Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 6

I. Модели жидкостей и газов. Термодинамические потенциалы

II. Интеграл Бернулли

Лекция 6. (Эглит М.Э.)

I. Модели жидкостей и газов. Термодинамические потенциалы

II. Интеграл Бернулли

I. Дополнение к теме Модели жидкостей и газов

6.1. Примеры уравнений состояния жидкостей и газов

6.2. Внутренняя энергия, свободная энергия, энтальпия (теплосодержание), термодинамический потенциал Гиббса . Определение и физический смысл

6.3. Термодинамические потенциалы

II. Движение идеальных жидкостей и газов

6.4. Линии тока и траектории

6.5. Уравнения Эйлера в форме Громеки - Лэмба

6.6. Установившиеся движения идеальной жидкости. Интеграл Бернулли

6.7. Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Примеры использования.

6.8. Понятие о кавитации. Примеры

I. Дополнение к теме Модели жидкостей и газов

Уравнения состояния: 2 соотношения $\boxed{f(p,\rho,T)=0,\quad u=u(\rho,T)}$

6.1. Примеры уравнений состояния

1. Несжимаемая жидкость. $\boxed{\rho=\rho_0=\text{const};\quad u=\int c(T)dT}$

2. Совершенный газ. $\boxed{p=R\rho T;\quad u=c_V T+\text{const}}$

3. Газ Ван-дер-Ваальса $\boxed{p=\dfrac{R\rho T}{1-b\rho}-a\rho^2;\quad u=c_V T-a\rho+\text{const}}$

4. Слабо сжимаемая жидкость
Вода: $\rho_0 = 1000\,\text{кг/м}^3$, К=2,1·$10^9$ Па $\boxed{p=p_0+K\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho_0};\quad u=\left(p_0+K\dfrac{\rho-\rho_0}{2\rho_0}\right)\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho_0^2}+c_V T+\text{const}}$

5. Твердое тело при больших ударных нагрузках $\boxed{p=p_0+\rho\Gamma(u-u_0);\quad \Gamma=f(\chi),\ \chi=\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho_0};\ u=c_V T}$

Уравнение Ми — Грюнайзена

И еще сотни разных вариантов уравнений!

Замечательно, что на самом деле, при подходящем выборе пары независимых параметров состояния для определения модели среды, достаточно задать только одну термодинамическую функцию

6.2. Внутренняя энергия, свободная энергия, энтальпия (теплосодержание), термодинамический отенциал Гиббса. Определение и физический смысл

В механике сплошных сред рассматриваются плотности внутренней энергии u, свободной энергии F, энтальпии i, термодинамического потенциала Гиббса Ψ, которые определяются следующими формулами

$$F \equiv u - Ts; \quad i \equiv u + \frac{p}{\rho}; \quad \Psi \equiv i - Ts = u + \frac{p}{\rho} - Ts$$

то есть,

$$u = F + Ts; \quad u = i - \frac{p}{\rho}; \quad u = \Psi - \frac{p}{\rho} + Ts \qquad (6.1)$$

Получим разные формы уравнения притока тепла, используя (6.1) и уравнение 2-го закона термодинамики $Tds = dq$

1. $$du = \frac{p}{\rho^2} d\rho + dq \qquad (6.2)$$

2. $dF + Tds + sdT = \frac{p}{\rho^2} d\rho + dq$ то есть, $$dF = \frac{p}{\rho^2} d\rho - sdT \qquad (6.3)$$

3. $di - \frac{dp}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} d\rho = \frac{p}{\rho^2} d\rho + Tds$ то есть, $$di = \frac{dp}{\rho} + dq \qquad (6.4)$$

4. $d\Psi - \frac{dp}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} d\rho + Tds + sdT = \frac{p}{\rho^2} d\rho + dq$ то есть, $$d\Psi = \frac{dp}{\rho} - sdT \qquad (6.5)$$

Вспомним, что

$$\frac{p}{\rho^2} d\rho = -dA^i \,|_{\text{на ед.массы}}$$

В медленном процессе

$$dA^i + dA^e = 0, \text{ т.е. } -dA^i = dA^e = -dA$$

dA-работа системы над внешней средой

Из (6.2) – (6.4) видно, что в медленных процессах с $dq = 0$ работа системы над внешней средой равна убыли внутренней энергии, а в процессах с $T = \mathrm{const}$ – убыли свободной энергии.
В процессах с $p = const$ количество тепла dq, полученное системой, равно увеличению энтальпии системы.

