

И*Л

*Государственное издательство
иностранной
литературы*

*

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Сборник статей

Перевод с английского, французского и немецкого

Л. А. ТЕЛЕШЕВОЙ и Ю. А. ЦВИБАК

под редакцией

Ю. Н. РАБОТНОВА

1948

Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

Библиотека кафедры
гидромеханики МГУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
<i>Б. Сен-Венан.</i> Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости	11
<i>М. Леви.</i> К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости	20
<i>Б. Сен-Венан.</i> Дифференциальные уравнения внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах, и граничные условия для этих тел. Некоторые приложения	24
<i>М. Леви.</i> Об интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных, относящихся к внутренним движениям в твердых пластических телах, когда эти движения происходят в параллельных плоскостях	34
<i>А. Хаар и Т. Карман.</i> К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах	41
<i>Р. Мизес.</i> Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии	57
<i>Л. Прандтль.</i> О твердости пластических материалов и сопротивлении резанию	70
<i>Г. Генки.</i> О некоторых статически определяемых случаях равновесия в пластических телах	80
<i>Л. Прандтль.</i> Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел	102

<i>Г. Генки.</i>	
К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений	114
<i>Г. Генки.</i>	
О медленных стационарных течениях в пластических телах с приложениями к прокатке, штамповке и волочению . . .	136
<i>М. Рош и А. Эйхингер.</i>	
Опыты, связанные с выяснением вопроса об опасности разрушения	157
<i>В. Лоде.</i>	
Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов	168
<i>А. Рейс.</i>	
Учет упругой деформации в теории пластичности	206
<i>К. Хознемзер.</i>	
Испытания с пластическими деформациями над стальными трубами при совместном приложении растяжения и кручения	223
<i>Р. Шмидт.</i>	
О зависимости между напряжениями и деформациями в области упрочнения	231
<i>К. Хознемзер и В. Прагер.</i>	
К механике пластического поведения стали	257
<i>Ф. Одквист.</i>	
Упрочнение стали и ей подобных материалов	283
<i>В. Прагер.</i>	
Влияние деформаций на условие пластичности вязко-пластических тел	291
<i>В. Прагер.</i>	
Исследование зависимости „напряжения — деформации“ в изотропных пластических твердых телах	301
<i>Дж. Лессельс и С. Мак-Грегор.</i>	
Опыты при сложном напряженном состоянии над хромоникелево-молибденовой сталью	316
<i>В. Прагер.</i>	
Упрочнение металла при сложном напряженном состоянии	325

<i>Е. Дэвис.</i>	
Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость „напряжения — деформация“ в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии	336
<i>Е. Дэвис.</i>	
Текучесть и разрушение стали со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии	364
<i>П. Бийлард.</i>	
Теория пластического изгиба и ее приложение к геофизике	375
<i>П. Бийлард.</i>	
Теория пластической устойчивости и ее приложение к гонким стальным пластинкам	392
<i>А. Надаи.</i>	
Влияние времени на ползучесть	405
<i>Г. Генки.</i>	
Новая теория пластичности, упрочнения, ползучести и опыты над неупругими металлами	427
<i>Библиография к предисловию редактора</i>	<i>447</i>
<i>Библиография к статьям сборника по теории пластичности</i>	<i>447</i>

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом теории пластичности в широком смысле слова является изучение всего комплекса вопросов механики реального твердого тела. Классическая теория упругости, пригодная лишь для определения малых деформаций некоторых материалов при нормальных температурах, не в состоянии ответить на вопросы, живо интересующие современную технику.

В настоящем сборнике представлена лишь одна наиболее разработанная ветвь теории пластичности, изучающая сравнительно малые деформации при нормальных температурах и незначительных скоростях, когда влияние скорости несущественно и фактор времени роли не играет. Эта теория, которую обычно и называют теорией пластичности (в узком смысле слова), не может считаться окончательно установленной; однако исследования последних лет выяснили с несомненностью некоторые основные законы, позволяющие считать многие результаты совершенно достоверными.

Помещенные в этом сборнике работы относятся к различным направлениям теории пластичности и отражают историю ее развития. Однако полного представления о современной теории пластичности этот сборник дать не может, так как в него не вошли работы советских ученых, роль которых в разработке теории пластичности за последние годы исключительно велика.

Поэтому мы предпосылаем переводам статей иностранных авторов весьма краткий обзор советских работ,

считая, что читатель имеет возможность ознакомиться с ними в подлиннике, пользуясь прилагаемой библиографией.

Среди первых по времени нужно указать на работы С. Л. Соболева [1] и С. А. Христиановича [2].

С. Л. Соболев решил задачу о распространении пластического состояния в плоскости с круговым вырезом, если смещения на контуре отверстия — заданные функции времени. Задача о распространении пластической области поставлена и решена им впервые.

С. А. Христианович решил задачу о плоском напряженном состоянии у отверстия произвольной формы при произвольном распределении усилий на контуре, предполагая, что контур целиком окружен пластической областью. Статьей С. А. Христиановича открывается серия многочисленных работ по приложению метода характеристик к плоской задаче теории пластичности. Очень большое число задач такого рода рассмотрено В. В. Соколовским и помещено в его книге [3], повторять содержание которой в этом очерке нет необходимости.

Среди работ, посвященных плоской задаче, следует отметить статьи Галина [4, 5], где впервые решена упруго-пластическая задача с определением границы для кручения и для растяжения пластинок с отверстием.

Приложение метода характеристик к исследованию процессов прокатки и волочения дано К. Н. Шевченко [6].

Осесимметричная задача рассматривалась А. Ю. Ишлинским. Он дал новое обоснование гипотезы полной пластичности Хаара и Кармана [7], а также решил задачу о вдавливании шарика в полупространство (проба Бринелля [8]).

Теория малых упруго-пластических деформаций (ведущая начало от Генки) получила законченную формулировку в работах А. А. Ильюшина [9]. Его уравне-

ния относятся к любому закону упрочнения и позволяют пользоваться опытной кривой зависимости σ_i от ϵ_i . Для решения задач теории пластичности он развивает [9, 10] весьма эффективный метод упругих решений и применяет его к пластинкам и оболочкам.

В работе 1945 г. [11] А. А. Ильюшин дал обобщение формулировки двух основных теорий пластичности: теории Сен-Венана — Леви — Мизеса, устанавливающей зависимость между напряжениями и скоростями, и теории малых упруго-пластических деформаций. Он доказал, что при условии постоянства так называемого тензора подобия, которое выполняется в большинстве реальных задач, эти теории являются эквивалентными. Первая теория является более общей, так как теория малых упруго-пластических деформаций представляет ее частный случай.

Для чисто пластического состояния А. А. Ильюшин установил [12], что между усилиями и моментами существует конечное соотношение. Это позволяет, например, весьма просто решать вопрос о несущей способности пластинок.

Задача об упруго-пластическом изгибе круглой пластинки под равномерной нагрузкой рассмотрена В. В. Соколовским [3].

Приводимые в этом сборнике статьи Бийляра представляют первую попытку рассмотрения устойчивости пластинок за пределом пропорциональности.

Систематическая разработка вопроса о пластической устойчивости пластинок и оболочек принадлежит А. А. Ильюшину. Им решен ряд задач, относящихся к пластинкам и цилиндрическим оболочкам [13, 14].

В кратком очерке мы остановились лишь на наиболее крупных и принципиальных направлениях, не пре-

тендуя на полноту исчерпания предмета. Подробный обзор советских работ по теории пластичности до 1945 г. включительно имеется в статье В. В. Соколовского [13].

Вопросы вязко-пластического течения, релаксации и ползучести, динамические задачи пластичности, теория обработки металлов давлением и пр. не вошли ни в сборник, ни в наш обзор. Исключение составляют две последние статьи Генки и Надаи, представляющие интерес в том смысле, что точка зрения авторов является весьма общей и включает теорию пластичности в обычном понимании *).

Ю. Работнов.

*) Работы Надаи, являющегося одним из основателей теории пластичности, представлены в этом сборнике слабо, поскольку на русском языке имеется его книга „Пластичность“ — ОНТИ, 1934 г.

ОБ УСТАНОВЛЕНИИ УРАВНЕНИИ ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩИХ В ТВЕРДЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ ЗА
ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ *)

I. Опыты Треска [1], одобренные Академией, заставили обратить особое внимание на такие процессы, как ковка, прокатка, штамповка и пр. Естественно было задаться вопросом: каким же законам подчиняются относительные перемещения тел, которые непрерывно деформируются таким образом, без нарушения связности, и какие при этом возникают внутренние силы?

Еще Коши попутно коснулся этой проблемы. В 1828 г. он предложил формулы для напряжений в пластических телах, а также дифференциальные уравнения, содержащие производные скоростей их молекул. Но у него касательные составляющие напряжений на площадках зависят только от скоростей относительного скольжения разделяемых этими площадками слоев; таким образом, эти формулы молчаливо предполагают тело лишенным сцепления, а, следовательно, годятся лишь для жидкостей.

В отчете, сделанном по двум теоретическим сообщениям Треска 29 июня 1868 г., где он пытался объяснить факты, относящиеся к деформации твердых тел, при помощи обычных старых формул гидромеханики, комиссия отметила необходимость воспользоваться в дальнейшем формулами более сложными, чем формулы Коши и Навье. Для этого нужно добавить в выражение тангенциальных напряжений значительные по величине члены, не зависящие от скоростей, которые, как правило, невелики при движениях или истечениях, о которых идет речь.

Может быть, это замечание побудило Треска ввести новый динамический принцип вместо того, которым он

*) Journal d. Math. pures et appl., ser. II, v. 16, pp. 308 (1871).

пользовался ранее. Возможно, что собственные размышления и многочисленные опыты привели его к этой идее. Во всяком случае этот ученый закончил свой замечательный мемуар о штамповке в 1869 г. „Механической теорией деформации твердых тел“. В этой весьма логичной теории Треска совершенно определенно предлагает считать, что когда материал достигает состояния, подобного состоянию текучести в том смысле, что упругость исчезает или упругие реакции становятся пренебрежимо малыми, возникающие в процессе движения внутренние силы остаются постоянными, не зависящими от величины происшедших деформаций (скорость деформации при этом считается бесконечно малой).

Сравнивая работу внешних сил, деформирующих тело, с работой внутренних сил, которые предполагались подчиняющимися этому простому закону, он получил многообразные подтверждения своей гипотезы, определяя для каждого материала постоянные величины напряжений.

Эти напряжения, как обнаружено опытами, оказываются одинаковыми как при срезе, когда силы действуют в направлении наибольших сдвигов, так и при растяжении или сжатии, когда в направлении действующих сил сдвига не происходит. Таким образом подтверждается априорное рассуждение, основанное на том замечании, что растяжение или сжатие вызывают сдвиг в косої площадке и наоборот.

II. Для определения движений точек деформируемых пластических тел до сих пор предпринимались только чисто кинематические попытки, основанные на факте неизменяемости объема и плотности и на различных гипотезах.

Гипотезы Треска состоят в том, что он делит тело, подвергающееся выдавливанию или штамповке, на несколько частей (центральный цилиндр, наружный кольцевой цилиндр, сплошная или кольцевая струя) и предполагает, что в каждой части все вертикальные материальные прямые остаются вертикальными, гори-

зонтальные — горизонтальными. Только при переходе от одной части к другой они наклоняются и искривляются, образуя разрывы и изломы в местах перехода. Я пользуюсь гораздо более широкой гипотезой, не нуждающейся в этих воображаемых делениях и не требующей разрыва непрерывности. Эта гипотеза состоит в том, что компоненты скорости являются производными от одной и той же функции по соответствующим координатам, умноженными соответственно на три константы. Два отношения между ними могут меняться как угодно, до бесконечности. Эта гипотеза легко применяется к штамповке для случая истечения, мною рассмотренного [2].

III. Но проблема не является только кинематической, она принадлежит механике. Нельзя надеяться на ее правильное решение до тех пор, пока не будут даны уравнения этой новой гидродинамики, содержащие действующие силы.

Дело заключается в том, чтобы ввести в эти уравнения внутренние силы постоянной интенсивности, существование которых доказано простым рассуждением и подтверждено многочисленными опытами, — силы, которые сводятся, как было показано, только к сопротивлению сдвигу.

Напомним прежде всего, что движение жидкости, если пренебречь теми сопротивлениями, которые вызываются скоростями и зависят от их величин, может быть описано следующими четырьмя дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \left(Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \left(Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Здесь x, y, z — координаты произвольной точки пространства; u, v, w — компоненты скорости по соответствующим осям той материальной точки, которая проходит через нее в момент, определяемый временем t ; X, Y, Z — составляющие объемной силы по тем же направлениям; ρ — плотность в рассматриваемой точке; p — давление, предполагаемое одинаковым для всех направлений в каждой точке жидкости.

Если уметь интегрировать эти уравнения при всевозможных граничных и начальных условиях, из них можно получить величины четырех неизвестных u, v, w, p для любой точки жидкой массы и любого момента времени. В частности, можно решить задачу о движении жидкости, выталкиваемой из цилиндрического сосуда либо вниз поршнем того же диаметра, либо вверх в кольцевое пространство между его стенками и пуансоном меньшего диаметра. Должны ли войти скорости u, v, w в уравнения, которые нам нужно установить для деформаций твердых тел, происходящих со скоростями, в некотором роде бесконечно малыми? Это не подлежит сомнению, так как если, с одной стороны, вследствие своей малости они не влияют на интенсивность напряжения, с другой стороны, они сами являются результатом действия сил, которые вызывают ускорения или порождают скорости.

Таким образом для случая пластических твердых тел, которым мы занимаемся, недостаточно одного лишь уравнения сохранения объема (2). Необходимо взять еще три уравнения равновесия между движущимися силами и силами инерции, имеющих те же правые части, что и уравнения (1), и в общем случае, когда давление неодинаково по всем направлениям, нужно ввести вместо левых частей выражения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}.$$

IV. Желая рассмотреть именно те тела, о которых идет речь, а также сделать число неизвестных равным числу уравнений, ограничимся самым простым случаем, когда можно принимать во внимание лишь две координаты x и z , пренебрегая третьей. Этот случай имеет место при истечении пластической массы из прямоугольного сосуда через прямоугольное же отверстие одинаковой длины, а также при вдавливании прямоугольного штампа в прямоугольное тело, причем стороны штампа параллельны ребрам тела и длины их в направлении оси y одинаковы.

Тогда второе из уравнений (1) отпадает, первые члены в выражениях (3), которые нужно подставить в оставшиеся уравнения, сводятся к двучленам, так как v и все производные по y обращаются в нуль.

Остается сформулировать следующие условия:

1) на площадке, перпендикулярной плоскости xz , но, вообще говоря, наклонной к x и z , где касательное напряжение является наибольшим, это последнее равно постоянному максимальному сопротивлению сдвига, обозначенному Треска через K и определенному им для различных материалов;

2) на площадке, где касательное напряжение является наибольшим, скорость относительного сдвига также наибольшая.

Обозначим через x' , z' две оси, образующие угол α с осями x , z . Из условий равновесия элементарного тетраэдра Коши, который в данном случае заменяется трехгранной призмой со сторонами, перпендикулярными осям x , z , x' , для составляющей по оси z' напряжения на площадке, перпендикулярной к x' , получаем

$$\begin{aligned} \tau_{z'x'} &= -\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_z \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{zx} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zx} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, оно достигает максимума при

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\tau_{zx}}, \quad (5)$$

и величина максимального касательного напряжения равна

$$\frac{1}{2} \sqrt{4\tau_{zx}^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}.$$

Приравнивая это выражение известной величине K , получаем четвертое уравнение этой задачи

$$\tau_{zx}^2 + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 = K^2 \quad (6)$$

Скорости деформации в направлениях x , z равны

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

а скорость сдвига на площадке, нормальной к x' в направлении z' , имеет значение

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'}.$$

Здесь u' и w' являются составляющими скорости по x' , z' . Это значит, что малый материальный квадрат, стороны которого параллельны x' , z' , будут иметь по истечении времени dt два острых угла, косинусы которых являются произведениями этого двучлена и dt , иначе говоря, противоположные стороны его переместятся одна относительно другой на величину, которая определяется этим же произведением, если отнести ее к единице длины расстояния между сторонами. Легко находим

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sin 2\alpha + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos 2\alpha, \quad (7)$$

причем максимум получается при

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}}. \quad (8)$$

¹⁾ Это уравнение аналогично предложенному Леви для задач о давлении грунтов, см. Comptes Rendus от 7 февраля 1870 г., т. LXX, стр. 230, уравнение (3).

Приравнивая это выражение и выражение (5), получаем пятое уравнение задачи, выражающее условие совпадения направлений наибольшего сдвига и наибольшего сопротивления сдвигу.

Это уравнение можно, очевидно, получить, составив условие: на двух площадках, где отсутствует сдвиг, отсутствует также сопротивление сдвигу, т. е. что τ_{zx} в уравнении (4) обращается в нуль при том же угле 2α или при тех же двух углах α (отличающихся на $\frac{\pi}{2}$), что и выражение

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'},$$

определяемое уравнением (7).

Заметим еще, что имеются также две площадки, образующие с последними угол в 45° , на которых касательные напряжения достигают максимума и минимума (с одинаковыми абсолютными величинами). Нормальные напряжения на этих площадках σ_x' и σ_z' равны между собой и имеют значение

$$\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом нами теле внутренние напряжения сводятся к нормальному давлению $p = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$, одинаковому во всех направлениях, и к касательному напряжению K , действующему на определенной площадке. На других площадках возникают как касательные, так и нормальные составляющие различных интенсивностей.

V. В заключение выпишем все уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= -\rho \left(X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\rho \left(Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\tau^2 + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 = K^2, \quad (9)$$

$$\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\tau} = \frac{\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Это пять уравнений пространственной гидродинамики или теории пластичности для определения пяти неизвестных:

$$u, w, \sigma_x, \sigma_z, \tau.$$

Если уравнения (1), (2), относящиеся к жидкости, в которых отсутствуют трение и вязкость, удается проинтегрировать лишь в редких случаях, тем более это трудно сделать для тел пластических или становящихся пластическими под действием больших давлений, описываемых уравнениями (9).

Здесь мы не пытаемся дать более сложные уравнения, относящиеся к более общему случаю, когда необходимо рассматривать три измерения и вводить три координаты. Но можно рассмотреть сравнительно простой случай, когда мы имеем две цилиндрические координаты r и z для цилиндрического тела в условиях полной симметрии относительно одной оси.

Я ограничусь тем, что обращаю внимание ученых на этот интересный случай, осуществленный в большинстве опытов Треска.

VI. Сделаю последнее замечание: если к шести компонентам напряжения

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

прибавить соответственно члены

$$2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\varepsilon \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (10)$$

соответствующие динамическому трению в вязких жидкостях при ламинарном движении, то уравнения теории пластичности будут пригодны и для случая, когда скорости деформации, хотя и не очень большие, смогут создать те дополнительные сопротивления, о которых шла речь в п. III и которыми обычно пренебрегают. Те же уравнения будут пригодны для изучения ламинарного движения вязкой жидкости, в которой существуют касательные напряжения двух родов, одни — зависящие от скоростей и определяемые формулами (10), другие — не зависящие от этих скоростей. Величина K будет являться для них второй характеристикой вязкости *).

*) Сен-Венан называет невязкими жидкостями с трением (*fluides non visqueux*) то, что по современной терминологии называется вязкими жидкостями. Вязкими жидкостями (*fluides visqueux*) он считает жидкости, для которых существует предел текучести, изучаемые современной реологией (Bingham, Reiner и др.). (*Прим. ред.*)

К ВОПРОСУ ОБ ОБЩИХ УРАВНЕНИЯХ ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТВЕРДЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ *)

VII. В этой статье устанавливаются общие уравнения движения твердых пластических тел в пространстве, а также уравнения для крайне важного случая симметрии относительно оси. Уравнения эти были даны Сен-Венаном только для плоскопараллельного движения, когда можно, исключая из рассмотрения перпендикулярные этим плоскостям размеры, рассматривать лишь две координаты из трех.

Пусть

- u, v, w — составляющие скорости любой точки пластического тела в направлении соответствующих прямоугольных координат x, y, z ;
- X_0, Y_0, Z_0 — составляющие суммарной силы дальнего действия (как, например, сила тяжести), приходящейся на единицу массы в той же точке (x, y, z) ;
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — нормальные составляющие напряжений в той же точке на единицу поверхности трех малых площадок, соответственно перпендикулярных x, y и z ;
- S_x, S_y, S_z — эти же три составляющие, уменьшенные на величину напряжения $\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$;
- $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ — касательные составляющие напряжений;
- ρ — плотность пластического материала;
- K — коэффициент сопротивления разрушению при поперечном сдвиге или срезе на единицу поверхности.

*) Journ. d. Math. pures et appl., ser. II, v. 16, pp. 369—372 (1871). Нумерация параграфов и уравнений в этой статье является продолжением нумерации статьи Сен-Венана (см. выше, стр. II этого сборника) так как она является ее дополнением.

Если для сокращения записать

$$\begin{aligned} S_y S_z + S_z S_x + S_x S_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 &= q, \\ S_x \tau_{xy}^2 + S_y \tau_{yz}^2 + S_z \tau_{zx}^2 - S_x S_y S_z - 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} &= r, \end{aligned} \quad (11)$$

то девять уравнений для нахождения при определенных граничных условиях, особых для каждой задачи, девяти неизвестных u , v , w , σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , относящихся ко всем точкам тела, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= -\rho \left(X_0 - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -\rho \left(Y_0 - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\rho \left(Z_0 - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ 4(K^2 + q)(4K^2 + q) + 27r^2 &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{\tau_{yz}}{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\tau_{zx}}{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)}.$$

Если координату y можно не принимать во внимание, то второе уравнение из группы (12) выпадает, ввиду того что $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $v = 0$ и производные по y — нули. Четвертое уравнение, как видно, весьма сложное в общем случае, сводится к уравнению (6), именно:

$$4\tau_{zx}^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = 4K^2.$$

Четыре последних уравнения сводятся к двум, из которых только одно [пятое из системы (9)] было дано Сен-Венаном, так как он не рассматривал составляющую σ_y как малозначительную, но которая тем не менее существует и равна $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$. Это значение σ_y действительно следует из последнего уравнения (12), а также из того, что

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2 \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{-4 \frac{\partial u}{\partial x}} \quad \text{или} \quad 2\sigma_y - 2\sigma_z = -\sigma_z + \sigma_x,$$

что дает

$$\sigma_y = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}.$$

VIII. Когда имеет место симметрия относительно оси z — случай, интересный для рассмотрения, так как он относится к опытам Треска как при истечении, так и при вдавливании штампа, — обозначим:

U, W — составляющие скорости точки пластического цилиндрического тела вдоль радиуса вектора r и оси z соответственно;

$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ — нормальные составляющие давления на единицу поверхности в перпендикулярных к r и z и в меридиональной плоскостях;

τ — составляющая по радиусу r напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную оси симметрии, или составляющая напряжения на площадке, перпендикулярной радиусу, параллельная оси z ;

R_0, Z_0 — составляющие внешней силы, действующей на единицу массы параллельно r и z соответственно.

Для определения $U, W, \sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau$ имеется шесть уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = -\rho \left(R_0 - \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial U}{\partial r} - W \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = -\rho \left(Z_0 - \frac{\partial W}{\partial t} - U \frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial W}{\partial z} \right),$$

$$4\tau^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 = 4K^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\tau}{\partial z} = \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial z} \right)} = \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right)}.$$

Так как движения, вообще говоря, предполагаются очень медленными и так как действием сил тяжести можно пренебречь, то обычно вместо правых частей трех первых уравнений (12) или двух первых уравнений (13) можно поставить нуль.

Этого нельзя было бы сделать, если бы вместо твердого, медленно деформируемого пластического тела мы имели мягкую массу или вязкую жидкость, частицы которой приобретают такие скорости, что силами инерции материала и динамическими молекулярными воздействиями нельзя пренебречь. И можно видеть (п. VI, стр. 18), что Сен-Венан добавляет к членам, входящим в левые части уравнений (1), дифференциальные выражения, подобные выражениям, входящим в уравнения и формулы для движения жидкости Навье, Пуассона и Коши, — члены, на которые оказывает влияние коэффициент внутреннего трения ϵ , причем этот коэффициент не следует смешивать с K , определяющим в этом случае *) вязкость жидкости или сцепления частиц тела.

*) См. примечание к статье Сен-Венана, стр. 19. (Прим. ред.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩИХ В ТВЕРДЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ, И
ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЭТИХ ТЕЛ.
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ *).

IX¹⁾. Как можно видеть из вышеприведенной статьи, М. Леви построил дифференциальные уравнения (12) и (13) движения пластического тела, а именно:

1) Для общего случая, когда надо взять 3 координаты x, y, z и определить, кроме трех составляющих скорости u, v, w , еще шесть составляющих усилий или напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \\ \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}. \end{aligned}$$

2) Для случая осесимметричного движения относительно оси z , когда пять неизвестных суть: составляющие скорости v и w , две нормальных составляющих напряжения на плоскости, перпендикулярной радиус-вектору r , и на меридиональной плоскости, наконец, касательная составляющая по направлению r напряжения на площадке, перпендикулярной оси:

$$\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau.$$

Он справедливо заметил, что обычно правые части двух первых уравнений (9) и (13) и трех первых (12) можно приравнять нулю. Это значительно упрощает их по сравнению с уравнениями гидродинамики, где все члены этих правых частей должны обычно сохраняться.

Напряжения входят, как видим, во все эти уравнения лишь в виде отношений между собой и с пластической постоянной материала K .

*) Journ. d. Math. pures et appl., ser. II, v. 16, pp. 373—382 (1871).¹⁾

¹⁾ Статья является продолжением статьи М. Леви, стр. 20; нумерация параграфов является продолжением нумерации указанной статьи.

u , v , w входят в них также своими отношениями; не изменяя уравнений, можно увеличить эти скорости или уменьшить их в одинаковом отношении. Их абсолютные значения будут определены, если дана одна из скоростей, как, например, скорость погружения поршня или штампа, или скорость кручения или изгиба пластической призмы и т. д.

Х. Попутно заметим, что в некоторых случаях, как, например, в случае (п. IV) движения в параллельных плоскостях, когда достаточно двух прямоугольных координат x , z , можно прежде всего, не занимаясь скоростями, дать уравнение для усилий.

Действительно, соединяя два наших первых уравнения (9) с четвертым и вводя¹⁾ вспомогательную неизвестную ψ , так что:

$$\sigma_x = \frac{d^2\psi}{dz^2}, \quad \sigma_z = \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad \tau = -\frac{d^2\psi}{dx dz}, \quad (14)$$

мы удовлетворим двум первым уравнениям (9) без правых частей; подстановка в четвертое дает

$$4 \left(\frac{d^2\psi}{dx dz} \right)^2 + \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dz^2} \right)^2 = 4K^2. \quad (15)$$

Если можно каким-либо приближенным методом найти величину ψ из этого нелинейного дифференциального уравнения и определить таким образом выражения σ_x , σ_z , τ или их отношения к K в функции x , z , то третье и пятое из уравнений (9) дадут возможность определить u и w или их отношения к предполагаемой известной, как мы только что сказали, скорости точки поверхности; это и будет решением задачи о протекании деформаций или смещений точек пластического тела.

¹⁾ Это же сделано М. Леви в заметке по равновесию массы земли, лишенной связности (см. Comptes Rendus от 7 февраля 1870 г., т. LXX, стр. 232 и 751).

XI. Но недостаточно, чтобы неизвестные удовлетворяли уравнениям (9), (12) или (13), справедливым во всех точках тела. Они должны удовлетворить также граничным условиям в точках некоторых поверхностей.

Следует установить эти граничные условия. Сделаем прежде всего два замечания:

1) Вообще говоря, в значительных областях пластического тела материал будет продолжать следовать законам упругости или, вследствие незначительности деформаций этих областей, сохранит способность возвращаться в начальное состояние, очень мало отличающееся от нового состояния. Это наблюдал и Треска, особенно в опытах по вдавливанию штампа. Он обнаружил, что напряжения, или, лучше сказать, их постоянное действие, проявляется лишь в ограниченной области, названной Треска зоной активности. Другие области тела вернуться в упругое состояние после выхода из этого состояния. Это части тела, в которых прекращается непрерывная деформация, как, например, призматическая струя, вышедшая из отверстия, полоса, выходящая из прокатного стана после прокатки, и т. д.

2) Другие области, именно те, которые, по выражению того же экспериментатора, достигли состояния текучести или пластичности и еще находятся в нем, а, значит, испытывают продолжающееся возрастание деформации, могут распространиться и до свободной внешней поверхности, не испытывающей никакого давления. Это возможно при сколь угодно большом значении константы K , т. е. касательной составляющей напряжения, действующего в этом месте на площадках наибольшего сдвига. Действительно, если мы, например, возьмем эту свободную внешнюю поверхность или ее касательную плоскость в некоторой точке за плоскость yz , то три составляющих напряжения σ_x , τ_{xy} , τ_{zx} на этой поверхности могут равняться нулю, тогда как три других σ_y , σ_z , τ_{yz} , действующих в той же точке на перпендикулярных плоскостях, сколь угодно велики. Это происходит, например, в точках свободных боковых поверхностей призмы при ее продольном растяжении, изгибе

или кручении до разрушения для хрупкого материала или до ее значительной деформации для пластического материала. Тогда на малых площадках, образующих угол в 45° со свободной поверхностью, тангенциальная составляющая $\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$ может иметь очень большое значение K , несмотря на отсутствие на этой поверхности напряжения, перпендикулярного оси x .

Таким образом, нужно вообще установить 3 группы граничных условий:

а) Условие на поверхности тела в частях, сохранивших или восстановивших свои упругие свойства, т. е. подвергавшихся или подвергающихся лишь деформациям, прекращающимся с прекращением действия сил. Обозначая через n направление нормали к этой поверхности в точке (x, y, z) через

$$\sigma_x^e, \sigma_y^e, \sigma_z^e, \tau_{xy}^e, \tau_{yz}^e, \tau_{zx}^e$$

шесть составляющих внутренних упругих сил, выражения для которых в функции производных смещений точек известны из теории упругости, получаем первую группу граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_x^e \cos(n, x) + \tau_{xy}^e \cos(n, y) + \tau_{xz}^e \cos(n, z) &= X_n^e, \\ \tau_{yx}^e \cos(n, x) + \sigma_y^e \cos(n, y) + \tau_{yz}^e \cos(n, z) &= Y_n^e, \\ \tau_{zx}^e \cos(n, x) + \tau_{zy}^e \cos(n, y) + \sigma_z^e \cos(n, z) &= Z_n^e. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь X_n, Y_n, Z_n — компоненты поверхностной силы.

б) Уравнения, относящиеся к точкам замкнутой поверхности, где материал испытывает непрерывное действие продолжающейся деформации и подчиняется таким образом законам пластичности. Сохраняя прежние обозначения, получаем вторую группу условий:

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) &= X_n, \\ \tau_{yx} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) &= Y_n, \\ \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) &= Z_n. \end{aligned} \quad (17)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ — силы, удовлетворяющие уравнениям (9) или другим более общим (12), выше установленным.

в) Условия сопряжения, относящиеся к точкам (x, y, z) граничной поверхности между упругими и пластическими областями; эти уравнения, выражая равновесие тонкого слоя перехода между напряжениями σ^e , действующими на стороне упругой, и напряжениями σ , действующими на стороне пластической, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &(\sigma_x^e - \sigma_x) \cos(n, x) + (\tau_{xy}^e - \tau_{xy}) \cos(n, y) + \\ &\quad + (\tau_{xz}^e - \tau_{xz}) \cos(n, z) = 0, \\ &(\tau_{yx}^e - \tau_{yx}) \cos(n, x) + (\sigma_y^e - \sigma_y) \cos(n, y) + \\ &\quad + (\tau_{yz}^e - \tau_{yz}) \cos(n, z) = 0, \quad (18) \\ &(\tau_{zx}^e - \tau_{zx}) \cos(n, x) + (\tau_{zy}^e - \tau_{zy}) \cos(n, y) + \\ &\quad + (\sigma_z^e - \sigma_z) \cos(n, z) = 0, \end{aligned}$$

где n обозначает направление нормали к этой поверхности.

Можно также включить в число граничных условий те условия, которые устанавливают для некоторых частей поверхности величину скорости, предполагаемую известной, как указано в конце п. IX.

Наконец, надо установить уравнения равновесия для части, сохранившей или восстановившей свои упругие свойства, ограниченной поверхностью раздела, о которой мы только что говорили, или со всех сторон, или только с некоторых, и в этом последнем случае также частью внешней поверхности. Эти уравнения [имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\rho X_0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -\rho Y_0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\rho Z_0, \end{aligned} \quad (19)$$

где X_0, Y_0, Z_0 обозначают составляющие по x, y, z сил, действующих на единицу массы.

Поверхность раздела упругих частей от пластических нужно искать таким образом, чтобы ее координаты удовлетворяли условиям сопряжения (18). Уравнения (9), (12) или (19), если найти их решения, удовлетворяющие также уравнениям (16), (17), дадут напряжения и скорости.

