Механика сплошных сред. Классические модели

Лекторы проф. Эглит М.Э. и доцент Калугин А.Г.

Некоторые учебники по этому курсу механики сплошных сред

Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. М., 2010
http://gidropraktikum.narod.ru/Eglit-OMSS.djvu

Механика сплошных сред в задачах. Под ред М.Э.Эглит. Т. 1. Теория и задачи. М., Московский лицей, 1996
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Eglit_MSSzadach_t1_1996ru.djvu

Механика сплошных сред в задачах. Под ред М.Э.Эглит. Т. 2. Ответы и решения. М., Московский лицей, 1996
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Eglit_MSSzadach_t2_1996ru.djvu

Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.1, Т.2
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/continuous.htm

Механика сплошных сред. Лекция 1 (Эглит М.Э.)
Краткий обзор геометрических и кинематических характеристик, используемых для описания движения сплошных сред

1.1. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты. Два способа описания движения: лагранжев и эйлеров

1.2. Материальная (индивидуальная, полная) производная по времени. Формулы для вычисления ускорения по скорости

1.3. Тензор малых деформаций. Физический смысл компонент в декартовой системе координат. Выражение компонент через производные компонент вектора перемещения. Относительное изменение объема малой частицы

1.4. Тензор скоростей деформаций. Физический смысл компонент. Выражение компонент через производные компонент вектора скорости. Скорость относительного изменения объема малой частицы

1.5. Вектор вихря. Формула Коши - Гельмгольца

1.6. Потенциальное движение

1.1. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты

Пространственная система координат – это система, относительно которой изучается движение. Пространственные или эйлеровы координаты - это координаты точек среды в пространственной системе координат.

В этой части курса мы будем в основном использовать декартову пространственную систему координат и обозначать координаты x_1, x_2, x_3 или x, y, z . Тогда индексы у координат и компонент векторов и тензоров можно всегда ставить внизу, так как ковариантные и контра вариантные векторы базиса совпадают, а матрица компонент метрического тензора единичная: $g_{ij} = \delta_{ij}$

Материальными или лагранжевыми координатами называются параметры ξ_1, ξ_2, ξ_3, которые выделяют индивидуальные точки среды. Для индивидуальной точки лагранжевы координаты не меняются в процессе движения.

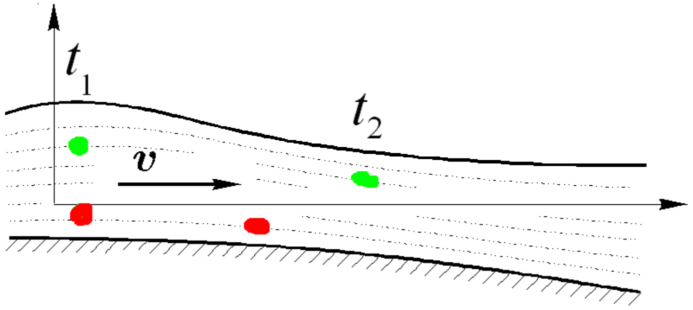
В качестве лагранжевых координат могут быть, например, значения пространственных координат точек в начальный момент времени x_{01}, x_{02}, x_{03}.

Пространственные координаты индивидуальных точек являются функциями времени t, разными для разных индивидуальных точек :

$$\boldsymbol{x_i = x_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

Два способа описания движения и других процессов в сплошных средах: лагранжев и эйлеров

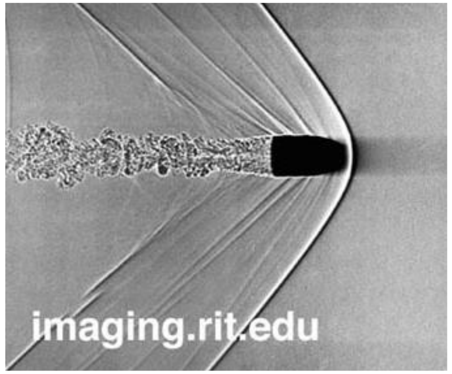
При описании движения по Лагранжу мы следим за тем, что происходит в каждой <u>индивидуальной</u> точке среды.



При лагранжевом описании все величины (скорость $\vec{v}$, температура T, давление p) рассматриваются как функции времени и лагранжевых координат ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), T = T(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ p = p(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

При описании движения по Эйлеру мы следим за тем, что происходит в точках <u>пространства</u>, через которые движется среда.