6.3. Внутренняя энергия, свободная энергия, энтальпия, термодинамический потенциал Гиббса – термодинамические потенциалы

Для идеальной жидкости из уравнений первого и второго законов термодинамики :

$$du = \frac{p}{\rho^2} d\rho + dq, \quad Tds = dq$$

выводится тождество Гиббса

$$du = \frac{p}{\rho^2} d\rho + Tds \qquad (6.6)$$

Из тождества Гиббса (6.6) следует, что $u = u(\rho, s)$ (так как u меняется только тогда, когда меняются ρ и s)

Таким образом, тождество Гиббса записывается так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial s} ds = \frac{p}{\rho^2} d\rho + Tds$$

Отсюда

$$1)\ \frac{p}{\rho^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad 2)\ T = \frac{\partial u}{\partial s} \qquad (6.7)$$

$$p = p(\rho, s) \qquad T = T(\rho, s)$$

$$p = p(\rho, T) \qquad s = s(\rho, T)$$

Формулы (6.7) при заданной $u(\rho, s)$ - это два уравнения состояния среды.

Итак, если задать только одну функцию – плотность внутренней энергии u как функцию *плотности и энтропии*, то свойства среды будут полностью определены

Формулы (6.7) позволяют назвать $u(\rho, s)$ термодинамическим потенциалом.

Замечание. Если вместо ρ ввести V=1/ ρ (объем единицы массы), то есть рассмотреть $u = u(V, s)$, то (6.7) примут вид:

$$1)\ p = \frac{\partial u}{\partial V}, \quad 2)\ T = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Другие термодинамические потенциалы

Тождество Гиббса $du = \frac{p}{\rho^2} d\rho + Tds$ можно переписать в виде

1. $\boxed{dF = \frac{p}{\rho^2} d\rho - sdT}$ 2. $\boxed{di = \frac{dp}{\rho} + Tds}$ 3. $\boxed{d\Psi = \frac{dp}{\rho} - sdT}$

Из первого соотношения $F = F(\rho, T), \quad 1)\ \frac{p}{\rho^2} = \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad 2)\ s = -\frac{\partial F}{\partial T}$

Из второго соотношения $i = i(p, s), \quad 1)\ \frac{1}{\rho} = \frac{\partial i}{\partial p}, \quad 2)\ T = \frac{\partial i}{\partial s}$

Из третьего соотношения $\Psi = \Psi(p, T), \quad 1)\ \frac{1}{\rho} = \frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad 2)\ s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}$

Таким образом, наряду с $u(\rho, s)$, функции $u(\rho, s)$, $F(\rho, T)$, $i(p, s)$, $\psi(p, T)$ также являются термодинамическими потенциалами. Задание любой из этих функций определяет уравнения состояния данной среды.

Пример: совершенный газ

$$\boxed{p = R\rho T, \quad u = c_V T + \text{const}, \quad R = c_p - c_V = c_V(\gamma - 1), \quad \gamma = c_p / c_V}$$

Выражение для плотности энтропии совершенного газа (лекция 5): $s = c_V \ln\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + C_1 = c_V \ln\frac{p}{\rho^{\gamma}} + C$ (6.8)

Энтальпия совершенного газа: $i = u + \frac{p}{\rho} = c_V T + RT + \text{const}$ то есть, $i = c_p T + \text{const}$

Найдем плотность внутренней энергии как функцию плотности и энтропии.

Из (6.8) $\boxed{\ln\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} - \ln A = \frac{s}{c_V}, \quad \ln A = -C_1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T = A\rho^{\gamma-1}e^{s/c_V}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u = c_V A\rho^{\gamma-1}e^{s/c_V} + \text{const}}$ (6.9)

