Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 7
Интеграл Бернулли для адиабатического движения идеального совершенного газа

Литература. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том II, §2 - 6

Лекция 7. (Эглит М.Э.)
Интеграл Бернулли для адиабатического движения идеального совершенного газа

7.1. Интеграл Бернулли для адиабатических движений совершенного газа
7.2. Параметры торможения. Максимальная скорость. Число Маха
7.3. Разные формы интеграла Бернулли для газа
7.4. Примеры использования интеграла Бернулли для совершенного газа
7.5. Распространение малых возмущений в сжимаемой жидкости или газе. Скорость звука
7.6. Установившееся течение сжимаемой жидкости в трубке переменного поперечного сечения. Переход дозвукового потока в сверхзвуковой. Сопло Лаваля
7.7. Оценка влияния сжимаемости при установившемся движении газа

7.1. Интеграл Бернулли для адиабатического движения идеального совершенного газа

При описании быстрых движений в газе не учитываем массовые силы и будем считать процессы адиабатическими.

Общий вид интеграла Бернулли при отсутствии массовых сил таков: $\boxed{\frac{v^2}{2} + P = \mathrm{C}(L)}$ где $\boxed{P = \int_L \frac{1}{\rho} dp}$ $\mathrm{C}(L)$ - константа на линии тока

Для вычисления функции P в случае адиабатического движения идеального совершенного газа используем связь между ρ и р, адиабату Пуассона $p = A\rho^\gamma$, где $A = A_1 e^{s/c_V} = \mathrm{const}$ в индивидуальной частице, т.к.$Tds = dq = 0$

Учтем, что при установившемся движении величины, которые постоянны в индивидуальной частице, одинаковы во всех точках линии тока; в частности, A=const на линии тока.

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = A^{\frac{1}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}}} \Rightarrow \boxed{P = \int_L \frac{1}{\rho} dp = \int_L A^{\frac{1}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}+1} p^{-\frac{1}{\gamma}+1} = A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = C(L)}$$

Это первая форма интеграла Бернулли для установившегося адиабатического движения идеального совершенного газа при отсутствии массовых сил.

Разные выражения для функции P

Используя адиабату Пуассона $p = A\rho^{\gamma}$, уравнение Клапейрона $p = R\rho T$ и формулу Майера $R = c_p - c_V = c_V(\gamma - 1)$, а также выражение для плотности энтальпии $i = c_p T$, получаем разные выражения для функции P:

$$\boxed{P = A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A\rho^{\gamma - 1} = c_p T = i = \frac{a^2}{\gamma - 1}} \qquad (7.1)$$

Здесь $\boxed{a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT}$ - квадрат скорости звука в совершенном газе

Подставляя выражения (7.1) в интеграл Бернулли $\boxed{\frac{v^2}{2} + P = C(L)}$,

получаем разные формы интеграла Бернулли для адиабатических движений совершенного газа.

Разные формы интеграла Бернулли для установившегося адиабатического движения совершенного газа

$$\frac{\upsilon^2}{2}+A^{\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma-1}p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=C(L) \qquad \frac{\upsilon^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C(L) \qquad \frac{\upsilon^2}{2}+c_pT=C(L) \qquad \frac{\upsilon^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}A\rho^{\gamma-1}=C(L) \qquad \frac{\upsilon^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=C(L) \qquad (7.2)$$

Из этих соотношений видно, что вдоль линии тока с увеличением скорости величины p, ρ, T, a уменьшаются, а с уменьшением скорости – увеличиваются (отметим, что γ>1).

Параметры торможения

Параметры торможения – это значения p, ρ, T, a в той точке линии тока, где $\upsilon = 0$. Обычно они обозначаются p_*, ρ_*, T_*, a_* - это максимальные возможные значения p, ρ, T, a на данной линии тока при установившемся движении. Конечно, на данной линии тока может и не быть точки, где $\upsilon = 0$, но параметры торможения все равно имеют смысл: это величины параметров, которые получились бы, если поток адиабатически затормозить до нулевой скорости.

