

# Механика сплошной среды

для студентов отделения механики - 4,5,6 семестры

профессор М.Э. Эглит

## Введение

Предмет механики сплошной среды. Основные проблемы, область приложений, перспективные направления. Понятие сплошной среды. Процессы, в которых это понятие можно использовать для моделирования поведения реальных тел.

## Часть I. Общие основы механики сплошных сред

### 1. Основные понятия, используемые для описания движения и деформации сплошной среды

#### 1.1. Лагранжево и эйлерово описание движения сплошных сред

Лагранжево описание движения. Лагранжевы (материальные) координаты. Закон движения точек сплошной среды. Вычисление компонент вектора скорости по закону движения. Вычисление ускорения по скорости при лагранжевом описании.

Эйлерово описание движения. Пространственные координаты. Вычисление поля ускорений по полю скоростей при эйлеровом описании. Индивидуальная (материальная, полная) и локальная производные по времени.

Переход от лагранжева описания к эйлерову и обратный переход.

#### 1.2. Тензоры и тензорные поля в евклидовом пространстве.

Криволинейные системы координат. Ковариантные и контравариантные векторы базиса. Определение тензора, метрический тензор. Ковариантные, контравариантные и физические компоненты. Операции над тензорами. Инварианты тензоров.

Тензорные поля. Ковариантное дифференцирование. Дивергенция и ротор вектора, градиент скалярной функции.

Тензоры второго ранга. Разложение на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Тензорная поверхность, главные оси, главные компоненты, инварианты симметричного тензора второго ранга. Шаровой тензор и девиатор. Представление антисимметричного тензора второго ранга в трехмерном пространстве аксиальным вектором. Тензор Леви-Чивита.

Тензорные функции. Тензор второго ранга как функция одного или нескольких тензоров второго ранга. Тождество Гамильтона-Кэли. Формула Лагранжа-Сильвестра.

Среды, обладающие симметрией. Изотропные, трансверсально-изотропные, ортотропные среды.

#### 1.3. Деформация.

Тензоры конечных и бесконечно малых деформаций. Механический смысл компонент. Главные оси и главные компоненты тензоров деформации. Выражение для относительного изменения объема через инварианты тензоров деформации – при конечных и малых деформациях. Механический смысл первого инварианта тензора деформации в случае малых деформаций.

Выражение компонент тензоров деформаций через компоненты вектора перемещения. Линейные формулы в случае малых деформаций и малых относительных поворотов. Выражение для относительного изменения объема через вектор перемещения в случае малых деформаций и малых поворотов.

Уравнения совместности для компонент тензоров деформаций. Уравнения совместности Сен-Венана в случае малых деформаций.

Тензор скоростей деформаций. Выражение его компонент через производные от компонент скорости. Кинематический смысл компонент в декартовой системе координат. Механический смысл дивергенции вектора скорости. Условие несжимаемости среды.

Формула Коши – Гельмгольца для распределения скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды.

Вектор вихря. Определение. Кинематический смысл вектора вихря. Циркуляция скорости. Формула Стокса.

Потенциал скорости. Эквивалентность понятий потенциального и безвихревого движения.

## **2. Универсальные законы сохранения и уравнения механики сплошной среды**

### **2.1. Некоторые операции над интегралами.**

Формула Гаусса – Остроградского. Кинематический смысл. Понятие потока вектора через поверхность. Дифференцирование по времени интеграла по подвижному объему.

### **2.2. Закон сохранения массы.**

Формулировка закона сохранения массы для конечного индивидуального объема сплошной среды. Уравнение неразрывности при Эйлеровом и при Лагранжевом описании среды. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды.

### **2.3. Закон сохранения количества движения.**

Силы, действующие на сплошную среду: массовые и поверхностные. Вектор напряжений. Закон сохранения количества движения для конечного индивидуального объема сплошной среды.

