3; Т. II §12

Лекция 9. (Эглит М.Э.)

Потенциальные течения несжимаемой жидкости

9.1. Потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости. Уравнение Лапласа для потенциала скорости

9.2. Граничные условия для потенциала скорости на поверхности твердых тел. Задача Неймана для потенциала скорости

9.3. Условия для потенциала скорости на свободной поверхности потока

9.4. Примеры потенциальных течений несжимаемой жидкости. Потенциалы скорости поступательного потока и течения от источника. Потенциалы обтекания полубесконечного осесимметричного тела и тела конечных размеров

9.5. Понятие о методе источников и стоков

9.1. Потенциальные течения однородной несжимаемой жидкости. Уравнение Лапласа для потенциала φ

Течение называется потенциальным, если существует такая функция φ , что $\vec{\upsilon} = \operatorname{grad}\varphi$

то есть $\upsilon_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \upsilon_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \upsilon_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

Функция φ называется потенциалом скорости

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности $\operatorname{div}\vec{\upsilon} = 0,$ т.е., $\dfrac{\partial\upsilon_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\upsilon_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\upsilon_z}{\partial z} = 0$

превращается в уравнение для φ: $\boxed{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0}$ - уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа записывается кратко так: $\Delta\varphi = 0$, где $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа

Функция, которая удовлетворяет уравнению Лапласа, называется гармонической.

Уравнение Лапласа – линейное, поэтому линейные комбинации его решений, а также производные от решения по координатам и времени тоже являются решением. Это позволяет строить много разных интересных решений этого уравнения

9.2. Граничные условия для потенциала скорости на поверхности твердых тел. Задача Неймана для потенциала скорости

Граничное условие на поверхности твердого тела в идеальной жидкости - это условие непроницаемости:

$$\left(\upsilon_n\right)_{\text{на гр. тела}} = \upsilon_{n\,\text{гр}}$$

Здесь $\upsilon_{n\,\text{гр}}$ - нормальная составляющая скорости точки границы (поверхности тела)

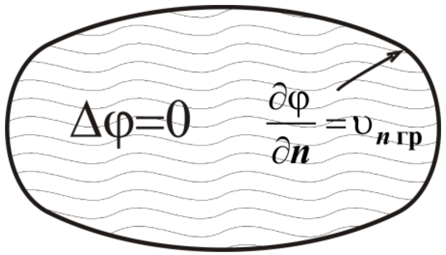
Так как $\upsilon_n = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$, то это условие на поверхности твердого тела принимает вид:

$$\boxed{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\text{на гр. тела}} = \upsilon_{n\,\text{гр}}}$$

Задача об определении в некоторой области D функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа, по известным значениям нормальной производной функции φ на границе области D, называется задачей Неймана

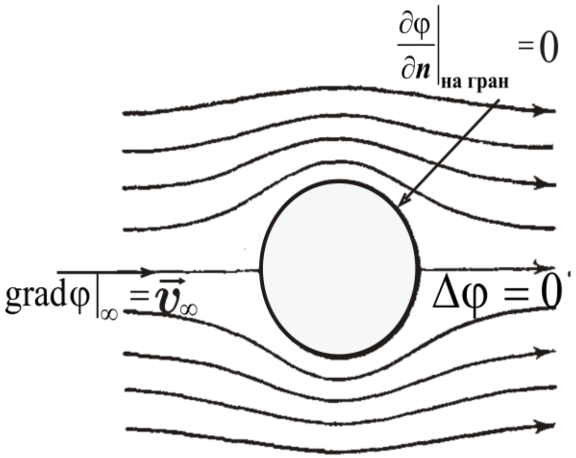
Задачи Неймана о взаимодействии потенциального потока несжимаемой жидкости с твердым телом

Внутренняя задача Неймана



Движение жидкости в сосуде при полном заполнении

Внешняя задача Неймана(+ задание скорости на ∞)



Безотрывное обтекание твердого тела

Линейность задачи Неймана о движении тела в жидкости

Уравнение Лапласа – линейное. Граничные условия в задачах обтекания твердого тела безграничным потоком и движения тела в безграничном потоке жидкости тоже линейные. Поэтому верно следующее.