Максимальная скорость

Соотношения, представляющие разные формы интеграла Бернулли, показывают, что при уменьшении p, ρ, T, a на данной линии тока скорость увеличивается. Максимальная скорость $\upsilon_{\max}$ на данной линии тока при установившемся движении – это скорость, которая получилась бы, если бы давление обратилось в нуль. Она осуществляется, например, при установившемся истечении в вакуум.

Выражение константы $C(L)$ в интеграле Бернулли через величины параметров торможения и через максимальную скорость

$$C(L)=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_*}{\rho_*}=c_pT_*=A^{\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma-1}p_*^{1-\frac{1}{\gamma}}=\frac{a_*^2}{\gamma-1}=\frac{\upsilon_{\max}^2}{2} \qquad (7.3)$$

Из этих соотношений можно, в частности, вычислить $\upsilon_{\max}$, если известны параметры торможения

Другие формы интеграла Бернулли для установившегося адиабатического движения совершенного газа

Используя формулы (7.3) для $C(L)$, можно получить разные формы интеграла Бернулли. Например,

$$\boxed{\frac{\upsilon^2}{2} + A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_*^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\upsilon^2}{2} + A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\upsilon_{\max}^2}{2}} \; ; \quad \boxed{\frac{\upsilon^2}{2} + c_p T = c_p T_*} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\upsilon^2}{2} + c_p T = \frac{\upsilon_{\max}^2}{2}} \qquad (7.4)$$

Число Маха M – это отношение величины скорости потока к скорости звука в рассматриваемой точке: $\boxed{\mathrm{M} = \dfrac{\upsilon}{a}}$

Число Маха играет важную роль при описании движений газа. Если M>1 в некоторой области потока, то движение в этой области называют сверхзвуковым. Если M<1, то движение дозвуковое. Покажем, что интеграл Бернулли связывает параметры потока с числом Маха в данной точке линии тока и соответствующими параметрами торможения.

Интеграл Бернулли делим на P: $\boxed{\dfrac{\upsilon^2}{2P} + 1 = \dfrac{C(L)}{P}}$ Для P и $C(L)$ можно использовать выражения разного вида.

Для левой части возьмем $P = \dfrac{a^2}{\gamma-1}$: $\boxed{\dfrac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2 + 1 = \dfrac{C(L)}{P}}$ В правой части будем выбирать *C(L)* и *P* <u>одинаковой</u> формы.

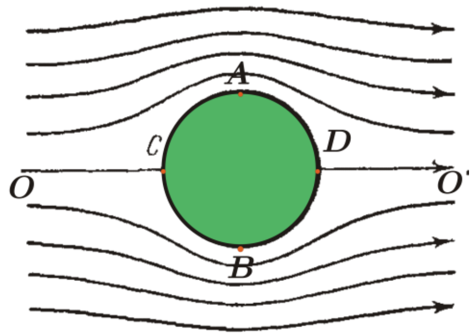
Например, если $P = c_p T$, то $C(L) = c_p T_*$. Так получаются следующие формы интеграла Бернулли)

$$\boxed{\frac{p_*}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad \boxed{\frac{\rho_*}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad \boxed{\frac{T_*}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2} \quad \boxed{\frac{a_*}{a} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

то есть,

$$\boxed{\frac{p}{p_*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad \boxed{\frac{\rho}{\rho_*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}} \quad \boxed{\frac{T}{T_*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-1}} \quad \boxed{\frac{a}{a_*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-\frac{1}{2}}} \qquad (7.5)$$

Примеры расчетов с помощью интеграла Бернулли для газа



Задача 1. Тело обтекается стационарным потоком воздуха. Линия тока OC, отделяющая поток, движущийся «выше» тела, и поток, движущийся «ниже» тела, упирается в тело в точке C, скорость в этой точке равна нулю (критическая точка). Дальше эта линия идет по телу (линия CAD), и уходит от тела (DO'). Скорость v и температура T набегающего потока вдали от тела (в точке O) заданы. Для воздуха $c_p \cong 10^3\ \text{м}^2/\text{с}^2\ \text{К}$