XII. Как бы сложна ни была в общем случае подобная задача, она может быть легко решена в некоторых частных случаях.

Допустим, например, что цилиндр круглого сечения из пластического материала медленно закручивается так, что деформация его непрерывно возрастает, не вызывая разрушения. Предполагается, что силы приложены лишь к его основаниям¹⁾, так что закручивание от одного конца к другому постоянно и на боковой поверхности никакие силы не действуют.

Если взять ось x за ось цилиндра и предположить, что продольные силы отсутствуют, то получим

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0.$$

Формулы (11) и четвертая из (12) принимают вид

$$q = -\tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2, r = 0 \text{ и } \tau_{yz}^2 + \tau_{xy}^2 = K^2. \quad (20)$$

Они выражают, что в поперечных сечениях максимальная тангенциальная составляющая напряжения, необходимым образом направленная по перпендикуляру к радиусу-вектору, имеет в пластическом состоянии величину K . Обозначим:

R — радиус цилиндра,

R_0 — радиус центральной части, остающейся в данный момент упругой или молекулы которой сохраняют одинаковое взаимное расположение,

r — расстояние любой точки от оси,

¹⁾ Статья о кручении в XIV т. Savants Etrangers или заметка по поводу издания лекций Навье в 1864 г.

θ — степень закручивания, т. е. угол (или дуга в частях радиуса), на который одно сечение цилиндра поворачивается по отношению к другому, поделенный на расстояние между этими двумя сечениями,

γ — сдвиг или небольшое отклонение от нормали к элементу одного из поперечных сечений упругой части материальной линии, которая была сама первоначально нормальна к нему,

G — модуль сдвига,

$G\gamma$ — касательная составляющая напряжения на единицу поверхности, определяющая происшедший сдвиг γ ,

M — момент относительно оси цилиндра внешних сил, создающих кручение.

Каким бы ни было значение θ , θr будет малым в центральной части, поскольку предполагается, что она остается упругой, а так как сечения остаются плоскими, имеем

$$\gamma = \theta r.$$

На всех элементах части основания, образующих кольцо с площадью, равной $2\pi r dr$, заключенной между двумя окружностями радиусов r и $r + dr$, сопротивление кручению также равно $G\theta r$ на единицу поверхности упругой части. Оно равно K в части, которая стала пластической. Умножая на плечо r и приравнявая M общей сумме моментов сопротивления, получаем

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{R_0} G\theta r \cdot 2\pi r dr \cdot r + \int_{R_0}^R K \cdot 2\pi r dr \cdot r = \\ &= 2\pi \left[G\theta \frac{R_0^4}{4} + K \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R_0^3}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Для нахождения радиуса R_0 поверхности раздела двух областей необходимо взять условие сопряжения, общий вид которого дан уравнениями (18). Здесь это уравнение является единственным и сводится к

$$G\theta R_0 - K = 0. \quad (22)$$

Оно, конечно, верно только при значениях R_0 меньших R . Таким образом имеем

$$1) \text{ Пока } \theta < \frac{K}{GR} \text{ или } M < \frac{\pi R^3}{2} K,$$

$$M = \pi G \theta \frac{R^4}{2}. \quad (23)$$

2) После того, как θ делается равным $\frac{K}{GR}$ или M равным $\frac{\pi R^3}{2} K$,

$$M = 2\pi K \frac{R^3}{3} - \frac{\pi}{6} \frac{K^2}{G^2 \theta^3} = \pi K \left(\frac{2}{3} R^3 - \frac{1}{6} \frac{K^2}{G^2 \theta^3} \right). \quad (24)$$

Только для бесконечно большого угла закручивания M становится постоянной $\frac{2}{3} \pi K R^3$ и R_0 обращается в нуль или область пластичности распространяется до оси.

XIII. Пусть прямоугольная призма из пластического материала с двумя горизонтальными и двумя вертикальными гранями испытывает чистый изгиб под действием приложенных к ее основаниям растягивающих и сжимающих напряжений, образующих пары. При этом все продольные волокна изгибаются по дугам окружностей с центрами на одной и той же горизонтальной прямой, перпендикулярной к их плоскостям. Введем обозначения:

$2b$ — горизонтальная ширина призмы,

$2c$ — высота или толщина в вертикальном направлении,

$2c_0$ — высота средней части той же ширины $2b$, которая, как предполагается, следует еще законам упругости, когда средний радиус кривизны принимает значение ρ ,

E — модуль упругости при растяжении или сжатии продольных волокон или элементов этой части,

z — расстояние каждого волокна на первоначально горизонтальной поверхности от волокон (нейтрального слоя), сохранивших ту же длину и расположенных на одинаковом расстоянии от нижней и верхней плоскостей.

Так как поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к изогнутым волокнам, то последние удлиняются или укорачиваются в отношении $\frac{z}{\rho}$. Волокна упругой части сопротивляются, причем сила сопротивления равна $\frac{Ez}{\rho}$ на единицу поверхности их сечения. Что касается волокон как верхних, так и нижних частей, которые сделались пластическими по толщине $c - c_0$, то они противодействуют растяжениям с верхней стороны или стороны положительных z и сжатиям или отталкиваниям со стороны отрицательных z с постоянной силой $2K$ также на единицу площади их сечения. Действительно, если x есть координата в направлении волокон, то $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$ и $\tau = 0$; отсюда вытекает четвертое уравнение группы (9) $\frac{\sigma_x^2}{4} = K^2$, или продольная реакция $\sigma_x = 2K$.

Выражение для изгибающего момента M , таким образом, имеет вид:

$$M = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{Ez}{\rho} 2bdz \cdot z + \int_{-c}^{c_0} (-2K) 2bz \cdot dz + \int_{c_0}^c 2K 2bz \cdot dz = \frac{4}{3} \frac{E}{\rho} bc_0^3 + 4Kb(c^2 - c_0^2). \quad (25)$$

Условие сопряжения, определяющее неизвестную величину c_0 , имеет вид:

$$\frac{Ec_0}{\rho} = 2K. \quad (26)$$

Оно требует, чтобы $c_0 < c$. Подстановка приводит

к формуле

$$M = 4Kb \left(c^2 - \frac{4}{3} \frac{K^2 \rho^2}{E^2} \right), \quad (27)$$

пригодной только при ρ , равном или $< \frac{Ec}{2K}$, так как если $\rho > \frac{Ec}{2K}$, всюду существует упругость и справедлива обычная формула $M = \frac{4}{3} \frac{E}{\rho} bc^3$. Только при $\rho = 0$, т. е. при бесконечной кривизне, упругость оказывается побежденной всюду до середины призмы.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ВНУТРЕННИМ
ДВИЖЕНИЯМ В ТВЕРДЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ, КОГДА
ЭТИ ДВИЖЕНИЯ ПРОИСХОДЯТ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОС-
КОСТЯХ *).

В настоящей заметке рассматриваются следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 &= 4K^2 = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ — три неизвестные функции x и y ¹⁾.

Как я указал в предыдущей статье, решение их немедленно приводится к нелинейному уравнению второго порядка в частных производных. Но с точки зрения физической задачи, из которой получены уравнения (1), кажется более желательным рассматривать их непосредственно, что я и предполагаю сделать в настоящей заметке.

Последнему уравнению можно удовлетворить при любых значениях вспомогательных функций ξ и η , если принять

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= K(\xi - \cos \eta), \\ \sigma_y &= K(\xi + \cos \eta), \\ \tau &= K \sin \eta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Остается определить функции ξ и η так, чтобы удовлетворялись и два первых уравнения. Но так как

*) Comptes Rendus, v. 73, № 16, pp. 1098—1103 (1871).

¹⁾ В этих уравнениях, из которых два первых известны, а третье установлено Сен-Венаном, согласно опытам Треска (стр. 11), σ_x , σ_y и τ являются нормальными и тангенциальными составляющими давлений, действующих на параллельные элементы в x и y , взятых внутри сжимаемого тела.

неизвестные σ_x , σ_y и τ очень просто выражаются через ξ и η , естественно принять эти две величины за новые независимые переменные; тогда получится обратная задача: вместо определения ξ и η в функции x и y мы должны, наоборот, рассматривать x и y как две неизвестных функции переменных ξ и η , определяемые из двух первых уравнений (1). Если U есть функция x и y , которую желательно выразить через ξ и η , то имеем формулы преобразования

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}}.$$

Если последние формулы применить последовательно к трем функциям σ_x , σ_y и τ и внести полученные для $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \tau}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ значения в два первых уравнения группы (1), то эти уравнения заменятся следующими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned}$$

или, так как, согласно выражениям (2), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} &= K, & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \eta} &= K \sin \eta, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial \xi} &= K, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} &= -K \sin \eta, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial \eta} &= K \cos \eta, \end{aligned}$$

следующими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \sin \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} + \cos \eta \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0, \\ \cos \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} + \sin \eta \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

являющимися линейными по отношению к неизвестным x и y ; исключая из этих двух уравнений y , приводим таким образом задачу к линейному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных. Это уравнение имеет вид:

$$\cos \eta \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial x}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0. \quad (4)$$

Хотя это уравнение и имеет весьма простой вид, все же интегрирование его затруднительно, лучше ввести в уравнения (3) вместо неизвестных x и y две комплексные сопряженные

$$\begin{aligned} x + iy &= 2x', \\ x - iy &= 2y', \end{aligned} \quad (5)$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= x' + y', \\ y &= i(y' - x'). \end{aligned} \quad (5')$$

Введение этих новых неизвестных преобразует уравнения (3) к виду:

$$i \left(\frac{\partial y'}{\partial \eta} - \frac{\partial x'}{\partial \eta} \right) - i \sin \eta \left(\frac{\partial y'}{\partial \xi} - \frac{\partial x'}{\partial \xi} \right) + \cos \eta \left(\frac{\partial y'}{\partial \xi} + \frac{\partial x'}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$i \cos \eta \left(\frac{\partial y'}{\partial \xi} - \frac{\partial x'}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial y'}{\partial \eta} + \frac{\partial x'}{\partial \eta} + \sin \eta \left(\frac{\partial y'}{\partial \xi} + \frac{\partial x'}{\partial \xi} \right) = 0,$$

или, группируя члены после умножения второго из них на i ,

$$\begin{aligned} (\cos \eta - i \sin \eta) \frac{\partial y'}{\partial \xi} + i \frac{\partial y'}{\partial \eta} + \\ + (\cos \eta + i \sin \eta) \frac{\partial x'}{\partial \xi} - i \frac{\partial x'}{\partial \eta} &= 0, \\ -(\cos \eta - i \sin \eta) \frac{\partial y'}{\partial \xi} + i \frac{\partial y'}{\partial \eta} + \\ + (\cos \eta + i \sin \eta) \frac{\partial x'}{\partial \xi} + i \frac{\partial x'}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial y'}{\partial \eta} &= i (\cos \eta + i \sin \eta) \frac{\partial x'}{\partial \xi}, \\ (\cos \eta - i \sin \eta) \frac{\partial y'}{\partial \xi} - i \frac{\partial x'}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial y'}{\partial \eta} &= i e^{i\eta} \frac{\partial x'}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial y'}{\partial \xi} &= i e^{i\eta} \frac{\partial x'}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вот два очень простых уравнения, заменяющие уравнения (3). Составляя условие их интегрируемости, получим:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 x'}{\partial \eta^2} - i \frac{\partial x'}{\partial \eta} = 0. \quad (7)$$

К такому дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка свелась теперь задача. Это уравнение является линейным с постоянными коэффициентами. Полное решение находим немедленно, а именно:

$$\begin{aligned} x' &= \left(M e^{\frac{\beta \xi}{2}} + N e^{-\frac{\beta \xi}{2}} \right) \times \\ &\times \left[P e^{\frac{i}{2} (-1 + \sqrt{1 + \beta^2}) \eta} + Q e^{\frac{i}{2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \eta} \right], \end{aligned}$$

где M, N, P, Q, β — пять произвольных констант. Внося это выражение в уравнения (6), находим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\beta} \left(M e^{\frac{\beta \xi}{2}} - N e^{-\frac{\beta \xi}{2}} \right) \times \\ &\times \left[P (-1 + \sqrt{1 - \beta^2}) e^{\frac{i}{2} (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) \eta} - \right. \\ &\left. - Q (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) e^{\frac{i}{2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \eta} \right]. \end{aligned}$$

Добавляя любое число подобных членов, отличающихся лишь значениями произвольных постоянных, получаем для x' и y' выражения, содержащие любое число произвольных. Эти произвольные могут принимать действительные или мнимые значения, но они должны в интересующем нас случае быть выбраны такими, чтобы координаты

$$\begin{aligned} x &= x' + y', \\ y &= i(y' - x') \end{aligned}$$

были действительными. Этому условию легко удовлетворить, и после всех вычислений получим нижеследующие значения для x и y :

$x = \sum$

$$\begin{aligned}
 & Ae^{\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[\sqrt{1+\alpha} \cos(1-\alpha) \frac{\eta}{2} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{1-\alpha} \cos(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right] + \\
 & + Be^{-\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[\sqrt{1+\alpha} \cos(1-\alpha) \frac{\eta}{2} - \right. \\
 & \left. - \sqrt{1-\alpha} \cos(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right] + \\
 & + Ce^{\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[\sqrt{1+\alpha} \sin(1-\alpha) \frac{\eta}{2} - \right. \\
 & \left. - \sqrt{1-\alpha} \sin(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right] + \\
 & + De^{-\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[\sqrt{1+\alpha} \sin(1-\alpha) \frac{\eta}{2} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{1-\alpha} \sin(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right];
 \end{aligned}$$

(8)

 $y = \sum$

$$\begin{aligned}
 & Ae^{\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[-\sqrt{1+\alpha} \sin(1-\alpha) \frac{\eta}{2} - \right. \\
 & \left. - \sqrt{1-\alpha} \sin(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right] + \\
 & + Be^{-\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[-\sqrt{1+\alpha} \sin(1-\alpha) \frac{\eta}{2} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{1-\alpha} \sin(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right] + \\
 & + Ce^{\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[\sqrt{1+\alpha} \cos(1-\alpha) \frac{\eta}{2} - \right. \\
 & \left. - \sqrt{1-\alpha} \cos(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right] + \\
 & + De^{-\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\alpha^2}} \left[\sqrt{1+\alpha} \cos(1-\alpha) \frac{\eta}{2} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{1-\alpha} \cos(1+\alpha) \frac{\eta}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Все мнимые величины здесь исчезли, решение зависит от конечного или бесконечного ряда произвольных постоянных A, B, C, D, α , причем знак \sum обозначает сумму подобных членов при разных значениях α , в пределах от -1 до $+1$, и соответствующих значениях A, B, C, D , зависящих от граничных условий. Впрочем, легко проверить выражения (8), подставляя их в уравнения (3).

Присоединяя к уравнениям (8) уравнения (2), а именно,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= K(\xi - \cos \eta), \\ \sigma_y &= K(\xi + \cos \eta), \\ \tau &= K \sin \eta,\end{aligned}\tag{2'}$$

получаем все неизвестные функции, выраженные через две вспомогательные переменные ξ и η .

Эти переменные легко определить. Это параметры двух семейств кривых в плоскости, заданных аналитически уравнениями (8).

Кривые

$$\eta = \text{const}$$

характеризуются постоянством значения τ по их длине.

Кривые

$$\xi = \text{const}$$

более существенны. На каждой из них сумма $\sigma_x + \sigma_y$ остается постоянной. Но сумма $\sigma_x + \sigma_y$ не зависит от выбора осей координат. Она равна сумме двух главных напряжений, остающейся, таким образом, постоянной на каждой из этих кривых. И так как разность этих напряжений, согласно последнему из уравнений (1), постоянна во всей рассматриваемой плоскости, то отсюда вытекает, что вдоль кривых $\xi = \text{const}$ каждое из двух главных напряжений в отдельности остается постоянным, а следовательно, также остается постоянным напряжение на каждом элементе, образующем с направлением главных напряжений определенный угол. Эллипс, представляющий собою геометрическое место

концов векторов всех этих напряжений, сохраняет неизменной форму (но не направление) во всех точках каждой кривой ξ . Отсюда видно, насколько глубоко связаны с рассматриваемой нами задачей кривые, столь естественно введенные нашим исследованием. В другой работе мы покажем, что переменные ξ и η вполне применимы для выражения граничных условий на поверхности, встречающихся в приложениях этой задачи ¹⁾. Но уже теперь видно, что из наших уравнений можно получить любое число простых решений. Каждое из этих решений будет относиться к частным граничным условиям, которые можно экспериментально осуществить, что позволит дать предпринятым Треска в этой новой и существенной отрасли механики опытам действительно разумное направление, освещая их всякий раз теорией и, с другой стороны, подтверждая теорию опытом.

¹⁾ В большинстве случаев необходимо выразить условия постоянства одного из главных напряжений или тангенциального напряжения, т. е., согласно предыдущему, постоянства одного из двух параметров ξ и η .

А. ХААР и Т. КАРМАН

К ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПЛАСТИЧЕСКИХ И СЫПУЧИХ СРЕДАХ *)

В настоящем исследовании делается попытка разработать общие основы двух специальных областей механики сплошной среды, носящих название — *теория пластичности* и *теория давления земли*.

Эти теории в их теперешнем виде довольно слабо связаны с прочими разделами механики сплошной среды и вывод уравнений¹⁾, достаточных для решения задач (большой частью важных с технической точки зрения), требует некоторых независимых и довольно произвольных допущений. Применяя минимальный принцип, мы выводим строго в настоящей статье полную систему уравнений, дающих условия равновесия в пластических и сыпучих средах, беря в основу только полученные на опытах физические характеристики, которыми эти среды определяются. Таким образом, получаем общую картину различных видов напряженных состояний, возможных в данных средах, и полную систему уравнений для их определения. С другой стороны, своеобразие полученных здесь результатов состоит в том, что мы можем одним единственным вариационным принципом решать такие задачи, решение которых (как это часто имеет место в физических задачах) в различных областях приводит к различным дифференциальным уравнениям.

*) Nachr. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl., N. 2, 1909. S. 204.

¹⁾ Уравнения пластичности были выведены на основе опытов Треска Сен-Венаном (стр. 11) и М. Леви (стр. 20). Ниже рассматривается разница между выводами этих авторов и результатами, полученными в настоящем исследовании. Подробная теория сыпучей среды дана Буссинеском^[3]. Относящиеся сюда теории Ранкина^[4] и М. Леви^[5] ограничиваются только „предельными состояниями равновесия“.

I. О применении минимального принципа в теории упругости и о границах упругого состояния. Представим сначала известный в теории упругости принцип (который часто называют принципом Кастильяно) для случая чисто упругой, изотропной среды в следующем виде.

Пусть на границе изотропной упругой среды заданы напряжения. Рассмотрим плотность энергии деформации W как функцию только шести компонент напряжения $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$. Тогда состояние равновесия, действительно имеющее место при всех возможных распределениях напряжений, удовлетворяющих только трем уравнениям равновесия ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и заданным через напряжения граничным условиям, будет определяться тем, что распространенный по всей области интеграл

$$I = \iiint W(X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x) dx dy dz$$

имеет минимум.

Чтобы показать это, обозначим через u, v, w множители Лагранжа, которые должны быть введены в дополнительные условия (1) вариационной задачи. Тогда, варьируя, получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial W}{\partial X_x} & u_y + v_x &= \frac{\partial W}{\partial X_y}, \\ v_y &= \frac{\partial W}{\partial Y_y} & v_z + w_y &= \frac{\partial W}{\partial Y_z}, \\ w_z &= \frac{\partial W}{\partial Z_z} & w_x + u_z &= \frac{\partial W}{\partial Z_x}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹⁾ Ради простоты мы ограничиваемся здесь случаем отсутствия массовых сил.

В изотропных упругих телах, подчиняющихся закону Гука, величина $2W$ представится в виде следующей квадратичной формы из шести компонент напряжений:

$$2W = \frac{1}{E} P^2 + \frac{1}{\mu} Q;$$

здесь P и Q — сокращенные обозначения двух ортогональных инвариантов тензора напряжений:

$$P = X_x + Y_y + Z_z,$$

$$Q = X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 - X_x Y_y - Y_y Z_z - Z_z X_x,$$

а постоянная E (модуль Юнга) связана с постоянными Ляме λ и μ зависимостью: $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$. В этом слу-

чае величины $\frac{\partial W}{\partial X_x}$, $\frac{\partial W}{\partial Y_y}$, $\frac{\partial W}{\partial Z_z}$, $\frac{\partial W}{\partial X_y}$, $\frac{\partial W}{\partial Y_z}$, $\frac{\partial W}{\partial Z_x}$ равны компонентам деформации ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx} , а система уравнений (2) показывает, что эти последние могут быть получены известным способом из трех функций u , v , w .

Путем исключения u , v , w мы приходим к известным трем уравнениям совместности, которые вместе с уравнениями равновесия и граничными условиями определяют напряжения однозначно. Напишем их в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial X_y} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial W}{\partial X_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W}{\partial Y_y} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial Y_z} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial W}{\partial Y_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial W}{\partial Z_z} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial Z_x} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W}{\partial Z_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial W}{\partial X_x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В двумерном случае, когда уравнения равновесия тождественно удовлетворяются функцией Эри, можно ввести функцию Эри F в интеграл I , и это будет, пожалуй, самым простым выводом уравнения $\Delta \Delta F = 0$, которому удовлетворяет функция Эри в случае изотропной среды. Это было указано Клейном. С другой стороны, надо отметить, что для таких сред, для которых W не

является квадратичной формой от $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$, а содержит члены более высокого порядка, нужно потребовать минимума не энергии деформации, а так называемой добавочной работы W' . Эти две функции W и W' связаны между собой зависимостью:

$$W + W' = \frac{\partial W'}{\partial X_x} X_x + \frac{\partial W'}{\partial Y_y} Y_y + \frac{\partial W'}{\partial Z_z} Z_z + \frac{\partial W'}{\partial X_y} X_y + \frac{\partial W'}{\partial Y_z} Y_z + \frac{\partial W'}{\partial Z_x} Z_x. \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения Лагранжа для определенной таким образом вариационной задачи являются также соответствующими уравнениями совместности.

Данные же опытов ясно указывают на то, что определяемое шестью уравнениями (1) и (3) чисто упругое состояние возможно (и при этом приближенно) только в известных пределах. Определение этих пределов для различных материалов является одним из самых важных вопросов экспериментальной части учения о прочности. В нашем исследовании достаточно принять, что (как показывают почти все опыты) упругое состояние ограничивается рядом неравенств, связывающих между собою компоненты напряжения. Опытами над так называемыми пластическими телами было установлено их характерное свойство, заключающееся в том, что они могут находиться в чисто упругом состоянии только до тех пор, пока наибольшее касательное напряжение не достигнет постоянного для данного материала значения; у сыпучих сред этот предел определяется тем, что направление результирующего напряжения относительно каждого элемента поверхности лежит внутри некоторого конуса, так называемого „конуса трения“, ось которого совпадает с нормалью к элементу поверхности. Какие ни делать выводы на основе физических опытов над „пределом упругости“, эти условия во всяком случае могут быть выражены для изотропных тел через известное число неравенств, связывающих между собой ортогональные инварианты тензора напряжений.

Самый важный вопрос, который здесь возникает и который является основным предметом наших исследова-

дований, заключается в выяснении того, каким образом будет определяться состояние равновесия в том случае, если системы уравнений (1) и (3) не допускают ни одного решения, которое удовлетворяло бы во всей области физически заданным для данного материала неравенствам.

II. Вспомогательные математические теоремы. Эти и им подобные проблемы математической физики приводят к вариационным задачам ¹⁾, которые можно сформулировать для самого простого случая следующим образом:

Среди всех функций $U(x, y, z)$, удовлетворяющих на границе области G заданным граничным условиям и, кроме того, внутри области G всюду удовлетворяющих заданному дифференциальному неравенству (которое для простоты берется первого порядка)

$$F\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \leq 0,$$

требуется определить такую функцию, которая обращает в минимум интеграл

$$I = \int \int \int_{(G)} f\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Прежде всего нужно вывести необходимые условия для нашей задачи, которые заменяли бы уравнения Лагранжа в обычной вариационной задаче. Они даются следующей теоремой:

Пусть $\bar{U}(x, y, z)$ — искомая функция; если теперь в части g области G

$$F\left(\bar{U}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right) \leq -\delta \quad (\delta > 0), \quad (5)$$

то вариация от I должна обратиться в нуль всюду в области g , т. е. \bar{U} будет удовлетворять в этой области

¹⁾ См. интересные выводы Е. Zermelo^[6], где рассматриваются различные геометрические задачи этого типа.

уравнению Лагранжа обычной вариационной задачи, которое получается независимо от дополнительного условия, а именно уравнению:

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial U}{\partial x}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial U}{\partial y}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial U}{\partial z}} \right) - \frac{\partial f}{\partial U} = 0. \quad (6)$$

Действительно, если в области g выполняется неравенство (5), то мы можем определить некоторую положительную величину η таким образом, что неравенство

$$F \left[\bar{U} + \varepsilon V, \frac{\partial(\bar{U} + \varepsilon V)}{\partial x}, \frac{\partial(\bar{U} + \varepsilon V)}{\partial y}, \frac{\partial(\bar{U} + \varepsilon V)}{\partial z} \right] \leq 0$$

будет сохранять силу для каждого достаточно малого положительного или отрицательного ε , если V является определенной в области g функцией, обладающей тем свойством, что она вместе со своими первыми производными остается во всей области g по величине меньше, чем η .

Выберем, в частности, функцию V так, что она вместе со своими первыми производными обращается в нуль на границе области g , и образуем интеграл от функции $U(\varepsilon)$, которая всюду дифференцируема, причем внутри области g она равна $\bar{U} + \varepsilon V$, а вне области g совпадает с U . Возьмем интеграл

$$I(\varepsilon) = \int \int \int_{(G)} f \left\{ U(\varepsilon), \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial x}, \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial y}, \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial z} \right\} dx dy dz.$$

Напишем этот интеграл так:

$$I(\varepsilon) = \int \int \int_{(G-g)} f \left(\bar{U}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) dx dy dz + \\ + \int \int \int_{(g)} f \left(\bar{U} + \varepsilon V, \frac{\partial(\bar{U} + \varepsilon V)}{\partial x}, \dots \right) dx dy dz.$$

Если U является решением нашей вариационной задачи, то для достаточно малых, как положительных, так и отрицательных, ε должно иметь место неравен-

ство $I(\varepsilon) \geq I(0)$, откуда непосредственно следует, что вариация интеграла, стоящего на втором месте, должна обратиться в нуль, т. е. что U удовлетворяет в области G дифференциальному уравнению (6).

Поэтому решение нашей вариационной задачи составляется из решений обоих дифференциальных уравнений $L=0$ и $F=0$, т. е. удовлетворяет в каждой точке области G одному из этих двух дифференциальных уравнений.

Аналогичные выкладки возможны и для рассмотрения более общих вариационных задач со многими независимыми функциями и несколькими неравенствами в качестве дополнительных условий.

Как характерный пример приведем самый простой случай двух неизвестных функций и двух неравенств.

Из всех пар функций $U_1(x, y, z)$, $U_2(x, y, z)$, удовлетворяющих двум дифференциальным неравенствам

$$F_1\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \dots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \dots\right) \leq 0,$$

$$F_2\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \dots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \dots\right) \leq 0,$$

выберем ту пару, которая обращает в минимум интеграл:

$$I = \iiint f\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \dots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \dots\right) dx dy dz.$$

Соответствующие необходимые условия получаются из следующей теоремы:

Если U_1, \bar{U}_2 — искомые функции, то

а) во всех областях, где удовлетворяются оба составленных из этих функций неравенства:

$$F_1 = F_1\left(\bar{U}_1, \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x}, \dots, \bar{U}_2, \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x}, \dots\right) < 0,$$

$$F_2 = F_2\left(\bar{U}_1, \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x}, \dots, \bar{U}_2, \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x}, \dots\right) < 0$$

(знак равенства исключается), для функций \bar{U}_1, \bar{U}_2 имеют силу уравнения Лагранжа обычной вариационной задачи без всякого дополнительного условия;

б) во всех областях, где

$$\bar{F}_1 = 0, \quad \bar{F}_2 < 0,$$

наша система решений удовлетворяет уравнениям Лагранжа обычной вариационной задачи, когда надо обратиться в минимум интеграл

$$I = \iiint f\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \dots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \dots\right) dx dy dz$$

при дополнительном условии:

$$F_1\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \dots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \dots\right) = 0;$$

в) во всех областях, где

$$\bar{F}_1 < 0, \quad \bar{F}_2 = 0,$$

функции \bar{U}_1, \bar{U}_2 удовлетворяют уравнениям Лагранжа вариационной задачи, в которой в качестве дополнительного условия надо взять $F_2 = 0$.

Иными словами, для этих областей решается такая вариационная задача, в которой одно из неравенств вырождается в равенство и одно только это равенство принимается в качестве дополнительного условия.

Наконец, остаются области, в которых оба неравенства вырождаются в соответствующие равенства; иными словами: система решений удовлетворяет в каждой точке либо одному из выведенной выше системы уравнений, либо обоим уравнениям:

$$г) \quad \bar{F}_1 = 0, \quad \bar{F}_2 = 0.$$

Эта теорема доказывается тем же способом, что и предыдущая, более простая теорема, и мы непосредственно видим, как эта теорема может быть обобщена на случай многих неизвестных и многих неравенств¹⁾.

¹⁾ Для полной наглядности вышеприведенной теоремы может служить следующая простая задача: найти такой наикратчайший путь, соединяющий две точки, который лежит вне двух пересекающихся сфер. Легко усмотреть, что такой путь может состоять только из прямых линий, больших кругов сфер и отдельных частей линии их пересечения.

Как указано выше, мы находим эти простые сами по себе выкладки достойными внимания потому, что они позволяют свести рассмотрение известных физических задач к одному единственному вариационному принципу, при котором в различных областях имеют силу различные дифференциальные уравнения. В дальнейшем показывается их непосредственное приложение к двум физическим задачам.

III. Приложение к теории пластической среды. Под понятием „пластичности“ мы объединяем следующие два физических свойства, которые для известных материалов соответствуют, по крайней мере приближенно, действительности.

Во-первых, характерным свойством пластических сред является то, что они не теряют своей изотропии при остаточных деформациях. В связи с этим мы предполагаем, что зависимость энергии деформации от величины напряжений не видоизменяется и при пластических деформациях.

Таким образом, мы имеем основание применять наш минимальный принцип как к чисто упругим, так и к пластически деформируемым областям тела, если только будем надлежащим образом принимать во внимание упомянутые выше (п. II) неравенства.

Второе характерное свойство пластических сред определяется самими этими неравенствами.

Как уже указано, граница упругого состояния определяется тем, что величина наибольшего касательного напряжения не может превышать некоторого постоянного значения K . Итак, под пластическими средами мы будем подразумевать такие материалы, у которых это предельное значение касательного напряжения остается постоянным и при значительных деформациях. У большинства материалов, в частности металлов, которые практически обычно считают пластическими, предел упругости вследствие остаточных деформаций несколько повышается, так что наша формулировка является только известным приближением к действительности. Эта формулировка сводится к следующему: ни одна из трех

разностей главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не может быть по абсолютной величине больше, чем постоянная $2K$.

Главные напряжения, выраженные через компоненты напряжения, мы получаем как корни кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} X_x - \sigma & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \sigma & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Можно преобразовать эти неравенства, строя кубическое уравнение, которому удовлетворяют величины

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2, \quad (\lambda_2 - \lambda_3)^2, \quad (\lambda_3 - \lambda_1)^2,$$

и требуя при этом, чтобы все три корня этого уравнения были меньше, или в крайнем случае равны $4K^2$. Это уравнение будет иметь следующий вид:

$$z(z - P + 3Q)^2 - \Delta = 0.$$

Здесь P и Q обозначают упомянутые выше (п. 1) инварианты, а Δ — дискриминант кубического уравнения (7).

Таким образом, мы получаем вариационную задачу следующего вида:

из всех систем функций $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$, удовлетворяющих трем уравнениям равновесия (1) и неравенствам

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \leq 4K^2,$$

$$(\lambda_2 - \lambda_3)^2 \leq 4K^2,$$

$$(\lambda_3 - \lambda_1)^2 \leq 4K^2,$$

а также граничным условиям в напряжениях на поверхности, та система будет отвечать действительному состоянию равновесия, которая обращает в минимум интеграл:

$$\iiint W(X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x) dx dy dz.$$

На основании приведенных в п. II вспомогательных теорем мы можем высказать следующую теорему относительно решения поставленной нами задачи:

а) Если в части A области получается такая система решений, что ни одна из величин $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$, $(\lambda_2 - \lambda_3)^2$, $(\lambda_3 - \lambda_1)^2$ не достигает своего предела, то в этом случае функции X_x, \dots, Z_x будут удовлетворять в этой области уравнениям Лагранжа вариационной задачи без вышеприведенных неравенств.

Как уже показано в п. I, уравнения Лагранжа этой вариационной задачи будут представлять собой три уравнения совместности обычной теории упругости и вместе с тремя уравнениями равновесия будут определять 6 неизвестных функций.