Проверим, что если задать $u(\rho, s)$ в форме (6.9), то уравнения состояния в традиционной форме получаются

$$T = \frac{\partial u(\rho, s)}{\partial s} = A\rho^{\gamma-1}e^{s/c_V}$$

$$\frac{p}{\rho^2} = \frac{\partial u(\rho, s)}{\partial \rho} = (\gamma - 1)c_V A\rho^{\gamma-2}e^{s/c_V} = R\, A\rho^{\gamma-2}e^{s/c_V} = R\frac{T}{\rho}$$

$$\boxed{u = c_V T + \text{const}}$$

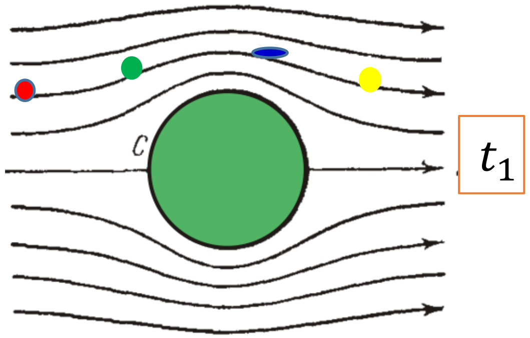
$$\boxed{p = R\rho T}$$

В следующей части курса мы будем заниматься изучением закономерностей движения идеальной жидкости и идеального газа и рассмотрим конкретные задачи.

Модель идеальной жидкости обладает следующими двумя замечательными качествами

1. Во многих случаях уравнения Эйлера имеют интегралы – интегрируются в общем виде
2. Во многих случаях движение идеальной жидкости потенциально, то есть, существует такая функция $\varphi(x_i(t)$, что $\vec{\upsilon} = \mathrm{grad}\,\varphi$

Начинаем с вывода одного из интегралов уравнения Эйлера, который называется интегралом Бернулли



6.4. Линии тока и траектории

Линия тока – это линия, которая определяется для фиксированного момента времени и в каждой её точке направление касательной совпадает с направлением скорости той точки среды, которая в данный момент находится в этой точке линии тока. В рассматриваемый момент времени в разных точках линии тока находятся разные частицы.

Траектория – это путь одной индивидуальной частицы, по которому она движется с течением времени.

Если движение установившееся, то есть, во всех точках области, занятой средой, скорость не зависит от времени, то линии тока не меняются со временем и траектории совпадают с линиями тока.

6.5. Уравнения Эйлера в форме Громеки – Лэмба

Сначала проверим, что для ускорения всегда верна Формула Громеки – Лэмба:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} + 2[\vec{\omega}\times\vec{v}]}$$

Здесь $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{v}$ - вектор вихря, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

Компоненты вектора вихря:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),\quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Проверим формулу Громеки – Лэмба. Напишем <u>правую часть</u>, например, в проекции на ось x

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + 2\left(\omega_y v_z - \omega_z v_y\right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}} + \cancel{v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}} +$$

$$+ v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \cancel{v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}} - \cancel{v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{dv_x}{dt}$$

Подставим ускорение в форме Громеки-Лэмба в уравнения Эйлера:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\mathrm{grad}\frac{v^2}{2}+2[\vec{\omega}\times\vec{v}]=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p}$$

Это уравнения Эйлера в форме Громеки-Лэмба

6.6. Установившиеся движения идеальной жидкости. Интеграл Бернулли

Пусть выполнены следующие три условия:

1) жидкость идеальная, т.е. уравнения движения есть уравнения Эйлера;

2) движение установившееся: в каждой точке пространства все параметры жидкости не зависят от времени, $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$;

3) массовые силы имеют потенциал, т.е. существует такая функция W, что для плотности массовых сил $\vec{F}$ выполнено соотношение $\vec{F}=\mathrm{grad}\ W$.

Тогда из уравнения Эйлера выводится связь между скоростью, давлением и потенциалом массовых сил W вдоль каждой линии тока. Эта связь называется интегралом Бернулли.

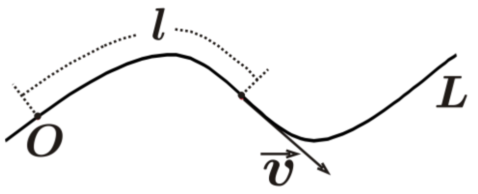
Вывод интеграла Бернулли

Используем уравнения Эйлера в форме Громеки – Лэмба. Учтем, что движение установившееся и массовые силы имеют потенциал. Тогда уравнения запишутся так:

$$\mathrm{grad}\frac{v^2}{2}+2[\overline{\omega}\times\vec{v}]=\mathrm{grad}\,W-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p$$

Дальше будем рассматривать проекцию этого уравнения на линию тока.