При эйлеровом описании все величины, характеризующие движение среды, рассматриваются как функции времени t и пространственных координат x_1, x_2, x_3

$$\vec{v} = \vec{v}(t, x_1, x_2, x_3), T = T(t, x_1, x_2, x_3), \\ p = p(t, x_1, x_2, x_3)$$

1.2. Материальная (индивидуальная, полная) производная по времени

Материальная или индивидуальная производная по времени от величины f описывает, как f меняется со временем в индивидуальной точке среды. Это ее физический смысл.

В механике сплошных сред индивидуальная производная по t обозначается

$$\frac{df}{dt}$$

В математике такое обозначение используется, когда f зависит только от времени (обыкновенная производная). Но в сплошных средах все характеристики зависят не только от времени; они разные в разных точках, то есть, зависят еще и от лагранжевых или эйлеровых координат.

Чему равна индивидуальная производная, если f задана по способу Лагранжа $f = f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$?

Ответ. Так как для индивидуальной частицы лагранжевы координаты постоянны, не меняются со временем, то индивидуальная производная f по t есть просто частная производная f по t

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(t, \xi_i)}{\partial t}\Big|_{\xi_i = const}$$

Чему равна индивидуальная производная, если f задана по способу Эйлера ?

$$f = f(t, x_1, x_2, x_3)$$

Ответ. Надо учесть, что для движущейся индивидуальной точки пространственные координаты меняются со временем: $x_1 = x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_2 = x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_3 = x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Поэтому для индивидуальной точки f является сложной функцией времени: f зависит от t, x_i , а x_i зависят от t, ξ_1, ξ_2, ξ_3. Индивидуальная производная по t вычисляется как производная сложной функции

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}|_{\xi_k = const} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}|_{\xi_k = const} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}|_{\xi_k = const}}$$

Для индивидуальной точки производные пространственных координат по времени есть компоненты вектора скорости

$$\boxed{\frac{\partial x_1}{\partial t}|_{\xi_k = const} = v_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t}|_{\xi_k = const} = v_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t}|_{\xi_k = const} = v_3}$$

Формула для индивидуальной производной при эйлеровом описании:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial f}{\partial x_3} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k\frac{\partial f}{\partial x_k} \end{aligned}}$$

В последнем члене использовано правило суммирования Эйнштейна: если в одночлене какой-то индекс повторяется дважды, то по нему проводится суммирование от 1 до 3

Формулы для вычисления ускорений по скоростям

Ускорение $\vec{a}$ индивидуальной точки есть скорость изменения ее скорости со временем,
то есть, индивидуальная производная скорости по времени

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Если скорость задана по Лагранжу, то

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}(t, \xi_i)}{\partial t}}$$

Если скорость задана по Эйлеру, то

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\,t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial\, t} + v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3}}$$

Компоненты ускорения в декартовых координатах при описании по Эйлеру

$x_1,\ x_2,\ x_3$

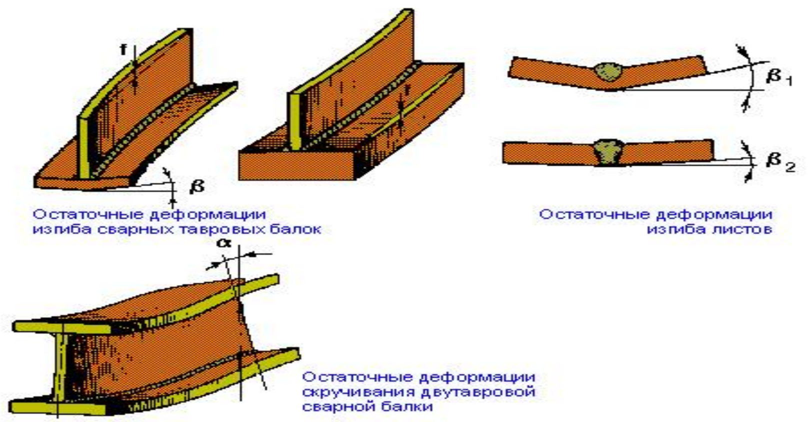
$$\boxed{\begin{aligned}
a_1 &= \frac{dv_1}{d\,t} = \frac{\partial v_1}{\partial\, t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\
a_2 &= \frac{dv_2}{d\,t} = \frac{\partial v_2}{\partial\, t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\
a_3 &= \frac{dv_3}{d\,t} = \frac{\partial v_3}{\partial\, t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}
\end{aligned}}$$