Найти температуру в критической точке C, если $T = 15°\text{C} = 288\ \text{К}$

а) $v = 216$ км/час=60м/с (автомобиль); б) $v = 2000$ м/с (космическая ракета на спуске)

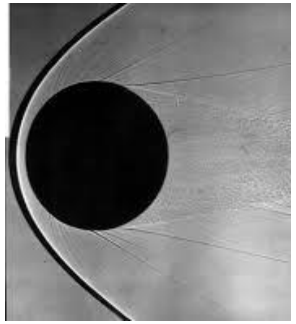
Решение. Считаем воздух совершенным газом, а движение адиабатическим. Используем интеграл Бернулли вдоль линии тока OCADO'. В точке *C* скорость равна нулю, значит, температура в этой точке – это температура торможения $T(C) = T_*$.

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + c_p T = c_p T(C)}$$

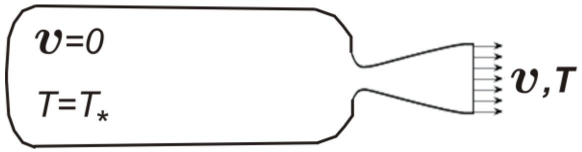
Итак, $T(C) = T + \dfrac{v^2}{2c_p}$. Ответ. $a)\, T(C) = T + 1{,}8K = 289{,}8\text{K} = 16{,}8^\circ C$ б) $T(C) = T + \dfrac{v^2}{2c_p} = 2288\,\text{K} = 2015^\circ\text{C}$

Замечание к решению задачи 1(б)

На самом деле, если скорость набегающего потока больше скорости звука, то впереди тела образуется так называемая ударная волна, где давление и скорость меняются скачком. Тогда дифференциальными уравнениями, а, значит, и интегралом Бернулли можно пользоваться лишь в каждой из областей по разные стороны ударной волны (где движение непрерывно), и константа в интеграле Бернулли *C(L) могла бы быть разной по разные стороны волны*. Однако из законов сохранения на ударной волне выводится, что *C(L)* не меняется при переходе через волну, поэтому наша оценка температуры годится и при обтекании с ударной волной.



<u>*Задача 2.*</u> Рассмотрим струю воздуха, вытекающую из большого сосуда через специальный насадок (сопло). Температура воздуха в сосуде $27°\text{C} = 300\,\text{K}$.



Найти а) максимально возможную скорость при установившемся истечении газа из этого сосуда; б) температуру газа в струе, если скорость в струе равна $\upsilon = 700\,\text{м/с}$

Для воздуха $c_p \cong 10^3\,\text{м}^2/\text{с}^2\,\text{К}$

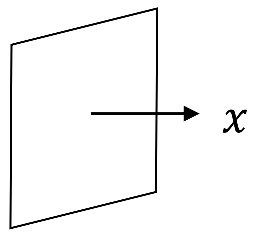
<u>Решение.</u> Скорость воздуха в сосуде вдали от места истечения равна нулю, значит температура в сосуде есть температура торможения, $T_* = 300\,\text{K}$

а) $\boxed{\dfrac{\upsilon_{\max}^2}{2} = c_p T_*,\ \ \upsilon_{\max} \approx 770\,\text{м/с}}$

б) $\boxed{T = T_* - \dfrac{\upsilon^2}{2c_p} = 55K = -218^\circ\text{C}}$

7.5. Распространение малых возмущений в сжимаемой жидкости или газе. Скорость звука

Рассмотрим движение идеальной сжимаемой жидкости, в котором все параметры зависят только от x и t (движение с плоскими волнами): $\upsilon_x = \upsilon_x(t,x), \quad p = p(t,x), \quad \rho = \rho(t,x)$



Массовые силы учитывать не будем. Предполагаем, что в этом движении плотность зависит только от давления, $\rho = \rho(p), p = p(\rho)$.