Вывод интеграла Бернулли (продолжение)



Уравнение Эйлера в нашем случае

$$\boxed{\operatorname{grad}\frac{v^2}{2} + 2[\vec{\omega}\times\vec{v}] = \operatorname{grad}W - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p} \qquad (6.10)$$

Рассмотрим какую-нибудь линию тока L ; l - расстояние вдоль L от некоторой точки О; l – координата вдоль линии L. Спроектируем уравнение Эйлера (6.10) на касательную к линии L, то есть, на направление l . Проекция градиента любой функции f на любое направление l равна производной f по этому направлению $\frac{\partial f}{\partial l}$. Например, $(\operatorname{grad} f)_x$ = $\frac{\partial f}{\partial x}$. Поэтому при проектировании все градиенты заменятся на частные производные по l . Кроме того, так как на линии тока скорость $\vec{v}$ направлена по касательной, а векторное произведение перпендикулярно каждому из сомножителей, то $[\vec{\omega}\times\vec{v}]_l = 0.$

Итак, если L – линия тока, то из уравнения Эйлера следует

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial l}\frac{v^2}{2} = \frac{\partial W}{\partial l} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}} \qquad (6.11)$$

Введем функцию P как следующий интеграл по линии L :

$$\boxed{P = \int_L \frac{1}{\rho}dp = P(p, L)}$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}$, то последний член в правой части (6.11) равен производной P по l

Итак, при выполнении условий 1 – 3, перечисленных на предыдущем слайде, из уравнения Эйлера следует:

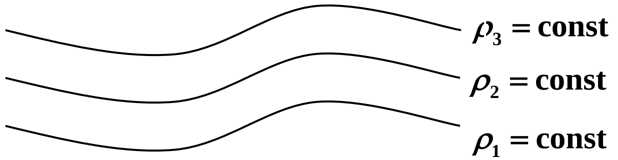
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} - W + P\right) = 0}$$

Значит, $\boxed{\frac{v^2}{2} + P - W = C(L)}$ Это соотношение называется интегралом Бернулли.

Здесь $C(L)$ - константа на линии тока. На разных линиях тока она может быть разной

6.7. Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости в поле силы тяжести

Какой вид имеют в этом случае P и W? В несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$ в каждой <u>индивидуальной</u> частице, но ρ может быть разная для разных частиц (то есть, в разных точках потока), если жидкость неоднородная. Но на линии тока при установившемся движении $\rho = \mathrm{const}$, одинаковая во всех точках линии тока.

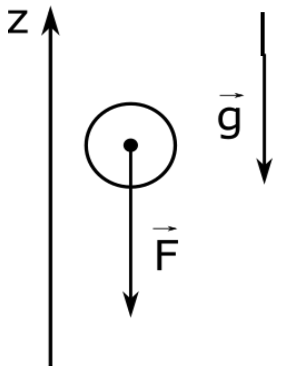


Это потому, что при установившемся движении траектории точек совпадают с линиями тока. Частицы, находящиеся в какой-то момент на данной линии тока, движутся по этой линии. Но в каждой точке линии тока плотность со временем не меняется, значит, все частицы на этой линии имеют одинаковую плотность.

Итак, в любой несжимаемой жидкости на линии тока в установившемся движении $\rho = \mathrm{const}$,

$$\boxed{P = \int_L \frac{1}{\rho} dp = \frac{p}{\rho}}$$

Будем учитывать силу тяжести. Найдем выражение для потенциала W массовых сил тяжести. Направим ось z вертикально вверх.



$$\vec{F} = \mathrm{grad}\, W \longrightarrow \quad F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad F_y = \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad F_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -g \Longrightarrow \boxed{W = -gz}$$

Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости в поле силы тяжести, если ось z направлена вертикально вверх

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C(L)} \qquad (6.12)$$

Это соотношение выполняется вдоль каждой линии тока; $C(L)$ - константа на линии тока.

Из (6.12) видно, что в горизонтальном потоке несжимаемой жидкости при увеличении скорости давление уменьшается, а при уменьшении скорости давление растет.

