Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Лекция 5

Модели жидкостей и газов

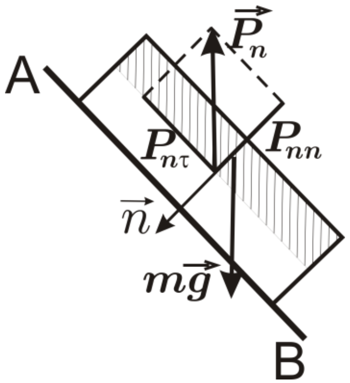
Идеальная жидкость

Лекция 5. Модели жидкостей и газов. Идеальная жидкость

5.1. Жидкости и газы. Определение. Тензор напряжений в покоящихся жидкостях и газах
5.2. Идеальная жидкость. Определение. Вектор напряжений и компоненты тензора напряжений в идеальной жидкости
5.3. Уравнение движения идеальной жидкости – уравнение Эйлера
5.5. Уравнение притока тепла для идеальной жидкости
5.5. Полная система уравнений идеальной жидкости или газа
5.6. Граничное условие на поверхности твёрдых тел в идеальной жидкости
5.7. Граничные условия на свободной поверхности в идеальной жидкости
5.8. Идеальная несжимаемая жидкость. Полная система уравнений
5.9. Совершенный газ
5.10. Идеальный совершенный газ. Полная система уравнений. Формула Майера.
5.11. Адиабатические процессы в идеальном совершенном газе. Адиабата Пуассона
5.12. Выражение для энтропии совершенного газа
5.13. Система уравнений газовой динамики

5.1. Жидкости и газы. Вектор и тензор напряжений в покоящихся жидкостях и газах

Жидкость или газ - это среда, в которой в состоянии покоя отсутствуют касательные напряжения, т.е. в состоянии покоя вектор напряжений на любой площадке параллелен нормали к площадке:



$$\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$$

P_{nn} - проекция вектора $\vec{P}_n$ на нормаль к площадке.

В твёрдом теле это не так. Например, тяжёлый твердый кирпич может лежать на наклонной плоскости. На площадках, параллельных плоскости, действуют касательные силы, которые уравновешивают соответствующую составляющую силы тяжести. Жидкий «кирпич» на наклонной плоскости лежать не может, жидкость будет течь.

Физически газы и жидкости – разные среды. Однако математически они описываются одинаково, поэтому в дальнейшем мы часто будем употреблять термин «жидкость», имея в виду как жидкость, так и газ (fluid).

Теорема (Закон Паскаля)

“Если для всех площадок в данной точке вектор напряжений $\vec{P}_n$ перпендикулярен площадке, то есть, $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$, то величина P_{nn} для всех площадок в данной точке одна и та же”.

Величина P_{nn} обозначается (- p) ; тогда $\vec{P}_n = -p\vec{n}$; p называется давлением.

Доказательство теоремы Паскаля.

Рассмотрим формулу Коши $\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3$, где $\vec{P}_i\ (i = 1,2,3)$ - векторы напряжений на площадках, перпендикулярных соответственно осям x_i, $i = 1,\ 2,\ 3$. Напишем разложения векторов $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и вектора $\vec{n}$ нормали к площадке по векторам базиса $\vec{e}_i$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{P}_1 &= p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + p_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{P}_2 &= p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + p_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{P}_3 &= p_{13}\vec{e}_1 + p_{23}\vec{e}_2 + p_{33}\vec{e}_3 \\ \vec{n} &= n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3 \end{aligned}}$$

Для вектора $\vec{P}_1$ величины p_{21} и p_{31} представляют собой касательные составляющие. По условию они равны нулю, поэтому $\vec{P}_1 = p_{11}\vec{e}_1$. Аналогично $\vec{P}_2 = p_{22}\vec{e}_2$, $\vec{P}_3 = p_{33}\vec{e}_3$