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}}$$

Здесь $\boxed{a^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}}$

Уравнение неразрывности и уравнение движения в проекции на ось x :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0}$$

Вначале был покой: $\upsilon_x = \upsilon_0 = 0,\ p = p_0 = \text{const},\ \rho = \rho_0 = \text{const}\ ,\ a = a_0 = \text{const}$

Из-за какого-то малого возмущения возникает движение, в котором $\upsilon_x = \upsilon',\ p = p_0 + p',\ \rho = \rho_0 + \rho',\ a^2 = a_0^2 + (a^2)'$

$\boxed{\upsilon',\ p',\ \rho',\ (a^2)' \text{ – малые добавки}}$, (малые возмущения исходного состояния). Подставим выражения υ_x, p, ρ, a^2 в уравнения неразрывности и движения и отбросим члены с произведениями малых величин.

Получим
$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \upsilon'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \upsilon'}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0}$$

Из этих уравнений выводятся уравнения отдельно для $\upsilon',\ \rho'$

Полученные уравнения – линейные. Процедура их получения из точных уравнений называется линеаризацией

$$\boxed{\frac{\partial^2 \upsilon'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \upsilon'}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}}$$

Распространение малых возмущений по покоящейся среде. Решение полученных уравнений

Общий вид всех полученных уравнений для υ', ρ' таков: $$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,, \quad a^2 = \mathrm{const}}$$ (индекс 0 в обозначении a_0 опускаем)

В теории дифференциальных уравнений с частными производными уравнение такого вида называется волновым уравнением. Общее решение одномерного волнового уравнения называется решением Даламбера. Оно имеет вид:

$$\boxed{f = f_1(x - at) + f_2(x + at)} \quad \text{или} \quad \boxed{f = f_1(\xi) + f_2(\eta)\,, \quad \xi = x - at,\ \eta = x + at}$$

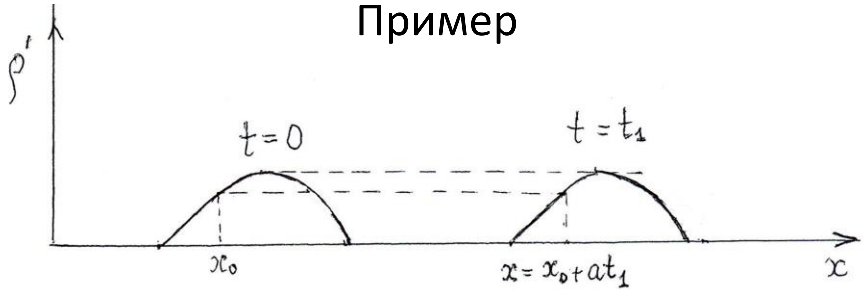
Здесь f_1 , f_2 - произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов.
Эти функции при решении конкретных задач определяются из начальных и граничных условий.

Проверим, что любая $f_1(\xi)$ удовлетворяет волновому уравнению, если $\xi = x - at$.

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{df_1}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df_1}{d\xi}(-a)} \quad \boxed{\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{d}{d\xi}\left(-a\frac{df_1}{d\xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2\frac{d^2 f_1}{d\xi^2}} \quad \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{df_1}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df_1}{d\xi}} \quad \boxed{\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{d^2 f_1}{d\xi^2}}$$

Физический смысл f_1 , f_2 : f_1 - волна, распространяющаяся без изменения формы вдоль оси x вправо со скоростью a_0; f_2 - волна, распространяющаяся без изменения формы вдоль оси x влево со скоростью a_0

Пример



Если $\rho' = f(x - at)$, то $\rho' = \mathrm{const}$ при $x - at = \mathrm{const}$. Пусть при $t = 0$ в точке $x = x_0$: $\rho' = \rho_0'$. При $t = t_1$ то же значение $\rho' = \rho_0'$ будет в точке $x - at_1 = x_0$, то есть $x = x_0 + at_1$. Итак, согласно этому решению любое значение ρ' переносится вправо вдоль оси x со скоростью a.