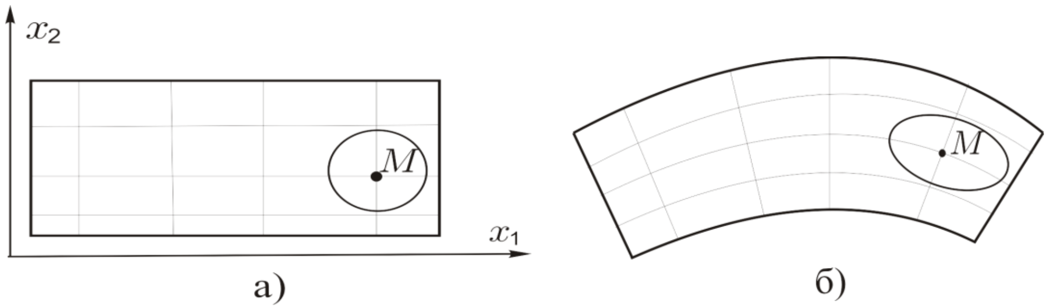
$x,\ y,\ z$

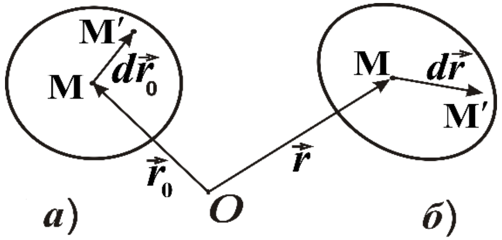
$$\boxed{\begin{aligned}
a_x &= \frac{dv_x}{d\,t} = \frac{\partial v_x}{\partial\, t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\
a_y &= \frac{dv_y}{d\,t} = \frac{\partial v_y}{\partial\, t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\
a_z &= \frac{dv_z}{d\,t} = \frac{\partial v_z}{\partial\, t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}}$$

1.3. Тензор деформаций

Деформации – это изменение длин всевозможных материальных отрезков и углов между ними по сравнению с начальным, недеформированным состоянием.
В разных частях тела деформации могут быть разными.
Поэтому при количественном описании деформаций мы рассматриваем малую окрестность некоторой точки M среды.







а) начальное состояние; б) конечное (деформированное) состояние

До деформации
координаты точек M и M'

$$M\{x_{01},\ x_{02},\ x_{03}\},\quad M'\{x_{01}+dx_{01},\ x_{02}+dx_{02},\ x_{03}+dx_{03}\}$$

длина отрезка MM' : ds_0

После деформации $|MM'| = ds$

Тензор деформаций Коши - Грина

$$\boxed{ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{kl}dx_{0k}dx_{0l}}$$

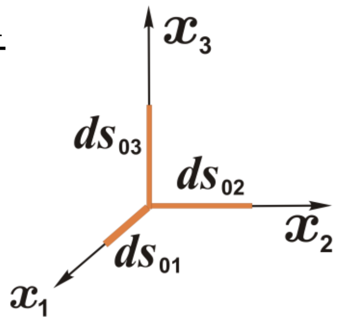
ε_{kl} - компоненты тензора деформаций

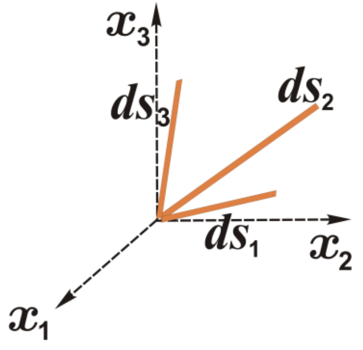
Физический смысл компонент тензора малых деформаций в декартовых координатах

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \frac{1}{2}\chi_{12} & \frac{1}{2}\chi_{13} \\ \frac{1}{2}\chi_{21} & e_2 & \frac{1}{2}\chi_{23} \\ \frac{1}{2}\chi_{31} & \frac{1}{2}\chi_{32} & e_3 \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} - это коэффициенты относительного удлинения отрезков, которые были до деформации параллельны осям x_1, x_2, x_3, соответственно

