Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 8
Интеграл Коши – Лагранжа
Теоремы о вихрях

Литература. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Т.I Гл.4 §1-3; Гл.5 §1-3. Л.И. Седов Механика сплошной среды Т. II Гл.VIII §11

Лекция 8. (Эглит М.Э.)
Интеграл Коши – Лагранжа. Теоремы о вихрях

8.1. Потенциальные течения. Интеграл Коши - Лагранжа
8.2. Теорема Лагранжа о сохранении свойства потенциальности течения.
8.3. Теорема Томсона
8.4. Еще одна теорема Лагранжа
8.5. Причины возникновения вихрей
8.6. Система уравнений и граничные условия для потенциальных движений идеальных жидкостей
8.8. Потенциальные движения несжимаемых жидкостей

8.1. Потенциальные движения. Интеграл Коши – Лагранжа

Движение называется потенциальным, если существует такая функция φ , что $\vec{\upsilon} = \operatorname{grad}\varphi$

В потенциальном движении вектор вихря равен нулю, следовательно, потенциальное движение - безвихревое. Верно и обратное: если движение безвихревое, $\vec{\omega} = 0$, то оно потенциальное, $\vec{\upsilon} = \operatorname{grad}\varphi$

Сегодня мы увидим, что в очень многих типичных ситуациях поле скорости идеальной жидкости действительно является потенциальным. А пока выведем новый интеграл уравнений Эйлера – интеграл Коши – Лагранжа.

Интеграл Коши - Лагранжа

Интеграл Коши - Лагранжа – это интеграл уравнений Эйлера в случае, когда движение не обязательно установившееся, но обязательно потенциальное.

4 условия, при которых выводится интеграл Коши – Лагранжа

1. жидкость идеальная, то есть выполняются уравнения Эйлера;

2. движение баротропное; это значит , что во всем потоке плотность есть функция только давления: $\rho = \rho(p)$ (или жидкость несжимаемая и однородная: $\rho = \text{const}$)

3. массовые силы имеют потенциал: $\vec{F} = \operatorname{grad} W$

4. движение потенциальное $\vec{\upsilon} = \operatorname{grad}\varphi$, а значит $\vec{\omega} = 0$

Вывод интеграла Коши – Лагранжа

Берем уравнение Эйлера в форме Громеки - Лэмба

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\upsilon^2}{2} + 2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}] = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \vec{F}}$$

При выполнении условий (2)-(4) это уравнение принимает вид:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\upsilon^2}{2} = -\operatorname{grad} P + \operatorname{grad} W}$$

где

$$\boxed{P = P(p) = \int \frac{1}{\rho(p)}dp, \quad \operatorname{grad} P = \frac{dP}{dp}\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p}$$

Кроме того, $\dfrac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{grad}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\upsilon^2}{2} + P - W\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\upsilon^2}{2} + P - W = f(t)}$$

Интеграл Коши - Лагранжа

$f(t)$ - произвольная функция времени. Она определяется, если в какой-нибудь одной точке потока заданы величины, стоящие в левой части

Если движение не только потенциальное, но и установившееся, то $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad f(t) = C = const$

и интеграл Коши – Лагранжа принимает вид $\dfrac{\upsilon^2}{2} + P - W = C$ - совпадает по форме с интегралом Бернулли

Различие заключается в том, что это соотношение выполнено во всем пространстве, а не только вдоль линии тока, а функция $P(p)$ и константа C - одни и те же во всей области, занятой жидкостью.

При каких условиях движение идеальной жидкости является потенциальным? Теорема Лагранжа

Формулировка теоремы Лагранжа о сохранении свойства потенциальности движения

«Пусть выполнены следующие 4 условия: 1) жидкость идеальная; 2) движение баротропное, 3) массовые силы потенциальны, 4) движение непрерывное (т.е. в области, занятой жидкостью, нет ударных волн и других поверхностей разрыва). Тогда если в рассматриваемой области движение потенциально в какой-то момент времени, то оно было потенциальным раньше и будет потенциальным в дальнейшем».