Если есть два решения φ_1 и φ_2 для одного и того же тела, то $\varphi = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$, где $\mu, \lambda = \mathrm{const}$, тоже есть решение некоторой задачи для этого тела.

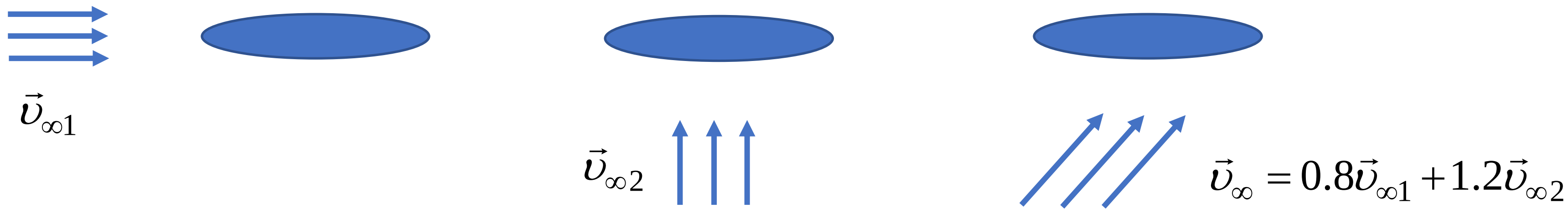
Например, пусть φ_1 и φ_2 - решения следующих задач:

1. $$\boxed{\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{\text{на гран.тела}} = \upsilon_{1n\ гр}, \quad \left(\operatorname{grad}\varphi_1\right)_\infty = \vec{\upsilon}_{\infty 1}}$$

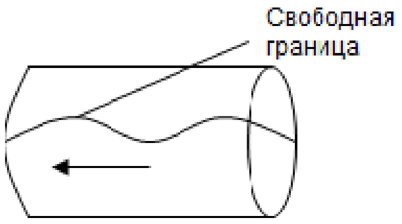
2. $$\boxed{\Delta\varphi_2 = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{\text{на гран.тела}} = \upsilon_{2n\ гр}, \quad \left(\operatorname{grad}\varphi_2\right)_\infty = \vec{\upsilon}_{\infty 2}}$$

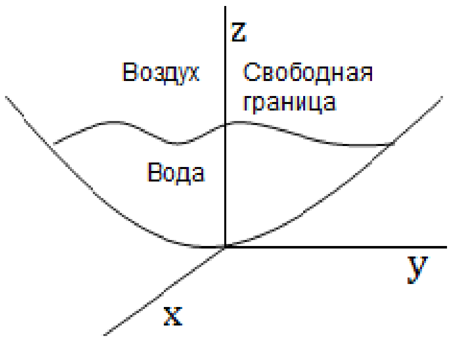
Тогда $\varphi = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ есть решение такой задачи:

$$\boxed{\Delta\varphi = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\text{на гран.тела}} = \lambda\upsilon_{1n\ гр} + \mu\upsilon_{2n\ гр}, \quad \left(\operatorname{grad}\varphi\right)_\infty = \lambda\vec{\upsilon}_{\infty 1} + \mu\vec{\upsilon}_{\infty 2}}$$



9.3. потоки со свободными поверхностями. Граничные условия на свободной поверхности





Положение и движение свободной поверхности жидкости (например, поверхность воды в море или верхняя поверхность потока в трубе с неполным заполнением). заранее не известно, должно быть найдено в процессе решения задачи.

На свободной поверхности ставятся **два** граничных условия, одно из них кинематическое граничное условие, и другое - динамическое.

Кинематическое условие: проекция υ_n скорости частиц жидкости, находящихся на свободной поверхности, на нормаль к ней равна D_n - скорости движения поверхности вдоль нормали:

$$\upsilon_n\big|_{на\ границе} = D_n \qquad (9.1)$$

Условие (9.1) означает, что жидкость не протекает через поверхность и не отрывается от нее. Частицы, расположенные на поверхности, остаются на ней все время.