Если $\rho' = f(x + at)$, то $\rho' = \mathrm{const}$ при $x + at = \mathrm{const}$, то есть, при $x = -at + \mathrm{const}$.
Тогда любое значение ρ' переносится вдоль оси x со скоростью (- a).

Скорость звука. Примеры

Звук - это малое возмущение давления, плотности, скорости, температуры, распространяющееся в среде. Например, амплитуда изменения давления в воздухе при обычном разговоре $\sim 10^{-2}$ Па, а величина атмосферного давления 10^5 Па. Поэтому теория, представленная в этой лекции, применима к распространению звука. Доказано, что скорость звука в покоящейся среде определяется формулой:

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}}$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, надо знать зависимость $p = p(\rho)$. На самом деле, давление в жидкостях и газах зависит не только от плотности, но еще и от температуры (или энтропии). Так как распространение звука – быстрый процесс, то при вычислении скорости звука принимают, что этот процесс адиабатический.

В адиабатических процессах в идеальном совершенном газе $\boxed{p = A\rho^{\gamma}}$ Тогда $\boxed{a = \sqrt{\gamma A \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}}$

В жидкостях плотность меняется очень мало даже при приложении очень большого давления. Но так как звук – это распространение состояний сжатия и расширения, то при описании распространения звука сжимаемость жидкостей надо учитывать. Обычно связь между давлением и плотностью в жидкостях пишут в виде:

$$\boxed{p - p_0 = K\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}}$$

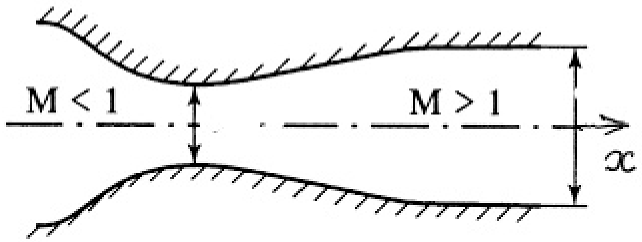
K – модуль всестороннего сжатия

Тогда $\boxed{a = \sqrt{\frac{K}{\rho}}}$

Для воды $K = 2 \cdot 10^9$ Па , $a \approx 1400$ м/с

7.6. Установившийся поток газа в трубе переменного сечения. Условие, при котором возможен переход дозвукового потока в сверхзвуковой. Сопло Лаваля

Примем следующие допущения: газ идеальный, течение адиабатическое, стационарное и одномерное: во всех точках поперечного сечения параметры потока одинаковы, а вектор скорости газа всюду параллелен оси трубы. Влияние массовых сил пренебрежимо мало



S- площадь поперечного сечения

Уравнение Эйлера $$\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}=-\frac{a^2}{\rho}\frac{d\rho}{dx} \Rightarrow \upsilon d\upsilon=-a^2\frac{d\rho}{\rho} \quad (1)$$

Закон сохранения массы $$\rho\upsilon S=\mathrm{const} \Rightarrow \ln\rho+\ln\upsilon+\ln S=\mathrm{const} \quad \frac{d\rho}{\rho}+\frac{d\upsilon}{\upsilon}+\frac{dS}{S}=0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho}=-\frac{d\upsilon}{\upsilon}-\frac{dS}{S} \quad (2)$$

(1) и (2) $$\Rightarrow (\upsilon^2-a^2)\frac{d\upsilon}{\upsilon}=a^2\frac{dS}{S} \Rightarrow (\mathrm{M}^2-1)\frac{d\upsilon}{\upsilon}=\frac{dS}{S}$$

$\mathrm{M}=\dfrac{\upsilon}{a}$ – число Маха

1) Если $\mathrm{M}<1$, знак $d\upsilon$ противоположен знаку dS, то есть, при дозвуковом движении газа, так же, как для несжимаемой жидкости, с возрастанием площади сечения трубы скорость движения уменьшается, а при уменьшении сечения скорость увеличивается.