Формула Коши, связывающая вектор напряжений на любой площадке с векторами напряжений на трех фиксированных взаимно перпендикулярных площадках. Тензор напряжений. Физический смысл компонент в декартовой системе координат.

Дифференциальные уравнения движения сплошной среды.

### **2.4. Закон сохранения момента количества движения.**

Формулировка закона сохранения момента количества движения для конечного объема сплошной среды. Дифференциальное уравнение момента количества движения.

Условия, при которых симметрия тензора напряжений является следствием закона сохранения момента количества движения.

## **3. Простейшие модели сплошных сред.**

Жидкости и газы. Тензор напряжений в покоящейся жидкости. Давление.

Идеальная жидкость. Уравнения Эйлера. Полные системы механических уравнений для несжимаемой жидкости и для баротропных движений сжимаемой жидкости. Условие непроницаемости на поверхности твердых тел.

Вязкая жидкость. Линейно-вязкая (ньютоновская) жидкость. Связь между компонентами тензоров вязких напряжений и скоростей деформаций в изотропной линейно-вязкой жидкости (закон Навье-Стокса). Первый и второй коэффициенты вязкости (коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости). Кинематический коэффициент вязкости. Уравнения Навье-Стокса. Граничное условие прилипания на поверхности твердых тел. Полная система уравнений несжимаемой линейно-вязкой жидкости.

Упругая среда. Линейно-упругая среда. Закон Гука для изотропной линейно-упругой среды при изотермическом деформировании. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль объемного сжатия. Уравнения Навье-Ламе. Типичные граничные условия.

## **4. Законы термодинамики.**

#### **4.1. Первый закон термодинамики.**

Закон сохранения энергии – первый закон термодинамики. Кинетическая энергия. Внутренняя энергия.

Формулировка закона сохранения энергии для конечного индивидуального объема сплошной среды. Работа внешних сил. Приток тепла. Теплопроводность. Притоки энергии в других формах. Дифференциальное уравнение энергии.

Теорема живых сил (теорема о внутренней энергии). Работа внутренних сил.

Уравнение притока тепла (уравнение для внутренней энергии).

Выражение для притока тепла к малой частице за счет теплопроводности. Закон теплопроводности Фурье для изотропной и анизотропной сред.

#### **4.2. Второй закон термодинамики.**

Физические формулировки второго закона термодинамики. Обратимые процессы. Цикл Карно, теорема Карно о коэффициенте полезного действия тепловых машин. Абсолютная температура. Неравенство Клаузиуса. Энтропия.

Формулировка второго закона термодинамики, содержащая понятие энтропии. Приток энтропии извне и производство энтропии.

Формулировка второго закона термодинамики для конечного индивидуального объема сплошной среды. Дифференциальное уравнение энтропии.

Производство энтропии в процессе теплопроводности.

Элементы термодинамики необратимых процессов. Тождество Гиббса. Выражение для производства энтропии. Связи между термодинамическими силами и потоками. Принцип Онзагера. Примеры необратимых процессов: теплопроводность, движение вязкой жидкости, диффузия.

#### **4.3. Ограничения на вид уравнений состояния и определяющих уравнений, следующие из законов термодинамики.**

### **5. Поверхности разрыва в сплошных средах.**

Поверхности сильного и слабого разрывов. Условия на поверхностях сильного разрыва, следующие из законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии и закона возрастания энтропии. Ударные волны, тангенциальные разрывы, контактные разрывы.

### **6. Основы теории размерности и подобия физических явлений.**

Размерности физических величин. П-теорема. Подобие механических явлений. Критерии подобия. Числа Рейнольдса, Фруда, Струхала, Маха, Прандтля. Использование анализа размерностей при физическом моделировании и обработке экспериментов.

## **Часть II. Классические модели сплошных сред**

### **1. Жидкости и газы в механике сплошной среды.**

#### **1.1. Идеальные жидкости и газы.**

Определение идеальной жидкости. Полная система уравнений. Граничные условия. Условия непроницаемости на твердой поверхности. Условия на свободной поверхности. Поверхностное натяжение.