Пусть уравнение свободной границы: $z = h(t,x,y)$.
Продифференцируем это по t, считая, что x, y, z – координаты индивидуальной частицы жидкости, находящейся на границе:

$$\upsilon_z = \frac{\partial h}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial h}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{dh}{dt} \quad \text{при} \quad z = h(t,x,y) \qquad (9.1')$$

(9.1’) – это еще один вид **кинематического граничного условия** на свободной границе жидкости.

Динамическое граничное условие для идеальной жидкости имеет вид: $p\big|_{на\ границе} = p_a$ $\quad p_a$ - внешнее давление.

Для потенциального движения несжимаемой жидкости это условие с помощью интеграла Коши - Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

записывается так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{p_a}{\rho} + gh(t,x,y) = f(t) \ \text{при} \ z = h(t,x,y) \qquad (9.2)$$

В задачах со свободными поверхностями очень сложные нелинейные граничные условия на неизвестных границах!

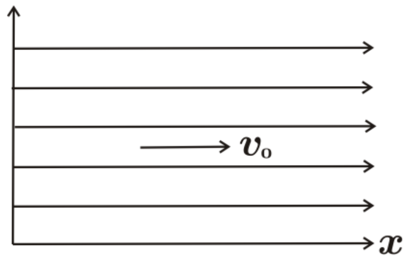
$\bar{r}$

4. Примеры потенциальных течений несжимаемой жидкости

17th Century Turkish "Ups-and-Downs"

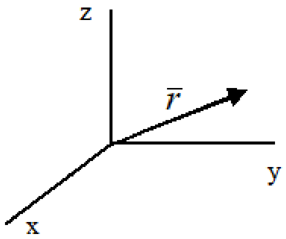
Пример 1. Поступательный поток

$$\varphi = ax + by + cz, \quad a = a(t), \quad b = b(t), \quad c = c(t) \qquad \upsilon_x = a(t), \quad \upsilon_y = b(t), \quad \upsilon_z = c(t)$$



Поступательный поток со скоростью v_0 вдоль оси x: $\varphi = v_0 x$

Пример 2. Источник или сток в начале координат

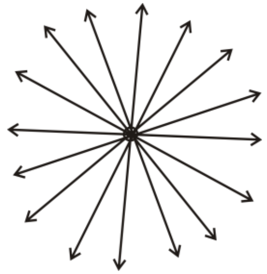


$$\varphi = -\frac{Q(t)}{4\pi r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\upsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{2x}{2r} = \frac{Qx}{4\pi r^3}, \quad \upsilon_y = \frac{Qy}{4\pi r^3}; \quad \upsilon_z = \frac{Qz}{4\pi r^3}$$

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k} = \frac{Q}{4\pi r^3}\vec{r}$$



Скорость в каждой точке направлена вдоль соответствующего радиуса-вектора, частицы движутся от центра при $Q > 0$ (источник) и к центру при $Q < 0$ (сток); φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q}{4\pi}\frac{x}{r^3}\right] = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3} + x\left(\frac{-3}{r^4}\right)\frac{x}{r}\right] = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)$$

$$\Delta \varphi = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2 + y^2 + z^2)\right] \equiv 0$$

Источники и стоки в несжимаемой жидкости (продолжение)

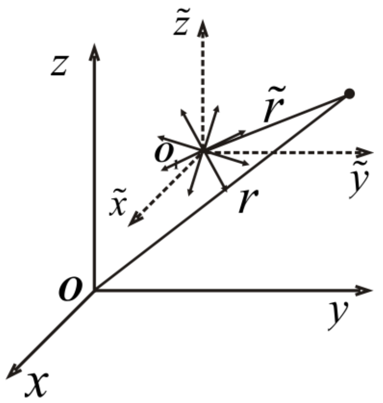
Физический смысл $Q(t)$: $|Q(t)|$ – это расход источника или стока.