Область A можно поэтому назвать чисто упругой частью тела.

б) Рассмотрим теперь такую часть B всей области, в которой в каждой точке одна из вышеназванных величин, например $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$, равна $4K^2$, а остальные две меньше, чем $4K^2$.

Из приведенной в п. II теоремы следует, что в этой области удовлетворяются уравнения Лагранжа такой вариационной задачи, в которой надо учитывать, кроме трех уравнений равновесия, также уравнение

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4K^2 = 0,$$

или равносильное ему уравнение

$$\Phi = 4K^2 [4K^2 - P + 3Q]^2 - \Delta = 0$$

в качестве дополнительного условия; два же остальных неравенства не должны приниматься во внимание.

Обозначив через $\tau(x, y, z)$ множитель Лагранжа этого последнего дополнительного условия, мы получим (исключив множители Лагранжа из уравнений равновесия методом, аналогичным тому, который применяется при

выводе уравнений совместности в теории упругости) следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial X_y} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial X_x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial Y_y} \right], \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial Y_z} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial Y_y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial Z_z} \right], \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial Z_x} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial Z_z} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial (W + \tau\Phi)}{\partial X_x} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Эта система уравнений вместе с тремя уравнениями равновесия и уравнением $\Phi = 0$ составляет полную систему уравнений для шести компонент напряжения и функции τ .

Определяемое этими уравнениями напряженное состояние, которое мы еще рассмотрим ниже более подробно, мы будем называть *полупластическим*¹⁾.

в) Если, наконец, в части S всей области два неравенства обращаются в равенства, например,

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 &= 4K^2 \\ (\lambda_2 - \lambda_3)^2 &= 4K^2 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

то отсюда непосредственно следует, что $\lambda_1 = \lambda_3$, т. е. что эллипсоид напряжений является в каждой точке области S эллипсоидом вращения. Так как это дает два дополнительных условия для коэффициентов уравнения (7), т. е. для компонент напряжения, то мы опять получаем, беря одно из равенств (9) и три уравнения равновесия, систему из шести дифференциальных уравнений для шести величин. Такое напряженное состояние мы будем называть *вполне пластическим*; необходимо отметить, что уравнения, определяющие это

¹⁾ Здесь можно отметить, что уравнения (8), которые заменяют уравнения совместности в теории упругости, переходят при $\tau = 0$ в уравнения (3), так что мы получим общую систему уравнений для упругих и пластических напряженных состояний, если прибавим к трем уравнениям равновесия и уравнениям (8) еще одно уравнение $\tau\Phi = 0$.

предельное состояние, не зависят от выражения энергии деформации, а поэтому и от начальных упругих постоянных материала.

Мы можем поэтому различать при пластической деформации чисто упругого вначале тела в общем случае три различных области, в которых возникают различные виды распределения напряжений. Границы этих областей определяются только непрерывностью перехода напряжений из одной области в другую.

Вернемся опять к полупластическому состоянию. Для такой области мы имеем вариационную задачу следующего вида:

$$\iiint W(X_x, \dots, Z_x) dx dy dz = \min$$

при дополнительных условиях

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

и

$$4K^2(4K^2 - P + 3Q)^2 - \Delta = 0.$$

Обозначим, как и в п. I, множители Лагранжа уравнений равновесия через u , v , w ; мы можем рассматривать их как три добавочных неизвестных и при решении задаваться зависимостями между u , v , w ; X_x , Y_y , ..., Z_z . Как мы уже указывали в п. I, величины u , v , w в упругой задаче можно рассматривать как упругие перемещения; по аналогии, мы можем представить себе полупластическое состояние как такое напряженное состояние, которое получается через перемещения, равные трем множителям Лагранжа u , v , w и связанные с напряжениями, в силу выведенных выше условий, следующим образом.

Напишем соответствующие перемещениям u , v и w величины деформаций:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

и обозначим главные деформации, т. е. корни кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

через ε_1 , ε_2 , ε_3 . Тогда мы можем постулировать следующее:

1) Направления главных деформаций ε_1 , ε_2 , ε_3 совпадают так же, как и при упругих напряженных состояниях, с направлениями главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 .

2) Если σ_1 и σ_3 являются двумя крайними главными напряжениями, разница между которыми равна $\pm 2K$, то среднее арифметическое из этих двух напряжений $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ и третье (среднее) главное напряжение σ_2 связаны с величинами $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}$ или соответственно ε_2 теми же зависимостями, какие связывают упругие деформации и напряжения.

Таким образом имеют силу следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} &= \frac{1}{E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_2 + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1}{2\mu} (\sigma_1 + \sigma_3) \right]. \end{aligned}$$

Из этих зависимостей следует, что соответствующее перемещениям u , v , w объемное расширение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

должно иметь тот же порядок величины, что и упругое объемное расширение.

В противоположность этому Сен-Венан^[1] и М. Леви^[2] при выводах уравнений пластичности рассматривают пластические среды как несжимаемые; такое приближение, повидимому, допустимо только тогда, когда пластические деформации очень велики по сравнению с упругими. Но это как раз едва ли будет иметь место в тех наиболее интересных случаях, когда упругие и пластические области возникают одновременно вблизи друг от друга. Мы думаем, что наши уравнения в этих именно случаях ближе подходят к действительности.

IV. Постановка задачи в теории давления земли. Тем же способом, который был нами изложен в применении к теории пластичности, можно осуществить систематическое рассмотрение напряженных состояний в сыпучих средах. Эти среды, как уже было указано выше, характеризуются с физической точки зрения тем, что направление вектора напряжения на каждом элементе поверхности не может выходить за пределы конуса трения (с заданным углом раствора); математически это условие опять сводится к системе неравенств, которые выражают, что отношение двух любых главных напряжений находится между двумя определенными положительными предельными значениями K и $\frac{1}{K}$. Обозначив опять главные напряжения через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, получаем следующие неравенства:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq K + \frac{1}{K},$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \leq K + \frac{1}{K},$$

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \leq K + \frac{1}{K}.$$

Этими неравенствами и задаются границы упругого состояния в сыпучей среде. Но в противоположность теории пластичности, в теории сыпучих сред наши

точные сведения ограничиваются только знанием границ упругого состояния, не давая указаний относительно закономерностей самих упругих деформаций [7].

В этой теории именно недостает точной формулы для энергии деформации. Имея такую формулу, мы могли бы без труда перенести наши выкладки и на эту область механики сплошной среды и получили бы вполне определенные системы уравнений для трех возможных видов напряженных состояний. Уравнение же для крайнего случая, когда два неравенства вырождаются в равенства, совершенно не зависит от формулы для энергии деформации, и, таким образом, мы получаем для такого напряженного состояния и сыпучих сред вполне определенную систему из шести дифференциальных уравнений для шести неизвестных величин напряжений. Мы опять имеем здесь эллипсоид вращения в качестве эллипсоида напряжений и отношение двух равных напряжений к третьему определяется постоянной K , или соответственно $\frac{1}{K}$.

Здесь следует отметить, что эти результаты полностью совпадают с теми предположениями, которые большей частью делаются в технической литературе, как, например, при рассмотрении состояний грунта.

Но теория давления земли приводит к другому виду постановки задачи. При производимых до сих пор выводах мы ограничивались случаем заданных на границе напряжений, но важные с технической точки зрения вопросы теории давления земли требуют как раз определения величин, приложенных на границе сил, при которых еще может иметь место равновесие [7]. Такие задачи, как, например, вопрос о так называемом активном и пассивном давлении земли, приводят к вариационной задаче с переменными краевыми условиями.

К этим вопросам мы в скором времени еще вернемся*).

*) Современная теория давления грунтов изложена в книге В. В. Соколовского, Статика сыпучей среды. Им решены многочисленные относящиеся сюда задачи. (Прим. ред.)

Р. МИЗЕС

МЕХАНИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ПЛАСТИЧЕСКИ- ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ *)

Механика сплошной среды, основанная на общем понятии о напряжениях, введенном Коши, до сего времени почти исключительно применялась к жидким и твердым упругим телам. Для пластических или остаточных деформаций твердых тел набросок теории был создан Сен-Венаном (стр. 11). Он не дает, однако, требуемого числа уравнений для определения движения. Также и другие попытки в этом направлении не привели к окончательным результатам.

В дальнейшем строится полная система уравнений движения пластически деформируемых тел, не выходящая за пределы механики Коши и опирающаяся на определенные данные опыта, характеризующие область ее применения ¹⁾.

I. Обозначения. Пусть напряженное состояние в какой-нибудь точке тела задается в прямоугольной системе координат тремя нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и тремя касательными напряжениями τ_x, τ_y, τ_z .
В таблице

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{array} \quad (1)$$

величины первой строки обозначают компоненты вектора напряжения σ_x для элемента поверхности, внешняя нормаль которого имеет направление положительной оси x , и т. д. Совокупность величин таблицы (1) преобра-

*) Nachr. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. kl., N. 4 (1913).

¹⁾ Хаар и Карман (этот сборник, стр. 41) выводят уравнения движения из нового вариационного принципа, отношение которого к прочим областям механики еще не выяснено.

зуется при ортогональном преобразовании координат по известным формулам, одна из которых имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{x'} = \bar{\sigma}_x \cos(x, x') + \bar{\sigma}_y \cos(y, x') + \bar{\sigma}_z \cos(z, x') \quad (2)$$

и называется тензором напряжений S .

Аналогичным путем определяются тензор деформаций E и тензор скоростей деформаций Λ .

Если через ξ , η , ζ обозначить бесконечно малые упругие перемещения одной какой-нибудь точки, то удлинения и сдвиги представляются так:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \quad \gamma_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad \gamma_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

и для тензора E получаем таблицу:

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & \varepsilon_y & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & \varepsilon_z \end{array} \quad (4)$$

Если вместо ξ , η , ζ взять компоненты вектора скорости u , v , w , то для скоростей удлинений и сдвигов получим выражения:

$$\lambda_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \lambda_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\nu_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \nu_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \nu_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5)$$

и для тензора таблицу:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_x & \nu_z & \nu_y \\ \nu_z & \lambda_y & \nu_x \\ \nu_y & \nu_x & \lambda_z \end{array} \quad (6)$$

Для каждого тензора имеется по крайней мере одна система координат, для которой таблица может быть

сведена к членам главной диагонали; например таблица (1) — к виду:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{array} \quad (7)$$

Здесь главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются корнями векового уравнения и определяются также следующими тремя соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2), \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если провести координатные оси так, что ось z будет совпадать с третьей главной осью, а оси x и y будут делить пополам углы между первыми двумя главными напряжениями (рис. 1), то вследствие (2) получим следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} & 0 \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} & \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{array} \quad (9)$$

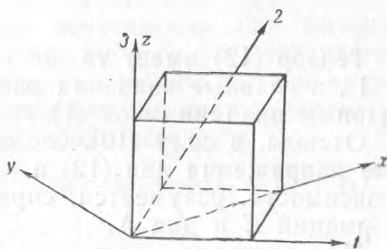


Рис. 1.

Мы видим, что входящие сюда значения касательного напряжения τ являются экстремальными, т. е. среди трех величин:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad (10)$$

всегда имеется наибольшее и наименьшее по абсолютной величине касательное напряжение. Будем называть τ_1, τ_2, τ_3 , сумму которых равна нулю, главными касат-

тельными напряжениями. Самый простой из всех тензоров напряжений есть тензор гидростатического давления ($-P$). В любой системе координат он имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccc} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{array} \quad (11)$$

Если из тензора напряжений (1) вычесть напряженное состояние, представленное таблицей (11), то касательные напряжения останутся без изменения, и мы получим таблицу следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} \sigma'_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma'_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma'_z \end{array} \quad (12)$$

причем

$$\sigma'_x = \sigma_x + p, \quad \sigma'_y = \sigma_y + p, \quad \sigma'_z = \sigma_z + p. \quad (13)$$

Тензор (12) имеет те же главные направления, что и (1), а главные значения равны уменьшенным на $-p$ главным значениям от (1).

Отсюда, в силу (10), следует, что главные касательные напряжения для (12) и (1) тождественны. Все эти зависимости, разумеется, справедливы для тензора деформаций E и для Λ .

Приведем здесь еще одну, применяемую нами в дальнейшем, формулу, получающуюся из (10) и (8). Эта формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{2} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \frac{3}{2} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - \frac{3}{2} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{3}{2} (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = \\ &= \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2). \quad (14) \end{aligned}$$

II. Основные данные опытов. Приведем те опытные данные, которые лежат в основе устанавливаемых ниже уравнений движения.

а) *Все твердые тела ведут себя при достаточно малых напряжениях как упругие; зависимость между напряжением и деформацией однозначна.*

Это положение разграничивает твердые тела от вязко-текучих. Твердым является, например, пластичный воск, который легко деформируется уже при незначительном внешнем давлении, так же как и железо, у которого предел упругости достигается только при очень высоком давлении. Наоборот, смола при нормальной температуре будет не пластическим, а жидким телом. Условие достижения предела упругости мы рассмотрим ниже.

Зависимость между тензорами напряжений и деформаций S и E математическая теория упругости предполагает, как известно, линейной:

$$S = L(E). \quad (15)$$

Самая общая линейная зависимость, при которой не дается предпочтение ни одному из направлений в пространстве, выражается тем, что оба тензора имеют одинаковые главные направления, а главные значения связаны между собою следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha \varepsilon_1 + \beta (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), & \sigma_2 &= \alpha \varepsilon_2 + \beta (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \sigma_3 &= \alpha \varepsilon_3 + \beta (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \end{aligned} \quad (16)$$

причем α и β — упругие постоянные. Уравнение (16) можно известным путем преобразовать таким образом, что получатся зависимости между компонентами, отнесенными к любым осям координат.

б) *Если предел упругости достигнут, то твердое тело ведет себя по существу как вязкая, почти несжимаемая жидкость.*

Поведение тела, подобное поведению жидкости, характеризуется тем, что напряжения определяются не деформированным состоянием, как в упругих телах, а процессом деформации. Но при этом нужно учиты-

вать, что элемент объема, находящийся под внешним всесторонним равномерным давлением, не получает никакой конечной скорости деформации. Получающееся при этом изменение объема, как согласованно показывают все наблюдения, имеет всегда величину порядка упругой деформации. Отсюда следует, что в механике вязких жидкостей нужно из тензора напряжений S вычесть ту часть ($-P$), которая соответствует всестороннему давлению. Остаток S' [ср. (2) в п. I] можно принять за линейную функцию:

$$S' = L(\Lambda). \quad (17)$$

Если принять во внимание отмеченную выше симметрию, то по аналогии с (16) получим:

$$\sigma'_1 = k\lambda_1 + k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \quad (18)$$

Стоящее в скобках выражение является дивергенцией скорости или скоростью изменения объема. Мы только что установили, что она ничтожно мала по сравнению с λ_1 .

Поэтому

$$\sigma'_1 = k\lambda_1; \quad \sigma'_2 = k\lambda_2; \quad \sigma'_3 = k\lambda_3. \quad (19)$$

Из этих равенств следует, что S' можно получить из Λ , если каждую компоненту Λ помножить на k ; следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma'_x = \sigma_x + p = k\lambda_x; \quad \sigma'_y = \sigma_y + p = k\lambda_y; \quad \sigma'_z = \sigma_z + p = k\lambda_z; \\ \tau_x = k\nu_x; \quad \tau_y = k\nu_y; \quad \tau_z = k\nu_z. \end{aligned} \quad (20)$$

К совершенно таким же уравнениям приводит теория вязких жидкостей Навье — Стокса. Существенная разница обнаруживается только при исследовании величины k .

Для этого будем исходить из следующего экспериментально установленного основного закона.

в) Пропорциональное изменение абсолютных величин всех скоростей течения не изменяет величины работы, затрачиваемой для достижения определенной деформации в пластическом теле.

Этот закон мы устанавливаем на основании всей совокупности опытного материала, полученного до сего времени в области теории пластических деформаций и их приложений к технике. В технике для подсчета затраченной работы большей частью используются такие формулы, в которых не учитывается влияние скорости. Там, где это влияние наблюдалось, оно оказалось очень незначительным ¹⁾. Мы должны понимать устанавливаемое законом в) постоянство так же, как, например, постоянство коэффициента трения твердых тел по отношению к меняющемуся нормальному давлению. Принятием закона в) уточняется тот идеальный случай, который допускает определенную теорию и который дает достаточное приближение для действительного поведения тел.

Затрачиваемая в одну секунду в единице объема работа выражается вообще так:

$$\begin{aligned} \sigma_x' \lambda_x + \sigma_y' \lambda_y + \sigma_z' \lambda_z + 2\tau_{xy} v_x + 2\tau_{yz} v_y + 2\tau_{zx} v_z = \\ = k(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + 2v_x^2 + 2v_y^2 + 2v_z^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Если все скорости помножить на c , то это выражение изменится пропорционально kc^2 . Но одновременно уменьшится в отношении $1:c$ продолжительность процесса деформации, так что вся работа будет, следовательно, пропорциональна kc . Поэтому входящий в (20) коэффициент пропорциональности k должен быть обратно пропорциональным скорости. Иными словами: тензор напряжений S' не изменяется при изменении всех составляющих Λ в одном и том же отношении.

Из этого последнего утверждения следует, что возможность изменения напряжений в пластическом теле ограничена по сравнению с телом упругим. Это ограничение состоит в том, что напряжения находятся на пределе текучести. Поэтому закон в) можно сформулировать также следующим образом:

г) *При пластических деформациях напряжения удовлетворяют условию пластичности.*

Этот закон содержит в себе требование, чтобы усло-

¹⁾ Отдельные доказательства и ссылки на литературу можно найти в статье автора [8].

вие пластичности было независимым от добавления к тензору напряжений (1) произвольного тензора гидростатического давления (11).

Справедливость г) можно проверить непосредственно на опыте. В случае одноосного растяжения стержня диаграмма напряжения — деформации должна была бы, согласно г), иметь вид, изображенный на рис. 2, а именно: сначала наклонная прямая в области упругого состояния, затем горизонтальная прямая, соответствующая не зависящему от скорости предельному напряжению в пластической области. Наблюдение

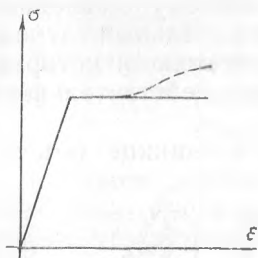


Рис. 2.

показывает, что у железа, стали и родственных им материалов, хотя к наклонной прямой и примыкает некоторый горизонтальный участок, он скоро переходит в слегка поднимающуюся линию. Такое явление можно отнести за счет процесса, связанного с кристаллической структурой тела и в сильной степени зависящего от температуры; этот процесс называется упрочнением. Нашей теорией, следовательно, явление упрочнения не учитывается. Но нужно помнить, что основная область применения теории пластичности относится к сжимающим нагрузкам (положительное p). А еще недостаточно ясно, имеет ли место явление упрочнения также при сжатии железа и других материалов. Во всяком случае, вполне возможно, что у весьма пластичных тел, как воск и т. п., упрочнение очень незначительно.

Обратимся теперь к последнему вопросу, касающемуся условия пластичности.

д) В системе координат, в которой по осям отложены главные касательные напряжения, условие пластичности изобразится замкнутой кривой, лежащей в плоскости

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (22)$$

и содержащей внутри себя начало координат.

Как известно, первые подробные исследования относительно предела упругости и предела разрушения принадлежат Мору^[9]. По Мору эти пределы зависят только от наибольшего и наименьшего из трех главных напряжений, скажем σ_1 и σ_2 .

В системе координат

$$x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\tau_3 \quad (23)$$

граница разрушения представится примерно так, как это изображено на рис. 3, если принять во внимание не только вышеупомянутые опыты Мора, но и более новые

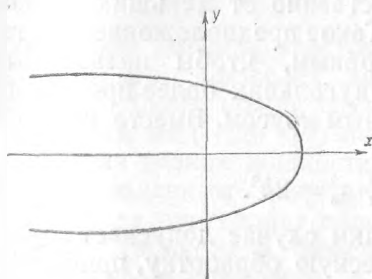


Рис. 3.

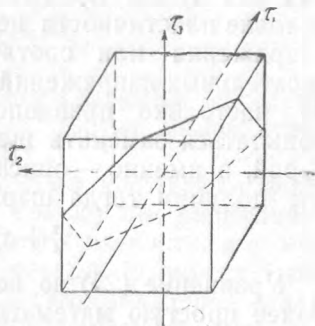


Рис. 4.

опыты Кармана^[10]. Большое различие между поведением материала при положительном x (растяжение) и отрицательном x (сжатие) объясняется тем, что при всестороннем растяжении получается разрыв материала, а при всестороннем равномерном давлении никакого раздавливания не происходит. Мало вероятно, чтобы подобное различие имело место и на пределе упругости материала. Так как, кроме того, мы здесь в первую очередь исследуем состояние материала при большом среднем давлении, то вполне допустимо принять горизонтальные асимптоты (рис. 3) за основную границу упругой

области. Такое определение предела упругости выразится следующими неравенствами:

$$|\tau_1| \leq k, \quad |\tau_2| \leq k, \quad |\tau_3| \leq k. \quad (24)$$

При пересечении куба (24) в плоскости (22) получится правильный шестиугольник (рис. 4), так что наше условие д) выполняется.

Преобразуем теперь условие Мора еще в другом направлении. Существующими до сего времени опытами у шестиугольника, получающегося из (22), (24), определены только угловые точки. Эти точки соответствуют тем состояниям, при которых одно из τ равно нулю, а абсолютные значения двух остальных одинаковы. Соединяя эти точки прямыми линиями, предполагают, что условие пластичности не зависит от среднего главного напряжения или соответственно от меньших главных касательных напряжений. Такое предположение кажется не настолько правдоподобным, чтобы нельзя было попытаться заменить шестиугольник более простой фигурой, а именно — описанным кругом. Вместо куба (24) мы получим тогда шар:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2k^2. \quad (25)$$

Уравнение (25) во всяком случае допускает гораздо более простую математическую обработку, причем разница между ним и уравнением (24) не выйдет за пределы погрешностей производившихся до сего времени опытов.

III. Уравнения движения. Обозначим через ρ плотность тела, через X, Y, Z — компоненты объемной силы.

Тогда общие уравнения движения сплошной среды будут следующие:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (I)$$

Шесть составляющих напряжения σ'_x, \dots, τ_z , вследствие (2) и (5), выразятся через три компоненты скорости u, v, w следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= k \frac{\partial u}{\partial x}; & \sigma'_y &= k \frac{\partial v}{\partial y}; & \sigma'_z &= k \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \tau_x &= \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); & \tau_y &= \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); & \\ & & \tau_z &= \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (II)$$

Для исключения p служит, как и в гидромеханике, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (III)$$

Материал предполагается несжимаемым согласно закону б), но в пределах нашей теории можно рассмотреть и более общий случай.

Формулы от (I) до (III) полностью совпадают с формулами для вязких жидкостей. Только там величина k является заданным коэффициентом вязкости, а у нас эта величина определяет силы реакции и может быть вычислена только, если известно само движение. А для этого нужно использовать то обстоятельство, что напряжения находятся на пределе текучести.

Если примем за границу упругой области сферу, определяемую уравнением (25), и подставим туда значения (14), то получим:

$$\begin{aligned}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) - 3(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) + \\ + 3(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 4k^2,\end{aligned}\quad (26)$$

так как из последней формы выражения (14) следует, что величины σ можно заменить величинами σ' .

Складывая же первые три из уравнений (II) и принимая во внимание (III), находим:

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0, \quad (27)$$

так что (26) можно привести к следующему виду:

$$\frac{4k^2}{3} = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 - (\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x). \quad (IV)$$

Подставив сюда значения напряжений из уравнений (II), получим искомое уравнение для определения k .

Уравнения от (I) до (IV) составляют полную систему уравнений движения для пластически деформируемых тел.

В качестве граничных условий можно задать компоненты скорости на поверхности, ограничивающей тело, или же величины напряжений на этой поверхности, или ее части.

В случае плоского движения наши формулы совпадают с формулами Сен-Венана.

Это объясняется тем, что в плоском случае разница между условиями пластичности (24) (шестиугольник) и (26) (круг) исчезает. Поскольку мы имеем тогда только два главных касательных напряжения τ_1, τ_2 и уравнение

$$\tau_1 + \tau_2 = 0, \quad (28)$$

то соотношение

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 \leq 2k^2$$

будет выражать то же, что и соотношения

$$|\tau_1| \leq k, \quad |\tau_2| \leq k.$$

Уравнения от (I) до (IV) можно написать в векторной форме. Обозначив через \bar{v} вектор скорости и через \bar{F} — вектор объемной силы, получим:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \text{grad } p + \nabla S', \quad (I')$$

$$S' = k\Lambda, \quad (II')$$

$$\text{div } \bar{v} = 0, \quad (III')$$

$$-(S')_2 = \frac{4K^2}{3}. \quad (IV')$$

Символ ∇ в (I') обозначает дифференцирование тензора (I). Индекс 2 в (IV') указывает на то, что от

тензора S' образуется второй из приведенных в п. I уравнений (8) ортогональных инвариантов.

Из (I')—(IV') легко исключить S' , и мы получаем:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \text{grad } p + \nabla (k\lambda), \quad (\text{a})$$

$$\text{div } \bar{v} = 0, \quad (\text{b})$$

$$k^2 = -\frac{4K^2}{3(\Lambda)^2}. \quad (\text{c})$$

Умножая (I') скалярно на \bar{v} и интегрируя по объему, после соответствующего преобразования находим, что диссипативная функция определяется формулой (21); этим доказывается, что наши формулы удовлетворяют закону в), высказанному в п. II.

Л. ПРАНДТЛЬ

О ТВЕРДОСТИ ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ И СОПРОТИВЛЕНИИ РЕЗАНИЮ *)

Стремясь дать лучшее представление с точки зрения механики о процессах, возникающих при вдавливании твердого тела в другое мягкое тело, как это имеет, например, место при испытании на твердость, автор получил решение для пластического равновесия, которое дает широко охватывающее объяснение этих процессов и, кроме того, может иметь весьма разнообразное применение.

Статья автора по этому вопросу была опубликована в другом журнале еще в 1920 г.^[11] За это время удалось заменить приведенный там метод доказательства другим, еще более простым и, несмотря на это, более общим методом. Так как этот журнал малодоступен для инженера, то здесь мы приведем подробные выкладки, не предполагая, что читатель знаком с работой ^[11].

I. Постановка задачи. Настоящее исследование ограничивается двухмерной (плоской) задачей, поскольку для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения.

Пластические деформации распространяются здесь только на области тела, близкие к точкам приложения сил; в удаленных точках деформации не переходят за предел упругости. Так как упругие деформации у большинства материалов чрезвычайно малы, а пластические деформации часто бывают значительно большими, то ради упрощения мы совершенно пренебрегаем

*) ZAMM, Bd. I, N. 1, S. 15—20 (1921). Перевод незначительно сокращен. Опущены приводимые в конце качественные соображения о влиянии упрочнения. (Прим. ред.)

ниже выкладок этим предположением необходимо воспользоваться. Что же касается связи касательных напряжений с нормальными, то здесь наши предположения (по крайней мере, для плоской задачи) являются настолько общими, насколько это возможно.

При таких предположениях картина внедрения штампа¹⁾ в бесконечное полупространство, ограниченное плоскостью, имеет изображенный на рис. 2 вид. AB изображает площадь давления. Треугольник ABC под действием высокого давления будет вдавливаться вниз, треугольники ADF и BEG будут выдвигаться наискось вверх под действием передаваемых на них со стороны секторов ACD и BCE напряжений, причем будут вести себя под действием напряжений, как тело, нагруженное простым давлением. (Давление параллельно плоской границе.) Правая половина графика изображает „линии тока“ пластического движения, левая половина изображает траектории напряжений. Задача сводится теперь к тому, чтобы построить решение уравнений пластического равновесия, которое осуществляло бы предполагаемое в секторах состояние. Получение такого решения выполнимо, и его вывод здесь приводится.

II. Формулировка задачи и общее решение. Сначала сформулируем более точно условия для пластического состояния. По Мору, если в осях координат $\sigma - \tau$ построить напряженные состояния во всех площадках, проходящих через данную точку, получится круг, центр которого лежит на оси σ . Пластическое состояние характеризуется при этом тем, что все круги напряжений касаются предельной кривой, которая задается зависимостью $\tau = \pm f(\sigma)$. Абсцисса и ордината точки касания круга с предельной кривой дают при этом значения σ и τ на плоскостях скольжения; обозначим их через σ' и τ' . Как видно из рис. 3, в каждой точке всегда имеется пара плоскостей скольжения,

¹⁾ В соответствии с ограничением „плоской задачей“ нужно себе представить штамп большой протяженности в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

соответствующих верхней и нижней точкам касания круга. Угол α между плоскостью скольжения и главной осью наибольшего сжимающего напряжения (или соответствующего наименьшего растягивающего напряжения) равняется при этом, как известно, половине угла, образованного соответствующим радиусом круга с осью σ .

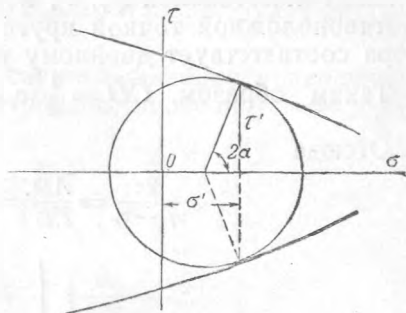


Рис. 3.

Особое решение, благодаря примыканию секторов к треугольникам, должно быть таким, что на каждом проведенном из заданной точки O радиусе (рис. 4) напряжения σ_r , σ_t и τ постоянны, т. е. в полярных координатах с началом в точке O эти напряжения будут функциями одного только угла φ . Условие равновесия напряжений для этого случая просто выводится из рис. 4. Уравнение равновесия в направлении радиуса выражается соотношением

$$r \frac{d\tau}{d\varphi} d\varphi + r\sigma_t d\varphi - r\sigma_r d\varphi = 0,$$

или

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \sigma_t - \sigma_r. \quad (1)$$

Условие равновесия моментов относительно точки O будет следующее:

$$r \frac{d\sigma_t}{d\varphi} d\varphi \frac{r}{2} + rd\varphi \cdot \tau \cdot r = 0$$

или

$$\frac{d\sigma_t}{d\varphi} = -2\tau. \quad (2)$$

Деля уравнения (1) и (2) одно на другое, получаем:

$$\frac{d\tau}{d\sigma_t} = -\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2\tau}. \quad (3)$$

Пусть точка A рис. 5 изображает напряжение, действующее на плоскостях, параллельных радиусу (σ_t, τ); тогда напряжение, действующее на плоскостях, параллельных касательной (σ_r, τ), изобразится диаметрально противоположной точкой круга B , так как дуга круга Мора соответствует двойному углу между площадками.

Таким образом, $\overline{CD} = \frac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_r)$ и $\overline{AD} = \tau$.

Отсюда

$$\frac{2\tau}{\sigma_t - \sigma_r} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \operatorname{tg} \beta.$$

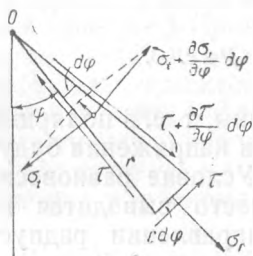


Рис. 4.

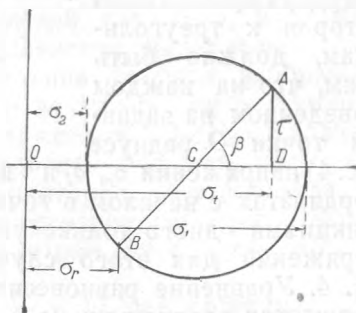


Рис. 5.

Следовательно, $\frac{d\tau}{d\sigma_t} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$; это означает, что определяемое уравнением (3) направление на плоскости Мора перпендикулярно к радиусу CA . Таким образом, интегрирование уравнения (3) дает изображенный на рис. 5 круг. Исследование соответствующего угла φ показывает, что здесь мы имеем дело с однородным напряженным состоянием, которое, очевидно, и должно иметь место при упомянутых выше условиях. Мы получаем одно нетривиальное решение, если будем двигаться не по кругу, а по огибающей кругов напряжений, т. е. по кривой Мора, что, очевидно, согласуется с уравнением (3). При этом решении, как легко усматривается, $\sigma_t = \sigma'_t$ и $\tau = \tau'$, т. е. радиальные плоскости становятся

плоскостями скольжения. Вторая система линий скольжения состоит из спиральных цилиндрических поверхностей, образующих с радиусами угол 2α . В предельном случае $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Это, следовательно, будут круговые цилиндры.

Для только что описанного решения уравнение (2) может быть проинтегрировано, поскольку $\tau = \pm f(\sigma_t)$. Имеем

$$d\varphi = \pm \frac{d\sigma_t}{2\tau}$$

и отсюда

$$\varphi = \mp \frac{1}{2} \int \frac{d\sigma_t}{f(\sigma_t)} + c. \quad (4)$$

Это решение действительно является искомым для секториальных областей. Мы можем рассматривать с точки зрения наших решений всю лежащую вокруг точки A область (рис. 2) как единое целое и получим тогда в плоскости Мора, при условии, что AF свободна от давлений, а AB подвергается вертикальному давлению, график, изображенный на рис. 6.