Поэтому формула Коши имеет вид:

$$\boxed{P_{nn}\vec{n} = P_{nn}n_1\vec{e}_1 + P_{nn}n_2\vec{e}_2 + P_{nn}n_3\vec{e}_3 = p_{11}n_1\vec{e}_1 + p_{22}n_2\vec{e}_2 + p_{33}n_3\vec{e}_3}$$

Отсюда следует, что $P_{nn} = p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p$

Итак, в любой жидкости и любом газе в состоянии покоя $\vec{P}_n = -p\vec{n}$, $(p_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$ $\boxed{p_{ij} = -p\delta_{ij}}$

В движущихся жидкостях и газах, конечно, возникают касательные напряжения. Это свойство жидкостей называется вязкостью, а сами касательные напряжения в жидкостях и газах называют вязким трением.

Во многих случаях вязкие касательные напряжения, возникающие при движении, малы по сравнению с силами, связанными с давлением.

Модель жидкости, в которой вязкие касательные напряжения не учитываются, называется идеальной (невязкой) жидкостью.

5.2. Идеальная жидкость и идеальный газ (ideal fluid)

Идеальная жидкость или идеальный газ – это жидкость или газ, в которых 1) не только в покое, но и при движении нет касательных напряжений, т.е. всегда на любой площадке $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$; 2) механические процессы обратимы.

Из условия $\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n}$ следует, что в идеальной жидкости всегда, а не только в покое $\vec{P}_n = -p\vec{n}$, $p_{ij} = -p\delta_{ij}$

5.3. Уравнения движения идеальной жидкости или газа - уравнения Эйлера

Уравнения движения идеальной жидкости или газа называются уравнениями Эйлера.
Они получаются из общих уравнений движения с учетом того, что $p_{ij} = -p\delta_{ij}$.

$$\boxed{\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}}$$

Уравнения движения для <u>всех</u> сред

$$\boxed{\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = -\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

Для идеальной жидкости

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

Уравнения Эйлера

$$\boxed{\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} - \operatorname{grad} p}$$

Уравнение Эйлера в векторном виде

5.4. Уравнение энергии, уравнение притока тепла и уравнение второго закона термодинамики для идеальной жидкости или газа

Уравнение энергии для любой среды

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right)=\rho(\vec{F}\cdot\vec{v})+\frac{\partial(p_{ki}v_k)}{\partial x_i}+\rho\frac{dq}{dt}$$

Идеальная жидкость

$$p_{ki}=-p\delta_{ki}$$

$$\frac{\partial(p_{ki}v_k)}{\partial x_i}=-\frac{\partial(pv_i)}{\partial x_i}=-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}-v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}-v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Здесь было использовано, уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=div\,\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Уравнение энергии для <u>идеальной жидкости</u>:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right)=\rho(\vec{F}\cdot\vec{v})+\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}-v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho\frac{dq}{dt}$$

Уравнение притока тепла для любой среды:

$$\rho\frac{du}{dt}=p_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\rho\frac{dq}{dt}$$

Для идеальной жидкости

$$p_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Уравнение притока тепла для <u>идеальной жидкости</u>

$$\frac{du}{dt}=\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}+\frac{dq}{dt}$$

или

$$du+pdV=dq$$

$$V=1/\rho$$

Второй закон термодинамики для идеальной жидкости (нет трения, процессы обратимы)

$$Tds=dq$$

5.5. Полная система уравнений идеальной жидкости

6 уравнений, которые выполняются для всех идеальных жидкостей и газов:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{dq}{d}$$

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

Приток тепла dq обычно определяется с помощью закона Фурье (если учитывается теплопроводность), или считается, что $dq = 0$ (адиабатический процесс). Массовая сила тоже считается заданной. В системе, написанной слева, число неизвестных 8 : $\rho,\ v_i,\ p,\ u,\ T, s$

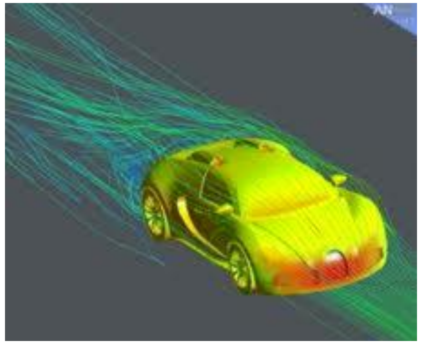
Чтобы получить полную систему (8 уравнений), нужно задать еще 2 уравнения, которые верны для конкретной жидкости или газа.