Для доказательства вычисляем количество жидкости, которое протекает через поверхность сферы $r = R$ наружу за единицу времени, т.е. $\int\limits_{\Sigma} \upsilon_n d\sigma$

На сфере $\upsilon_n = \upsilon_r |_{r=R} = \dfrac{Q}{4\pi R^2} = \mathrm{const}$; площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int\limits_{\Sigma} \upsilon_n d\sigma = Q}$

Потенциал источника или стока, расположенного не в начале координат, а в точке с координатами x_1, y_1, z_1

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$



Пример 3. Обтекание полубесконечного тела

Рассмотрим поток, представляющий собой сумму поступательного потока с постоянной скоростью υ_0 и потока от источника с постоянным расходом $Q > 0$, расположенного в начале координат. Направим ось x вдоль скорости поступательного потока .

Потенциал такого течения $\boxed{\varphi = \upsilon_0 x - \dfrac{Q}{4\pi r}}$ (9.3)

Этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, так как оба слагаемых ему удовлетворяют

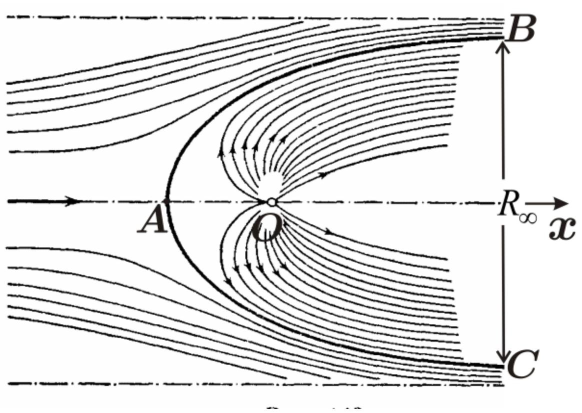
Как выглядит такое течение?

При $r \to \infty$ $\boxed{\dfrac{Q}{4\pi r} \to 0, \quad \varphi \approx \upsilon_0 x}$

На бесконечности - поступательный поток вдоль оси x со скоростью υ_0

При $r \to 0$ $\boxed{\upsilon_0 x \to 0, \quad \varphi \approx -\dfrac{Q}{4\pi r}}$

В окрестности начала координат - течение от источника

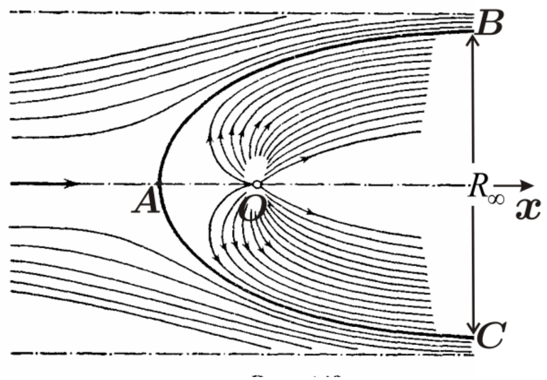


Существует поверхность BAC, такая, что область вне BAC заполнена жидкостью, текущей из бесконечности, а область внутри BAC – жидкостью, вытекающей из источника. Поверхность BAC образована линиями тока, а скорость в точке A равна нулю.

Так как поверхность BAC образована линиями тока, то всю часть области внутри BAC можно заменить твердым телом, не изменяя внешнего потока (т.к. на границе BAC выполнено условие непроницаемости). Таким образом, потенциал (9.3) описывает обтекание полубесконечного тела с поверхностью BAC.

Обтекание полубесконечного тела (продолжение)

О форме обтекаемого тела



В точке A: $v_x = 0, x = x_A$

1. Найдем координату точки A. Точка A – критическая: там $\upsilon_x = 0$

Вычислим υ_x на оси x , т.е. при $y = 0, z = 0$

$$\upsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \upsilon_0 + \frac{Qx}{4\pi r^3} = \upsilon_0 + \frac{Qx}{4\pi |x|^3}$$