Доказательство теоремы Лагранжа: Дано, что при $t = t_0$ движение потенциально: $\vec{\upsilon} = \operatorname{grad}\varphi_0$ при $t = t_0$

Покажем, что в момент $t_0 + \Delta t$ $(\Delta t$ мало$)$ скорость также представляется в виде градиента некоторой функции.

По формуле Тейлора $$\vec{\upsilon}(t_0+\Delta t) = \vec{\upsilon}(t_0) + \left.\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}\right|_{t=t_0}\cdot\Delta t = \operatorname{grad}\varphi_0 + \underbrace{\left.\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}\right|_{t=t_0}\cdot\Delta t}$$

Из ур. Эйлера в форме Громеки-Лэмба
$$\boxed{\left.\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \left.\left(-\operatorname{grad}\frac{\upsilon^2}{2} - 2[\bar{\omega}\times\vec{\upsilon}] - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \bar{F}\right)\right|_{t=t_0} = \operatorname{grad}\left(-\frac{\upsilon^2}{2} - P + W\right)_{t=t_0}}$$
где $$\boxed{P(p) = \int\frac{1}{\rho(p)}dp}$$

Таким образом, $$\vec{\upsilon}(t_0+\Delta t) = \operatorname{grad}\varphi_0 + \operatorname{grad}\left(-\frac{\upsilon^2}{2} - P + W\right)_{t=t_0}\Delta t = \operatorname{grad}\left[\varphi_0 + \left(-\frac{\upsilon^2}{2} - P + W\right)_{t=t_0}\Delta t\right]$$

Итак, движение в момент времени $t + \Delta t$ - потенциальное! Теорема доказана.

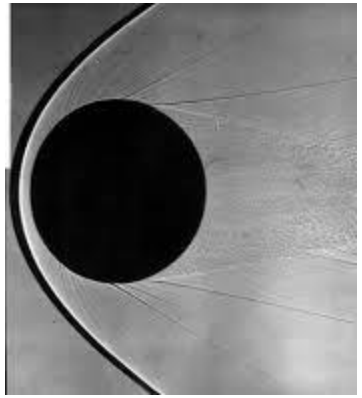
Знак Δt может быть любым, поэтому утверждение относится как к будущему, так и к прошлому.

В частности, все движения, которые начинаются из состояния покоя, при выполнении условий теоремы Лагранжа потенциальны, так как в начальный момент $\vec{\upsilon} = 0$, значит, и $\bar{\omega} = 0$.

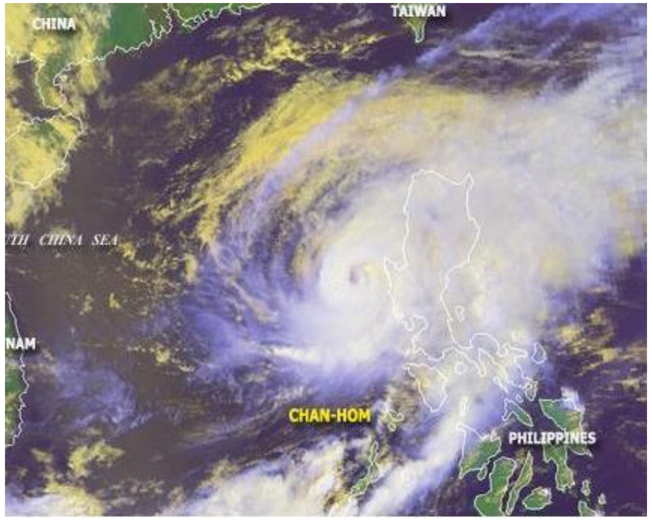
Причины возникновения вихрей

Вихревые, то есть не потенциальные движения возникают, если не выполнены условия теоремы Лагранжа, а именно:

1. Массовые силы не потенциальны; пример – сила инерции Кориолиса $\vec{F}_{\text{кор}} = -2[\vec{\Omega} \times \vec{\upsilon}]$, $\vec{\Omega}$ - угловая скорость вращения системы координат, относительно которой происходит движение среды. Эта сила не потенциальна и вызывает, в частности, вихревые движения в океанах и атмосфере Земли.
2. Движение не баротропное : ρ= ρ(p, T)
3. Наличие ударных волн и других поверхностей разрыва скорости
4. Вязкость



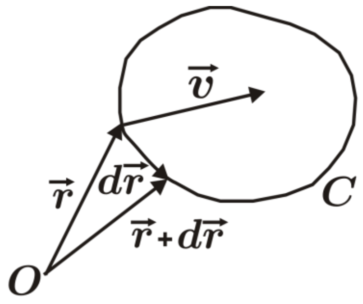
Торнадо



Тайфун

Некоторые понятия и формулы, используемые при описании вихревых течений

Циркуляцией Γ_C скорости по замкнутому контуру C называется следующий интеграл

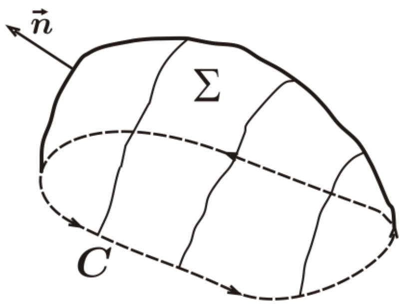


$$\Gamma_C = \oint\limits_C \upsilon_l dl = \oint\limits_C (\vec{\upsilon} \cdot d\vec{r})$$

Здесь υ_l – проекция вектора скорости на касательную к контуру C , l - расстояние вдоль C , отсчитываемое от некоторой точки на контуре, $d\vec{r}$ – бесконечно малый вектор, соответствующий отрезку dl .

Формула Стокса

Если на контур C можно надеть поверхность Σ так, чтобы во всех точках этой поверхности компоненты скорости были непрерывны и дифференцируемы, то выполняется следующая формула Стокса, связывающая циркуляцию и вихрь:



$$\Gamma_C \equiv \int\limits_C \upsilon_l dl = \int\limits_\Sigma (\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon})_n d\sigma = 2\int\limits_\Sigma \omega_n d\sigma \qquad (8.1)$$

Теорема Томсона о сохранении циркуляции скорости по жидкому контуру

Формулировка теоремы Томсона

Пусть выполнены следующие 5 условий:

1) жидкость идеальная; 2) движение баротропное, **3)** массовые силы имеют потенциал, 4) движение непрерывно (т.е. в области, занятой жидкостью, могут использоваться дифференциальные уравнения, нет ударных волн и других поверхностей разрыва); 5) замкнутый контур C –" жидкий" , то есть движется вместе с частицами жидкости, «прикреплен» к ним.

Тогда циркуляция скорости Γ_C по контуру C не меняется со временем:

$$\boxed{\frac{d\Gamma_C}{dt} = 0 \ , \ \Gamma_C = \oint_C \upsilon_l dl = \oint_C (\vec{\upsilon} \cdot d\vec{r})}$$

Доказательство теоремы Томсона состоит из двух частей.

I. Сначала доказывается, что всегда производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру равна циркуляции ускорения по этому контуру:

$$\frac{d}{dt}\oint_C (\vec{\upsilon} \cdot d\vec{r}) = \oint_C (\vec{a} \cdot d\vec{r})$$