1. $f(p, \rho, T) = 0$ - уравнение состояния
2. $u = u(\rho, T)$ - калорическое уравнение состояния

5.6. Граничные условия для уравнений идеальной жидкости

При решении задач необходимо знать не только уравнения, но и граничные условия. Это условия, которые выполняются на границах области, занятой жидкостью. Границы области, занятой жидкостью, бывают двух типов:
а) твёрдые непроницаемые границы (поверхности твёрдых тел в жидкости или газе, стенки трубы с жидкостью);
б) свободные поверхности; их форма заранее не известна (например, покрытая волнами поверхность моря).

Волна цунами Япония 2011



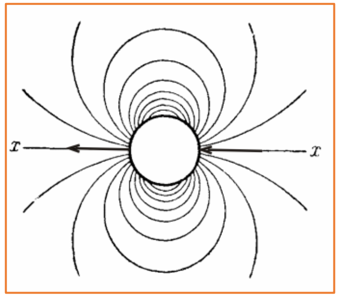
Струя реактивного двигателя

Граничное условие на поверхности твёрдых тел в идеальной жидкости

Граничное условие на поверхности твёрдых тел в идеальной жидкости называется условием непроницаемости:

$$v_n|_{\text{на пов. тела}} = v_{n\ \text{тела}}$$

Здесь $v_n|_{\text{на пов. тела}}$ - нормальная составляющая скорости жидкости на теле; $v_{n\ \text{тела}}$ - нормальная составляющая скорости поверхности тела. Это условие означает, что жидкость не проникает внутрь тела и не отрывается от него.

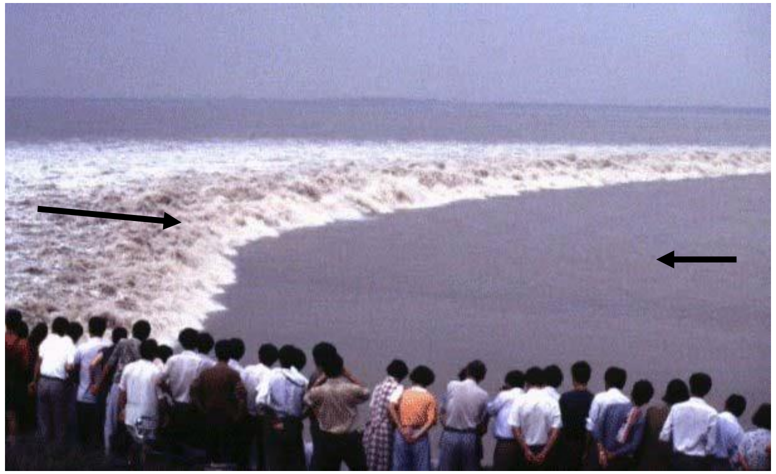


Движение шара в идеальной жидкости

Если тело неподвижно, а жидкость натекает на него, то условие непроницаемости имеет вид $v_n|_{\text{на пов. тела}} = 0$

5.7. Граничные условия на свободной поверхности

Течение с свободной поверхностью



Приливный бор на р. Фучуньцзян. Высота волны 9 м, скорость 40 км/ч

Форма и положение свободной поверхности заранее не известны, находятся в процессе решения задачи. На такой границе ставятся 2 граничных условия.