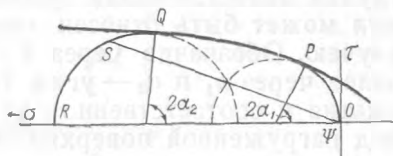


Рис. 6.

Первой дуге OP , начинающейся от нулевой точки, соответствует угол DAF , отрезку PQ предельной кривой — угол CAD и примыкающей к нему дуге QR с концом на оси σ — угол BAC .

Для анализа полученных результатов необходимо вывести формулы для главных напряжений. Эти последние легко получаются при помощи рис. 5. Имеем

$$\sigma_1 = \overline{OC} + \overline{CA}, \quad \sigma_2 = \overline{OC} - \overline{CA}.$$

Теперь $\overline{CA} = \frac{\tau}{\sin \beta}$; затем $\overline{OC} = \sigma_t - \frac{\tau}{\sin \beta}$.

В соответствии же с вышеприведенными соотношениями имеем

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = -\frac{d\tau}{d\sigma_t},$$

следовательно,

$$\frac{1}{\sin \beta} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{d\sigma_t}\right)^2}.$$

Таким образом для главных напряжений получаем

$$\sigma_1 = \sigma_t + \tau \left[-\frac{d\tau}{d\sigma_t} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{d\sigma_t}\right)^2} \right]. \quad (5)$$

III. Вывод формул для усеченного клина. Формулы, дающие решение для случая, приведенного на рис. 2, очевидно, могут быть использованы и для тела, имеющего форму усеченного клина. Поскольку этот случай является более общим, дальнейший вывод формул может быть отнесен именно к этому последнему случаю. Обозначив через ϑ половинный угол клина, далее через α_1 и α_2 — углы скольжения для простого сжатия и соответственно для напряженного состояния под нагруженной поверхностью, приходим к следующему:

1) при $\varphi = \alpha_1$ главное напряжение σ_1 должно обращаться в нуль, а главное напряжение σ_2 равняться сопротивлению сжатия, т. е. $\sigma_2 = -\sigma_d$;

2) при $\varphi = \alpha_2 + \vartheta$ (внешний угол треугольника) σ_2 будет равно искомой нагрузке усеченного клина и может быть обозначено через σ_3 .

Для проведения расчета требуется, если, например, предельная кривая Мора задана графически, решение в квадратурах; впрочем, для решения только что приведенной задачи можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Все зависимости становятся более простыми, когда предельная кривая заменяется прямой линией.

В практически важном случае, который почти осуществляется у пластических металлов, максимальное

касательное напряжение у предела текучести постоянно; таким образом предельная кривая будет горизонтальной прямой: $\tau = \pm k$.

Здесь, в силу уравнения (4), $\sigma_t = \mp 2k\varphi + c'$. Следовательно, при $\frac{d\tau}{d\sigma_t} = 0$, беря в уравнении для σ знак минус, получаем:

$$\sigma_2 = \sigma \pm \tau = k(\pm 1 - 2\varphi) + c'.$$

Угол скольжения будет постоянным $\alpha = \frac{\pi}{4}$; сопротивление на сжатие $\sigma_d = 2k$; главные напряжения, направленные под любым углом, получаются, принимая во внимание первое граничное условие, равными

$$\sigma_1 = k[-1 \pm 1 - 2(\varphi - \alpha)]. \quad (6)$$

В средней части клина ($\varphi = \alpha + \theta$) они, следовательно, будут равны:

$$\sigma_1 = -k(1 \mp 1 + 2\theta).$$

Таким образом сопротивление резанию будет

$$\sigma_s = \sigma_d(1 + \theta). \quad (7)$$

Также и тогда, когда уравнение наклонной прямой

$$\tau = \pm(k - \kappa\sigma_t)$$

принимается за уравнение предельной огибающей, вычисления проводятся легко.

Имеем $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\kappa} = \operatorname{tg} 2\alpha$, так что и здесь

$$\alpha = \operatorname{const}.$$

Далее из уравнения (3):

$$\varphi = \pm \frac{1}{2\kappa} \ln \tau + c.$$

Следовательно,

$$\tau = c' e^{\pm 2\kappa\varphi}$$

и

$$\sigma_t = \frac{1}{\kappa} (k - \tau).$$

Беря в вышеприведенных формулах знак плюс и, следовательно, полагая $\frac{d\tau}{d\sigma_t} = -\kappa$, получим для главных напряжений следующие выражения:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\kappa} [k - \tau (1 + \kappa^2 \mp \kappa \sqrt{1 + \kappa^2})].$$

Произведя пересчет граничных условий и полагая для упрощения

$$\frac{\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = k,$$

где k есть синус угла наклона δ — предельной прямой, после несложного расчета получаем:

$$\sigma_1 = \frac{k}{\kappa} \left(1 - \frac{1 \mp k}{1 - k} e^{2\kappa(\varphi - \alpha)} \right). \quad (8)$$

При $\sigma_d = \frac{k}{\kappa} \frac{2k}{1 - k}$ для $\varphi = \alpha + \vartheta$ имеем:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_d}{2k} [(1 + k) e^{2\kappa\vartheta} - (1 - k)]. \quad (9)$$

Вторая система плоскостей скольжения в этом случае пересекает плоскость чертежа по логарифмическим спиральям, образующим угол 2α с радиусом и, следовательно, угол δ с направлением, перпендикулярным к радиусу; отсюда ее уравнение будет иметь вид

$$r = \alpha e^{\mp \kappa\varphi}.$$

4. Пример. Числовые данные по расчету сопротивления вдавливанию плоскости $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ помещены в приводимой ниже таблице, где для углов наклона

пределной прямой от 0 до 40° даются значения $\frac{\sigma_s}{\sigma_d}$ (сопротивление резанию, сопротивление сжатию), а также величины отношения отрезков \overline{AF} и \overline{AB} (рис. 2).

Отношение $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ легко вычисляется. Имеем:

$$\overline{AF} = 2\overline{AD} \cos \alpha; \quad \overline{AD} = \overline{AC} e^{x\delta} \quad \text{и} \quad \overline{AB} = 2\overline{AC} \sin \alpha;$$

следовательно,

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = e^{x\delta} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (10)$$

Из таблицы видно, что с увеличением δ (уменьшением α) $\frac{\sigma_s}{\sigma_d}$ и $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ сильно увеличиваются. Большие значения δ могут иметь место в пластичных грунтах.

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПРИ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

δ	α	x	k	$\frac{\sigma_s}{\sigma_d}$	$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$
0°	45°	0,0000	0,0000	2,571	1,000
10°	40°	0,1763	0,1736	3,499	1,572
20°	35°	0,3640	0,3420	5,194	2,530
30°	30°	0,5773	0,5000	8,701	4,290
40°	25°	0,8391	0,6428	17,560	8,462

Г. ГЕНКИ

О НЕКОТОРЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СЛУЧАЯХ
РАВНОВЕСИЯ В ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ*)

В своей статье относительно сопротивления вдавлению пластических тел Прандтль (этот сборник, стр. 70) обратил внимание на группу задач, которая может быть положена в основу, важного в теоретическом и практическом отношении, развития механики твердых тел.

После первых работ Сен-Венана целый ряд исследователей занимался дальнейшим развитием теории пластичности [14]. Одна группа исследователей рассматривает при этом задачу как динамическую и устанавливает зависимость тензора напряжения от тензора скоростей деформации; другая группа, отказываясь от исследования самого процесса движения, рассматривает состояние уже наступившего равновесия и потому может, если это необходимо, принимать во внимание и действующие еще в пластическом состоянии упругие силы.

В дальнейшем делается единственное предположение о том, что течение наступает при определенном максимальном касательном напряжении. Предельной кривой Мора, введенной Прандтлем в теорию пластичности, мы здесь пользоваться не будем, ограничиваясь применением теории только к действительно пластичным металлам. Использование кривой Мора привело бы к очень трудным математическим выкладкам.

Следуя Хаару и Карману (этот сборник, стр. 41), мы будем различать полное пластическое состояние от неполного пластического состояния. Если обозначить через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ главные напряжения в какой-нибудь точке и через k — предельное касательное напряжение, то, как известно, максимальные касательные напряжения

*) ZAMM, Bd. 3, H. 4, S. 241—251 (1923).

будут равны, по своей абсолютной величине, разности каких-либо двух главных напряжений:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2k, |\sigma_1 - \sigma_3| \leq 2k, |\sigma_2 - \sigma_3| \leq 2k. \quad (1)$$

Если в соотношениях (1) имеют место три знака неравенства, то мы будем иметь упругое состояние обычной теории упругости. При одном знаке равенства и двух знаках неравенства получается неполное пластическое состояние. При двух знаках равенства и одном знаке неравенства имеем полное пластическое состояние. Все три знака равенства, конечно, никогда не могут иметь место. Каждому такому пластическому состоянию соответствует бóльшая или меньшая степень подвижности континуума.

Но к такому подразделению задач должно быть присоединено другое, практически также очень важное, а именно — разграничение статически определимых и статически неопределимых задач пластичности.

Задача является статически определимой, если три уравнения равновесия и условия пластичности (1) достаточны для определения тензора напряжений в каждой точке тела. Но статическая определимость, как будет показано, носит очень ограниченный характер и вообще имеет место только для вполне определенных нагрузок. Только особая практическая важность тех случаев, в которых распределение напряжений не зависит от деформаций, может оправдать введение понятия статической определимости в теорию пластичности.

В этом смысле можно считать существенным образом статически определимым плоское напряженное состояние пластического континуума, а также полное пластическое напряженное состояние при осевой симметрии для надлежащим образом выбранных граничных условий.

При уменьшении константы k статика пластического тела будет все больше и больше приближаться к гидростатике и перейдет в конце концов при $k=0$ в гидростатику.

Таким образом, в отношении напряженного состояния и степени подвижности отдельных частиц пласти-

ческий континуум находится между жидкостями и упругими или твердыми телами.

В настоящем рассмотрении мы ограничимся статически определенными случаями, чтобы иметь возможность исходить из минимального количества произвольных допущений.

I. Плоская задача. 1. Напряженное состояние и свойства поля линий скольжения. В плоском напряженном состоянии тензор напряжений имеет только три составляющих и изображается при помощи круга напряжений Мора. Из условия пластичности непосредственно имеем, что

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k, \quad (1)$$

т. е. пределу текучести при одноосном напряженном состоянии.

Как уже указано, пластическое состояние можно рассматривать как промежуточное между жидким и упругим состоянием.

Назовем $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ средним напряжением. На площадках, где действует это нормальное напряжение, касательное напряжение имеет постоянное значение k . Наиболее естественной системой координат для этой задачи является ортогональная криволинейная система, образованная линиями скольжения.

Система кривых, пересекающих эти линии под углом в 45° , будет состоять из траекторий главных напряжений. Такие системы всегда существуют только в плоской задаче и в осесимметричных задачах, а в общем случае пространственной задачи таких систем, конечно, нет. Но это ограничение несущественно, поскольку мы имеем возможность рассмотреть только эти задачи.

Если мы возьмем в плоскости xz такую криволинейную сетку из линий α и линий β , задав ее уравнениями

$$\varphi(x, z, \alpha) = 0, \quad \psi(x, z, \beta) = 0, \quad (2)$$

то эти два уравнения должны удовлетворять условию ортогональности, которое мы сейчас и получим для нашей

системы. Рассмотрим для этого (рис. 1) восьмиугольник, стороны которого являются касательными в точках A, B, C, D криволинейного прямоугольника, образованного линиями скольжения. Положим, что φ_1 есть угол между нормальными в точках α_1 и α_2 на кривой $\beta = \text{const}$, а φ_2 — угол между нормальными в точках β_1 и β_2 на кривой $\alpha = \text{const}$; мы можем тогда обойти многоугольник в определенном направлении, начиная из точки A , и должны будем при этом сделать поворот на угол 2π .

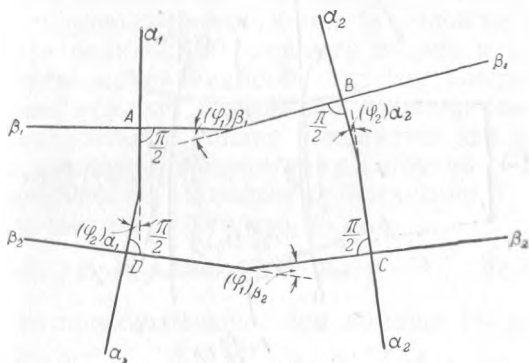


Рис. 1.

При выбранных обозначениях, пользуясь рис. 1, получаем:

$$-(\varphi_1)_{\beta_1} + \frac{\pi}{2} + (\varphi_2)_{\alpha_2} + \frac{\pi}{2} + (\varphi_1)_{\beta_2} + \frac{\pi}{2} - (\varphi_2)_{\alpha_1} + \frac{\pi}{2} = 2\pi,$$

т. е.

$$(\varphi_2)_{\alpha_2} - (\varphi_2)_{\alpha_1} + (\varphi_1)_{\beta_2} - (\varphi_1)_{\beta_1} = 0,$$

или при переходе к бесконечно малым углам:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta = 0. \quad (3)$$

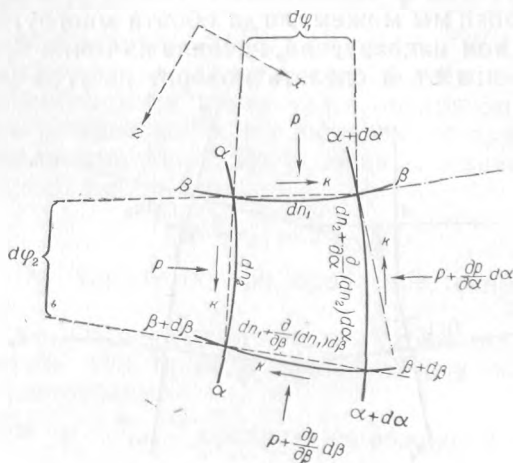
Мы и будем пользоваться условием ортогональности в такой форме. Так как мы будем проходить от одной кривой к другой по бесконечно малым, но постоянным, величинам $d\alpha$ и $d\beta$, то петли нашей сетки, рассматри-

ваемые с точки зрения обычной геометрии, не смогут быть одинаковыми.

Введем обозначения:

dn_1 — длина дуги в направлении увеличения α ,

dn_2 — длина дуги в направлении увеличения β .



Р и с. 2.

Тогда мы можем положить:

$$dn_1 = \frac{d\alpha}{h_1}, \quad dn_2 = \frac{d\beta}{h_2} \quad (4)$$

и получим длину дуги элемента в виде:

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = dn_1^2 + dn_2^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2}, \quad (4a)$$

где h_1 и h_2 обозначают два частных значения функций от координат α и β или от x и y .

На рис. 2 изображен криволинейный элемент dn_1 , dn_2 с действующими на него нормальными напряжениями p и постоянными касательными напряжениями k .

Определим углы $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$.

Пренебрегая малыми величинами высшего порядка, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{\partial dn_1}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dn_2} = h_2 \frac{\partial dn_1}{\partial \beta} = h_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) d\alpha, \\ d\varphi_2 &= \frac{\partial dn_2}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dn_1} = h_1 \frac{\partial dn_2}{\partial \alpha} = h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При составлении условий равновесия надо принимать во внимание, что вообще не все равно, как направить касательное напряжение. Это зависит от того, что здесь не имеется однозначности, как в обычной теории упругости, хотя нелинейный характер задачи и скрывается применением криволинейной системы координат. Для составления условий равновесия воспользуемся рис. 2. Каждое касательное усилие изменяется два раза: один раз из-за изменения направления и другой — из-за изменения поверхности, к которой оно отнесено. В направлении увеличения α получаем:

$$- \frac{\partial}{\partial \alpha} (p dn_2) d\alpha + p dn_1 d\varphi_2 - k dn_2 d\varphi_1 - k \frac{\partial}{\partial \beta} (dn_1) d\beta = 0,$$

или, после преобразования при помощи (4) и (5),

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{p}{h_2} \right) - p \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) + 2k \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right\} d\alpha d\beta = 0,$$

откуда после дифференцирования и добавления уравнения равновесия в другом направлении находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + 2kh_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \beta} + 2kh_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Умножая первое уравнение на $d\alpha$ и второе на $d\beta$ и пользуясь зависимостями (4) и (5), получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} d\alpha + 2kd\varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \beta} d\beta + 2kd\varphi_2 = 0. \quad (6a)$$

Эти уравнения можно непосредственно проинтегрировать вдоль кривой β или соответственно вдоль кривой α ; тогда получаем:

$$p_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} = -2k \{ \varphi_1 \}^{\alpha_2}, \quad p_{\beta_2} - p_{\beta_1} = -2k \{ \alpha_2 \}_{\beta_1}^{\beta_2}. \quad (6b)$$

При движении вдоль линии скольжения среднее сжимающее напряжение будет уменьшаться на величину, равную пределу текучести, умноженному на величину угла, выраженную в дуговых единицах, на который повернулась касательная к той линии скольжения, вдоль которой мы двигаемся.

Уравнения (6) определяют также и закон построения нашей криволинейной сетки.

Продифференцировав первое по β , а второе по α и вычтя одно из другого, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ h_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right\}.$$

Отсюда, умножив на $d\alpha d\beta$ и приняв во внимание зависимости (4) и (5), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha.$$

Это равенство совместно с условием ортогональности (3) только тогда, когда:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta = 0. \quad (7)$$

Отсюда после интегрирования получаем:

$$(\varphi_2)_{\alpha_2} - (\varphi_1)_{\alpha_1} = 0, \quad (\varphi_2)_{\beta_2} - (\varphi_1)_{\beta_1} = 0. \quad (7a)$$

Сетка кривых α и кривых β обладает замечательным свойством, заключающимся в том, что угол между касательными (или нормальными) к двум любым кривым одного и того же семейства, пересекающимся с одной и той же кривой второго семейства, не меняется независимо от того, будет ли расстояние между кривыми бесконечно мало или конечно.

Эта теорема не дает нам еще возможности прямо сказать, из каких кривых состоят наши линии скольжения. Для этого мы должны вернуться к равенствам (7) и ввести радиусы кривизны кривых β , R_1 и кривых α , R_2 . Тогда будем иметь:

$$d\varphi_1 = \frac{dn_1}{R_1} = \frac{d\alpha}{h_1 R_1}; \quad d\varphi_2 = \frac{dn_2}{R_2} = \frac{d\beta}{h_2 R_2},$$

и далее:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(d\varphi_2) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(d\varphi_1) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2 R_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1 R_1} \right) = 0.$$

Отсюда, дифференцируя и принимая во внимание равенства (4) и (5), получим:

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{d\varphi_2}{dn_2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi_1}{dn_1} = 0;$$

простое же преобразование дает:

$$\frac{\partial R_1}{\partial n_2} = 1, \quad \frac{\partial R_2}{\partial n_1} = 1. \quad (7b)$$

Но оба эти равенства удовлетворяются только тогда, когда система линий скольжения является системой прямоугольных или полярных координат. Мы будем, следовательно, всегда иметь семейство равноотстоящих кривых, которое будет состоять из связанных между собою кусков полярных и прямоугольных координат*).

Раз две линии скольжения в одной точке находятся на равном расстоянии, то в силу равенства (7а) они должны находиться на равном расстоянии во всех точках. Мы поэтому в состоянии решить теперь все статически определяемые плоские задачи теории пластичности.

2. Применение к некоторым примерам. Первый пример. Полушпатель с призматической поверхностью вдавливания. Мы ставили себе задачу найти распределение давления на сторонах AC и BD бесконечно твердого призматического тела с периметром поперечного сечения $ACDB$, который вдавливается в пластическую массу, причем трение не принимается во внимание. Прежде всего находим, что давление вдоль BD и AC постоянно и равняется:

$$\begin{aligned} p_s &= k + 2k \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + k = \\ &= 2k \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + 1 \right\} \quad [\text{ср. равенство (6b)}], \end{aligned}$$

*) Это утверждение Генки неверно. Класс возможных семейств линий скольжения гораздо шире, как показал Прандтль. (Этот сборник, стр. 70). (Прим. ред.)

причем p_s обозначает нормальное напряжение, а не среднее напряжение, так что $p_s = p \pm k$ у края.

Вдоль же CD мы получаем различные величины давления в зависимости от того, будем ли мы ограничивать пластическую область кривой $МOM$ или $М'OM'$.

В первом случае будет:

$$p_s = 2k \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right],$$

или

$$p_s = 2k [1 + \pi];$$

во втором случае: $p_s = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$ вдоль CD .

Отсюда мы видим, что невозможно найти для вдавливаемого тела однозначное распределение давления. Наоборот, задача сразу же будет однозначной, если принять, что затрачиваемая при вдавливании работа стремится к некоторому минимуму. Так как величины всех давлений, возникающих под вдавливаемым телом, должны, конечно, иметь один и тот же знак, то отсюда можно сделать заключение, что истинным будет то распределение давления, при котором удельное давление в каждой точке давящего тела достигает наименьшего значения. При таких условиях задача пластичности может быть решена однозначно. Что касается границы пластической области, то таковая должна, собственно говоря, начинаться из точки O . Поскольку же, как это имеет место при прямолинейности линии COD , угол $O'OO''$ будет прямым и притом только в этом случае, то в квадрате $O'O''O'''$ также будет однородное напряженное состояние, удовлетворяющее условию пластичности, и мы получим, следовательно, границу упругой области, несколько выдвинутую вперед ($М''OM''$).

Второй пример. Полу плоскость, находящаяся под действием нагрузки, большей или меньшей той, которая отвечает условию пластичности.

Если нагрузка не достигает тех значений, которые вычислены по формуле (6b), но при этом так велика, что появляется пластическая деформация, то под давящей

поверхностью образуется упругая подушка, в которой касательное напряжение падает ниже величины k и для которой, следовательно, действительны уравнения упругости. В этом случае речь идет о ясно выраженной статически неопределимой задаче, которая не может быть решена без учета деформации и в связи с этим выходит за пределы наших исследований.

Если сила давления штампа на полуплоскость больше, чем полученное из равенств (6b) значение $p_s = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$, то в этом случае давящее тело будет оседать, и сжимающее напряжение может при этом в крайнем случае достичь величины $p_s = 2k(1 + \pi) = 2k \cdot 4,14$ путем увеличения угла подъема линий скольжения.

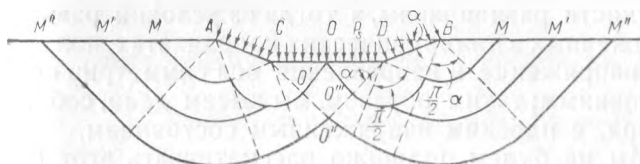


Рис. 3.

Если давление будет больше, то тогда полуплоскость должна разделиться на две части, так как равновесие уже не будет больше возможно.

Нельзя также не отметить, что при изменении на рис. 3 направления величины k на обратное получается обратная картина, а именно — выпучивание пластических масс, выдавливаемых из сосудов с узкими щелями.

Величина силы давления, под которой должна находиться такая масса, чтобы могло получиться выпучивание, должна, следовательно, равняться примерно четырехкратной величине предела текучести выдавливаемого материала.

II. Осесимметричная задача при полном пластическом состоянии. 1. Возможные полные пластические состояния напряжений. Задача

с осевой симметрией будет только тогда статически определяемой, когда имеется полное пластическое состояние. Нельзя, конечно, заранее предположить, что такое состояние возникнет, а можно только найти и дать те условия, при которых вообще наступает полное пластическое состояние. Возможны только три случая: или оба главных напряжения, действующие в меридианной плоскости, одинаковы, а напряжение, действующее перпендикулярно меридианной плоскости, равно одному из этих двух главных напряжений, умноженному на $2k$, или же кольцевое напряжение равно одному главному напряжению, действующему в меридианной плоскости, а другое главное напряжение на $2k$ больше или меньше*).

Первый случай решается легко. Благодаря равенству главных напряжений все направления в меридианной плоскости равноправны, а тогда из условий равновесия, выраженных в цилиндрических координатах, получается, что напряжение в направлении оси симметрии остается постоянным; таким образом, мы имеем дело, собственно говоря, с плоским напряженным состоянием.

Мы не будем подробно рассматривать этот случай, который уже разобран Сен-Венаном, и обратимся к двум остальным случаям.

Пусть главные напряжения, действующие в меридианной плоскости, равны $p+k$ и $p-k$. Пусть напряжение, перпендикулярное меридианной плоскости, сначала равняется $p+k$. Такое напряжение материала мы получаем при выдавливании пластического материала из сосуда через круглое отверстие.

За координатные линии берем линии скольжения, проходящие в меридианной плоскости, и круги с центром на оси вращения, пересекающие меридианную плоскость под прямым углом.

Функции α и β выразятся в цилиндрических координатах так:

$$\varphi(r, z, \alpha) = 0, \quad \varphi(r, z, \beta) = 0. \quad (8)$$

*) Новое обоснование гипотезы полной пластичности в работе А. Ю. Ишлинского [7]. (Прим. ред.)

К этому надо добавить условие ортогональности в форме (3).

Элемент дуги выразится здесь так:

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + r^2 d\vartheta^2, \quad (9)$$

где $d\vartheta$ бесконечно малый угол между двумя меридианными плоскостями, а

$$dn_1 = \frac{d\alpha}{h_1} \text{ и } dn_2 = \frac{d\beta}{h_2}, \quad (9a)$$

как и раньше.

Напишем опять, пользуясь рис. 4, условия равновесия в координатах α и β .

Для получения равновесия в направлении возрастания α требуется условие:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial \alpha} (prdn_2) d\alpha d\vartheta + prd\vartheta dn_1 d\varphi_2 + krd\vartheta dn_2 d\varphi_1 + \\ & + k \frac{\partial (rdn_1)}{\partial \beta} d\beta d\vartheta + (p+k) dn_1 dn_2 d\vartheta \frac{\partial}{\partial \alpha} h_1 = 0, \end{aligned}$$

или пользуясь зависимостями (4) и (5):

$$\begin{aligned} & \left\{ - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{pr}{h_2} \right) + pr \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) + kr \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) + k \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r}{h_1} \right) + \right. \\ & \left. + (p+k) \frac{1}{h_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right\} d\alpha dp d\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Производя дифференцирование и сделав упрощения, а также добавляя условие равновесия для другого направления, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{r}{h_2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + 2kr \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) + \frac{k}{h_1} \frac{\partial r}{\partial \beta} + \frac{k}{h_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0 \\ & - \frac{r}{h_1} \frac{\partial p}{\partial \beta} - 2kr \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) + \frac{k}{h_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{k}{h_1} \frac{\partial r}{\partial \beta} = 0 \end{aligned} \right\},$$

или в другом виде:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial \alpha} = 2k \left\{ h_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{h_2}{rh_1} \frac{\partial r}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right\} \\ & \frac{\partial p}{\partial \beta} = 2k \left\{ h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{h_1}{rh_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \beta} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Умножив первое уравнение на $d\alpha$, второе на $d\beta$, приняв во внимание зависимости (4) и (5) и подставив вместо:

$$\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial r}{\partial \beta} d\alpha — \text{выражение } \frac{\partial r}{\partial n_2} dn_1,$$

$$\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\beta — \text{выражение } \frac{\partial r}{\partial n_1} dn_2,$$

получим из уравнений (10) следующее:

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} d\alpha = 2k \left\{ d\varphi_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial n_2} dn_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha \right] \right\},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} d\beta = 2k \left\{ d\varphi_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial n_1} dn_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \beta} d\beta \right] \right\}.$$

Отсюда, интегрируя вдоль кривых $\beta = \text{const}$, или соответственно $\alpha = \text{const}$, находим:

$$\left. \begin{aligned} p_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} &= 2k \left\{ (\varphi_1)_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \frac{1}{2} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_2} dn_1 + \ln \left(\frac{r_{\alpha_2}}{r_{\alpha_1}} \right) \right] \right\} \\ p_{\beta_2} - p_{\beta_1} &= 2k \left\{ (\varphi_2)_{\beta_1}^{\beta_2} + \frac{1}{2} \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_1} dn_2 + \ln \left(\frac{r_{\beta_2}}{r_{\beta_1}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\} (10a)$$

На рис. 4 легко находим зависимости:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_2} dn_1 = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{r},$$

где dz — приращение координаты z вдоль кривой β ;

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_1} dn_2 = + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{dz}{r}, \quad (10b)$$

где dz — приращение координаты z вдоль кривой α , и получаем:

$$\left. \begin{aligned} p_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} &= 2k \left\{ (\varphi_1)_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{r_{\alpha_2}}{r_{\alpha_1}} \right) - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{r} \right] \right\}, \\ p_{\beta_2} - p_{\beta_1} &= 2k \left\{ (\varphi_2)_{\beta_1}^{\beta_2} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{r_{\beta_2}}{r_{\beta_1}} \right) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{dz}{r} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Если бы мы взяли в условиях равновесия для k другой знак, то тогда при отсутствии касательных напряжений на поверхности осевое напряжение стало бы бесконечно велико. Конечно, и такой случай возможен, если только при этом полное давление остается конечным. Но полное давление будет при этом больше, чем при взятом нами направлении, почему мы и должны исключить эту возможность.

До перехода к дальнейшему рассмотрению мы должны решить третий случай, в котором напряжение, направленное перпендикулярно к меридианной плоскости, равняется $p - k$. Это имеет место, когда цилиндрический штамп вдавливается в полуплоскость. Благодаря своей аналогии с процессом, имеющим место при испытании на вдавливание шариком по Бринеллю или при испытании на вдавливание конусом по Людвигу, этот случай имеет особенно важное значение.

Ясно, что здесь мы должны изменять знак величины k на рис. 4 на обратный, так как материал, находящийся под давящим телом, будет отходить от оси. Для

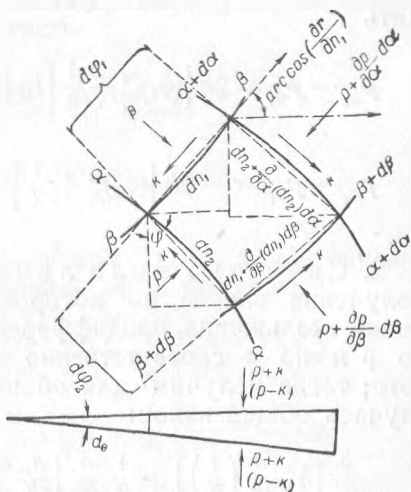


Рис. 4.

получения равновесия в направлении возрастающего α требуется, чтобы

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{pr}{h_2} \right) + pr \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) - kr \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) - k \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r}{h_1} \right) + (p - k) \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0,$$

или

$$-\frac{r}{h_2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} - 2kr \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_2} \right) - \frac{k}{h_1} \frac{\partial r}{\partial \beta} - \frac{k}{h_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0.$$

Здесь сразу можно видеть, в чем заключается разница с прежними формулами, а потому можно положить

$$\left. \begin{aligned} p_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} &= 2k \left\{ (\varphi_1)_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{r_{\alpha_2}}{r_{\alpha_1}} \right) - \int_{\sigma_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{r} \right] \right\}, \\ p_{\beta_2} - p_{\beta_1} &= -2k \left\{ (\varphi_2)_{\beta_1}^{\beta_2} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{r_{\beta_2}}{r_{\beta_1}} \right) - \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{dz}{r} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (12)$$

2. Свойства поля линий скольжения. Для получения закона, по которому определяется форма линий скольжения, продифференцируем выражения (10) по β и по α соответственно и вычтем одно из другого; тогда получим для обоих ранее рассмотренных случаев общий закон:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ h_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{h_2}{rh_1} \frac{\partial r}{\partial \beta} \right\} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{h_1}{rh_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right\}.$$

Отсюда, после умножения и преобразования при помощи равенств (4) и (5), как и раньше, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta - \frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_1} dn_2 \right) d\alpha - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_2} dn_1 \right) d\beta \right\}. \quad (13)$$

Из уравнения же (3) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha = 0,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_1} dn_2 \right) d\alpha - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_2} dn_1 \right) d\beta \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_1} dn_2 \right) d\beta - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_2} dn_1 \right) d\alpha \right\}. \end{aligned} \right\} (13a)$$

Введем теперь радиусы кривизны сетки линий скольжения R_1 и R_2 (R_1 — кривизна кривых β , R_2 — кривизна кривых α); тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{d\varphi_1}{dn_1}, \quad \text{или} \quad d\varphi_1 = \frac{1}{h_1 R_1} d\alpha, \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{d\varphi_2}{dn_2}, \quad \text{или} \quad d\varphi_2 = \frac{1}{h_2 R_2} d\beta. \end{aligned}$$

Из равенства (13a) мы можем опять взять справа и слева $d\alpha$, или соответственно $d\beta$, и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1 R_1} \right) d\alpha &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_1} \frac{1}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_2} \frac{1}{h_1} \right) \right\} d\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2 R_2} \right) d\beta &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_2} \frac{1}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n_1} \frac{1}{h_2} \right) \right\} d\beta. \end{aligned}$$

Чтобы выразить все через радиусы кривизны и производные по dn_1 и dn_2 , нужны значительные преобразования.