II. Потом доказывается, что при выполнении условий (1) – (5)

$$\oint_C (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = 0$$

Доказательство теоремы Томсона

I. Докажем, что $\dfrac{d}{dt}\oint\limits_C(\vec{\upsilon}\cdot d\vec{r}) = \oint\limits_C(\vec{a}\cdot d\vec{r})$

Контур C прикреплен к частицам жидкости и изменяет свою форму при движении. Поэтому удобно для вычисления выражения, стоящего в левой части, перейти к лагранжевым координатам ξ_i. Лагранжевы координаты каждой частицы жидкости, в том числе частиц, составляющих контур C, не меняются со временем, поэтому в координатах ξ_i контур C не меняется. При использовании лагранжевых координат:

[redacted]

Тогда $$\frac{d}{dt}\oint\limits_C(\vec{\upsilon}(t,\xi_i)\cdot d\vec{r}) = \oint\limits_C\Big(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}\cdot d\vec{r}\Big) + \oint\limits_C\Big(\vec{\upsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi_i}d\xi_i\Big)\Big) = \oint\limits_C(\vec{a}\cdot d\vec{r}) + \oint\limits_C(\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}) = \oint\limits_C(\vec{a}\cdot d\vec{r})$$ т.к. $\oint\limits_C(\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}) = \oint\limits_C d\dfrac{\upsilon^2}{2} = 0$

II. Теперь докажем, что при выполнении условий (1) – (5): $\oint\limits_C(\vec{a}\cdot d\vec{r}) = 0$. Уравнения Эйлера $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$

принимают вид $\boxed{\vec{a} = \operatorname{grad}W - \operatorname{grad}P}$ т.к. $\vec{F} = \operatorname{grad}W,\ \rho = \rho(p),\ \dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}P,\ P = \int\dfrac{1}{\rho}dp$

Тогда $$\oint\limits_C(\vec{a}\cdot d\vec{r}) = \oint\limits_C\big((\operatorname{grad}W\cdot d\vec{r}) - (\operatorname{grad}P\cdot d\vec{r})\big) = \oint\limits_C\frac{\partial W}{\partial l}dl - \oint\limits_C\frac{\partial P}{\partial l}dl = \oint\limits_C d(W-P) = 0$$

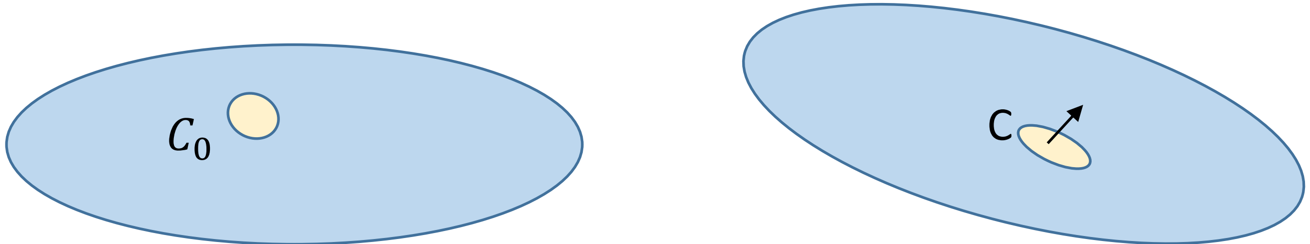
Теорема Томсона доказана.

Еще одна теорема Лагранжа

«Пусть выполнены следующие 4 условия: 1) жидкость идеальная; 2) движение баротропное, 3) массовые силы потенциальны, 4) движение непрерывное (т.е. в области, занятой жидкостью, нет ударных волн и других поверхностей разрыва). Тогда если в рассматриваемой части жидкости движение потенциально в какой-то момент времени, то оно в этой части жидкости было потенциальным раньше и будет потенциальным в дальнейшем».

