RECHERCHES
SUR L'ÉQUILIBRE ET LE MOUVEMENT INTÉRIEUR DES CORPS SOLIDES OU FLUIDES, ÉLASTIQUES OU NON ÉLASTIQUES.

Bulletin de la Société Philomatique, p. 9-13; 1823.

Ces recherches ont été entreprises à l'occasion d'un Mémoire publié par M. Navier, le 14 août 1820. L'auteur, pour établir l'équation d'équilibre du plan élastique, avait considéré deux espèces de forces produites, les unes par la dilatation ou la contraction, les autres par la flexion de ce même plan. De plus il avait supposé, dans ses calculs, les unes et les autres perpendiculaires aux lignes ou aux faces contre lesquelles elles s'exercent. Il me parut que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui devait constamment s'appeler tension ou pression, et qui était de la même nature que la pression hydrostatique exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide. Seulement la nouvelle pression ne demeurait pas toujours perpendiculaire aux faces qui lui étaient soumises, ni la même dans tous les sens en un point donné. En développant cette idée, j'arrivai bientôt aux conclusions suivantes.

Si dans un corps solide élastique ou non élastique on vient à rendre rigide et invariable un petit élément du volume terminé par des faces quelconques, ce petit élément éprouvera sur ses différentes faces, et en chaque point de chacune d'elles, une pression ou tension déterminée. Cette pression ou tension sera semblable à la pression qu'un fluide exerce contre un élément de l'enveloppe d'un corps solide, avec cette seule différence, que la pression exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide, est dirigée perpendiculairement à cette surface de dehors en dedans, et indépendante en chaque point de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans coordonnés, tandis que la pression ou tension exercée en un point donné d'un corps solide contre un très petit élément de surface passant par ce point, peut être dirigée perpendiculairement ou obliquement à cette surface, tantôt de de dehors en dedans, s'il y a condensation, tantôt de dedans en dehors, s'il y a dilatation, et peut dépendre de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans dont il s'agit. De plus, la pression ou tension exercée contre un plan quelconque se déduit très facilement, tant en grandeur qu'en direction, des pressions ou tensions exercées contre trois plans rectangulaires donnés. J'en étais à ce point, lorsque M. Fresnel, venant à me parler des travaux auxquels il se livrait sur la lumière, et dont il n'avait encore présenté qu'une partie à l'Institut, m'apprit que, de son côté, il avait obtenu sur les lois, suivant lesquelles l'élasticité varie dans les diverses directions qui émanent d'un point unique, un théorème analogue au mien. Toutefois le théorème dont il s'agit était loin de me suffire pour l'objet que je me proposais, dès cette époque, de former les équations générales de l'équilibre et du mouvement intérieur d'un corps; et c'est uniquement dans ces derniers temps que je suis parvenu à établir de nouveaux principes propres à me conduire à ce résultat, et que je vais faire connaître.

Du théorème énoncé plus haut, il résulte que la pression ou tension en chaque point est équivalente à l'unité divisée par le rayon vecteur d'un ellipsoïde. Aux trois axes de cet ellipsoïde correspondent trois pressions ou tensions que nous nommerons *principales*, et l'on peut démontrer (1) que chacune d'elles est perpendiculaire au plan contre lequel elle s'exerce. Parmi ces pressions ou tensions principales se

(1) La remarque que nous faisons ici s'accorde avec les dernières recherches de M. Fresnel (*Voyez* le *Bulletin* de mai 1822).

trouvent la pression ou tension *maximum*, et la pression ou tension *minimum*. Les autres pressions ou tensions sont distribuées symétriquement autour des trois axes. De plus, la pression ou tension normale à chaque plan, c'est-à-dire, la composante, perpendiculaire à un plan, de la pression ou tension exercée contre ce plan est réciproquement proportionnelle au carré du rayon vecteur d'un second ellipsoïde. Quelquefois ce second ellipsoïde se trouve remplacé par deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, l'autre à deux nappes, qui ont le même centre, les mêmes axes, et sont touchés à l'infini par une même surface conique du second degré, dont les arêtes indiquent les directions pour lesquelles la pression ou tension normale se réduit à zéro.