Если выполнить дифференцирование только в левой части, эти выражения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial R_1}{\partial n_2} + 1 &= R_1^2 \frac{h_1 h_2}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_1} \right] - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial \ln r}{\partial n_2} \right] \right\}, \\ -\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + 1 &= R_2^2 \frac{h_1 h_2}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial \ln r}{\partial n_2} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Преобразуя аналогичным образом выражения, стоящие в правой части равенства, получим, наконец, следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial R_1}{\partial n_2} + 1 &= \frac{R_1^2}{4} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_1^2} - \frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_2^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_1} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial \ln r}{\partial n_2} \right], \\ -\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + 1 &= \frac{R_2^2}{4} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_2^2} - \frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \ln r}{\partial n_2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial \ln r}{\partial n_1} \right]. \end{aligned} \right\} (14)$$

Вводя угол φ , измеряемый от положительного направления оси z против часовой стрелки, мы сможем еще дальше преобразовать равенства (14).

Из рис. 4 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_1^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n_1} = \frac{\cos \varphi}{r}, & \frac{\partial \ln r}{\partial n_2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n_2} = \frac{\sin \varphi}{r}; \\ \frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_1^2} &= \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\cos \varphi}{r} \right) = -\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n_1} = \\ &= -\left\{ \frac{\sin \varphi}{r R_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \right\}, \\ \frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_2^2} &= \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{\sin \varphi}{r} \right) = \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} - \frac{\sin \varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n_2} = \\ &= -\left\{ \frac{\cos \varphi}{r R_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \right\}, \end{aligned} \right\}$$

а равенства (14) дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial n_2} &= 1 - \frac{\cos \varphi}{2} \left(\frac{R_1}{r} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{\sin \varphi}{2} \left(\frac{R_1}{r} \right) + \frac{\cos 2\varphi}{4} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2, \\ \frac{\partial R_2}{\partial n_1} &= 1 + \frac{\cos \varphi}{2} \left(\frac{R_2}{r} \right) - \frac{\sin \varphi}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{R_2}{r} \right) - \frac{\cos 2\varphi}{4} \left(\frac{R_2}{r} \right)^2. \end{aligned} \right\} (14a)$$

Так как R_1 и R_2 могут принять иногда очень большие значения, то напомним эти дифференциальные уравнения в несколько иной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{1}{R_1} \right) &= -\frac{1}{R_1^2} + \frac{\cos \varphi}{2R_2 r} - \frac{\sin \varphi}{2R_1 r} - \frac{\cos 2\varphi}{4r^2}, \\ \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{1}{R_2} \right) &= -\frac{1}{R_2^2} - \frac{\cos \varphi}{2R_2 r} + \frac{\sin \varphi}{2R_1 r} + \frac{\cos 2\varphi}{4r^2}. \end{aligned} \right\} (14b)$$

Из уравнений, взятых в такой форме, мы сразу получаем замечательный вывод: возможна прямолинейная сетка линий скольжения, состоящая из прямых, наклонных под углом 45° к оси z .

В этом случае ($\varphi = 45^\circ$) уравнения будут удовлетворяться при

$$R_1 = R_2 = \infty.$$

При всяком другом угле наклона прямолинейный характер линии скольжения невозможен.

При $r = \infty$, конечно, получается уравнение (7b) для плоской задачи.

3. Отдельные примеры. а) Очень простое решение уравнения (14) получается для случая, изображенного на рис. 5, в котором рассматривается очень толстая, ограниченная сверху труба, находящаяся под действием внутреннего давления. В этом случае граничные условия определяют как раз прямые линии скольжения.

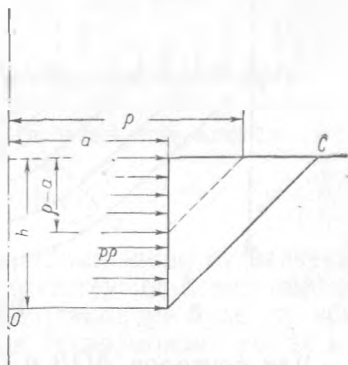


Рис. 5.

Так как линии скольжения не имеют здесь никакого подъема и давление должно равняться $p_{\alpha_2} = -k$, то в этом случае из равенств (12) при

$$p_r = p_{z_1} + k \quad \text{и} \quad dz = -dr$$

получаем:

$$p_{z_1} = 2k \left\{ \frac{1}{2} \left[\ln \frac{a+h}{a} + \int_a^{a+h} \frac{dr}{r} \right] \right\} + k,$$

или

$$p_r = 2k \left[1 + \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) \right],$$

где a — внутренний радиус трубы, h — толщина стенки.

В особом случае, при $a = h$, имеем:

$$p_p = 2k \cdot 1,693.$$

б) Линии скольжения при вдавливании жесткого штампа в полупространство (рис. 6).

В замкнутой форме уравнения (14) не поддаются решению вследствие их нелинейного характера. Все же можно получить для данного случая путем сравнительно простых вычислений представление о форме линий скольжения.

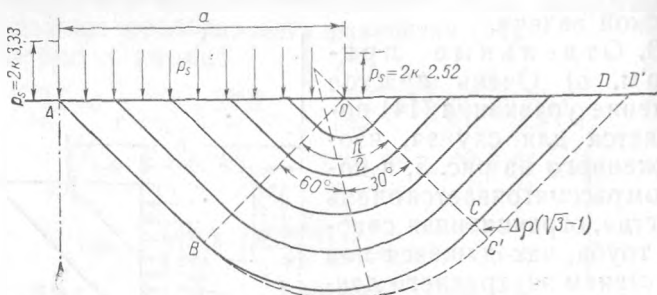


Рис. 6.

Для секторов AOB и COD мы опять получаем прямолинейную форму линий скольжения. Следовательно, линии скольжения, ограничивающие средний сектор, должны во всяком случае быть прямыми, значит на них будет $R_2 = \infty$.

Из уравнения (14а) тогда получаем:

$$\frac{\partial R_1}{\partial n_2} = 1 + \frac{\sin \varphi}{2} \cdot \frac{R_1}{r}.$$

Поскольку мы можем положить $dr = dn_2 \sin \varphi$, это уравнение может быть легко проинтегрировано и даст при граничном условии: $r = a$, $z = 0$, где должно быть $R_1 = 0$, следующее значение для R_1 :

$$R_1 = \frac{2r}{\sin \varphi} \left[1 - \sqrt{\frac{a}{r}} \right];$$

отсюда следует, что при $\varphi = -45^\circ$,

$$R_1 = 2\sqrt{2} \cdot r \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} - 1 \right\},$$

при $\varphi = +45^\circ$

$$R_1 = 2\sqrt{2} \cdot r \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a}{r}} \right\}.$$

Обозначив через ρ радиус-вектор вдоль OB , измеренный от точки O , можно, пренебрегая малыми величинами, взять более высокий порядок для r :

$$R_1 = \rho \left\{ 1 - \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2}\rho}{a} \right\} = \rho - \Delta\rho, \quad \text{при } \varphi = -45^\circ,$$

$$R_1 = \rho \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2}\rho}{a} \right\} = \rho + \Delta\rho, \quad \text{при } \varphi = +45^\circ.$$

В самом неблагоприятном случае получается

$$\frac{\sqrt{2}\rho}{a} = 1.$$

В этом случае получается отклонение от значений радиусов кривизны для соответствующей плоской задачи в $\pm 12,5\%$, и совершенно такой же будет ошибка для угла между $\pm 45^\circ$, в чем легко можно убедиться простым расчетом. Поэтому мы приблизительно изображаем дугу BC в виде двух круговых дуг с радиусами:

$$\text{слева: } R_1 = \frac{7}{8} \overline{OB}, \quad \text{справа: } R_1 = \frac{9}{8} \overline{OB}.$$

В качестве границы полной пластической области мы должны рассматривать линию скольжения $ABCD$. Изображенная на рис. 6 пунктирная линия $ABC'D'$ обозначает соответствующую линию скольжения в плоской задаче. В точке D $p - k = 0$, т. е. и кольцевое напряжение $p - k$ здесь исчезает. В начинающейся же у точки D упругой области кольцевое напряжение может быть только растягивающим напряжением.

Отсюда мы также видим, что в совершенно грубом приближении мы можем и для задачи с осевой симме-

трией принять линии скольжения такими, какие соответствуют плоской задаче*).

Для определения удельного давления, оказываемого вдавливаемым телом на граничную поверхность в вертикальном направлении, можно воспользоваться следующим получающимся из равенства (12) выражением:

$$p_s = 2k \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{r_{\alpha_2}}{r_{\alpha_1}} \right) - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{r} \right] \right\}. \quad (15)$$

Для максимального давления мы должны взять интеграл $\int \frac{dz}{r}$ в пределах от A до D и тогда получим:

$$\int_A^D \frac{dz}{r} = \int_A^B \frac{dz}{r} + \int_B^C \frac{dz}{r} + \int_C^D \frac{dz}{r}.$$

После простого интегрирования будем иметь:

$$\int_A^B \frac{dz}{r} = \ln \frac{r_B}{r_A}, \quad \text{так как } dr = dz;$$

$$\int_C^D \frac{dz}{r} = -\ln \frac{r_D}{r_C}, \quad \text{так как } dr = -dz \text{ и } \int_B^C \frac{dz}{r} = 0,09.$$

Следовательно,

$$p_s = 2k \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{r_D^2}{r_B r_C} - 0,090 \right] \right\};$$

$$p_s = 2k \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} + 0,76 \right\} = 2k \cdot 3,33.$$

Среднее давление будет $p_m = 2k \cdot 2,82$. При испытании на вдавливание шариком предел текучести

*) Задача о вдавливании жесткого сферического штампа в пластическое полупространство в предположении полной пластичности решена методом характеристик А. Ю. Ишлинским [8]. С целью проверки утверждения Генки о возможности приближенного решения осесимметричной задачи при помощи сетки линий скольжения, получающихся для соответствующей плоской задачи, В. В. Пучков произвел вычисления по этому методу для сферического штампа и получил хорошее совпадение с решением Ишлинского. (Прим. ред.)

получился бы равным 0,22 от среднего давления. По нашим расчетам предел текучести получается равным 0,35 от среднего давления.

Совпадение же с данными испытаний на вдавливание шариком мы можем ожидать только тогда, если мы возьмем поверхность вдавливания с радиусом AO такой, какой она становится после наступившего пластического равновесия. Мы должны, следовательно, сначала решить уравнения (14а) и (14b), а также уравнения (12) для различных глубин вдавливания шарика. Тогда только можно будет произвести сравнение с экспериментальными данными *).

Если положить, что вдавливаемый штамп ограничен поверхностью конуса, то из равенства (15) можно видеть, что давление под острием становится логарифмически бесконечно большим. Кроме того, мы замечаем, что часть сектора OBC от $\varphi = -45^\circ$ до $\varphi = 0$ все больше и больше исчезает, благодаря чему интеграл $\int \frac{dz}{r}$ меняет свой знак и дает положительную величину для внешнего сжимающего усилия.

Отношение величин предела текучести и среднего давления (отнесенного к проекции поверхности вдавливания) не может, следовательно, равняться постоянной, а зависит от глубины вдавливания и от формы вдавливаемого тела.

Мы смогли бы определить на основании уравнений (12) и (14) для всех глубин вдавливания и для различных форм поверхностей, по крайней мере приближенно, отношение величины предела текучести к величине среднего давления и тогда сравнить эти данные вычислений с результатами испытаний.

Путем такого сравнения можно было бы выявить влияние упрочнения, которое пока еще не поддается теоретической обработке.

*) А. Ю. Ишлинский в упомянутой работе получил $\sigma_s = 0,352 H_B$ для плоского штампа и $\sigma_s = 0,383 H_B$ для сферического штампа. (Числом Бринелля H_B называется отношение силы, действующей на штамп, к поверхности отпечатка.) (Прим. ред.)

Л. ПРАНДТЛЬ

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ГЕНКИ К РАВНОВЕСИЮ
ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ *)

В своей статье, озаглавленной „О некоторых статически определяемых случаях равновесия в пластических телах“ (этот сборник, стр. 80), Г. Генки вывел целую группу теорем относительно свойств семейств линий скольжения пластических тел, которые должны иметь очень большое значение при решении различных примеров. Для самого простого случая плоской задачи о равновесии идеально пластического тела эти теоремы могут быть использованы (в результате лишь незначительного развития самой идеи) для графического построения большого числа решений, как это будет показано в дальнейшем. Вопрос о том, можно ли использовать аналогичным образом соответствующие теоремы для осесимметричной задачи, мы оставляем пока в стороне, но это рассмотрение было бы очень желательным, поскольку именно случай осевой симметрии имеет значение для техники.

Теоремы, на которые мы будем здесь ссылаться, сформулированы несколько иначе, чем у Генки, а именно: в плоской задаче для идеально-пластического тела линии скольжения образуют два семейства кривых, пересекающихся под прямыми углами и обладающих следующим особым свойством: касательные к двум кривым одного семейства в точках пересечения их с любой кривой второго семейства образуют постоянный угол.

Принимая обе кривые первого семейства бесконечно близкими друг к другу, получим некоторую зависимость между радиусами кривизны. Будем называть кривыми α и кривыми β семейства $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$. Обозначим радиус кривизны одной из кривых α через

*) ZAMM, Bd. 3, № 6, S. 401—406 (1923).

R_α , радиус кривизны одной из кривых β через R_β , а длины дуг кривой α и кривой β — соответственно через S_α и S_β . Тогда получим

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial S_\beta} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial S_\alpha} = 1. \quad (1)$$

Из этих зависимостей Генки мы сразу получаем в результате интегрирования

$$R_\alpha = S_\beta + f_1(\beta) \quad \text{и} \quad R_\beta = S_\alpha + f_2(\alpha). \quad (2)$$

Генки показывает (этот сборник, стр. 87), что уравнения, выражающие его теоремы, удовлетворяются только тогда, когда система линий скольжения представляет собою систему прямоугольных или полярных координат. Разнообразие семейств кривых, удовлетворяющих вышеприведенным теоремам, является, к счастью, гораздо более широким.

Особенно простой пример — это случай толстостенной трубы с внутренним или внешним давлением. Здесь линии главных напряжений представляют собою круги и радиусы, а поэтому линии скольжения являются логарифмическими спиралями с углом подъема в 45° . Уравнения (1) и (2) при этом действительно удовлетворяются, так как (это легко вычислить) у этой спирали радиус кривизны как раз равняется длине дуги, отсчитываемой от центра. Следующий пример, в котором линии скольжения состоят из двух семейств обычных взаимно пересекающихся циклоид, будет приведен ниже.

Общее решение для нашей системы линий скольжения получим, давая обеим функциям $f_1(\beta)$ и $f_2(\alpha)$ любые значения. Благодаря гиперболическому характеру положенного в основу дифференциального уравнения линии скольжения являются характеристиками ¹⁾ дифференциального уравнения для функции напря-

¹⁾ Мизес обратил наше внимание на то, что мы слово „характеристика“ использовали в отклоняющемся от обычного смысле. Мы под этим подразумеваем всякую линию, вдоль которой решение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению, может быть составлено не аналитическим путем.

жения Эри*). Функции $f_1(\beta)$ и $f_2(\alpha)$ могут даже иметь точки разрыва. С физической точки зрения от обеих функций только требуется, чтобы существовали интегралы

$$\int \frac{dS_\alpha}{R_\alpha} \quad \text{и} \quad \int \frac{dS_\beta}{R_\beta},$$

так как они являются углами, которые образуют касательные, проведенные в начале и конце отрезка дуги. Относительно знака радиусов кривизны надо отметить, что он всегда должен браться таким, чтобы отвечать случаю концентрических кругов, а не таким, какой имел бы место при концентрических гиперболах. Для геометрического изображения будем сначала одну кривую из α -семейства считать заданной и для простоты предположим, что она не имеет точки перегиба и, за исключением конечного числа точек, имеет всюду отличный от нуля радиус кривизны. Длины дуг кривых β можно измерять, начиная от этой исходной кривой; тогда на ней всюду будет $S_\beta = 0$ и, следовательно, согласно уравнению (2), $f_1(\beta) = R_\alpha$ — заданной величине. Если, кроме того, для какой-нибудь точки заданной кривой известен радиус кривизны R_β пересекающейся с ней кривой β , т. е. соответствующее значение функции $f_2(\alpha)$, то из уравнения (2) получается значение R_β для всех точек заданной кривой α .

Равенство (2) геометрически означает, что в каждой точке заданной кривой радиус пересекающей ее кривой равняется длине дуги заданной кривой, вычисленной от данной на ней точки. Или, иначе говоря: центры кривизны пересекающихся кривых лежат на эвольвенте, которая проводится из заданной точки к заданной кривой. Вследствие прямоугольности сетки каждый центр кривизны будет, конечно, лежать на касательной, которая касается заданной кривой в точке пересечения кривых (см. рис. 1: AB — заданная кривая, A — заданная точка, AC — эвольвента, BC — радиус кривизны в точке B пересекаемого семейства).

*) О характеристиках уравнений пластичности см. С. А. Христианович [2] и В. В. Соколовский [3]. (Прим. ред.)

Вышеприведенное построение дает небольшие отрезки кривых второго семейства. Как только они будут получены, легко можно построить с точностью до величины первого порядка вторую линию первого семейства кривых, так как ее касательные приблизительно направлены к упомянутым выше центрам кривизны; они могут быть затем исправлены по сохраняющему здесь силу закону для радиусов [формула (1)], для чего могут служить радиусы кривизны заданной кривой. При построении второго ряда ячеек сетки надо задаться новой точкой A на вновь полученной кривой α соответственно с изменением $f_2(\alpha)$.

От нее и должно начинаться построение. Если вначале будут заданы два пересекающихся отрезка кривых α и β , то этим определится сетка кривых в образованном линиями скольжения криволинейном четырехугольнике, кото-

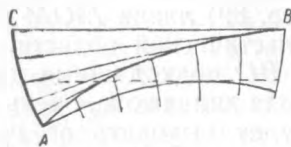


Рис. 1.

рый получится, если провести две кривые β через концы отрезка кривой α и две кривые α через концы отрезка кривой β . Если все кривые α проходят через одну точку A , непременно $R_\beta = 0$; в этом случае сетка задается одной кривой α и точкой A .

Здесь можно отметить одно бросающееся в глаза свойство рассматриваемых нами семейств кривых. Если заданная кривая является достаточно удаленным отрезком прямой, то там радиус будет бесконечно большим, а соответствующая заданная точка, следовательно, бесконечно далека. Отсюда сразу получается, что если провести две кривых второго семейства через концы отрезка прямой, то тогда все линии первого семейства на отрезке между этими двумя кривыми также должны быть отрезками прямой. Соответствующее утверждение будет действительно также и для точки возврата, которая представляет собою бесконечно короткий отрезок прямой.

Перед тем как перейти к рассмотрению отдельных примеров, нужно сделать несколько общих замечаний.

Решения могут быть составлены не аналитическим путем, а при помощи линий скольжения, что объясняется тем, что линии скольжения являются характеристиками гиперболического дифференциального уравнения. Для равновесия при этом требуется непрерывность составляющих напряжения на границе обеих областей. Для того чтобы застраховать себя от возможной ошибки при выборе знака касательных напряжений, проще всего рассмотреть картину течения пластической массы при условии неизменности объема, например вычерчивая линии тока, или иным путем. Таким образом, оказывается, что на рис. 3, данном Генки (этот сборник, стр. 89) линия $МOM$ не является возможной границей пластической области, так как если считать линии AC и BD подходящими к пластической зоне тела, то, проводя линии тока, очень легко обнаружить, что линия CD будет выходить за пределы пластической зоны тела. Граница $МOM$ может, следовательно, получиться только тогда, если на средней поверхности CD будет существовать не сжатие, а растяжение, которое легко получить, если заменить соответствующие знаки в выражениях, приведенных Генки, на обратные.

Что касается вопроса однозначности решения, то сделанное Генки предложение, повидимому, очень целесообразно, но только лучше всего формулировать его так, что действительным будет решение, при котором получаются наименьшие силы. Так как в этой постановке задачи поведение части тела, остающейся упругой, далее не исследуется, мы часто сможем задаваться целым рядом решений, удовлетворяющих условиям равновесия пластического тела. Предполагая постепенное увеличение внешних нагрузок, мы получим пластическое движение, как только внешние силы достигнут вышеупомянутого минимального значения, а как только начнется движение, дальнейшего повышения нагрузки не будет. Такое рассуждение, конечно, не является доказательством справедливости теоремы, так как все же возможно предположить, что при непрерывном переходе от упругого состояния к пластическому (об этом переходе современная теория еще не может ничего

сказать) могут получиться и другие состояния, чем те, которые соответствуют наименьшему сопротивлению. Все же можно ожидать, что, по крайней мере, величины действительных нагрузок не будут очень сильно отличаться от минимального значения. За неимением чего-либо лучшего нужно, следовательно, и здесь остановиться на предложении, выдвинутом Генки. Таким образом, в общем случае мы будем получать при соблюдении этого требования однозначное решение. Пример Генки во всяком случае дает (поскольку обе границы $M'O'M'$ и $M''O''M''$ приводят к совершенно одной и той же нагрузке) два различных, одновременно возможных решения, конечно, при неоговоренном здесь допущении, что в штампе совершенно отсутствует трение. При допущении же в штампе самого незначительного трения остается в силе только одна граница, соответствующая нашему первоначальному решению, а именно граница $M''O''M''$, в чем легко можно убедиться, исследуя движение частиц сжатой поверхности; это легко можно получить также, проводя построения с дополнительным предположением о трении скольжения (ср. также указание, приведенное ниже). При допущении трения по поверхности штампа, конечно, опять будут получаться два решения в том случае, если конечный участок поверхности штампа будет находиться как раз на границе между состоянием скольжения и отсутствием скольжения, причем здесь будет получаться различного вида пластическое движение в зависимости от того, будем ли мы считать, что скольжение имеет место, или что оно отсутствует. Если же не принимать во внимание таких частных случаев, в которых одной нагрузке соответствуют два совершенно различных состояния текучести, то закон Генки сможет в общем случае привести к однозначному решению. Из примеров приведем сначала тот, который получается из примера Генки при замене ломаной кривой. Рассмотрим вдавливание закругленного штампа с трением на поверхности. Пусть свободная поверхность пластического тела будет при этом плоской; следовательно, здесь не принимается во внимание выпучивание сторон, чем

и обуславливается характер вдавливания штампа. Если угол трения равен φ и, следовательно, сила давления там, где имеется трение, наклонена к нормали под углом φ , то тогда достаточно только провести линии скольжения под углом в $45^\circ - \varphi$ к соответствующим элементам поверхности штампа (рис. 2).

Из того условия, что линии скольжения должны пересекаться друг с другом под прямым углом, получается, что внутри области CDO больше не происходит никакого скольжения. Линия CD охватывает ту часть

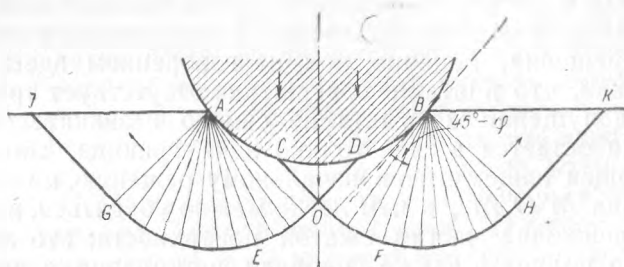


Рис. 2.

штампа, где угол наклона к горизонтали меньше φ . Между C и D , следовательно, не имеется никакого скольжения, но зато оно имеется в AC и DB . Из точки O надо провести кривые OE и OF ортогонально к семейству линий скольжения; сбоку же будут примыкать обычным порядком круговые секторы AEG и BFH . Приведенное построение относится прежде всего к вертикальному вдавливанию штампа. При незначительно наклонном вдавливании получается несимметрия только в величинах скольжения, но еще сохраняются прежний вид линий скольжения и прежние силы, а при более сильном наклоне получится несимметрия и в самом виде линий скольжения, более глубокое исследование которых завело бы нас слишком далеко.

При вдавливании штампа в плиту не очень большой толщины d вытесняемый материал штампа не выдавливается из поверхности, а осаживается вниз за счет разжатия обеих половин плиты (попрежнему плоская

задача). Возможное решение, о котором во всяком случае сразу нельзя определенно сказать, будет ли оно соответствовать наименьшему сопротивлению, дано на рис. 3. Здесь к остающемуся недеформированному треугольнику ABC примыкают два круговых сектора ACD и BCE . Для продолжения вниз поля линий скольжения нужно применить приведенный в начале способ построения к линии ACE как к заданной кривой, считая при этом, что все кривые одного семейства проходят через точку A . Таким образом, с одной стороны, находится сектор ACD ,

а с другой — криволинейный четырехугольник $CEFD$. Поле линий скольжения может, очевидно, любым образом быть продолжено в стороны и вниз, и таким образом могут быть получены решения для различного вида толстых плит. Для определения же силы P в штампе должны быть сделаны еще некоторые предположения относительно условий закрепления плиты.

Если, например, имеется большое трение на нижней поверхности, то для перемещения двух остающихся недеформированными половин плиты требуется приложение горизонтальной силы $\frac{1}{2} \mu P$ (μ — коэффициент трения). Горизонтальная составляющая напряжения на граничной поверхности ADF должна как раз иметь эту величину.

Таким образом, уравнением Генки (6b) напряжения определяются включительно до того случая, когда поле напряжений соответствует всесторонне и одинаково распределенному давлению. Такое распределение давления, следовательно, получается из вышеприведенного

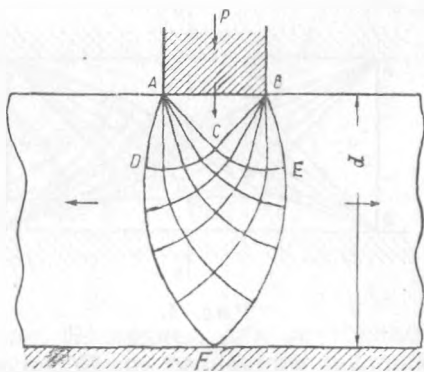


Рис. 3.

требования, которым будет даваться также и сила P . Изображенный на рис. 3 процесс, очевидно, требует наличия тем больших сил P , чем толще плита, так как с увеличением толщины углы обоих секторов становятся все больше. Таким образом можно найти предельную толщину, при которой вдавливание материала вверх, рассмотренное в нашей прежней работе, требует приложения той же силы, что и осаживание его вниз. При еще более толстых плитах получается именно этот процесс, а не тот, который здесь описан.

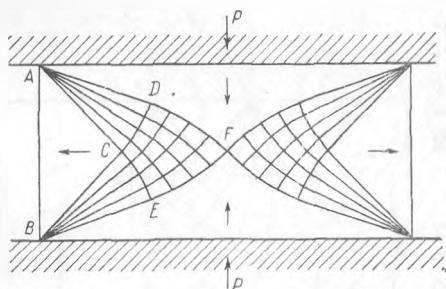


Рис. 4.

Надо еще упомянуть, что допущение о том, что остающийся недеформированным треугольник ABC ограничен прямыми линиями, ни в коем случае пока еще не доказано. Вполне возможно, что допущение о наличии надлежащим образом искрив-

ленных линий AC и BC , которые, конечно, опять должны пересекаться в точке C под прямым углом, приведет к силам P меньшей величины.

Следующий пример, который очень родственен предыдущему (конечно, такому, для которого также действительны только что приведенные соображения), касается пластического тела, ширина которого больше, чем высота, и которое зажато между твердыми плитами. Рис. 4 сам по себе вполне ясен, так что описание отдельных деталей является излишним¹⁾. Если толщина тела очень незначительна по сравнению с шириной

¹⁾ Здесь надо отметить, что при испытании на сжатие каменного материала, подвергаемого перед разрушением небольшим пластическим деформациям, как, например, мрамор, остающиеся без разрушения части при небольших опытных нагрузках близко совпадают с остающимися упругими частями, изображенными на рис. 4.

(например, свинцовая прокладка между двумя четырехугольными камнями), то в этом случае точки D и E будут приближаться к стене и получится, если, например, опять исходить от линии ACE , сначала только сетка кривых до точки F . При достаточной шероховатости поверхностей четырехугольных камней все скольжение будет происходить только в свинце, и надо ожидать, что при пластическом течении поверхности давления будут являться поверхностями скольжения. При таком допущении мы можем продолжить сетку,

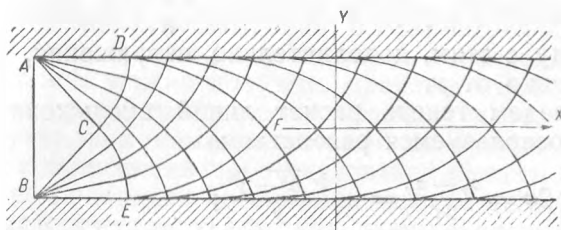


Рис. 5.

как это показано на рис. 5, причем для внутренней части мы можем каждый раз опять пользоваться нашим построением.

То напряженное состояние, которое асимптотически осуществляется на достаточно большом расстоянии от свободного края, доступно для расчета; мы приведем здесь вкратце формулы, которыми уже располагаем. Проведя ось x через середину плиты (с положительным направлением к середине пластической зоны плиты) и ось y в направлении силы давления, получим, при толщине плиты $2h$, следующие величины составляющих напряжения:

$$\sigma_x = \frac{kx}{h} + c + 2k \sqrt{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2}; \quad \sigma_y = -\frac{kx}{h} + c;$$

$$\tau = k \frac{y}{h}. \quad (3)$$

Равновесие напряжений, как легко видеть, при этом удовлетворяется. Максимальное касательное напряжение, которое должно быть постоянным у идеально пластического тела, выразится так:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = k.$$

Напряженное состояние дает, следовательно, равномерное приращение среднего давления $p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ в направлении внутрь величиною в $\frac{k}{h}$ на единицу длины и, наряду с этим, дополнительные напряжения, зависящие только от y .

Приведем теперь расчет линий скольжения. Для этого воспользуемся равенством

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = -\frac{\sqrt{h^2 - y^2}}{y};$$

отсюда получим для одного семейства:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{h-y}{h+y}} = -\frac{\sqrt{h^2 - y^2}}{h+y}, \quad (4)$$

что дает для линии скольжения уравнение

$$-x = h \arcsin \frac{y}{h} + \sqrt{h^2 - y^2} + c,$$

т. е. получается обычная циклоида. Остается теперь показать, что удовлетворяется условие, налагаемое на радиусы равенствами (1). Принимая во внимание равенство (4), мы получим для вычисления радиуса следующие выражения:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{d^2x/dy^2} = 2\sqrt{2h(h+y)},$$

а отсюда, подставляя $dS_3 = dy / \cos \varphi$, имеем:

$$\frac{dR_x}{dS_3} = \frac{dR}{dy} \cos \varphi = \sqrt{\frac{2h}{h+y}} \cdot \sqrt{\frac{h+y}{2h}} = 1.$$

Было бы желательно найти соответствующие системы линий скольжения и для других областей, а не только для случая плоской полосы. Система линий скольжения для клинообразного объема дает, например, возможность произвести хотя бы качественное исследование явлений, имеющих место при выдавливании пластического материала из отверстий. Само собой разумеется, что очень важное значение имел бы переход от плоской задачи к задаче с осевой симметрией, но здесь следует опасаться математических трудностей, которые будут очень велики. Однако метод, которым Генки пользуется при рассмотрении осесимметрической задачи по определению сопротивления вдавливанию, показывает, как можно получить приближенные результаты уже путем сравнительно простых оценок. Во всяком случае, нам кажется, что для получения лучшей степени приближений при исследовании данного вопроса нельзя не принимать во внимание трение между штампом и пластическим телом; вид линий скольжения при учете трения будет сильно отличаться от данного Генки и, вероятно, будет приближаться к виду, данному нами для плоской задачи *).

*) Большое число новых задач, относящихся к вдавливанию штампов и т. п., решено В. В. Соколовским [3]. (Прим. ред.)

Г. ГЕНКИ

К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ВЫЗЫВАЕМЫХ
ИМИ В МАТЕРИАЛЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ *)

В опубликованной в 1909 г. работе Хаара и Кармана (этот сборник, стр. 41) даются основы изучения поведения пластического вещества вблизи предела упругости. Из-за краткости изложения и мало пригодного для практического расчета условия пластичности значение этой работы с физической точки зрения не было, повидимому, оценено.

Цель настоящего исследования состоит в том, чтобы дать детальное разъяснение физического смысла такого метода решения поставленной задачи и показать, что этим путем действительно можно получить систему дифференциальных уравнений, охватывающую всю область задач упруго-пластического равновесия. В связи с этим должно также выясниться, какое значение имеют остаточные напряжения, т. е. напряжения, остающиеся в материале после пластической деформации.