Идеальная несжимаемая теплопроводная жидкость. Полная система уравнений.

Идеальная сжимаемая жидкость или газ. Полная система уравнений. Ограничения на вид уравнений состояния, следующие из законов термодинамики (существование термодинамических потенциалов). Примеры уравнений состояния для жидкостей и газов. Совершенный

газ. Энтропия совершенного газа. Адиабатическое движение идеального совершенного газа. Адиабата Пуассона. Уравнения газовой динамики.

### 1.2. Вязкие жидкости и газы.

Полная система уравнений вязкой жидкости.

Термодинамические соотношения для вязкой жидкости. Тождество Гиббса. Производство энтропии при движении вязкой жидкости. Диссипация механической энергии.

Примеры моделей вязких жидкостей и газов: а) линейно-вязкая несжимаемая жидкость; б) линейно-вязкий совершенный газ.

Полная система уравнений для линейно-вязкого совершенного теплопроводного газа (с теплопроводностью, подчиняющейся закону Фурье).

## 2. Упругие среды.

Упругая среда. Определение. Полная система уравнений. Типичные граничные условия.

Задание модели упругой среды заданием плотности внутренней энергии как функции деформаций и энтропии, или свободной энергии как функции деформаций и температуры.

Линейно-упругая среда с малыми деформациями. Изотропная линейная термоупругая среда. Обобщенный закон Гука. Физический смысл коэффициентов, входящих в обобщенный закон Гука: коэффициент линейного теплового расширения, модуль Юнга, коэффициент Пуассона; модуль объемного сжатия, модуль сдвига.

Полная система уравнений линейной термоупругой среды с малыми деформациями.

## Часть III. Свойства моделей сплошных сред. Постановки и решения задач

### 1. Модель идеальной жидкости или газа.

Установившееся движение. Интеграл Бернулли. Интеграл Бернулли для движения несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Понятие о кавитации. Интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа. Связь температуры, плотности и давления с числом Маха вдоль линии тока. Форма трубок тока в установившемся адиабатическом движении газа при отсутствии массовых сил. Сопло Лавала.

Теоремы о вихрях в идеальной жидкости. Теоремы Томсона и Лагранжа. Причины возникновения вихрей.

Потенциальное движение. Интеграл Коши-Лагранжа. Потенциальное движение несжимаемой жидкости. Уравнение Лапласа и граничные условия на поверхности твердого тела и на свободной поверхности жидкости для потенциала скорости. Примеры потенциальных движений. Безотрывное обтекание сферы идеальной несжимаемой жидкостью. Парадокс Даламбера-Эйлера. Движение сферы с переменной скоростью. Присоединенная масса.

Плоские потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал. Обтекание кругового цилиндра. Постановка задачи об определении комплексного потенциала плоского течения около цилиндрического тела произвольного сечения. Метод конформных отображений. Струйные течения. Обтекание тел с кавитацией.

Баротропное движение сжимаемой жидкости (газа) с малыми возмущениями. Волновые уравнения для возмущения плотности и потенциала скорости. Скорость звука. Распространение возмущений от движущегося источника. Конус Маха.

Уравнения одномерного неустановившегося движения газа с плоскими волнами в характеристической форме. Метод характеристик. Волны Римана. Явление опрокидывания волны.

Условия на скачках в идеальном газе. Ограничения, следующие из второго закона термодинамики. Задача о поршне, вдвигающемся в трубу, заполненную газом.

### 2. Модель вязкой жидкости.

Некоторые точные решения уравнений Навье-Стокса. Течения Куэтта и Пуазейля.

Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости. Число Рейнольдса, Приближение Стокса для течений с малыми числами Рейнольдса. Ламинарный пограничный слой. Уравнения плоского стационарного пограничного слоя. Оценка толщины пограничного слоя.