Доказательство теоремы Лагранжа:

Дано, что при $t = t_0$ движение в рассматриваемом объеме жидкости потенциально. Тогда $\vec{\omega} = 0$ во всех точках этого объема. Поэтому циркуляция скорости Γ_{C_0} по любому контуру C_0 внутри объема при $t = t_0$ равна нулю. Рассмотрим изучаемый объем в момент $t = t_1$. Покажем, что и в этот момент $\vec{\omega} = 0$ во всех точках этого объема. Действительно, предположим, что $\vec{\omega} = \vec{\omega}_A \neq 0$ в какой–то точке *A*. Рассмотрим малую площадку Σ , перпендикулярную $\vec{\omega}_A$, и контур *C* – границу Σ. Направим нормаль к этой площадке по вектору $\vec{\omega}_A$, тогда $\omega_{nA} > 0$. Так как движение непрерывное, то $\omega_n > 0$ и во всех других точках поверхности Σ, если она лежит в достаточно малой окрестности точки *A*. Тогда по формуле Стокса (18.1) циркуляция скорости $\Gamma_C \neq 0$. Но частицы, образующие в момент $t = t_1$ контур *C* , составляли некоторый замкнутый контур C_0 при $t = t_0$, и по теореме Томсона (которая в силу условий (1) – (4) выполнена) , $\Gamma_C = \Gamma_{C_0}$. Так как по условию $\Gamma_{C_0}=0$, то и $\Gamma_C = 0$. Итак, предположение что $\vec{\omega} \neq 0$ в какой–нибудь точке рассматриваемой части жидкости, привело к противоречию. Значит, в момент $t = t_1$ вектор вихря равен нулю всюду, а это, в свою очередь, значит, что $\vec{v} = \mathrm{grad}\varphi$. Полученный вывод верен как при $t_1 > t_0$, так и при $t_1 < t_0$.



Потенциальные течения несжимаемой жидкости. Уравнение Лапласа для φ

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\vec{\upsilon} = 0, \quad \text{т.е.,} \ \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0$

Если движение потенциальное, то $\upsilon_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \ \upsilon_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \ \upsilon_z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0}$$ - уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа записывается кратко так: $\Delta\varphi = 0$, где $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа

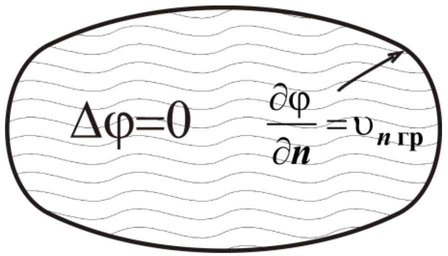
Функция, которая удовлетворяет уравнению Лапласа, называется гармонической.

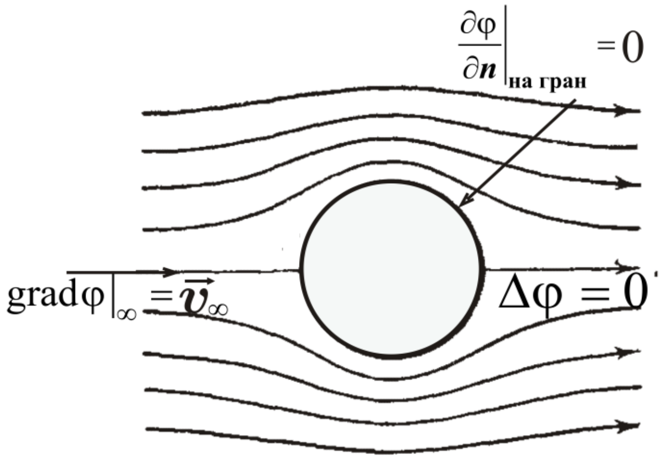
Граничные условия для потенциала скорости на поверхности твердого тела. Задача Неймана

Граничное условие на твердой стенке в идеальной жидкости - это условие непроницаемости: $(\upsilon_n)_{\text{на границе}} = \upsilon_{n\,\text{гр}}$

Так как $\upsilon_n = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$, то это условие на поверхности твердого тела принимает вид: $\boxed{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{\text{на гр. тела}} = \upsilon_{n\,\text{гр}}}$

Внутренняя задача Неймана





Внешняя задача Неймана (+ усл в ∞)