Пример использования интеграла Бернулли

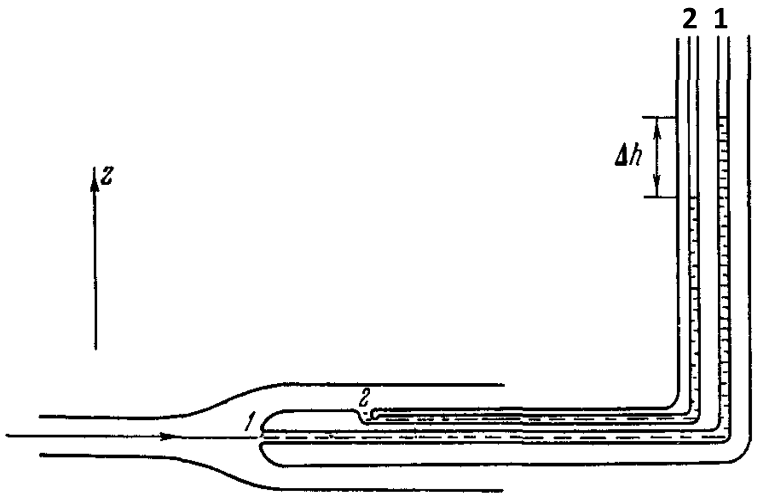


Схема трубки Пито — Прандтля.

Измерение скорости потока трубкой Пито – Прандтля (Prandtl Pitot Tube)

Трубка Пито— Прандтля – это тонкая трубка со закругленной передней частью. Для измерения скорости потока трубку помещают в жидкость и располагают ее вдоль потока. На трубке имеются отверстия. Одно из них – в передней точке трубки (точка 1). Другое — на боковой части, на удалении от первого (точка 2). Эти отверстия соединены трубками с манометром, который измеряет давления p_1 и p_2 в точках 1 и 2.

Интеграл Бернулли $$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2}$$ Величиной $g(z_2 - z_1)$ можно пренебречь, так как трубка тонкая.

Точки 1 и 2 лежат на одной линии тока, параметры в этих точках связаны интегралом Бернулли. В точке 1 скорость равна нулю $v_1 = 0$, а в точке 2 скорость приближенно равна скорости потока v , которую нам нужно измерить.

Получаем формулу для скорости потока

$$\boxed{v = v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}}$$

Трубка Пито-Прандтля на крыле самолета

Для измерения $p_1 - p_2$ можно использовать разные манометры. На схеме, показанной на этом слайде, $p_1 - p_2 = \rho g \Delta h$, $\Delta h = (h_1 - h_2)$, h_1, h_2 - высоты уровней жидкости в вертикальной части трубки, поэтому $v = \sqrt{2\, g\, \Delta h}$

6.7. Понятие о кавитации

Интеграл Бернулли (6.12) можно записать так:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0$$

z_0, v_0, p_0 – вертикальная координата, величина скорости и давление в некоторой точке на линии тока.

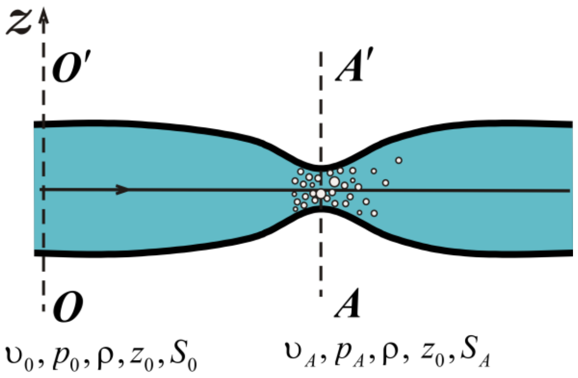
Таким образом, для давления вдоль линии тока выполняется соотношение

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(v^2 - v_0^2) - \rho g(z - z_0)$$

При увеличении скорости или подъеме на большую высоту (при увеличении z) давление уменьшается и может стать равным величине давления насыщенных паров p_d. Тогда в жидкости возникает «кипение», то есть, возникают пузырьки, заполненные парами жидкости. Это явление называется кавитацией (от латинского cavitas — пустота).

Кавитация – это образование пузырьков (возникновение полостей, заполненных парами жидкости и выделившимся из жидкости газом) за счет понижения давления.

Давление насыщенных паров для каждого вещества зависит от температуры. Для воды оно равно атмосферному при температуре $100°\mathrm{C}$ и равно $0{,}023\,\text{атм} = 23 \cdot 10^2\ \text{Па}$ при температуре $20°\mathrm{C}$. При $20°\mathrm{C}$ вода закипит, если давление понизится до $0{,}023\,\text{атм}$. Такое давление имеется примерно на высоте 10 км над уровнем моря.