Первое граничное условие отражает тот факт, что жидкость не пересекает эту поверхность. Оно называется кинематическим условием и записывается так: $v_n|_{\text{на св. пов.}} = D_n$. Здесь D_n - скорость границы по нормали к ней

Второе граничное условие на свободной поверхности называется динамическим условием . Оно имеет вид $p|_{\text{на св. пов.}} = p_0$. Здесь p_0- заданное давление во внешней среде

Замечание. Свободная поверхность есть «поверхность тангенциального разрыва», разделяющая две среды: изучаемую жидкость и внешнюю среду. Динамическое условие получается из закона сохранения количества движения на этом разрыве

5.8. Модель несжимаемой идеальной жидкости

Жидкость называется идеальной несжимаемой, если выполнены 3 условия

1. Идеальность: $p_{ij} = -p\delta_{ij}$;
2. Несжимаемость: $\boxed{\dfrac{d\rho}{dt} = 0}$ т. е. в каждой индивидуальной частице плотность постоянна;
3. Внутренняя энергия частицы несжимаемой жидкости есть функция только температуры $u = u(T)$.

Система уравнений идеальной несжимаемой жидкости (ideal incompressible fluid)

Механические уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$ условие несжимаемости

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$ уравнение неразрывности

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$ уравнение Эйлера

Термодинамические уравнения

$$\frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt}$$ уравнение притока тепла

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{dq}{dt}$$ 2ой закон термодинамики

$$u = u(T)$$ плотность внутренней энергии

Система механических уравнений – замкнута, скорость и давление можно рассчитать без использования термодинамических уравнений. В случае неоднородной жидкости (когда плотность в разных частицах разная) система механических уравнений содержит 5 неизвестных v_i, ρ, p и 5 уравнений.
Для однородной несжимаемой жидкости ρ – заданная постоянная, одинаковая для всех точек. Тогда система механических уравнений содержит 4 уравнения для четырех неизвестных v_i, p.
Если требуется еще рассчитать температуру, то нужно включать термодинамические уравнения.

Внутренняя энергия несжимаемой жидкости

$$\boxed{u = u(T), \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dT}\frac{dT}{dt} = c(T)\frac{dT}{dt}, \quad c(T) = \frac{du}{dT}}$$

Из уравнения притока тепла: $$\boxed{du = c(T)dT = dq, \quad c(T) = \frac{dq}{dT}}$$

$c(T)$ - теплоемкость единицы массы (удельная теплоемкость)

Если $c(T)$ известна (из экспериментов), то $\boxed{u = \int c(T)dT}$ Если c не зависит от T, то $\boxed{u = cT + \text{const}}$

Выражение для плотности энтропии *s* несжимаемой жидкости

Из первого и второго законов термодинамики $du = dq$ и $Tds = dq$ исключим dq; получим

$$\boxed{Tds = du}$$

Это соотношение называют тождеством Гиббса. Оно выполняется для всех процессов в идеальной несжимаемой жидкости, независимо от действующих сил или каких-либо других условий, поэтому называется тождеством.

Так как $\boxed{du = c(T)dT}$, то $\boxed{ds = \frac{1}{T}c(T)dT}$ и $\boxed{s = \int \frac{1}{T}c(T)dT + \text{const}}$

Если удельная теплоемкость c не зависит от T, то $\boxed{s = c\ln T + \text{const}}$

Уравнение притока тепла для теплопроводной несжимаемой идеальной жидкости

Пусть приток тепла происходит за счет теплопроводности, выполнен закон Фурье и коэффициент теплопроводности κ – константа. Тогда

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(-\kappa \operatorname{grad} T) = \frac{\kappa}{\rho}\Delta T}$$

Так как $\boxed{\frac{du}{dt} = c(T)\frac{dT}{dt}}$, то уравнение притока тепла $\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt}}$ принимает вид $\boxed{\frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T}$

то есть, $\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \lambda \Delta T}$

$\boxed{\lambda = \frac{\kappa}{\rho c}}$ - коэффициент температуропроводности

Чтобы найти температуру в потоке, надо прежде найти распределение скоростей из системы механических уравнений. Если среда движется, то термодинамические уравнения не отделяются от механических.