Если $\mathrm{M}>1$, знак $d\upsilon$ совпадает со знаком dS, то есть, при сверхзвуковом движении газа в сужающейся трубе движение замедляется, а в расширяющейся ускоряется. Поэтому для получения сверхзвуковой струи надо использовать специальный насадок, имеющий сужающуюся и расширяющуюся части (сопло Лаваля)

7.7. Оценка влияния сжимаемости при установившемся адиабатическом движении газа

Сравним формулы для давления, следующие из интеграла Бернулли для несжимаемой жидкости и для газа при отсутствии массовых сил

Несжимаемая жидкость

$$\frac{\upsilon^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = \frac{p_*}{\rho_0} \qquad p = p_* - \frac{\rho_0 \upsilon^2}{2} \qquad (7.6)$$

Совершенный газ

Формулы (7.4):

$$\frac{\upsilon^2}{2} + A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_*^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\upsilon_{\max}^2}{2} \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{\max}^2} + \left(\frac{p}{p_*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 \Rightarrow p = p_* \left(1 - \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{\max}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (7.7)$$

При $\upsilon < \upsilon_{\max}$ разложим правую часть (7.7) в ряд:

$$p = p_* \left(1 - \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{\max}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_* \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{\max}^2} + \frac{1}{2!}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\gamma-1}\frac{\upsilon^4}{\upsilon_{\max}^4} + \ldots\right) = p_* - \frac{\rho_* \upsilon^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2(\gamma-1)}\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{\max}^2} + \ldots\right) = p_* - \frac{\rho_* \upsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\upsilon^2}{4a_*^2} + \ldots\right)$$

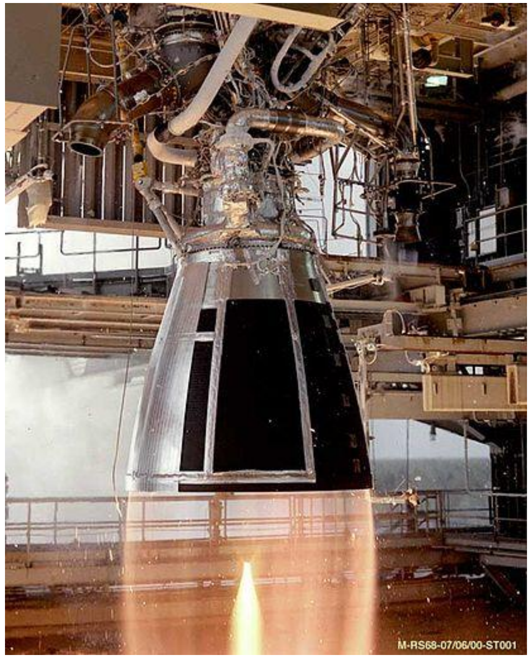
Здесь использовано, что $\upsilon_{\max}^2 = \dfrac{2a_*^2}{\gamma-1} = \dfrac{2\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p_*}{\rho_*}$. Поэтому $\dfrac{p_*\gamma}{\gamma-1}\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_{\max}^2} = \dfrac{\rho_* \upsilon^2}{2}$

Итак, при расчете давления в стационарных потоках можно считать газ несжимаемым с ошибкой порядка $\rho_* \upsilon^4 / 8a_*^2$. Относительная ошибка (отношение ошибки к величине $\rho_* \upsilon^2 / 2$) равна $\upsilon^2 / 4a_*^2$

Например, $\dfrac{\upsilon^2}{4a_*^2} \le 0{,}01$ при $\upsilon \le a_* / 5$.

Если $a_* = 340\,м/с$, то последнее выполнено при $\upsilon \le 68\,м/с = 240\,км/час$

Конец Лекции 7



Истечение сверхзвуковой струи из сопла ракетного двигателя RS-68 на огневых испытаниях. NASA, США.

Поперечное сечение ракетного двигателя РД-107 (Государственный музей истории космонавтики имени К. Э. Циолковского)

Сопла истребителя F-15