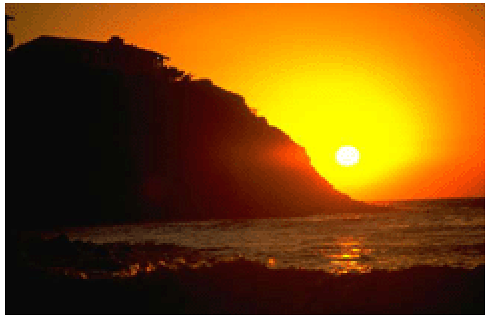
Здесь учтено, что для точек на оси x их расстояние от начала координат $r = |x|$

$$\upsilon_0 + \frac{Qx_A}{4\pi |x_A|^3} = 0 \qquad x_A = -\frac{4\pi\upsilon_0 |x_A|^3}{Q} \qquad |x_A| = \frac{4\pi\upsilon_0 |x_A|^3}{Q} \qquad |x_A| = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\upsilon_0}}$$

2. Вычислим R_∞ - радиус поперечного сечения тела ВАС в бесконечности. Для этого вычислим расход через это сечение. Он равен $v_0 \pi R_\infty^2$. С другой стороны, он равен Q, так как вся жидкость, которая находится внутри ВАС, вытекает из источника. Следовательно, $v_0 \pi R_\infty^2$ =Q

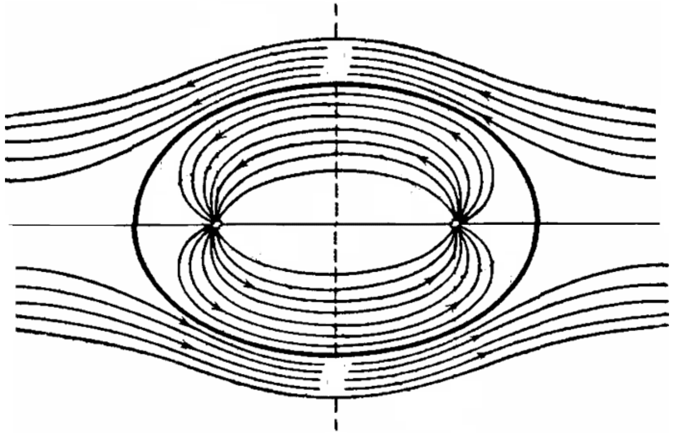
$$R_\infty = \sqrt{\frac{Q}{\upsilon_0 \pi}}$$

Итак, потенциал (9.3) описывает обтекание полубесконечного тела ВАС, форма и толщина которого зависит от параметра Q



Задача. Олигарх планирует построить коттедж на мысу высотой 300м на расстоянии 100 м от берега моря. Оценить скорость ветра в районе коттеджа, когда с моря дует ветер со скоростью 1м/ с

9.5. Понятие о методе источников и стоков

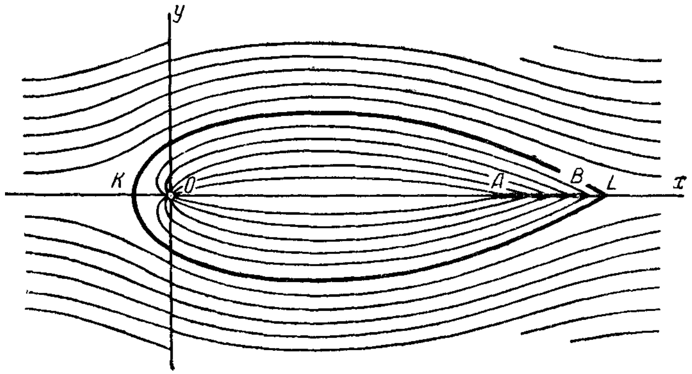


Поступательный поток + источник обильностью Q в точке $x = -a$ + сток обильностью Q в точке $x = a$

$$\varphi = \upsilon_0 x + \frac{Q}{4\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

описывает обтекание конечного тела

Оказывается, всегда можно подобрать такое (в общем случае непрерывное) распределение источников и стоков на оси x , чтобы получить обтекание осесимметричного тела заданной формы



Метод построения решения задачи об обтекании тела, состоящий в замене обтекаемого тела такой системой источников и стоков, чтобы поверхность тела служила одной из поверхностей тока, называется методом источников и стоков.

Конец Лекции 9

Пьер-Симо́н, маркиз де **Лапла́с**
(23 марта 1749 — 5 марта 1827)