5.9. Совершенный газ (perfect gas)

Совершенным газом называется газ, для которого выполняются 2 соотношения:

1) $p = R\rho T$ - уравнение Клапейрона, 2) $u = c_V T + \mathrm{const}$, $c_V = \mathrm{const}$

Здесь $R = R_0/\mu$, R_0- постоянная, одинаковая для всех газов,
μ – молекулярный вес газа,
c_V - удельная теплоемкость в процессах с постоянным объемом частиц.

Замечание. В физике такой газ называется идеальным. Но в механике сплошных сред «идеальный» значит невязкий. Поэтому для газа, удовлетворяющего уравнению Клапейрона, используется название «совершенный».

В МСС используются модели идеального совершенного газа и вязкого совершенного газа

5.10. Система уравнений для идеального совершенного газа. Формула Майера

Газ называется идеальным совершенным, если 1) не учитываются касательные напряжения, то есть, $p_{ij} = -p\delta_{ij}$ и 2) выполняются соотношения $p = R\rho T$ и $u = c_V T + \mathrm{const}$

Полная система уравнений идеального совершенного газа: 8 уравнений для 8 неизвестных

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\vec{v} = 0\\ \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}\,p\\ \frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{dq}{dt}\\ T\frac{ds}{dt} = \frac{dq}{dt}\\ p = R\rho T\\ u = c_V T + \mathrm{const}\end{gathered}}$$

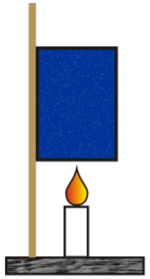
1. Процесс с V=const

Нагреваем газ в банке с закрытой крышкой Рис.(а).

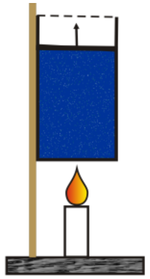
Ур. притока тепла: $du = c_V dT = dq$,

$c_V = \frac{dq}{dT}$ - удельная теплоемкость при V=const .

(а)



(б)



2. Процесс с $p = \mathrm{const}$ (Рис.(б): крышка банки свободно поднимается).

Найдем удельную теплоемкость $c_p = \frac{dq}{dT}$ при $p = \mathrm{const}$.

$$p = \mathrm{const} \Rightarrow R\rho T = \mathrm{const} \Rightarrow Td\rho + \rho dT = 0 \Rightarrow d\rho = -\frac{\rho}{T}dT$$

Из ур. притока тепла: $c_V dT = \frac{p}{\rho^2}d\rho + dq = -\frac{p}{\rho T}dT + dq = -RdT + dq$

$$\boxed{c_P = \frac{dq}{dT} = c_V + R} \Longrightarrow \boxed{R = c_P - c_V}$$

формула Майера

5.11. Адиабатические процессы в идеальном совершенном газе. Адиабата Пуассона

Процесс называется адиабатическим, если нет притока тепла ни к одной частице, то есть, dq=0.
В адиабатическом процессе в идеальном совершенном газе $p = A\rho^{\gamma}$, A – константа в каждой частице.
Соотношение $p = A\rho^{\gamma}$ называется адиабатой Пуассона.

Вывод адиабаты Пуассона

Ур. Клапейрона

$$T = \frac{p}{R\rho}$$

Ур. притока тепла

$$c_V dT = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Формула Майера

$$\frac{R}{c_V} = \frac{c_p - c_V}{c_V} = \gamma - 1$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

$$dT = \frac{1}{R\rho} dp - \frac{p}{R\rho^2} d\rho = \frac{p}{c_V \rho^2} d\rho$$

$$dp = \left(1 + \frac{R}{c_V}\right)\frac{p}{\rho} d\rho = \gamma \frac{p}{\rho} d\rho$$

$$\frac{1}{p} dp = \frac{\gamma}{\rho} d\rho$$

$$\ln p = \gamma \ln \rho + \text{const}$$

$$p = A\rho^{\gamma}$$

$\gamma = c_P / c_V$
показатель адиабаты

Для воздуха
$\gamma = 1.4$

Когда можно считать движение адиабатическим?