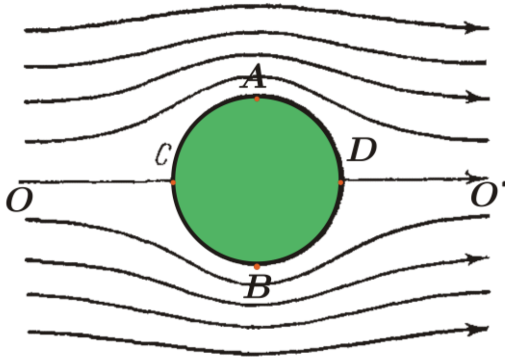
Пример 1.Возникновение кавитации в узком месте трубы

Закон сохранения массы $v_0 S_0 = v_A S_A$, $v_A = v_0 S_0 / S_A$

Интеграл Бернулли вдоль осевой линии тока

$$\mathrm{p}_A = \mathrm{p}_0 - \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_0^2) = \mathrm{p}_0 - \frac{1}{2}\rho v_0^2\left(\frac{S_0^2}{S_A^2} - 1\right)$$

Пример 2. Возникновение кавитации при обтекании тела



Рассмотрим, например, обтекание цилиндра потоком несжимаемой жидкости. В точках C и D v=0, они называются критическими точками или точками торможения. В точках A и B скорость максимальна. Из интеграла Бернулли вдоль линии тока OCADO' :

$$\frac{v_0^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+gz_0=\frac{v_A^2}{2}+\frac{p_A}{\rho}+gz_A$$

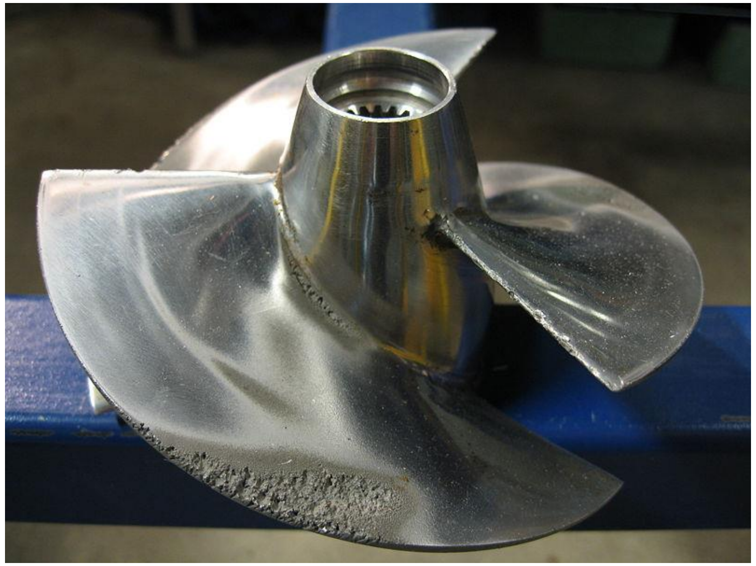
то есть

$$p_A=p_0-\frac{1}{2}\rho(v_A^2-v_0^2)-\rho g(z_A-z_0)$$

Скорость в точке A больше скорости v_0 набегающего потока. Теоретически v_A=2 v_0, $p_A=p_0-\frac{3}{2}\rho v_0^2-\rho g(z_A-z_0)$.

При увеличении v_0 давление в точке A уменьшается , при некотором значении v_0 там возникает кавитация.

При дальнейшем движении кавитационные пузырьки попадают в область повышенного давления и схлопываются (collapse). В точках, в которые схлопываются пузырьки, возникают очень большие давления; это приводит к разрушению поверхностей.



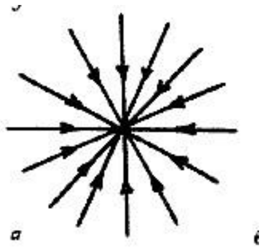


Схема течения при схлопывании пузырька

Разрушение винта корабля

Конец Лекции 6

Daniel Bernoulli
Даниил Бернулли
1700-1782

Johann Bernoulli
Иоганн Бернулли
1667-1748

Ludwig Prandtl
Людвиг Прандтль
1875 — 1953