Cela posé, si l'on considère un corps solide variable de forme et soumis à des forces accélératrices quelconques, pour établir les équations d'équilibre de ce corps solide, il suffira d'écrire qu'il y a équilibre entre les forces motrices qui sollicitent un élément infiniment petit dans le sens des axes coordonnés, et les composantes orthogonales des pressions ou tensions extérieures qui agissent contre les faces de cet élément. On obtiendra ainsi trois équations d'équilibre qui comprennent, comme cas particulier, celles de l'équilibre des fluides. Mais, dans le cas général, ces équations renferment six fonctions inconnues des coordonnées x, y, z. Il reste à déterminer les valeurs de ces six inconnues; mais la solution de ce dernier problème varie suivant la nature du corps et son élasticité plus ou moins parfaite. Expliquons maintenant comment on parvient à le résoudre pour les corps élastiques.

Lorsqu'un corps élastique est en équilibre en vertu de forces accélératrices quelconques, on doit supposer chaque molécule déplacée de la position qu'elle occupait quand le corps était à son état naturel. En vertu des déplacements de cette espèce, il y a autour de chaque point des condensations ou des dilatations différentes dans les différentes directions. Or il est clair que chaque dilatation produit une tension, et chaque condensation une pression. De plus, je démontre que les diverses condensations ou dilatations autour d'un point, diminuées ou augmentées de l'unité, deviennent égales, au signe près, aux rayons vecteurs d'un ellipsoïde. J'appelle *condensations* ou *dilatations principales* celles qui ont lieu suivant les axes de cet ellipsoïde, autour desquels toutes les autres se trouvent symétriquement distribuées Cela posé, il est clair que dans un solide élastique, les tensions ou pressions dépendant uniquement des condensations ou dilatations, les tensions ou pressions principales seront dirigées dans les mêmes sens que les condensations ou dilatations principales. De plus, il est naturel de supposer, du moins quand les déplacements des molécules sont très petits, que les tensions ou pressions principales sont respectivement proportionnelles aux condensations ou dilatations principales. En admettant ce principe, on arrive immédiatement aux équations de l'équilibre d'un corps élastique, Dans le cas des déplacements très petits, la composante, perpendiculaire à un plan, de la pression ou tension exercée contre ce plan, conserve toujours le même rapport avec la condensation ou dilatation qui a lieu dans le sens de cette composante, et les formules d'équilibre se réduisent à quatre équations aux différences partielles dont l'une détermine séparément la condensation ou la dilatation du volume, tandis que chacune des autres sert à fixer le déplacement parallèle à l'un des axes coordonnés.

Les équations d'équilibre d'un corps élastique étant formées, il est aisé d'en déduire par les méthodes ordinaires les équations du mouvement. Ces dernières sont encore au nombre de quatre, et chacune d'elles est une équation linéaire aux différences partielles avec un dernier terme variable. Elles s'intègrent par les méthodes exposées dans notre précédent Mémoire. L'une de ces équations renferme seulement l'inconnue qui représente la condensation ou la dilatation du volume. Dans le cas particulier où la force accélératrice devient constante et conserve partout la même direction. cette équation se réduit à celle qui détermine la propagation du son dans l'air. avec la seule différence, que la constante qu'elle renferme. au lieu de dépendre de la hauteur de l'atmosphère supposée homogène, dépend de la dilatation ou condensation linéaire d'un corps sous une pression donnée. On doit en conclure que la vitesse du son dans un solide élastique est constante, comme dans l'air, mais varie d'un corps à l'autre suivant la matière dont il se compose. Cette constance est d'autant plus remarquable, que les déplacements des molécules considérés successivement dans les fluides et les solides élastiques suivent des lois différentes.

Mon Mémoire se termine par la formation des équations du mouvement intérieur des corps solides entièrement dépourvus d'élasticité. Pour y parvenir, il suffit de supposer que dans ces corps les pressions ou tensions autour d'un point en mouvement ne dépendent plus des condensations ou dilatations totales qui correspondent aux déplacements absolus comptés à partir des positions initiales des molécules, mais seulement, à la fin d'un temps quelconque, des condensations ou dilatations très petites qui correspondent aux déplacements respectifs des différents points pendant un instant très court. On trouve alors que la condensation du volume est déterminée par une équation semblable à celle de la chaleur, ce qui établit une analogie remarquable entre la propagation du calorique et la propagation des vibrations d'un corps entièrement dépourvu d'élasticité.

Dans un autre Mémoire, je donnerai l'application des formules que j'ai obtenues à la théorie des plaques et des lames élastiques.