Человек прыгает через огонь

Если температуры разных частиц – разные, то тепло переходит от одной частицы к другой, происходит процесс теплопроводности, $dq \neq 0$.
Но теплопроводность – очень медленный процесс! При быстрых движениях частицы почти не успевают получить тепло - тогда можно считать процесс адиабатическим.
В науке, которая называется «Газовая динамика» изучается движение тел в газе (в воздухе) с очень большими скоростями (самолеты, ракеты), движение считается адиабатическим.

5.12. Выражение для плотности энтропии совершенного газа

Для любого идеального газа из первого и второго законов термодинамики: $du = \frac{p}{\rho^2} d\rho + dq$, $Tds = dq$

получается соотношение $\boxed{du = \frac{p}{\rho^2} d\rho + Tds}$ Это соотношение называется тождеством Гиббса.

Тождество Гиббса для совершенного газа:
($u = c_V T + const, p = R\rho T, \frac{R}{c_V} = \gamma - 1$)

$$Tds = c_V dT - \frac{RT}{\rho} d\rho \quad , \quad ds = c_V \frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} = c_V \left(\frac{dT}{T} - \frac{R}{c_V}\frac{d\rho}{\rho} \right)$$

Отсюда получаем выражение для плотности энтропии совершенного газа: $\boxed{s = c_V \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + C_1 = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + C}$

Константы C_1 и C зависят только от выбора начала отсчета энтропии.

Теперь можно выразить давление в совершенном газе как функцию плотности и энтропии

Записывая константу C в виде $C = -c_V \ln A_1$, получим: $\ln \frac{p}{\rho^\gamma} = \ln A_1 + \frac{s}{c_V}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{p = A_1 e^{\frac{s}{c_V}} \rho^\gamma}$

Такое соотношение между p, ρ и s выполняется в совершенном газе всегда, во всех процессах (уравнение состояния в виде зависимости давления от плотности и энтропии)

В адиабатических процессах в идеальном газе в каждой частице $dq = 0, ds = 0$, $s = \mathrm{const}$

В совершенном в идеальном газе в адиабатических процессах $p = A\rho^\gamma$, $A = A_1\, e^{s/c_V} = \mathrm{const}$

Снова получили адиабату Пуассона. Видим, что константа A <u>зависит от энтропии частицы</u> и может быть разной в разных частицах.

5.13. Система уравнений газовой динамики

В классической газовой динамике изучаются движения газа и движения тел в газе с большими скоростями. Обычно предполагается, что 1) газ идеальный, 2) движение адиабатическое, 3) массовые силы отсутствуют, 4) газ совершенный.

Обоснование: 1) вязкие напряжения малы по сравнению с силами, связанными с давлением; 2) обмен теплом между частицами не успевает происходить (теплопроводность – медленный процесс), движение можно считать адиабатическим; 3) действие силы тяжести сводится к силе Архимеда, которая при движении в воздухе самолетов и ракет очень мала по сравнению с силами, связанными с динамическим давлением.

Система уравнений, которая получается при выполнении предположений 1 - 4, называется системой уравнений газовой динамики:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$ – уравнение неразрывности

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p$$ – уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = 0$$ – условие адиабатичности

Седов Леонид Иванович
(1907-1999)

Эйлер Л.

«Общие принципы движения жидкостей» (**1755**)

Euler L. Principe généraux du mouvement des fluides // *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, **11**, **1757**. — P. 274—315.

Конец Лекции 5