$$e_1 = \frac{ds_1 - ds_{01}}{ds_{01}}$$

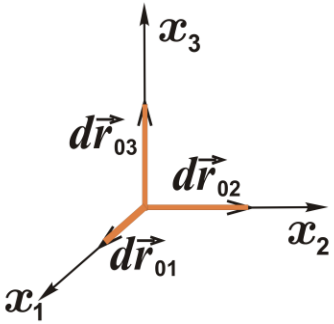


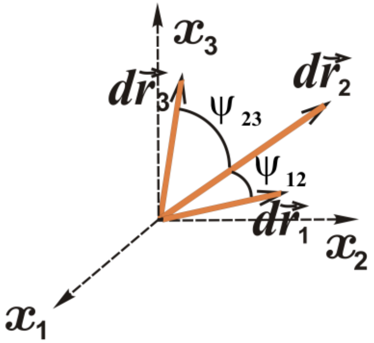


e_i - коэффициент относительного удлинения отрезка, лежавшего до деформации вдоль x_i

$$\boxed{e_i = \frac{ds_i - ds_{0i}}{ds_{0i}}}$$

Внедиагональные элементы ε_{ik}, $i \neq k$ – это половины изменения углов между отрезками, один из которых был до деформации параллелен оси x_i, а другой - оси x_k. После деформации угол между ними ψ_{ik}





$$\chi_{12} = \frac{\pi}{2} - \psi_{12}$$

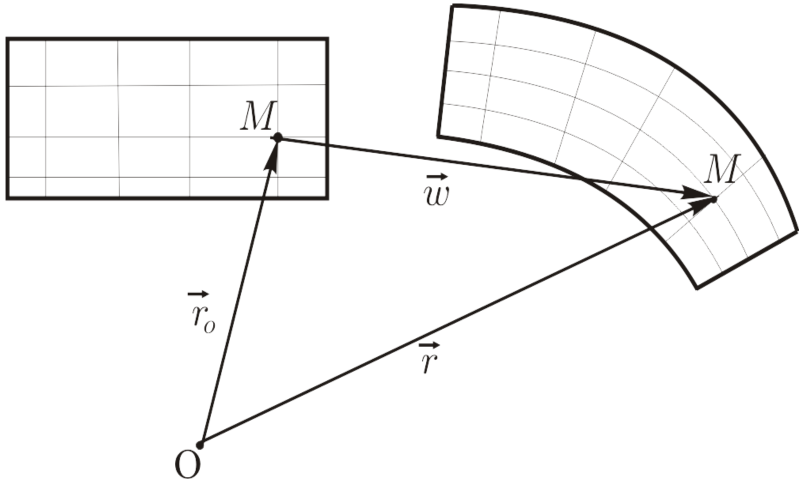
χ_{ik} - изменение угла между отрезками, лежавшими до деформации вдоль x_i и x_k

$$\boxed{\chi_{ik} = \frac{\pi}{2} - \psi_{ik}}$$

Выражение компонент тензора деформаций через компоненты вектора перемещения

Вектор перемещения $\vec{w}$ с компонентами w_i - это вектор, соединяющий начальное положение (место) индивидуальной точки среды с ее положением после деформации

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$



<u>При малых относительных перемещениях</u>

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)$$

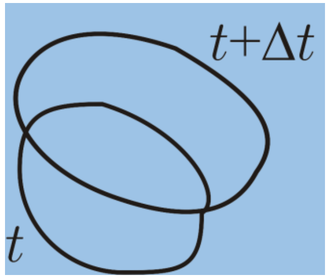
Две формулы для коэффициента относительного изменения объема при деформации

Коэффициент относительного изменения объема

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

$$\theta = I_1(\varepsilon_{ij}) \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$\theta = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{w}$$



1.4. Тензор скоростей деформаций

Рассмотрим два положения движущейся частицы: в момент t и в момент $t + dt$. Обозначим через $\Delta\varepsilon_{ij}$ компоненты тензора малых деформаций в момент $t + dt$ по отношению к состоянию в момент t, а $\overrightarrow{\Delta w}$ - малые перемещения за это время.

Тензором скоростей деформаций называется тензор с компонентами e_{ij} , которые определяются формулами:

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t}$$

Физический (механический) смысл компонент тензора скоростей деформаций

$$e_{i\,i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{i\,i}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_i}{\Delta t}$$

e_{ii} это скорости относительного удлинения отрезков, лежащих в данный момент времени вдоль координатных осей

$$e_{i\,j} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{i\,j}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\chi_{i\,j}}{\Delta t}$$

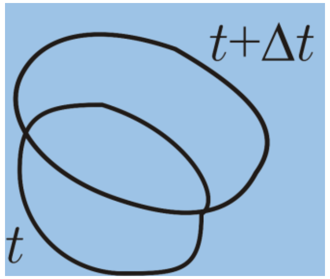
$$при\ i \neq j$$

e_{ij} при $i \neq j$ это половины скорости изменения углов между отрезками, один из которых в данный момент времени параллелен оси x_i , а другой - оси x_j

Выражение e_{ij} через компоненты вектора скорости

Δw_i - компоненты вектора $\overrightarrow{\Delta w}$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta w_j}{\partial x_i}\right) \Rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$



$\Delta\varepsilon_{ij},\ \overrightarrow{\Delta w}$

Две формулы для скорости относительного изменения объема. Физический смысл дивергенции скорости

Обозначим $\Delta\theta$ относительное изменение объема при деформировании малой частицы от момента t до момента $t+\Delta t$.