Таким путем мы придем к выводу, что упрочнение материала, получающееся при остаточных деформациях, может быть объяснено двумя различными причинами. Одной из них является саморазгружение упруго-пластического материала, благодаря которому тело может до некоторой степени сопротивляться возникновению повторных пластических деформаций при повторной нагрузке или разгрузке. Этот вид упрочнения еще может быть исследован нашей теорией. Другая причина явления упрочнения связана, наоборот, с процессами, происходящими в кристаллических решетках, или с изменениями структуры молекул и нашей теорией объяснена быть не может, хотя приближенно

*) ZAMM, Bd. 4, H. 4, S. 323—334 (1924).

и учитывается формулой, выражающей условие пластичности¹⁾).

Обычно применяемую в качестве условия пластичности гипотезу Сен-Венана, по которой пластичность зависит от наибольшего касательного напряжения, мы заменяем здесь другой, согласованность которой с опытом лучше подтверждается испытаниями последнего времени.

I. Физико-механические основы задачи, воспроизведенные на простой модели. Для ограничения с самого начала области наших исследований надо ясно оговорить, что мы предполагаем как упругие, так и пластические деформации настолько малыми, что можно пренебречь квадратами компонентов тензора деформаций по сравнению с первыми степенями. Разумеется, имеется еще и другая форма равновесия, при которой упругие деформации полностью исчезают и пластическое течение останавливается благодаря тому, что внешние силы уравниваются вследствие перемещения точек их приложения. Рассмотрение такого вида состояний равновесия не входит в рамки наших исследований.

Предположим, кроме того, что процесс деформации — изотермический и медленный. Выделяемой при остаточных деформациях теплотой мы здесь пренебрегаем. Легко установить приближенно, до каких величин составляющих деформаций можно безболезненно делать такое допущение.

Формулы Хаара и Кармана исходят из предположений, что при каждой пластической деформации, приводящей к состоянию равновесия, состояние покоя для пластических деформаций возможно только из-за

¹⁾ Основная часть так называемого упрочнения может быть отнесена за счет явлений вязкости при очень медленном пластическом течении. Теория такого вида движения, которая дополняет разрабатываемую ниже „статику“ пластических деформаций соответствующей „динамикой“, будет опубликована в журнале ZAMM.

упругого ядра, которое всегда должно существовать, если равновесие наступает без удаления внешних сил. Для лучшего выяснения сущности упруго-пластического равновесия построим модель, при помощи которой можно легко численно воспроизвести все наиболее существенные явления.

Такая модель изображена на рис. 1; она представляет собой один раз статически неопределимую систему из трех стержней. Площади поперечных сечений стержней 1 и 2 относятся, как 4:1.

При отсутствии стержня 2 пластическое равновесие при определенных пределах нагрузки, очевидно, невозможно; мы имеем здесь предельное состояние равновесия.

Под полным пластическим состоянием мы будем впредь (обобщая обычное употребление этого термина) понимать такое предельное состояние равновесия, при котором можно опреде-

лять напряженное состояние независимо от деформаций.

В нашей статически неопределимой модели это состояние наступает, как только мы полагаем $P = 10kF$ ($2k$ — предельное напряжение при одноосном напряженном состоянии), так как в этом случае как σ_1 , так и σ_2 равны $2k$.

Таким образом выделяются следующие области:

- упругая область — от $0 \leq P \leq 4kF$,
- первая стадия пластичности — от $4kF \leq P \leq 8kF$,
- вторая стадия пластичности — от $8kF \leq P \leq 10kF$.

Введем следующие обозначения:

- σ' — напряжение, которое получилось бы при неограниченной справедливости закона Гука;
- σ^0 — напряжение, которое остается в системе после снятия внешней нагрузки;
- σ — напряжение, которое характеризует упруго-пластическое состояние равновесия.

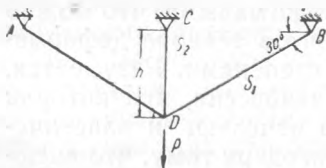


Рис. 1.

Тогда, как это непосредственно можно видеть, при $\sigma^0 \leq 2k$ имеет место следующее равенство:

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma'. \quad (1)$$

Состояние пластического равновесия, при котором $\sigma^0 \leq 2k$, мы будем называть первой стадией пластичности; если равенство (1) теряет силу, то мы имеем вторую стадию пластичности.

Докажем сначала справедливость равенства (1) для $P = 8kF$ путем прямого расчета.

Напряжения σ' в этом случае будут:

$$\sigma'_1 = +k, \quad \sigma'_2 = +4k.$$

Действительные напряжения получим, удалив пластически деформированный стержень 2 и заменив его действующей в нем силой $2kF$, именно:

$$\sigma_1 = +\frac{3}{2}k, \quad \sigma_2 = +2k.$$

Если теперь снять нагрузку, то длина стержня 2 станет слишком большой, и стержень вынужден будет сжаться.

При этом, вследствие укорочения стержня 1, получится смещение от точки D на

$$\frac{3}{2} \frac{k}{E} \cdot 2h \cdot 2 = 6k \frac{h}{E}.$$

Стержень 2 стремится укоротиться на $2k \frac{h}{E}$.

Остается, следовательно, еще удлинение $4k \frac{h}{E}$, и чтобы снять его, нужно приложить добавочную силу X , удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{X \cdot h}{FE} + \frac{X \cdot 2h}{4FE} \cdot 2 = 4k \frac{h}{E}, \quad \text{или } X = 2kF;$$

таким образом,

$$\sigma_1^0 = +\frac{k}{2}, \quad \sigma_2^0 = -2k.$$

Уравнение же (1) требует, чтобы

$$\text{для стержня 1: } \frac{3}{2}k = \frac{k}{2} + k,$$

$$\text{для стержня 2: } 2k = -2k + 4k.$$

Отсюда мы получаем важную теорему для остаточных напряжений.

Если остаточные напряжения, остающиеся после удаления нагрузки, не превышают предела текучести, то пластическая деформация создает упрочнение за счет остаточных напряжений в том смысле, что при повторной, одинаковой или меньшей по величине, нагрузке возникают только упругие деформации.

Прямые $D'F'$ и $D''F''$ на рис. 2 изображают линии напряжения-удлинения при повторной нагрузке, которые показывают, насколько конструкция приобрела иммунитет по отношению к „болезни“ пластичностью, правда, за счет остаточной деформации DD' , или соответственно DD'' . Через Δh на рис. 2 обозначены вертикальные смещения точки D под действием нагрузки P .

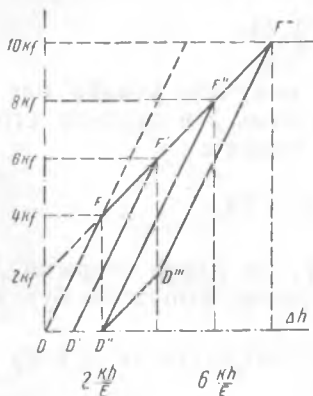


Рис. 2.

Если мы теперь увеличим нагрузку за предел $8Fk$, то при разгрузке возникнут остаточные напряжения от нагрузки $8Fk$ и таким образом за время первой нагрузки и разгрузки получится линия $DFFF'''D'''D''$. Но так как пластическое удлинение при каждой нагрузке повторяется, а при разгрузке снова уменьшается, то ясно, что таким путем стержень 2 должен разрушиться. При каждом цикле работа $D''F''F'''D'''$ переходит в теплоту.

Таким образом, это состояние, названное нами выше второй стадией пластичности, приводит не к упрочнению, а к местному разрушению, если оно повторяется несколько раз.

Диаграмма рис. 2, аналогичная диаграмме напряжения-удлинения, дает нам представление и относительно затраченной работы. При разгрузке от приложенной нагрузки $P = 8kF$ величина потерянной энергии будет:

$$\frac{2kh}{E} \cdot 6kF = 12k^2 \frac{hF}{E}.$$

Накопленная же энергия остаточных напряжений равняется:

$$A_v = \frac{1}{2E} \cdot \frac{h^2}{4} 2k \cdot 4F \cdot 2 + \frac{1}{2E} \cdot 4k^2 Fh = 4k^2 \frac{hF}{E}.$$

Следовательно, только третья часть работы внешних сил накапливается в теле в виде энергии добавочных напряжений. Несмотря на это, затраченная работа в $8k^2 \frac{hF}{E}$, перешедшая в теплоту, еще не поднимает температуру стержня 2 ни на один градус Цельсия. Таким образом, предположение об изотермичности процесса деформации вполне допустимо.

Полученные результаты, конечно, могут быть непосредственно перенесены на сплошные среды.

Выделяя пластические напряжения и рассматривая их как внешние силы, мы упрощаем задачу определения напряжений, так как этим уменьшается степень ее статической неопределимости.

Таким образом, переход упругого тела в пластическое состояние есть не что иное, как уменьшение степени статической неопределимости. Мы видим, что упругое тело при этом может превратить часть работы внешних сил в упругую энергию системы остаточных напряжений при первом его загрузении. Эта система остаточных напряжений повышает сопротивляемость тела в первой стадии пластичности.

Предел текучести повышается, и в первой стадии пластичности не возникает никакой дальнейшей пластической деформации.

Для возможности успешного исследования пластического состояния сплошной среды необходимо иметь условие пластичности, а поскольку мы предполагаем

тело изотропным, условие пластичности можно сформулировать только через ортогональные инвариантные тензоры напряжений. К его выводу мы и перейдем.

II. Условие пластичности. Еще Сен-Венаном было отмечено, что пластическая деформация и разрушение— это два в корне различных явления; поэтому он резко отличал процесс пластической деформации от процесса разрушения. Процесс же разрушения при тех испытаниях, при которых должен наблюдаться процесс пластической деформации, происходит во всей области пластической и даже упругой деформации. Но так как при этом мы имеем дело с тонкими, еле различимыми трещинами в кристаллической решетке, анализ данных опыта не так прост.

С самого начала очевидно, что всестороннее сжатие или растяжение не сможет иметь никакого влияния на пластическую деформацию. Если при опытах на разрыв эта картина несколько искажается, причиной тому является только повреждение (на глаз незаметное), вызываемое процессом разрушения.

Таким образом, в качестве наиболее близкой к действительности гипотезы мы должны принять, что предел текучести достигается при постоянной энергии упругого изменения формы, т. е. что эта часть работы деформации является мерой пластического сопротивления.

На основании сделанного выше замечания относительно сил всестороннего сжатия или растяжения, мы будем понимать под энергией изменения формы ту часть упругого потенциала, которая не зависит от гидростатических сил^[30].

Если мы, кроме того, примем за предел текучести при одноосном напряженном состоянии величину $2k$, то получим следующее условие пластичности (G — модуль сдвига):

$$\Phi = \frac{1}{2G} \left\{ \left[\frac{1}{6} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \right\} - \frac{2}{3} \frac{k^2}{G} = 0. \quad (2)$$

Это условие пластичности было сперва выведено Мизесом (этот сборник, стр. 57) в несколько иной форме и на несколько иных основаниях в его статье относительно пластической динамики¹⁾.

Оно упрощается при переходе к главным напряжениям.

Обозначив через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ главные напряжения, из уравнения (2) получим:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 = 4k^2. \quad (3)$$

В прямоугольной системе координат с осями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ уравнение (3) является уравнением кругового цилиндра с радиусом $2k\sqrt{\frac{2}{3}}$, ось которого образует

равные углы с положительными направлениями осей координат. Такое представление напряженного состояния для наших целей более приемлемо, чем условие Мора, и позволяет легче истолковать данные опытов.

Все напряженные состояния, соответствующие точкам, лежащим внутри кругового цилиндра, находятся в упругой области. Наоборот, точки, лежащие на самом круговом цилиндре, соответствуют пластическому состоянию. Точки, лежащие вне цилиндра, соответствуют невозможным напряженным состояниям. На рис. 3

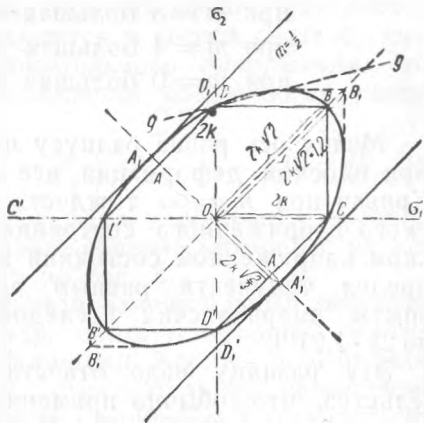


Рис. 3.

1) При обсуждении этого условия пластичности на Международном конгрессе по прикладной механике в Дельфте в апреле 1924 г. выяснилось, что такое же условие уже было выведено в 1904 г. Губером,

изображено пересечение этого кругового цилиндра с плоскостью σ_1, σ_2 . Получающийся в пересечении эллипс ограничивает пластическую область при плоском напряженном состоянии.

Если мы возьмем случай плоской деформации, то $\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}$ и, подставив в уравнение (3), получим:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \frac{m^2 + 2m - 2}{m^2 - m + 1} = 4k^2. \quad (4)$$

Большая ось этого эллипса образует с осями координат равные углы. Получаем:

$$\begin{aligned} \text{при } m=2 \text{ большая ось} &= 2k \cdot \infty, \\ \text{при } m=3 \text{ большая ось} &= 2k \cdot \sqrt{14}, \\ \text{при } m=4 \text{ большая ось} &= 2k \cdot \sqrt{13}, \\ \text{при } m=0 \text{ большая ось} &= 2k \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Малая ось равна радиусу цилиндра. Мы видим, что при плоской деформации все зависит от величины m . Кривая при $m = \infty$ тождественна с кривой для плоского напряженного состояния $\sigma_3 = 0$. При этом плоском напряженном состоянии мы получаем при $\sigma_1 = \sigma_2$ предел текучести равным $\sigma_1 = \sigma_2 = 2k$, тогда как опыты американских исследователей дают примерно $2k \cdot 1,2$ ^[31].

Эту разницу надо отнести за счет того обстоятельства, что обычно применяемые в испытаниях при двухосном напряженном состоянии тонкостенные трубы обладают различной жесткостью вдоль прокатки и в перпендикулярном направлении; одна прокаточная корка уже могла оказывать замедляющее влияние. Наилучшую согласованность с данными опыта мы получаем в двух квадрантах с одним положительным и одним отрицательным главным напряжением. На самом деле, более поздние опыты^[18] показывают, что здесь выполняется принимаемое нами условие пластичности и что, следовательно, имеется известная вероятность того, что гипотеза постоянства работы деформации

формы имеет такую же силу в пластической области, какую имеет закон Гука в упругой области. Для точек A_1, A'_1 (рис. 3), изображающих чистый сдвиг, более поздние опыты американских исследователей ^[16, 17] дают в среднем:

$$\sigma_1 = \pm 2k \cdot 0,6; \quad \sigma_2 = \pm 2k \cdot 0,6,$$

тогда как мы получаем:

$$\sigma_1 = \pm 2k \cdot 0,577; \quad \sigma_2 = \pm 2k \cdot 0,577.$$

Существующий до сего времени взгляд на механизмы пластической деформации, по которому здесь должно быть $2k \cdot 0,5$, этими опытами определенно опровергается. Несмотря на это, гипотеза постоянства работы деформации формы находится в тесной связи с гипотезой максимального касательного напряжения. Эта последняя гипотеза выражается следующими равенствами:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \leq 4k^2, \quad (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq 4k^2, \quad (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq 4k^2, \quad (5)$$

которые в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ изображают правильную шестигранную призму, сечение которой с плоскостью σ_1, σ_2 представлено на рис. 3.

Мы получаем при этом замечательный результат, а именно: наш цилиндр, соответствующий гипотезе постоянной работы деформации формы, описан около этой призмы, так что, следовательно, применяемая до сего времени гипотеза Сен-Венана сохраняет силу как первое приближение.

Для случая плоской деформации при $m = 2$ и затем для осесимметричных пространственных задач, для которых эллипсоид напряжений, в силу симметрии, является эллипсоидом вращения, обе гипотезы тождественны.

Следовательно, то обстоятельство, что наша новая мера прочности дает качественно те же результаты, что и теории Сен-Венана, Геста и Мора, не требует дальнейшего разъяснения.

Хотя разница между обеими гипотезами и кажется незначительной, она все же должна сказаться при их количественном сопоставлении, поскольку в отпадающих при принятии равенств (5) сегментах цилиндра находятся как раз самые интенсивные напряженные состояния, и потому они заставляют ожидать в случае пространственной задачи о вдавливаемом штампе¹⁾ значительно лучшего согласия с данными опытов, чем то, которое может быть достигнуто при использовании равенств (5).

III. Дифференциальные уравнения пластического равновесия. Перейдем теперь к составлению дифференциальных уравнений, выражающих существующие взгляды на физико-механические процессы при упруго-пластических состояниях равновесия и охватывающих эту группу явлений. Математическая часть этой работы была уже выполнена раньше в цитированной выше работе Хаара и Кармана, так что мы будем близко придерживаться метода изложения этих авторов.

Основным предположением при этом является то, что состояние равновесия вообще существует. Так как уравнения, которые мы получим, не будут линейными, то такое предположение должно быть вполне определенно сделано заранее.

Наступление состояния равновесия, при котором нагрузка является в некоторых пределах произвольной, предполагает наличие в теле упругого ядра.

При расчете стержневой системы, или плоского напряженного состояния, мы можем выделить упругое ядро как одно целое, присоединяя к внешним нагрузкам на границе пластические усилия. В пространстве же пластические и упругие области взаимно проникают, и мы не в состоянии непосредственно произвести выделение областей. Помимо такого разделения областей, носящего скорее внешний характер, имеется еще другое разделение, при котором выполняется условие

¹⁾ См. Прандтль (этот сборник, стр. 102) и Генки (этот сборник, стр. 80).

пластичности в каждом отдельном элементе*). Мы можем при этом до некоторой степени представить себе элемент тела в виде сосуда, наполненного упругой энергией деформации; если в него вольется слишком много энергии деформации формы, то сосуд переполнится; такое состояние мы называем пластичностью. Но то, что уже было однажды в сосуде, там и останется, пока не прекратится склонность к переливанию.

Так как энергия деформации будет чисто упругой, то мы можем принять за плотность энергии упругого ядра (беря этот термин в самом широком смысле слова) упругий потенциал:

$$A = \frac{1}{2E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z). \quad (6)$$

Здесь E — модуль упругости, а G — модуль сдвига. По теореме о минимуме работы деформации интеграл $\iiint A dx dy dz$, распространенный на все элементы тела, должен иметь экстремальное значение.

В качестве дополнительных условий этой вариационной задачи мы имеем три условия равновесия:

$$\left. \begin{aligned} L &\equiv \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \\ M &\equiv \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \\ N &\equiv \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(при этом для простоты мы пренебрегаем массовыми силами), а также вводим предельное условие, налагаемое на упругую энергию изменения формы $\Phi = 0$, согласно уравнению (2). Это условие мы умножим на некоторую функцию координат φ и прибавим его к плотности упругой работы деформации.

*) Автор имеет в виду, что в пластическом состоянии элемент тела обладает упругой энергией и часть его деформации является упругой. (Прим. ред.)

Обозначив через u , v и w упруго-пластические перемещения элемента объема, мы должны, по правилам вариационного исчисления ^[18] искать экстремум интеграла:

$$\int W \, dx \, dy \, dz,$$

причем

$$W = A + Lu + Mv + Nw + \varphi\Phi. \quad (8)$$

Величины u , v , w зависят только от координат точки x , y , z . Их производные по напряжениям равны нулю ¹⁾.

Вариационная задача приводится известным способом к 6 дифференциальным уравнениям вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} \right)} \right) = 0,$$

которые после дифференцирования переходят в следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (A + \varphi\Phi)}{\partial \sigma_x} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \frac{\partial (A + \varphi\Phi)}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial (A + \varphi\Phi)}{\partial \sigma_y} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \frac{\partial (A + \varphi\Phi)}{\partial \tau_{xz}} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial (A + \varphi\Phi)}{\partial \sigma_z} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \frac{\partial (A + \varphi\Phi)}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

И из этих формул мы видим, что самое простое условие пластичности, которое дает практически применимую систему уравнений, может выражаться только квадратичной функцией составляющих напряжений.

Введем еще тензор деформаций, связанный с тензором напряжений σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} по закону Гука; следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \sigma_x} &= \varepsilon_x, & \frac{\partial A}{\partial \tau_{xy}} &= \gamma_{xy}, & \frac{\partial A}{\partial \sigma_y} &= \varepsilon_y, & \frac{\partial A}{\partial \tau_{xz}} &= \gamma_{xz}, \\ & & \frac{\partial A}{\partial \sigma_z} &= \varepsilon_z, & \frac{\partial A}{\partial \tau_{yz}} &= \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (10)$$

¹⁾ При этом производные от φ могут быть разрывны.

Этот тензор $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, конечно, не удовлетворяет условиям совместности теории упругости; его нельзя получить из поля вектора перемещений.

Мы получим из уравнений (9) следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon_x; & \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_{xy}; \\ \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \epsilon_y; & \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz}; \\ \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} &= \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon_z; & \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В упругой области надо положить $\varphi = 0$. Функция φ находится из условия пластичности $\Phi = 0$. Если для φ получается отрицательное значение, это значит, что мы находимся в чисто упругой области, на границе упругой области $\varphi = 0$.

Уравнение $\varphi = 0$ является, следовательно, уравнением поверхности, отделяющей чисто упругую область от области остаточных деформаций. Отрицательные значения φ не имеют никакого смысла.

В пластической области уравнения (11) дают значения компонентов тензора остаточных деформаций, получающихся, если элемент полностью вырезать из тела и снять все напряжения.

Введя сокращенное обозначение $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, получим для производных от Φ следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{2G}(\sigma_x - \sigma); & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{2G}(\sigma_y - \sigma); & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} &= \frac{1}{2G}(\sigma_z - \sigma); & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя эти зависимости в уравнения (11), найдем искомые дифференциальные уравнения для упруго-

пластических деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1} \sigma \right], \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1+\varphi}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1} \sigma \right], \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1+\varphi}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1} \sigma \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{xy}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{xz}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{yz}. \end{aligned} \right\} (13a)$$

Этих уравнений вместе с тремя уравнениями равновесия (7) и условием пластичности (2) достаточно для определения 10 неизвестных функций σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , u , v , w , φ . Мы видим, что процесс пластической деформации обнаруживается в кажущемся изменении модуля упругости.

Величина модуля сдвига уменьшается в отношении $\frac{1}{1+\varphi}$, материал, следовательно, становится мягче; наоборот, коэффициент поперечного сжатия приближается к 2 по мере увеличения пластических деформаций.

Новый коэффициент поперечного сжатия будет:

$$m_\varphi = \frac{2\varphi + \frac{3m}{m+1}}{\varphi + \frac{3}{m+1}}. \quad (13b)$$

В практических задачах можно принять сначала приближенно $m=2$; это приводит к упрощенной системе уравнений. Конечно, мы не можем рассматривать пластическую часть саму по себе, так как иначе будет

нарушено условие совместности. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{2G} (\sigma_x - \sigma); & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{xy}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1+\varphi}{2G} (\sigma_y - \sigma); & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{xz}; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1+\varphi}{2G} (\sigma_z - \sigma); & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

вместе с условием пластичности:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 8k^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы уже видели на нашей модели, что нужно различать две стадии пластичности, причем одна стадия приводит к упрочнению, а другая — к местному разрушению. Рассмотрим несколько ближе первую стадию пластичности, так как она имеет большее практическое значение.

Так как в этой стадии упругое тело при повторной одинаковой, или меньшей, нагрузке не получает никаких остаточных деформаций, мы можем вычислять напряжения при повторной нагрузке по формулам обычной теории упругости.

Обозначим компоненты этого тензора напряжений через

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{xz}, \tau'_{yz}.$$

Но после первой, связанной с пластической деформацией, нагрузки появляются остаточные напряжения

$$\sigma^0_x, \sigma^0_y, \sigma^0_z, \tau^0_{xy}, \tau^0_{xz}, \tau^0_{yz}.$$

Если эта система остаточных напряжений не переходит границу пластической области и остается в теле сама по себе, то будет иметь место первая стадия пластичности, для которой справедливы следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma^0_x + \sigma'_x; & \sigma_y &= \sigma^0_y + \sigma'_y; & \sigma_z &= \sigma^0_z + \sigma'_z; \\ \tau_{xy} &= \tau^0_{xy} + \tau'_{xy}; & \tau_{xz} &= \tau^0_{xz} + \tau'_{xz}; & \tau_{yz} &= \tau^0_{yz} + \tau'_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Если бы мы поставили себе задачу выбрать этот неизвестный тензор остаточных напряжений таким образом, что упругая энергия стоящего в левой части тензора минимальна, то мы снова пришли бы к тем же уравнениям (14).

Саморазгружение тела действует, следовательно, в том смысле, что материал стремится за счет остаточной деформации защитить себя, насколько возможно, от повторного пластического течения.

Таким образом, выбор надлежащего условия пластичности открывает дорогу для разработки математической теории пластичности, охватывающей множество задач, для которых на сегодня не имеется еще математических решений.

Можно, например, попробовать распространить на эту область формулы Герца для случая давления между двумя сжимающимися друг друга телами. Затем открывается возможность разработки теории пластического изгиба плит и оболочек.

Конечно, обычные методы интегрирования классической теории упругости здесь совершенно не применимы. Но можно было бы преодолеть трудности при помощи наиболее подходящих приближенных методов, так как пластическое состояние по своему характеру обладает меньшей статической неопределимостью, чем упругое, и в большей степени, чем упругое, поддается методу последовательных приближений.

Для иллюстрации применения теории рассмотрим простой пример.

4. Нагружение вращающегося диска за предел текучести ^[19].

Рассмотрим диск с внутренним отверстием, нагружаемый центробежными силами вращения за предел текучести. Примем следующие данные:

предел текучести при одноосном напряженном состоянии $2k = 3000 \text{ кг/см}^2$.

внутренний радиус $a = 10 \text{ см}$,

наружный радиус $b = 100 \text{ см}$,

коэффициент поперечного сжатия $m = \frac{10}{3}$,

удельный вес материала
 ускорение силы тяжести
 угловая скорость

$\gamma = 7,85 \text{ кг/см}^3,$
 $g = 891 \text{ см/сек}^2,$
 $\omega = 300 \text{ сек}^{-1}.$

$$M_0 = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{1}{m} \right) \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 = 2890 \text{ кг.}$$

Полагая $\rho = \frac{r}{b}$, получим, предполагая неограниченную упругость, следующие величины напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_r &= M_0 \left[1,01 - \rho^2 - \frac{0,01}{\rho^2} \right], \\ \sigma'_t &= \left[1,01 - \frac{19}{33} \rho^2 + \frac{0,01}{\rho^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

На внутренней границе, следовательно, $\sigma'_t = 5780 \text{ кг/см}^2$, и начиная от $\rho = 0,1$ до $\rho = \rho_0$ должна образоваться пластическая область, а от $\rho = \rho_0$ до $\rho = 1$ опять будет иметь место чисто упругое состояние.

Так как диск предполагается тонким, то с достаточной степенью точности можно считать напряженное состояние плоским. Следовательно, точка, изображающая напряженное состояние в пластической области, должна лежать на эллипсе (рис. 3).

Из диаграммы напряжений (рис. 4) видно, что условия задачи позволяют заменить в пределах области $0 \leq \rho \leq \rho_0$ эллипс прямой $g-g'$, которая является стороной вписанного в эллипс двенадцатиугольника. Отсюда получаем линейную зависимость

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= 2k + \alpha \sigma_r, \\ \alpha &= 2 - \sqrt{3} = 0,268. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

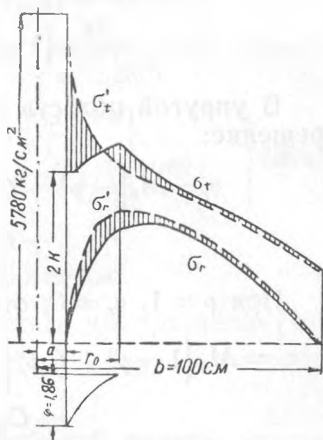


Рис. 4.

При постоянной толщине диска получаем условие равновесия в проекциях на радиус:

$$\sigma_t = \frac{d}{d\rho} (\rho\sigma_r) + \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \rho^2. \quad (19)$$

Пользуясь уравнением (18), мы можем проинтегрировать это уравнение, принимая во внимание, что $\sigma_r = 0$ при $\rho = \frac{a}{b}$.

Решение для $0 \leq \rho \leq \rho_0$ будет:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha} \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^{3-\alpha} \frac{1}{\rho^{1-\alpha}} - \rho^2 \right\} + \\ &+ \frac{2k}{1-\alpha} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{\rho^{1-\alpha}} \right\}; \\ \sigma_t &= \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha} \alpha \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^{3-\alpha} \frac{1}{\rho^{1-\alpha}} - \rho^2 \right\} + \\ &+ \frac{2k}{1-\alpha} \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{a}{b} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{\rho^{1-\alpha}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В упругой области для $\rho_0 \leq \rho \leq 1$ мы имеем общее решение:

$$\sigma_r = M_0 \left\{ -\rho^2 + C_1 - C_2 \rho_0^2 \frac{1}{\rho^2} \right\}; \quad \sigma_t = M_0 \left\{ -\rho^2 \frac{19}{33} + \right. \\ \left. + C_1 + C_2 \rho_0^2 \frac{1}{\rho^2} \right\}.$$

При $\rho = 1$, $\sigma_r = 0$; откуда $C_1 = C_2 \rho_0^2 + 1$ и

$$\sigma_r = M_0 \left\{ 1 - \rho^2 + C_2 \rho_0^2 \left[1 - \frac{1}{\rho^2} \right] \right\}; \quad \sigma_t = M_0 \left\{ 1 - \frac{19}{33} \rho^2 + \right. \\ \left. + C_2 \rho_0^2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \right\}.$$

Для $\rho = \rho_0$ мы получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{M_0} \{ (\sigma_r + \sigma_t)_0 + \rho_0^2 (\sigma_r - \sigma_t)_0 \} = 2 - \frac{52}{33} \rho_0^2 - \rho_0^2 \frac{14}{33}.$$

Такие же вычисления проделываем с уравнением (20), отсюда опять получаем в правой части функцию от ρ_0 ; приравнявая правые части, мы можем вычислить ρ_0 ;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M_0} \left\{ \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{3-\alpha} - \rho_0^{3-\alpha} \right] (1+\alpha) + \right. \\ & + \frac{2k}{1-\alpha} \left[2\rho_0^{1-\alpha} - \left(\frac{a}{b} \right)^{1-\alpha} (1+\alpha) \right] + \\ & + \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha} (1-\alpha) \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{3-\alpha} \rho_0^2 - \rho_0^{1-\alpha} \right] - \\ & \left. - 2k \left(\frac{a}{b} \right)^{1-\alpha} \rho_0^2 \right\} = 2\rho_0^{1-\alpha} - \frac{52}{33} \rho_0^{3-\alpha} - \rho_0^{5-\alpha} \frac{14}{33}. \end{aligned}$$

После подстановки числовых значений, наконец, получаем:

$$\rho_0^{0,732} + 0,537 \rho_0^{2,732} = 0,396 + 0,228 \rho_0^2 + 0,268 \rho_0^{4,732}$$

и так как ρ_0 можно предположить меньше $1/2$, то приближенно:

$$\rho_0^{0,732} \cong 0,396 + 0,016 \rho_0^2, \quad \rho_0 = 0,283.$$

Из уравнения (20) после подстановки всех числовых значений получим для $0,1 \leq \rho \leq 0,283$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 4100 - \left[2560\rho^2 + 4074,4 \left(\frac{0,1}{\rho} \right)^{0,732} \right], \\ \sigma_t &= 4100 - 0,268 \left[2560\rho^2 + 4074,4 \left(\frac{0,1}{\rho} \right)^{0,732} \right], \end{aligned} \right\} (20a)$$

откуда для $\rho = 0,283$:

$$\sigma_r = 2000 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_t = 3536 \text{ кг/см}^2.$$

Непосредственно можно убедиться, что уравнение (18)

$$\sigma_t = 3000 + 0,268 \cdot 2000 = 3536 \text{ кг/см}^2$$

удовлетворяется.

В упругой области от $0,283 \leq \rho \leq 1$ теперь можно определить постоянные C_1 , C_2 , и мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2890 \left\{ 1 - \rho^2 + 0,0198 \left[1 - \frac{1}{\rho^2} \right] \right\}, \\ \sigma_t &= 2890 \left\{ 1 - \frac{19}{33} \rho^2 + 0,0198 \left[1 + \frac{1}{\rho^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (20b)$$

Таким образом, задача определения напряжений решена. Эпюры напряжений изображены на рис. 4.

Заштрихованная часть дает величину остаточных напряжений, которые остаются в диске после прекращения вращения. Так как наибольшее напряжение несколько ниже 3000 кг/см^2 , то расчет остаточных напряжений может быть произведен по уравнению (16).

При $\rho = 0,1$ имеем

$$3000 = 5780 + \sigma_0, \text{ или } \sigma_0 = -2780 \text{ кг/см}^2.$$

Для количественного сравнения со старой теорией пластичности Сен-Венана на рис. 5 нанесено напряженное состояние диска и по этой теории.