### **3. Турбулентность.**

Ламинарный и турбулентный режимы течения. Критерий Рейнольдса. Уравнения Рейнольдса. Физический смысл турбулентных напряжений. Способы замыкания уравнений Рейнольдса.

Свободная турбулентность. Турбулентное движение вблизи плоской стенки. Полуэмпирическая теория Прандтля.

### **4. Модель упругой среды.**

#### **4.1. Уравнения нелинейной теории упругости.**

Уравнения нелинейного упругого тела с конечными деформациями в эйлеровой и начальной лагранжевой системах координат. Тензор напряжений Пиолы-Кирхгоффа. Внутренняя и свободная энергии упругой среды как термодинамические потенциалы.

#### **4.2. Линейная теория упругости.**

Постановка задач линейной теории упругости в перемещениях и в напряжениях. Уравнения Бельтрами-Мичелла. Теорема Клапейрона. Теорема единственности задач линейной теории упругости. Принцип Сен-Венана.

Задача (Ламе) о трубе под действием внутреннего и внешнего давлений. Задача о чистом изгибе балки.

Кручение цилиндрических стержней. Полуобратный метод Сен-Венана. Функция напряжений при кручении. Качественные выводы о распределении напряжений в закручиваемом стержне. Максимальные касательные и растягивающие напряжения. Аналогии задачи о кручении стержня: гидродинамические аналогии (с течением идеальной и вязкой жидкости), мембранная аналогия.

Плоское деформированное состояние. Функция напряжений Эри. Обобщенное плоское напряженное состояние. Упругая пластина с круговым отверстием. Концентрация напряжений.

Распространение упругих волн в безграничной среде.

Вариационное уравнение и вариационные принципы в теории упругости. Приближенные методы решения задач, основанные на использовании вариационного принципа (метод Ритца, метод Бубнова-Галеркина).

### **5. Модели пластических тел.**

Основные понятия теории пластичности. Пластические деформации, поверхность нагружения (текучести), нагружение и разгрузка. Идеально-пластические тела и тела с упрочнением. Жестко-пластические тела.

Определяющие соотношения в теории пластичности. Условия пластичности Треска и Мизеса. Деформационные теории и теории пластического течения. Принцип Мизеса. Ассоциированный закон. Термодинамические соотношения в теории пластичности.

Постановка задач в теории пластичности. Полная система уравнений для упруго-идеально-пластической среды в теории Прандтля-Рейсса. Условия на границе упругой и пластической зон. Задача о кручении упруго-пластического стержня.

### **6. Модели вязкоупругих и вязкопластических тел.**

Ползучесть и релаксация напряжений.  
Модели вязкоупругих сред Максвелла и Фойгта.  
Вязкопластическая среда Шведова–Бингама.

## Часть IV. Взаимодействие сплошных сред с электромагнитным полем

Основные понятия электродинамики. Напряженность электрического и магнитного полей. Проводники и диэлектрики. Поляризация и намагничивание. Плотность заряда и плотность тока. Сила Лоренца. Закон Ома. Джоулево тепло. Уравнения для электромагнитного поля (уравнения Максвелла).

Полные системы уравнений для сред, взаимодействующих с электромагнитным полем. Уравнения магнитной гидродинамики. Уравнения электрогидродинамики.

## Литература

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1,2, М., Наука, 5-е издание, 1994
2. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., МГУ, 1990
3. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М., МГУ, 1979
4. Куликовский А.Г. Лекции по механике сплошной среды. МГУ, мех-мат, 1985
5. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI, Гидродинамика, М., Наука, 1986; т.VII, Теория упругости, М., Наука, 1987
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1978
8. Лоренц Г. А. Лекции по термодинамике. М., Гостехтеориздат, 1941
9. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1, 2. Под ред. М.Э. Эглит. М., Московский Лицей, 1996
10. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М., Наука, 1988
11. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1987