Скорость относительного изменения объема: $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{dV-dV_0}{dV_0}$$

Используем формулы для величины относительного изменения объема при малых деформациях

$$\Delta\theta=\Delta\varepsilon_{11}+\Delta\varepsilon_{22}+\Delta\varepsilon_{33}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varepsilon_{11}+\Delta\varepsilon_{22}+\Delta\varepsilon_{33}}{\Delta t}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=I_1(e)$$

$$\Delta\theta=\frac{\partial\Delta w_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Delta w_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\Delta w_3}{\partial x_3}=\operatorname{div}\Delta\vec{w}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\operatorname{div}\Delta\vec{w}}{\Delta t}=\operatorname{div}\vec{v}$$

Скорость относительного изменения объема малой окрестности любой точки среды равна первому инварианту тензора скоростей деформаций и равна дивергенции скорости

Каков физический смысл первого инварианта тензора скоростей деформаций?
Ответ. $I_1(e)$ равен скорости относительного изменения объема малой окрестности точки, где он вычисляется.

Каков физический смысл дивергенции скорости?
Ответ. $div\ \vec{v}$ равна скорости относительного изменения объема малой окрестности точки, где она вычисляется.

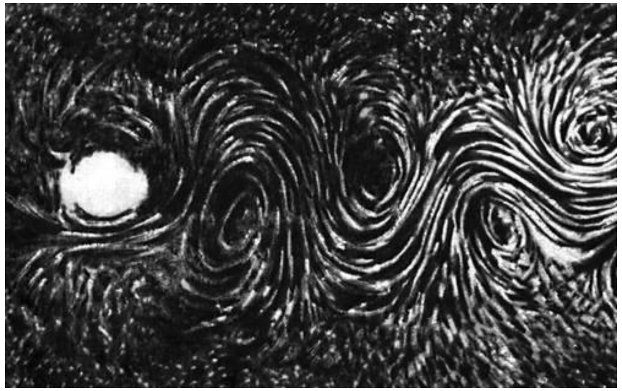
1.4. Вектор вихря

Вектором вихря называется $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Механический смысл вектора вихря. Это угловая скорость вращения частицы, которую частица имела бы, если бы она мгновенно затвердела.

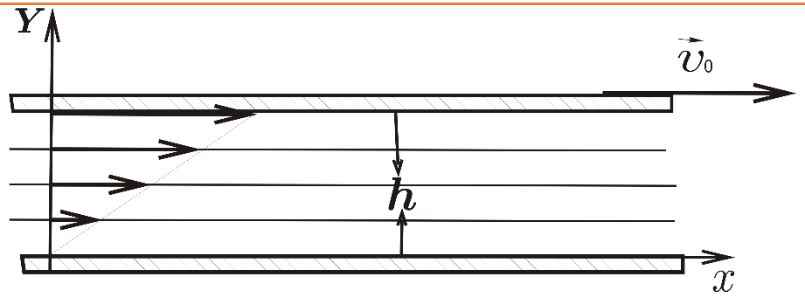
Если среда движется как твердое тело (без деформации), то вектор вихря – это угловая скорость тела.
Если среда при движении деформируется, то вектор вихря в разных точках может быть разным.

Вихревой след при обтекании тела вязкой жидкостью



Вектор вихря может быть отличен от нуля даже когда все частицы движутся <u>по прямым</u>. Пример: течение вязкой жидкости между двумя пластинами

Верхняя пластина движется, нижняя неподвижна



Течение Куэтта

$$v_x = v_0 y/h,\ v_y = 0,\ v_z = 0$$
$$\omega_x = 0,\quad \omega_y = 0,$$
$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{v_0}{h}$$

Конец лекции 1

Leonard Euler

Леонард Эйлер
1707-1783

Россия (1727—1741)
и (1766—1783)

Lagrange, Joseph Louis

Жозеф Луи Лагранж
(1736 - 1813)