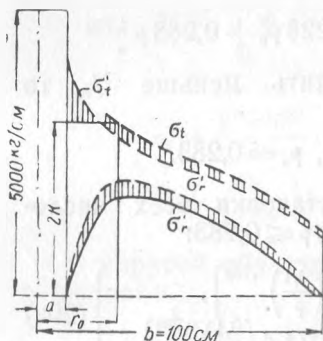


Рис. 5.

При одинаковой границе пластической и упругой областей, т. е. при одинаковом ρ_1 , угловая скорость в последнем случае должна быть взята примерно на 7% меньше. Этого и надо было ожидать, так как именно отрезанные сегменты эллипса на рис. 3 оказывают значительное влияние на количественный результат.

Перейдем теперь к вычислению величины φ по уравнениям (14), причем для большей простоты мы примем при этом расчете $m=2$.

Пользуясь полярными координатами, получим внутри пластической области:

$$\frac{du}{d\rho} = b \frac{1+\varphi}{2G} (\sigma_r - \sigma_t), \quad \frac{u}{\rho} = b \frac{1+\varphi}{2G} (\sigma_t - \sigma_r), \quad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{3} \quad (21)$$

или

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{b}{6G} (1+\varphi) (2\sigma_r - \sigma_t), \quad \frac{u}{\rho} = \frac{b}{6G} (1-\varphi) (2\sigma_t - \sigma_r).$$

Исключая u , получим дифференциальное уравнение для функции φ :

$$(1+\varphi) (2\sigma_r - \sigma_t) = (1+\varphi) \frac{d}{d\rho} [\rho (2\sigma_t - \sigma_r)] + \rho (2\sigma_t - \sigma_r) \frac{d\varphi}{d\rho},$$

которое легко решается в квадратурах:

$$1 + \varphi = \frac{\rho_0 (2\sigma_t - \sigma_r)_0}{\varphi (2\sigma_t - \sigma_r)} e^\psi,$$

причем

$$\psi = \int_{\rho=\rho}^{\rho=\rho_0} \frac{\sigma_t - 2\sigma_r}{\rho(2\sigma_t - \sigma_r)} d\rho. \quad (22)$$

Интеграл, входящий в уравнение (22), всего целесообразнее вычислить графически, беря значения σ_r и σ_t из уравнений (20а). Для $\rho = \rho_0$, разумеется,

$$1 + \varphi = 1, \text{ или } \varphi = 0.$$

Кривая изменения функции φ нанесена на рис. 4. Для $\rho = 0,1$ φ достигает наибольшего значения: $\varphi = 1,86$. Соответствующее более точное значение коэффициента поперечного сжатия по уравнению (13b) было бы $m = 2,35$.

Перемещение внутреннего края в радиальном направлении будет

$$u = b \frac{(1 - \varphi)}{2G} \left(\sigma_t - \frac{3\sigma}{m\varphi + 1} \right);$$

$$\text{при } \sigma_t = 3000 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma = \frac{3000}{3} = 1000 \text{ кг/см}^2,$$

$G = 800000 \text{ кг/см}^2$ и $b = 100 \text{ см}$, получаем:

$$u = \frac{100 \cdot 2,86}{2 \cdot 800000} \left(3000 - \frac{3}{3,35} \cdot 1000 \right) = 0,375 \text{ см.}$$

При остановке диска, т. е. при разгрузке, мы получаем упругое перемещение:

$$u' = -\frac{100}{2 \cdot 800000} \left(5780 - \frac{9}{13} \cdot \frac{5780}{3} \right) = -0,278 \text{ см.}$$

Следовательно, остаточное смещение будет равно

$$u_0 = 0,375 - 0,278 = 0,097 \text{ см},$$

или с округлением остаточное увеличение в 1 мм от $a = 10 \text{ см}$.

О МЕДЛЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ПРОКАТКЕ, ШТАМПОВКЕ И ВОЛОЧЕНИЮ *)

Само собой понятно, что теория таких сложных физико-механических процессов, как прокатка и волочение металлов, может быть построена только на основе значительного упрощения основных предпосылок.

В настоящем исследовании вводятся два таких упрощения. Первое из них состоит в том, что изменение состояния предполагается изотермическим. На самом деле произведенные до сего времени исследования показывают, что температура, по крайней мере при одном проходе материала через прокатный вал, изменяется мало^[23]. Правда, если пластическая деформация происходит при обыкновенной температуре, то выравнивание температуры вряд ли возможно; но нам не остается никакого другого выхода, и мы должны из практических соображений поставить нашу задачу как чисто механическую.

Пластический материал при его течении мы рассматриваем частью как изотропное упругое тело с заданным пределом текучести, частью как несжимаемую вязкую жидкость.

Второе упрощение, которое здесь вводится, состоит в предположении, что движения очень медленны, причем настолько медленны, что влиянием сил инерции можно пренебречь по сравнению с большими силами внутреннего трения^[20].

Мы получаем таким путем своеобразное состояние равновесия в пластических телах, которые в дальнейшем будем называть „стационарным равновесием“.

Система дифференциальных уравнений, в которой отражены эти основные допущения, имеет то преиму-

*) ZAMM, Bd. 25, N. 2, S.115 — 124 (1925).

щество, что она является самой простой, которая вообще может описать подобного вида процессы.

Хотя это обстоятельство и не дает еще доказательства справедливости сделанных допущений, все же в нем имеется известная обоснованность, тем более, что те противоречия и неясности, которые должны возникнуть при чисто эмпирическом описании области рассматриваемых нами явлений, требуют математическо-механической теории этих процессов.

Мы поэтому будем придерживаться здесь дедуктивного метода, с одной стороны, для того, чтобы дать разъяснение самих процессов, и с другой — чтобы показать, в каком направлении должно идти экспериментальное исследование для того, чтобы определение величин, требуемых практикой, и в первую очередь определение работы, могло исходить из вполне надежных данных.

1. Общая теория. 1. Дифференциальные уравнения стационарного равновесия и условие пластичности. В обычной теории упругости мы имеем дело с одним тензором напряжений. Эти напряжения вызываются малой деформацией и удовлетворяют условиям равновесия элемента объема. Компоненты этого тензора суть

$$\sigma_x^s, \sigma_y^s, \sigma_z^s, \tau_{xy}^s, \tau_{yz}^s, \tau_{zx}^s.$$

Индекс s показывает, что речь идет о статических упругих напряжениях. Но и тогда, когда при пластической деформации состояние равновесия переходит в состояние течения, эти упругие напряжения остаются, хотя изменяются вполне определенным образом; как именно, мы должны определить. Одновременно, под действием динамической силы трения, вызываемой движением, возникает другой тензор, компоненты которого мы обозначим через $\sigma_x^r, \sigma_y^r, \sigma_z^r, \tau_{xy}^r, \tau_{yz}^r, \tau_{zx}^r$.

Если мы возьмем, как это делается при выводе уравнений гидродинамики в форме Эйлера, неподвижную систему координат, уравнения движения пласти-

ческой массы при сделанных предположениях примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma^r}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^r}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^r}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^s}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^s}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}^r}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^r}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^r}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^s}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^r}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^r}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^r}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

Эти условия равновесия относятся к элементу объема dx, dy, dz с неизменными границами и справедливы также для стационарного течения материала.

Между компонентами статического тензора напряжений (σ^s) имеется еще одна зависимость, а именно, условие пластичности, тогда как на компоненты тензора трения (σ^r) подобные ограничения не налагаются и они могут достигать сколь угодно больших значений.

Сущность пластической деформации станет для нас более понятной, если мы будем деформировать сначала резиновый шар, а затем шар из пластилина. В то время как в резиновом шаре можно накопить почти неограниченное количество упругой энергии изменения формы, количество энергии, которое может накопить в обратимой форме пластилиновый шар, чрезвычайно мало. Таким образом, мы получим самое простое условие пластичности, если вычтем из упругого потенциала энергию всестороннего растяжения или сжатия, поскольку всестороннее растяжение и сжатие, очевидно, никакого отношения к пластической деформации не имеет. В качестве меры сопротивляемости пластической деформации мы примем способность материала накапливать упругую энергию изменения формы.

Если всестороннее сжатие и способствует появлению пластических деформаций в хрупких телах, то это связано только с тем, что всестороннее сжатие препятствует образованию трещин.

В нашем случае энергия изменения формы вообще тождественно равна упругой энергии, так как мы считаем материал несжимаемым.

Обозначив через G модуль сдвига, получаем при очень малых упругих деформациях следующее выражение для энергии изменения формы ^[30]:

$$A = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_x^s - \sigma_y^s)^2 + (\sigma_y^s - \sigma_z^s)^2 + (\sigma_z^s - \sigma_x^s)^2] + \tau_{xy}^{s2} + \tau_{yz}^{s2} + \tau_{zx}^{s2} \right\}. \quad (2a)$$

Чтобы представить себе пластическую деформацию, мы должны вообразить себе элемент объема в виде сосуда; если влить в сосуд жидкости больше, чем он может вместить, то жидкость будет переливаться через края, так что количество поглощенной энергии остается одинаковым при всех условиях, пока сохраняется склонность к пластической деформации, т. е. к переливанию.

Если через $2k$ обозначить предельное растягивающее (или сжимающее) напряжение при одноосном напряженном состоянии, то наше условие пластичности примет следующий простой вид:

$$\Phi = A_0 - \frac{2}{3} \frac{k^2}{G} = 0^1), \quad (2b)$$

причем k нужно считать постоянной.

Для плоского деформированного состояния несжимаемого материала это условие пластичности тождественно с гипотезой максимальных касательных напряжений Сен-Венана и Геста — Мора, в случае пространственной задачи оно лучше согласуется с новейшими опытными данными, чем вышеупомянутые более ранние гипотезы, которые не могут быть поэтому положены в основу математической теории пластичности.

¹⁾ Относительно этого условия пластичности см. следующие работы: Губера ^[29], где имеется первая формулировка нашего условия пластичности; Мизеса (этот сборник, стр. 57); Хей ^[21] и Генки ^[22].

2. Зависимость между тензором скоростей деформаций и тензором напряжений (σ^s). В каждой точке нашей неподвижной системы координат можно построить вектор скорости с компонентами u , v , w по направлениям осей x , y , z .

Пусть ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , $1/2 \gamma_{xy}$, $1/2 \gamma_{zx}$, $1/2 \gamma_{yz}$ — компоненты тензора скоростей деформаций и, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы найти зависимость между статическим тензором напряжений и тензором скоростей деформаций.

Эту зависимость мы получим, введя требование, чтобы тензор σ^s был коаксиален с тензором, определяемым уравнениями (3), т. е. чтобы три направления главных напряжений совпадали с тремя направлениями главных скоростей удлинений¹⁾ и чтобы отношение скорости деформации сдвига к упругому касательному напряжению не зависело от направления. Вводя пока еще неизвестный множитель λ , можно выразить условие коаксиальности следующими формулами:

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_y &= \frac{1}{2\lambda} (\sigma_x^s - \sigma_y^s), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{\lambda} \tau_{xy}^s, \\ \epsilon_y - \epsilon_z &= \frac{1}{2\lambda} (\sigma_y^s - \sigma_z^s), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{\lambda} \tau_{yz}^s, \\ \epsilon_z - \epsilon_x &= \frac{1}{2\lambda} (\sigma_z^s - \sigma_x^s), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{\lambda} \tau_{zx}^s. \end{aligned}$$

В этих уравнениях ничего не изменится, если мы, вводя еще одну неизвестную ρ , перепишем их в

¹⁾ См. Буссинеск [23] и Мизес (этот сборник, стр. 57).

следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2\lambda} (\sigma_x^s + p), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{\lambda} \tau_{xy}^s \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\lambda} (\sigma_y^s + p), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{\lambda} \tau_{yz}^s \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2\lambda} (\sigma_z^s + p), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{\lambda} \tau_{zx}^s \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Но, в силу несжимаемости материала, имеем:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \text{ или } \sigma_x^s + \sigma_y^s + \sigma_z^s + 3p = 0,$$

т. е.

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_x^s + \sigma_y^s + \sigma_z^s). \quad (4b)$$

Коэффициент λ является, конечно, функцией координат x, y, z , а при нестационарных движениях также и времени t ; для его определения у нас имеется еще одно уравнение, а именно, условие пластичности (2b), которое мы пока еще не использовали.

Из уравнений (4a) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^s &= 2\lambda \varepsilon_x - p; & \tau_{xy}^s &= \lambda \gamma_{xy}, \\ \sigma_y^s &= 2\lambda \varepsilon_y - p; & \tau_{yz}^s &= \lambda \gamma_{yz}, \\ \sigma_z^s &= 2\lambda \varepsilon_z - p; & \tau_{zx}^s &= \lambda \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Механический смысл этой системы уравнений состоит в том, что при появлении пластического течения упругие напряжения определяются непосредственно через скорости деформаций. Упругие деформации могут быть тогда определены, как для статически определимых систем, через напряжения.

Тогда, подставляя равенства (5) в уравнение (2b), получаем выражение для λ :

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left\{ 2 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 \right\}^{-1/2} \quad (6a)$$

причем, конечно:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (6b)$$

Величина λ имеет размерность $\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2}$, т. е. ту же размерность, что и коэффициент трения жидкости. Благодаря этому мы получаем возможность исключить из условий равновесия компоненты статического тензора напряжений, выразив их через u , v , w и p .

3. Напряжения трения, расход работы и окончательный вид дифференциальных уравнений стационарного равновесия. Практическое требование возможной простоты теоретических предпосылок вынуждает нас воспользоваться для напряжений трения теми же формулами, какие оправдали себя в теории вязких жидкостей.

Обозначив через κ коэффициент внутреннего трения (размерность $\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2}$), который, конечно, не должен быть тождественным с коэффициентом трения при упругих деформациях, получим следующие выражения для тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^r &= 2\kappa \varepsilon_x; & \tau_{xv}^r &= \kappa \gamma_{xy}; \\ \sigma_y^r &= 2\kappa \varepsilon_y; & \tau_{yz}^r &= \kappa \gamma_{yz}; \\ \sigma_z^r &= 2\kappa \varepsilon_z; & \tau_{zx}^r &= \kappa \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Следовательно, он коаксиален со статическим тензором (σ^s). Величина κ при изотермическом изменении состояния будет постоянной.

Формулы (5) и (7), как видно, отличаются друг от друга только гидростатическим давлением, которое при пластических деформациях не играет никакой роли, а также различными коэффициентами пропорциональности. Без этого чисто формального сходства, вытекающего из предполагаемой пропорциональности напряженных состояний с изменением формы, мы, разумеется, не могли бы вывести дифференциальные уравнения тем простым способом, как мы это делаем. Перед нами стояла бы трудная задача вариационного исчисления. Прежде чем вывести дифференциальные уравнения в их окончательном виде, приведем выражение для затраты работы. Работа производится обо-

ими тензорами напряжений σ^s и σ^r , и поглощенная энергия в единицу времени в единице объема будет:

$$D = (\sigma_x^s + \sigma_x^r) \varepsilon_x + (\sigma_y^s + \sigma_y^r) \varepsilon_y + (\sigma_z^s + \sigma_z^r) \varepsilon_z + \\ + (\tau_{xy}^s + \tau_{xy}^r) \gamma_{xy} + (\tau_{xz}^s + \tau_{xz}^r) \gamma_{xz} + (\tau_{yz}^s + \tau_{yz}^r) \gamma_{yz}.$$

Подставив значения σ^s и σ^r и приняв во внимание, что $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ и, следовательно, гидростатическое давление работы не производит, получаем;

$$D = (x + \lambda) \{ 2(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 \}$$

и вследствие (6а):

$$D = \frac{4}{3} (x + \lambda) \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2. \quad (8)$$

Помня, что x должна быть постоянной величиной, а λ величиной обратно пропорциональной скорости, мы приходим к заключению, что в общем случае не может существовать простой пропорциональности между затратой работы и скоростью.

Это обстоятельство согласуется с попытками Лисса^[20] получить эмпирическую формулу, отражающую действительное положение вещей.

Экспериментальное исследование должно, конечно, показать, в каких пределах наши формулы отвечают действительности.

Подставляя (5) и (7) в уравнения (1), обозначая символом Δ дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ и принимая во внимание зависимости (6а) и (6б), получаем для 5 неизвестных p , u , v , w , λ , кроме вышеприведенных уравнений (6а) и (6б), еще три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= (x + \lambda) \Delta u + 2\varepsilon_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \gamma_{xy} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma_{xz} \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= (x + \lambda) \Delta v + \gamma_{yz} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2\varepsilon_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma_{yx} \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= (x + \lambda) \Delta w + \gamma_{zx} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \gamma_{zy} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + 2\varepsilon_z \frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При $\lambda = 0$ мы получаем обычные уравнения стационарного движения жидкости очень большой вязкости. Уравнениями (6) и (9) задача пластического течения сводится к математической задаче, так как пяти неизвестным соответствуют пять уравнений. Граничная поверхность между упругой и пластической областями характеризуется тем, что на ней динамический тензор (σ^r) обращается в нуль и остается только статический тензор (σ^s).

Отсюда мы видим, что процессы, происходящие в упругой части, не оказывают никакого влияния на часть, находящуюся в пластическом движении. Но граничная поверхность не может быть в общем случае задана заранее, она определяется только путем последовательных приближений. Именно, найдя при надлежаще выбранной граничной поверхности напряжения в зависимости от x , y , z , подставляем эти значения в условие пластичности:

$$\Phi = A_g - \frac{2}{3} \frac{k^2}{G} = 0$$

и находим, таким образом, исправленную граничную поверхность, после чего вычисления снова повторяются и т. д.

Чтобы представить все эти соотношения наглядно, рассмотрим несколько примеров, правда очень простых, но все же имеющих отношение к процессам прокатки, прессования и волочения металлов. Исследование этих процессов имеет большое значение для техники.

II. Некоторые приложения разработанной теории.

1. Критерий отличия пластических и вязких тел. Вращение прокатного вала в пластическом материале. При выводе уравнений (9) мы уже отметили, что они переходят при $\lambda = 0$ в соответствующие уравнения для вязких жидкостей; но такой переход не всегда возможен, поскольку мы должны еще учитывать граничные условия. Поясним это на примере.

Пусть цилиндр бесконечно большой жесткости (радиуса a) вставлен в пластическую массу. Какое движение возникает в пластической массе при медленном и равномерном вращении цилиндра, если предположить, что он захватывает пластический материал, находящийся в непосредственной от него близости?

Решение этой задачи представляет интерес для оценки тех сдвигающих сил, которые может вызвать прокатный валок при захвате болванки.

Совершенно ясно, что на конечном расстоянии r_0 от оси цилиндра должно быть состояние покоя, поскольку напряжения уменьшаются и в конце концов переходят в упругую область.

В дальнейшем мы будем рассматривать плоское деформированное состояние; ось z направим вдоль оси цилиндра.

Отнесем движение к полярной системе координат (u —скорость в радиальном направлении, v —в тангенциальном направлении).

Из условия несжимаемости материала сразу можно определить величину компоненты u . А именно:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= 0, \\ \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = u', \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & \\ \gamma_{rt} &= \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = v' - \frac{v}{r} \end{aligned} \quad (10)$$

и, вследствие уравнения (6b),

$$u' + \frac{u}{r} = 0 \quad \text{или} \quad u = \frac{c}{r}.$$

Так как при $r=a$, $u=0$, а v должно быть постоянным, то $c=0$ и, следовательно, радиальная скорость отсутствует, $u=0$.

Теперь из (6a) имеем:

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}} \gamma^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{d\lambda}{dr} = \lambda' = -\frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{\gamma'}{\gamma^2} = -\frac{\lambda}{\gamma} \gamma'.$$

¹⁾ Во избежание недоразумений отметим, что штрихом обозначается полная производная

Первое из уравнений (9) указывает, что p есть постоянная (ось x направляем по радиусу). Второе уравнение равновесия в направлении касательной напишется так:

$$\frac{d}{dr}(\tau^s r) + \tau^s + \frac{d}{dr}(\tau^r r) + \tau^r = 0.$$

Отсюда, подставляя значения напряжений $\tau^s = \lambda \gamma$ и $\tau^r = \kappa \gamma$, получим уравнение:

$$(\kappa + \lambda)(r\gamma' + 2\gamma) + r\gamma\lambda' = 0.$$

Подставляя сюда значение λ , получим после небольшого преобразования следующее уравнение:

$$r \frac{d\gamma}{dr} + 2\gamma = - \frac{4k}{\sqrt{3\kappa}}. \quad (11)$$

Так как на расстоянии r_0 скорость деформации сдвига γ должна обратиться в нуль, то решение может иметь только следующий вид:

$$\gamma = \frac{2k}{\sqrt{3\kappa}} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right].$$

Следовательно, γ будет положительна от $r=0$ до $r=r_0$.

Но так как, вследствие (10), при этом $v' = \frac{v}{r} + \gamma$ также положительна, то v будет функцией, монотонно возрастающей с увеличением r , а это, очевидно, невозможно, так как $v=0$ при $r=r_0$ и $v=\infty$ при $r=a$. Таким образом граничным условиям можно удовлетворить только тогда, когда область существования решения уравнения (11) обращается в нуль, т. е. когда $r=a$.

Следовательно, невозможно, чтобы прокатный валок захватывал материал при осесимметричной деформации. Прокатный валок просто вращается в материале и не вызывает при этом никакого напряжения, большего, чем предельное касательное напряжение материала.

Замечательно в этом результате то, что в случае вязкой жидкости ($k=0$) получается движение $v = \omega \frac{a}{r}$

(ω — угловая скорость прокатного вала), причем на стенке цилиндра возникает напряжение $\tau^r = -2\omega\kappa$. Каким бы малым мы ни принимали k , все равно вышеприведенное принципиальное различие остается в силе. Таким образом, мы получим критерий для суждения о том, имеем ли мы дело с вязкой жидкостью или с пластической массой.

2. Продавливание пластической массы через цилиндрическую полость. Аналогия с пуазейлевским течением в трубах. Представим себе, что мы пропускаем пластическую массу через бесконечно жесткую трубу диаметром $2b$. Пусть при этом пластическая масса прилипает к стенкам трубы так же, как жидкость. Направив ось z по оси трубы и ось r по направлению радиуса, преобразуем сначала уравнения (6) и (9) в цилиндрические координаты.

Предполагая осевую симметрию, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \lambda &= \frac{2k}{\sqrt{3}} \left\{ 2(\epsilon_r^2 + \epsilon_t^2 + \epsilon_z^2) + \gamma^2 \right\}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (12b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= (\alpha + \lambda) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ur)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + 2\epsilon_r \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= (\alpha + \lambda) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} + \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial r} + 2\epsilon_z \frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

При стационарном течении в трубе $u=0$ и $\epsilon_z=0$, следовательно:

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial r}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0,$$

т. е., согласно уравнениям (12с), p также не зависит от r и $\frac{\partial p}{\partial z}$ есть величина постоянная.

После подстановки значений второе из уравнений (12с), определяющее перепад давления, после некоторого преобразования ($\frac{\partial \omega}{\partial r} = \omega'$) примет вид:

$$\frac{\sqrt{3}}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\omega'' + \frac{\omega'}{r}) + \frac{1}{r}. \quad (13a)$$

Решение этого дифференциального уравнения, которое также удовлетворяет граничным условиям, представится так:

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{\alpha} \cdot b \left\{ 1 - \frac{r}{b} - \frac{1}{4} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{b}{k} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \right\}. \quad (13b)$$

Но по условию пластичности невозможно, чтобы пластическая деформация распространялась до $r=0$, а потому должен существовать радиус $r_0 < b$, начиная от которого пластическая масса будет продвигаться через трубу как твердое тело. Это значение r_0 определяется очень просто из условия равновесия цилиндра радиуса r_0 :

$$2r_0\pi \cdot \frac{2k}{\sqrt{3}} = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot r_0^2\pi, \quad \text{откуда } r_0 = \frac{4k}{\sqrt{3} \frac{\partial p}{\partial z}}.$$

Для получения безразмерных соотношений введем число η , определяемое следующим равенством:

$$\eta = \frac{r_0}{b} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b\pi}{b^2\pi \frac{\partial p}{\partial z}} = \frac{\text{напряжение} \times \text{окружность трубы}}{\text{градиент давления} \times \text{площадь поперечного сечения}}. \quad (13c)$$

Отсюда мы сразу видим, что при отношении $\eta=1$ никакой пластической деформации появиться не может и, вследствие этого, никакого течения не будет.

Вводя это обозначение, из уравнения (13b) при $r=r_0$, находим для скорости средней части, которая движется как твердое тело, следующее выражение:

$$\omega_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{\alpha} \cdot l \left[1 - \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \right].$$

Действительно, при $\eta = 1$ имеем:

$$w = 0.$$

По направлению к стенкам трубы скорость будет уменьшаться по параболическому закону, причем, как легко показать:

$$\gamma = \frac{dw}{dr} = \frac{2k}{\sqrt{3}z} \left[-1 + \frac{r}{r_0} \right]$$

и, следовательно,

$$\tau^s = \frac{2k}{\sqrt{3}}; \quad \tau^r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left[-1 + \frac{r}{r_0} \right] \quad \text{и} \quad \tau^s + \tau^r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r}{r_0}.$$

Таким образом, на поверхности цилиндра радиуса r_0 имеется напряжение $\frac{2k}{\sqrt{3}}$, на поверхности цилиндра радиуса b — напряжение $\frac{2k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\eta}$.

Действительно, $2b\pi \frac{2k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\eta} = b^2\pi \frac{\partial p}{\partial z}$, что непосредственно получается из уравнения, определяющего η .

Здесь видно, как нарушенное равновесие, которое уже не может быть восстановлено статическим путем, восстанавливается за счет динамических сил, но не сил инерции, которые весьма малы, а сил трения.

Количество протекающего материала. Совершенно так же, как в гидромеханике, мы можем определить количество материала, протекающего в единицу времени.

При

$$w = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{z} \cdot b \left[1 - \frac{r}{b} - \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \right]$$

получаем:

$$Q = 2\pi \left\{ \int_0^{r_0} r w dr + \int_{r_0}^b r w dr \right\},$$

а после некоторого преобразования и вычисления интегралов:

$$Q = \frac{b^4 \pi}{24z} \frac{\partial p}{\partial z} \{-3 + 4\eta - \eta^4\}, \quad (14)$$

при $k=0$, т. е. $\eta=0$, мы находим известное, найденное Пуазейлем, значение

$$Q = - \frac{b^4 \pi}{8z} \cdot \frac{\partial p}{\partial z},$$

которое, разумеется, будет положительным, если w имеет направление положительной оси z , а $\frac{\partial p}{\partial z}$ отрицательно.

Для экспериментальной проверки физических основ теории стационарного равновесия такого вида испытание по определению протекающего количества материала лучше, чем, например, испытания в прокатном стане. Последние только тогда приобретут свое настоящее значение, когда физические постоянные будут установлены.

Расход работы. Известную проверку проведенных нами до сих пор выкладок можно получить, производя расчет расхода работы. Надо различать три вида работы:

I. Упругая работа в средней части, перемещающейся как упругое тело.

II. Упругая работа в пластической части, необходимая для доведения материала до предела текучести.

III. Работа трения в собственном смысле слова.

Все три вида работы относятся к единице длины трубы. Работы I и II видов имеют размерность $\frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{см}}$. Работа III вида является мощностью и имеет размерность $\frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{сек} \cdot \text{см}}$.

Соответственно этому, упругая работа совершенно не связана со скоростью; она, в первую очередь, зависит от того объема материала, который должен быть доведен до предела текучести. И такое подразделение

работы на две части уже было отмечено в неоднократно упоминаемой здесь работе Лисса.

Для работы I вида получаем:

$$A_I = \frac{1}{2G} \int_0^{r_0} r'^2 2r\pi dr, \quad \text{при} \quad r' = \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{r}{r_0},$$

и для напряжения в упругой части этот интеграл даст

$$A_I = \frac{4k^2\pi}{3Gr_0^2} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{k^2 r_0^2 \pi}{3G};$$

для работы II вида:

$$A_{II} = \frac{2k^2\pi}{3G} (b^2 - r_0^2);$$

для работы III вида, согласно уравнению (3), имеем:

$$A_{III} = \int_{r_0}^b (\kappa + \lambda) \gamma^2 2r\pi dr \quad \text{и, так как} \quad \lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}} \gamma^{-1},$$

$$\gamma = \frac{2k}{\sqrt{3\kappa}} \left(-1 + \frac{r}{r_0} \right),$$

то

$$A_{III} = \frac{8k^2\pi}{3\kappa} \left\{ \int_{r_0}^b r \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^2 dr + \int_{r_0}^b r \left(-1 + \frac{r}{r_0} \right) dr \right\},$$

$$A_{III} = \frac{b^4\pi}{24\kappa} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \{ 3 - 4\eta + \eta^4 \}.$$

В итоге, следовательно, получаем:

$$A_{\text{упр}} = \frac{2}{3} \frac{k^2}{G} b^2 \pi \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \right), \quad (15a)$$

и, принимая во внимание уравнение (14), имеем:

$$A_{\text{трел.}} = -Q \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (15b)$$

т. е. при всех η опять получили известное для случая вязкой жидкости значение, которое, разумеется, можно было бы написать сразу. Если найдены физические постоянные κ и k , можно браться и за более трудные краевые задачи, как, например, плоская задача прокатки обжимного прокатного катка. При этом всегда надо помнить, что к решению дифференциальных уравнений (9) нельзя подходить классическими методами, но они доступны численному интегрированию. В частности, это относится к плоской задаче, для которой можно ввести функцию тока.

3. Испытание на растяжение и неустойчивость однородной пластической деформации¹⁾. Следующим простым примером применения нашей теории, который также допускает строгое интегрирование, служит испытание на растяжение цилиндрического стержня круглого сечения (радиус r). Мы возвращаемся к уравнениям (12), которыми можем здесь воспользоваться без изменения. Так как в данном случае, в силу симметрии, $\gamma = 0$, то (предполагая, во-первых, однородные удлинения) все величины не должны зависеть от координаты z . Кроме того, ϵ_z , конечно, не будет зависеть и от r , $\epsilon_r = \epsilon_t$, а в силу равенства $\epsilon_z + \epsilon_t + \epsilon_r = 0$, $\epsilon_r = \epsilon_t = -\frac{1}{2}\epsilon_z$; в соответствии с этим $\lambda = \frac{2k}{3\epsilon_z}$. Пользуясь уравнениями (5) и (7), получаем для напряжений:

$$\sigma_r^s = \sigma_t^s = 2\lambda\epsilon_r - p = -\frac{2k}{3} - p,$$

$$\sigma_z^s = 2\lambda\epsilon_z - p = +\frac{4k}{3} - p,$$

и далее:

$$\sigma_r^r = \sigma_t^r = -\kappa\epsilon_z, \quad \sigma_z^r = +2\kappa\epsilon_z.$$

¹⁾ Строгая постановка вопроса об устойчивости вязко-пластического течения и решение задачи об устойчивости растяжения полбсы принадлежат А. А. Ильюшину [13]. Растяжение цилиндрического образца рассмотрено А. Ю. Ишлинским. (Прим. ред.)

Благодаря тому, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, имеем:

$$\sigma_r^s + \sigma_r^r = \sigma_t^s + \sigma_t^r = -\frac{2}{3}k - p - \kappa \varepsilon_z = 0,$$

откуда

$$-p = \frac{2}{3}k + \kappa \varepsilon_z$$

и в связи с этим

$$\sigma = \sigma_z^s + \sigma_z^r = \frac{4}{3}k - p + 2\kappa \varepsilon_z = 2k + 3\kappa \varepsilon_z.$$

При скорости растяжения $\frac{\partial w}{\partial z}$ стержень, следовательно, может выдержать напряжение величиной

$$\sigma = 2k + 3\kappa \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (16)$$

И здесь опять избыток напряжения над пределом текучести $2k$ компенсируется скоростью деформации. Совершенно так же как обычно строится диаграмма напряжения — удлинения, можно построить и диаграмму напряжения — скорости удлинения.

Мы видим, что только эта последняя диаграмма имеет физический смысл за пределом текучести. На измерение скорости деформации при испытании на растяжение обычно обращают мало внимания; благодаря этому возникают недоразумения, и, в частности, может получиться неправильное суждение относительно явлений упрочнения.

Предположим теперь, что стержень растягивается постоянной силой P так, что $\sigma = \frac{P}{r^2 \pi} > 2k$. Беря $\frac{\partial w}{\partial z}$ за скорость удлинения, находим значение радиальной скорости на поверхности цилиндра $u_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \cdot r$ и увеличение радиуса за время dt :

$$dr = -\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \cdot r dt, \quad \text{или} \quad \frac{2dr}{r \cdot dt} = -\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Дифференцируя уравнение (16), получаем:

$$\frac{dz}{dt} = 3\kappa \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

и дифференцирование $\sigma = \frac{P}{r^2 \tau}$ даст

$$\frac{dz}{dt} = - \frac{P}{r^2 \tau} \cdot \frac{2dr}{r \cdot dt} = \sigma \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Приравнявая производные $\frac{dz}{dt}$, следовательно, имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left(\beta + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (17a)$$

причем $\beta = \frac{2k}{3\kappa}$ есть физическая постоянная с размерностью угловой скорости. Полагая

$$m = 1 + \frac{\beta}{\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0} = \frac{1}{1 - \frac{2k}{\sigma_0}},$$

где индекс 0 обозначает значение соответствующих величин в момент времени $t=0$, получаем в результате интегрирования следующее уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{\beta e^{\beta t}}{m - e^{\beta t}}. \quad (17b)$$

Если f_0 — площадь поперечного сечения в момент времени $t=0$, то площадь поперечного сечения в момент времени t будет:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 \{ m - e^{\beta t} \} = \left(\frac{\sigma_0}{2k} - 1 \right) (m - e^{\beta t}). \quad (17c)$$

Поперечное сечение уменьшается до нуля по истечении времени T , которое определяется из равенства $m = e^{\beta T}$; следовательно,

$$T = \frac{1}{\beta} \ln m, \text{ или } T = \frac{3\kappa}{2k} \ln \frac{1}{1 - \frac{2k}{\sigma_0}}. \quad (18)$$

Для всех точек, не совпадающих с началом координат, которое предполагается неподвижным, скорости будут бесконечно велики, если пластические удлинения являются однородными. Стержень должен по истечении времени T просто исчезнуть. В действительности же процесс протекает так, что в случайно ослабленном месте образуется сужение, прогрессивное продвижение которого легко объясняется уравнением (16).

Темп сужения остальных сечений отстает от темпа сужения шейки. В совершенно пластическом (не хрупком) материале поперечное сечение фактически стянулось бы в точку.

Пластическое течение не будет теперь, разумеется, уже больше стационарным, и мы должны изменение поперечного сечения выражать через производную по времени. Мы, следовательно, должны заменить в вышеприведенных выкладках $\frac{d}{dt}$ через $\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial z}$.

Оставаясь в непосредственной близости шейки, можно, пренебрегая членом $w \frac{\partial}{\partial z}$, сохранить приведенные выше выкладки, предполагая, конечно, равномерное распределение напряжений по поперечному сечению.

Уравнение (17с) даст для каждого момента времени соответствующую величину поперечного сечения вплоть до разрыва стержня, а уравнение (8) — время до самого разрыва. При экспериментальной проверке этих формул может обнаружиться искажающее влияние упрочнения, которое мы не смогли учитывать.

Мы нарочно ограничились пока такими примерами, в которых решение уравнений не представляет никаких трудностей и позволяет выявить механический смысл выведенных нами зависимостей, избегая по возможности трудности чисто вычислительного характера. На величины, от которых все зависит, а именно, предел текучести и коэффициент трения, сильное влияние оказывают температура и обработка материала. Задача экспериментального исследования — выявить эти

зависимости. Это исследование связано с установлением основ такой отрасли учения о прочности, которая, по меньшей мере, так же велика для практических приложений, как и классическая теория упругости, которая не может уже отвечать задачам технологической механики.

В последнее время исследования в области технологической механики большое внимание уделяют изучению микроструктуры.

Значение этих исследований нельзя недооценивать, но говорить о создании точной науки можно лишь тогда, когда в основу будет положена механическая теория феноменологического характера, которая, с одной стороны, разъясняет вещи, не имеющие отношения к кристаллической структуре, а с другой — определяет новые понятия, как, например, твердость и упрочнение.

ОПЫТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВЫЯСНЕНИЕМ ВОПРОСА
ОБ ОПАСНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ *)

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

I. Теория прочности. Старые теории, относящиеся к нарушению внутреннего упругого равновесия при переходе за предел упругости (или соответственно — опасности разрушения), а именно:

гипотеза наибольшего главного напряжения,

гипотеза наибольшего положительного главного удлинения и

гипотеза внутреннего трения

не могут считаться верными, так как они противоречат данным испытаний.

Теория наибольшего касательного напряжения Геста, Мора [24], [25], [26] для вязких тел опиралась на более старые опыты. Опыты над вязкими материалами (литое железо, медь, сталь) должны были дать при пределе упругости, или соответствующем пределе текучести, приблизительно постоянное значение разности между наибольшим главным напряжением σ_1 и наименьшим главным напряжением σ_3 , совершенно независимо от величины среднего главного напряжения σ_2 . Наибольшее касательное напряжение должно стремиться к постоянному значению:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \text{const.} \quad (1)$$

Опыты Кармана [27] над хрупкими телами (мрамор и песчаник), которые обнаруживали при всестороннем давлении более или менее ясно выраженный предел текучести, очень хорошо подтвердили такое представление относительно условия текучести.

*) Verhandl. des II Internationalen Kongr. für techn. Mech., Zürich (1926). Первая часть написана Рошем. (Прим. ред.)

Бекер^[28] проводил опыты на разрыв при всестороннем сжатии и установил, что вопреки предположению Мора имеет место влияние на предел текучести среднего главного напряжения. Он выявил отклонения от 9 до 11%.

Более поздние опыты американских исследователей над сталью вполне строго установили, что предел текучести при кручении равняется:

$$\tau_{\max} \cong \begin{cases} 0,6 \sigma_s & \text{(где } \sigma_s \text{ — предел текучести при} \\ & \text{растяжении),} \\ 0,6 \sigma_q & \text{(где } \sigma_q \text{ — предел текучести при} \\ & \text{сжатии),} \end{cases}$$

т. е. больше чем $\tau_{\max} = 0,5\sigma_s$, согласно теории Мора.

В 1904 г. проф. Губер^[29] установил новую теорию, приняв постоянство работы изменения формы в качестве критерия предельного состояния материала. Одинаковое условие пластичности вывели с несколько отличным обоснованием и независимо друг от друга проф. Мизес (1913 г.; этот сборник, стр. 57) и проф. Генки (1924 г.; этот сборник, стр. 114). Это условие пластичности, выраженное через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, имеет вид:

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) = 4k^2, \quad (2)$$

где $2k$ обозначает предел текучести при одноосном напряженном состоянии. Следовательно, k является постоянной для данного материала.

Из этой зависимости следует, что в противоположность утверждению Мора среднее главное напряжение σ_2 должно оказывать влияние на предел текучести.

Более подробное рассмотрение условия пластичности Губера—Генки показывает, что оно справедливо в самом общем случае, начиная от начала возникновения первой пластической деформации и до момента, непосредственно предшествующего пределу разрушения. Существуют, однако, многие двух- и трехосные напряженные

состояния, для которых верна теория Мора при напряжениях вблизи предела текучести и на пределе текучести, и, следовательно, она удовлетворяет условию пластичности, как частный случай.

II. Опытная установка и опытные образцы. 29 полых стержней были подвергнуты испытанию при сжатии, растяжении и кручении одновременно, с внутренним давлением и без него.

Таким путем можно было получить самые разнообразные трехосные напряженные состояния.

При помощи специального для этой цели сконструированного мультипликатора, вмонтированного в пресс Амслера, создавалось внутреннее давление p . Все без исключения опытные образцы, сделанные из тщательно отобранного материала и взятые из одного и того же прутка, подвергались холодной обработке. Каждый образец подвергался испытанию только один раз.

III. Теоретические обоснования. Если принять главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ за декартовы координаты точки, предельное состояние по Мору ($\sigma_1 - \sigma_3$) = $2k$ (предел упругости, предел текучести, предел разрушения) изобразится поверхностью правильной шестиугольной призмы. Ребра призмы лежат на круглом цилиндре, радиус которого равен

$$2k \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

В пересечении этой призмы с плоскостью σ_1, σ_2 получается шестиугольник. Крайние точки на осях σ_1 и σ_2 соответствуют значениям $2k = 2\tau = \text{const}$. Ось призмы образует с положительными направлениями координатных осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ одинаковые углы

$$\varphi = 54^\circ 40' \quad \left(\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad [31].$$

Условие пластичности, выражающее постоянство работы изменения формы по Губеру — Генки, записанное через

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, дано уравнением (2). Оно может быть представлено в виде круглого цилиндра, описанного около шестиугольной призмы (рис. 1).

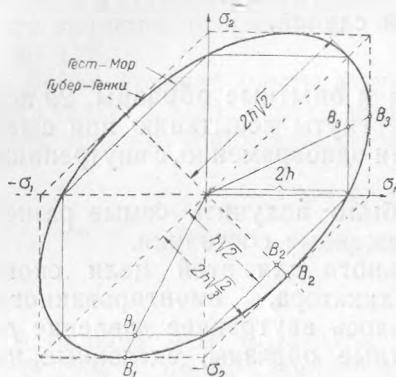


Рис. 1.

напряженном состоянии будет наибольшей в точках B_1, B_2, B_3 и достигнет 15% (рис. 1, 2). Поскольку, как по теории

Геста — Мора, так и по теории Губера — Генки, выражения, содержащие главные напряжения (левая часть уравнения), являются функциями внутреннего давления p и, с другой стороны, постоянная материала k (правая часть уравнения) может быть точно определена путем испытания на одноосное растяжение или соответствующее сжатие, можно было численно

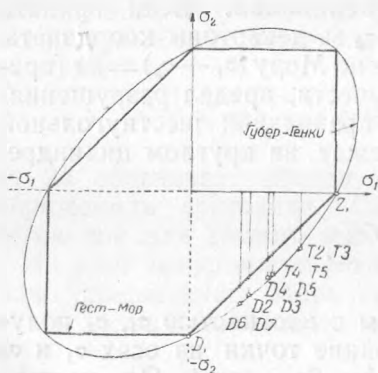


Рис. 2.

определить значение p , соответствующее отдельным сложным напряженным состояниям, которые следует ожидать по теориям Геста — Мора и Губера — Генки,

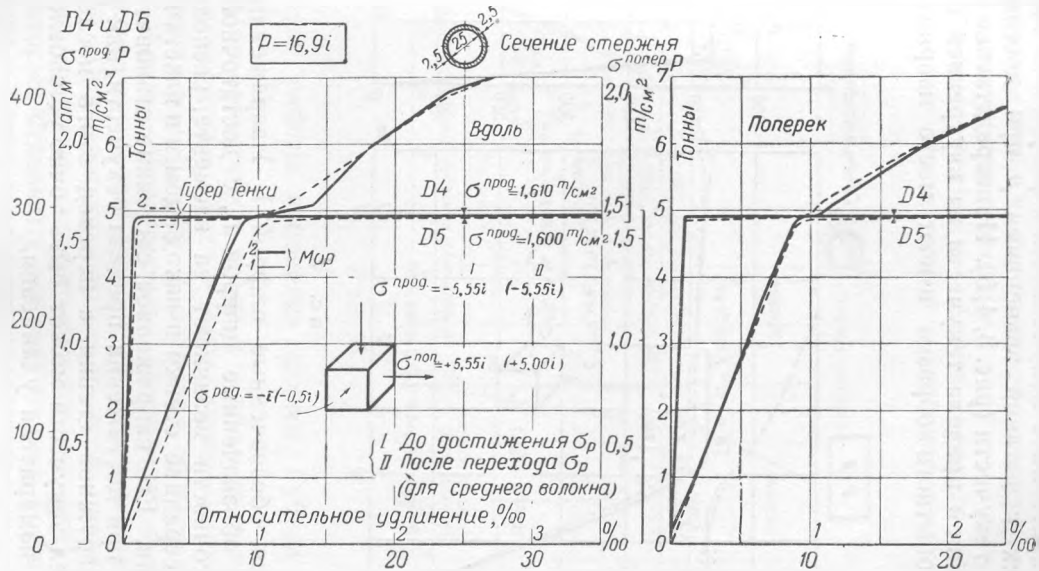


Рис. 3.

и сопоставить их с полученными в результате соответствующих испытаний значениями p при достижении предела текучести (рис. 3, 4, 5). Непосредственно перед достижением предела текучести на внутренней стенке полого опытного образца имеют место напряженные

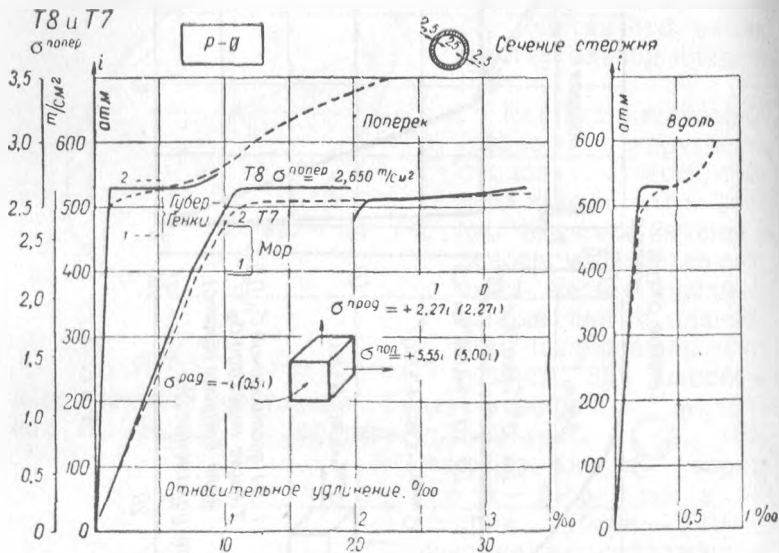


Рис. 4.

состояния, обозначенные цифрой I. Напряженные состояния, обозначенные цифрой II, с достаточной степенью точности возникают на элементе, расположенном по середине стенки и находящемся в пластическом состоянии. Его напряженное состояние становится таким же при достижении предела текучести, как у элемента наружной стенки, а переход этого последнего за предел текучести может быть точно установлен при помощи измерителя удлинения.

IV. Общая сводка и выводы. На основе опытов, проведенных Е. М. Р. А. [32] над полыми образцами из вязкой кремнемарганцевой стали весьма однородного

свойства на растяжение, сжатие и кручение без внутреннего давления и с внутренним давлением, можно сделать следующие выводы:

1. Данные опытов в области предела текучести обнаруживают почти точное совпадение с теорией по-

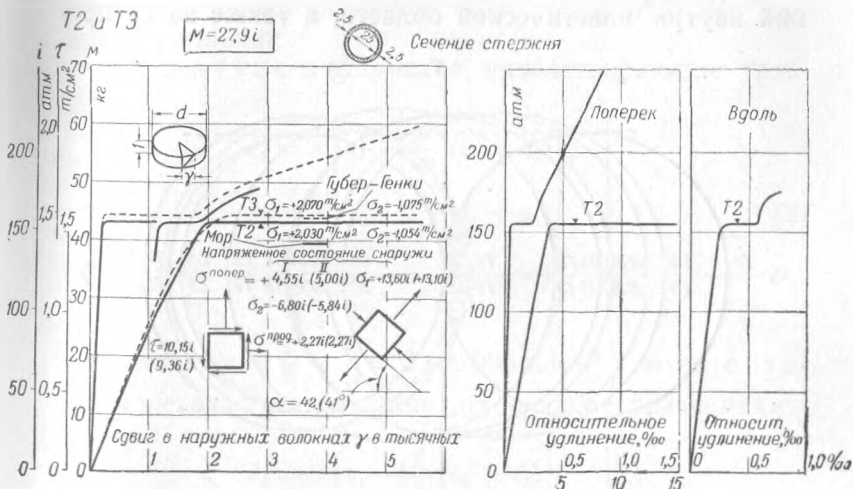


Рис. 5.

стоянства работы изменения формы Губера — Генки (рис. 3, 4, 5).

2. При сравнении с теорией наибольшего касательного напряжения Геста — Мора данные опытов дают отклонения до 15% (рис. 2). Значения, соответствующие теории Геста — Мора, меньше. Построение огибающей в понимании Мора становится здесь невозможным (рис. 6). При помощи опытов со всей очевидностью выявлено влияние среднего главного напряжения [33, 34]. В некоторых отдельных случаях теории Геста — Мора и Губера — Генки совпадают полностью.

Теория Геста — Мора становится справедливой при использовании практически очень часто применяемого приближения.

3. Опыты устанавливают тот факт, что вязкие материалы с ярко выраженным пределом текучести не теряют в пластической области своей квази-изотропии. Течение происходит во всех направлениях одновременно (рис. 3, 4, 5).

4. Коэффициент Пуассона для напряженных состояний внутри пластической области, а также за ее пре-

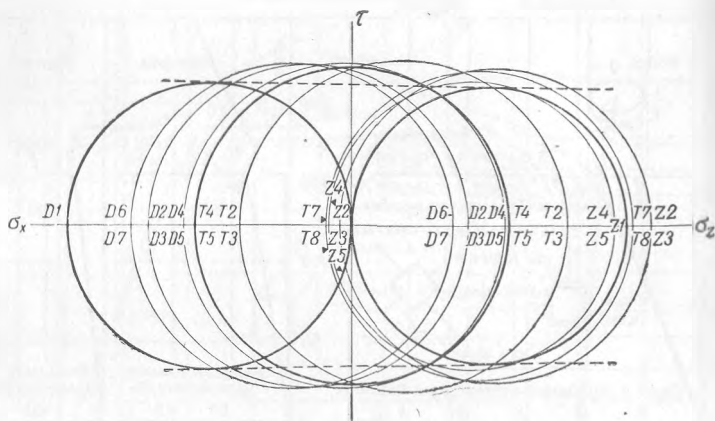


Рис. 6.

делами, будучи отнесенным к остаточным деформациям, с достаточной точностью равен $\frac{1}{2}$ (рис. 5).

ВТОРАЯ ЧАСТЬ*)

На основе настоящих опытных данных была сделана попытка, зная характер процесса деформации, до и особенно после перехода за предел упругости, или, соответственно, предел текучести, получить новое доказательство справедливости зависимости

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = 4k^2. \quad (2)$$

Придерживаясь теории Мора и получая лучшую согласованность с опытными данными, это и было до-

*) Вторая часть написана Эйхингером. (Прим. ред.)

стигнуто. Таким образом, нас будет интересовать в первую очередь вопрос о том, как определить поведение материала при любом напряженном состоянии, если точно известны его свойства прочности при одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Настоящими опытами над сталью доказывалось, что полные деформации могут быть разделены на две части, а именно:

на упругие деформации, удовлетворяющие уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \alpha \left[\sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ e_2 &= \alpha \left[\sigma_2 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ e_3 &= \alpha \left[\sigma_3 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(для стали $m = \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{\alpha} = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$), и на остаточные деформации, удовлетворяющие уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \delta \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \epsilon_2 &= \delta \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ \epsilon_3 &= \delta \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ суть главные напряжения. В уравнениях (4) $m=2$ имеет силу только для малых деформаций; для больших деформаций m должно быть выведено из условия: изменение объема $\Delta V = 0$. Материал остается после этого и дальше изотропным.

Теория Мора не учитывает обусловливаемого уравнением (4) факта, так как по этой теории скольжение должно иметь место только на тех плоскостях, которые содержат наибольшее касательное напряжение. Следовательно, размеры тела не должны претерпевать изменения в направлении среднего главного напряже-

ния σ_2 и вообще должно быть $\epsilon_3 = 0$. Но так как это в действительности не имеет места, то первая часть гипотезы Мора должна быть дополнена следующим образом.

Остаточные деформации осуществляются через перемещения в тех плоскостях скольжения, которые идентичны с плоскостями главных касательных напряжений. Однако легко усмотреть, что деформации,

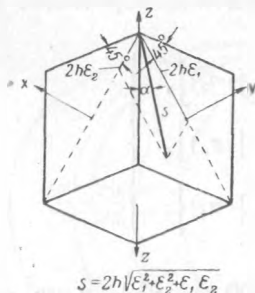


Рис. 7.

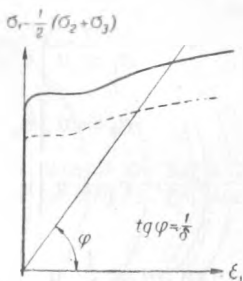


Рис. 8.

выраженные уравнениями (4), осуществляются уже при наличии двух систем этих плоскостей скольжения (например, стоящие вертикально к плоскостям YZ и XZ), что в дальнейшем, ради простоты, и принимается. Эти две составляющих перемещения должны равняться, согласно уравнениям (4): $2h\epsilon_1$ и $2h\epsilon_2$, где h обозначает постоянное расстояние между этими плоскостями скольжения (рис. 7). Результирующее перемещение равно:

$$s = 2h \cdot \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_1\epsilon_2}, \quad (5)$$

или по подстановке значений из уравнений (4):

$$s = \delta h \sqrt{3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)}. \quad (6)$$

Вполне правдоподобно, что степень напряжения будет зависеть от этого результирующего перемещения, чем и может быть дополнена вторая часть гипотезы Геста — Мора.

Мерой предельного напряжения служит величина результирующего перемещения в результирующей плоскости перемещения, или (что легко может быть показано) касательного напряжения в этой плоскости.

При одноосном растяжении, полагая $\sigma_s = 2k$, имеем:

$$s_{\text{раст.}} = \delta h \sigma_s \sqrt{3} = \delta h 2k \sqrt{3}. \quad (7)$$

Нужно еще выяснить вопрос, когда предельное напряжение вязких тел при двух различных напряженных состояниях будет одинаковым. Повидимому, в соответствии с вышеизложенным, на это имеется только один ответ, а именно:

При двух различных напряженных состояниях предельное напряжение будет там одинаково, где значения δ совпадают друг с другом (рис. 8), следовательно, там, где модули пластичности $\frac{1}{\delta}$ одинаковы. (В пределах упругости там, где модули упругости $E = \frac{1}{\alpha}$ одинаковы.)

Если это используем в уравнениях (6) и (7), то придем к зависимости:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = 4k^2. \quad (2)$$

Этот результат точно согласуется с тем результатом, который получается из гипотезы постоянства работы изменения формы Губера — Мизеса — Генки.

Опыты показали, что эта зависимость имеет силу начиная от нулевой нагрузки и вплоть до разрушения.

ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ГЛАВНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА ТЕКУЧЕСТЬ МЕТАЛЛОВ *)

I. Переход от упругого к пластическому состоянию устанавливается тем легче, чем лучше известно каждое из этих состояний. Этот переход происходит иногда настолько постепенно, что не представляется возможным установить вполне определенную величину предельного напряжения, и кроме

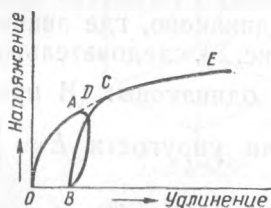


Рис. 1.

того этот переход зависит от предистории данного материала, которая не оказывает заметного влияния на чисто пластическое поведение материала (последствие, эффект Баушингера, старение). В настоящей работе мы исследуем поэтому чисто пластическое поведение металлов, понимая под этим такое поведение металла, при котором на диаграмме напряжения — удлинения (рис. 1) не обнаруживается никаких следов последствия после разгрузки и следующего за ним повторного нагружения (кривая *ABC*), т. е. при котором зависимость деформации от напряжения такая же, как если бы никакой разгрузки не было (кривая *ODE*). Мы будем называть такой процесс чисто пластической деформации „текучестью“ и необходимые для этого напряжения — „напряжениями текучности“. Для них, следовательно, нужно ожидать с физической точки зрения более простых закономерностей, чем, например, для предела пропорциональности.

II. Прежде всего поставим себе вопрос о том, существует ли такая величина напряжения, которая при

*) Forschungsarbeiten auf d. Gebiete des Ing., H. 303 (1928).

процессе текучести хотя и будет менять свое значение в зависимости от степени получающегося удлинения (упрочнение), но значение которой при каждой определенной степени удлинения не будет зависеть от вида нагрузки (растяжение, сжатие, кручение и т. д.). Если такая величина имеется, то мы можем получить условие пластичности, приравнивая эту величину определенной постоянной (зависящей, помимо величины удлинения, в незначительной степени и от скорости течения). К этому условию пластичности мы можем свести все высказанные ранее гипотезы частью относительно предела пропорциональности, предела упругости и предела текучести, а частью и относительно предела прочности.

Обозначим через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ главные напряжения, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, считая сжимающие напряжения отрицательными растягивающими напряжениями. Поскольку целесообразно рассматривать по отдельности зависимость условия текучести от среднего напряжения

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

и от среднего главного напряжения σ_2 , введем еще одно число:

$$\mu = \frac{\frac{\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \quad (1)$$

причем $-1 \leq \mu \leq +1$. Оно будет служить для того, чтобы выразить величину среднего главного напряжения через величины обоих крайних главных напряжений, и выбрано так, что

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \mu \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Далее для характеристики напряжений при наиболее важных видах нагрузки вводятся обозначения σ_{zz} , σ_{φ} , $\sigma_{\rho\rho}$, σ_D и τ_s следующим образом:

1) Равномерное растяжение по двум взаимноперпендикулярным направлениям:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = +\sigma_{zz} > 0; \quad \sigma_3 = 0; \quad \bar{\sigma} = \frac{2}{3}\sigma_{zz}; \quad \mu = +1.$$

2) Осевое растяжение:

$$\sigma_1 = +\sigma_z > 0; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma_z; \quad \mu = -1.$$

3) Кручение относительно одной оси (чистый сдвиг):

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_s > 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \bar{\sigma} = 0; \quad \mu = 0.$$

4) Осевое сжатие:

$$\sigma_3 = -\sigma_D < 0; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \bar{\sigma} = -\frac{1}{3}\sigma_D; \quad \mu = +1.$$

5) Равномерное сжатие по двум взаимноперпендикулярным направлениям:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{DD} < 0; \quad \sigma_1 = 0; \quad \bar{\sigma} = -\frac{2}{3}\sigma_{DD}; \quad \mu = -1.$$

Между введенными таким путем величинами должны существовать во время процесса текучести, согласно различным гипотезам, следующие зависимости:

а) Условие наибольшего нормального напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \text{const} \quad \text{при} \quad +\sigma_1 \geq |\sigma_3| \geq 0, \\ \sigma_3 &= \text{const} \quad \text{при} \quad -\sigma_3 \geq |\sigma_1| \geq 0, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_z = \tau_s = \sigma_D = \sigma_{DD}. \end{aligned}$$

б) Условие наибольшего удлинения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} &= \text{const} \quad \text{при} \quad +\sigma_1 \geq |\sigma_3| \geq 0, \\ \sigma_3 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{m} &= \text{const} \quad \text{при} \quad -\sigma_3 \geq |\sigma_1| \geq 0, \\ \frac{m-1}{m}\sigma_{zz} = \sigma_z &= \frac{m+1}{m}\tau_s = \sigma_D = \frac{m-1}{m}\sigma_{DD}, \end{aligned}$$

где m обозначает коэффициент Пуассона,

с) Предположение о том, что постоянной остается не абсолютная наибольшая величина деформации, а алгебраически наибольшая, настолько противоречит произведенным измерениям над пластическими металлами, что мы его исключаем из рассмотрения.

д) Условие наибольшего касательного напряжения:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \text{const}; \quad \sigma_{zz} = \sigma_z = 2\tau_s = \sigma_D = \sigma_{DD}^1).$$

е) Условие постоянства работы деформации:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \frac{\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2}{m} = \text{const},$$

$$\sqrt{2 \frac{m-1}{m}} \sigma_{zz} = \sigma_z = \sqrt{2 \frac{m+1}{m}} \tau_s = \sigma_D = \sqrt{2 \frac{m-1}{m}} \sigma_{DD}.$$

ф) Условие работы изменения формы.

Под термином работы изменения формы подразумевается часть работы деформации, зависящая только от разностей главных напряжений:

$$\frac{m+1}{6mE} [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2].$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \\ & = 2 [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \quad (2) \\ & = \frac{3 + \mu^2}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_z = \sqrt{3} \tau_s = \sigma_D = \sigma_{DD}.$$

Кроме того, в литературе встречаются следующие обобщения вышеприведенных условий пластичности.

г) А. Бекер^[16] пришел на основании своих измерений к выводу, что у железа как касательное напряжение, так и абсолютная величина удлинения ограничены, причем предельное касательное напряжение τ_s на незначительную, определяемую из опыта, величину

¹⁾ Относительно несколько видоизмененного условия наибольшего нормального напряжения и условия наибольшего касательного напряжения см. Менаже^[35].

больше, чем половина предельного растягивающего напряжения σ_z , обусловливаемого предельным значением удлинения, и что пластическое поведение материала наступает, как только достигается одно из двух предельных значений.

Отсюда следует, что:

$$\sigma_{zz} = 2\tau_s = \sigma_{DD} > \sigma_z = \sigma_D.$$

Перечисленные ниже условия пластичности служат для проведения расчета по произведенным над материалами наблюдениям при большом всестороннем сжатии.

h) Кулон считает, что сопротивление твердых тел пластической деформации по своей природе напоминает трение твердых тел (внутреннее трение):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s - k(\sigma_1 + \sigma_3), \quad k \geq 0.$$

i) Мор считает, что значение касательного напряжения зависит от некоторой, определяемой опытным путем функции от действующего в том же элементе плоскости нормального напряжения. Это предположение приводит к зависимости между $(\sigma_1 - \sigma_3)$ и $(\sigma_1 + \sigma_3)$, в которую не входит среднее главное напряжение.

к) Зандель^[36] считает, что предельное значение наибольшего касательного напряжения уменьшается по линейному закону с увеличением среднего напряжения:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s - n \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad n \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{3}n\right)\sigma_{zz} &= \left(1 + \frac{1}{3}n\right)\sigma_z = 2\tau_s = \left(1 - \frac{1}{3}n\right)\sigma_D = \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}n\right)\sigma_{DD}. \end{aligned}$$

l) Гиртлер^[37] обобщил условие постоянства работы деформации, допустив, что с возрастанием всестороннего сжатия исчезает свойство сжимаемости, причем коэффициент Пуассона m стремится к 2. Эта гипотеза ничего не говорит о том, как изменяется вторая из

двух упругих постоянных при всестороннем сжатии. Соответствующим образом произведенная формулировка приводит к тем же равенствам, что и две следующие формулировки, изложенные ниже в пунктах *m* и *n*.

м) Шлейхер^[38] также обобщил приведенное в пункте (е) условие пластичности, причем он принял предельное значение работы деформации зависящим от среднего напряжения $\bar{\sigma}$:

$$2EA = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \frac{\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2}{m} = \varphi(\bar{\sigma}),$$

или после преобразования:

$$3 \frac{m-2}{m} \bar{\sigma}^2 + \frac{m+1}{m} [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] = \varphi(\bar{\sigma}).$$

п) Используя идеи Мора (i), Занделя (k) и Шлейхера (m), можно обобщить каждое из приведенных в пунктах а) — г) условий пластичности. Так, например, можно условие работы изменения формы обобщить следующим образом:

$$\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2}{3} = \psi(\bar{\sigma}).$$

Две последние формулы выражают одно и то же, поскольку между входящими в них функциями φ и ψ существует зависимость

$$\psi(\bar{\sigma}) = \frac{m\varphi(\bar{\sigma}) - 3(m-2)\bar{\sigma}^2}{m+1}.$$

Но, несмотря на это, они ни в коем случае не являются эквивалентными. Напротив, поскольку они должны выражать получающееся опытным путем условие пластичности, нужно брать ту из них, для которой опыты дают более слабую зависимость функции φ или ψ от среднего напряжения $\bar{\sigma}$, так как в выбранной таким путем формуле можно с меньшей ошибкой заменить эмпирически найденную функцию φ или ψ некоторой

постоянной для более простого расчета, или для физического объяснения.

Предположение Гиртлера (1) можно предпочесть обоим последним формулам пунктов (m) и (n) только в том случае, если предлагаемая зависимость между условием пластичности и поведением упругих постоянных устанавливается при значительном всестороннем сжатии.

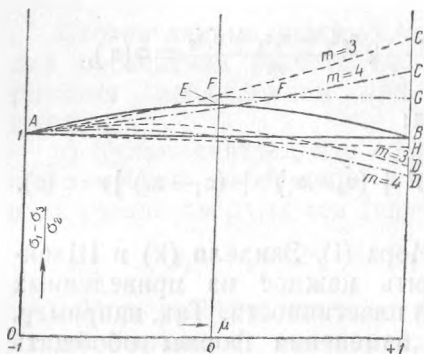


Рис. 2.

Предполагаемые результаты, вытекающие из некоторых вышеперечисленных гипотез, графически представлены для определенных частных случаев на рис. 2.

III. Прежде чем переходить к испытаниям отдельных материалов для выяснения вопроса о том, какое

из условий пластичности к ним лучше всего подходит, мы должны упомянуть о том предположении, которое нами без оговорки уже делалось и которое мы будем делать в дальнейшем. Мы считаем, что упрочнение является направленным процессом, т. е. что элемент тела, который до пластической деформации был квази-изотропен, остается квази-изотропным и после нее. Для подтверждения этой гипотезы мы можем указать на тот часто наблюдаемый факт, что у листового железа, материал которого сильно растягивался в одном направлении при испытании, величины коэффициентов прочности (предел упругости, прочность на разрыв), измеренные на опытных образцах, вырезанных из листа в направлении прокатки и перпендикулярно к ней, лишь очень мало отличаются друг от друга. Поэтому влияние ориентации при малых удлинениях, при которых поворот плоскостей скольжения в материале еще

не заметен, очень незначительно и становится заметным лишь при таких удлинениях, при которых исчезновение квази-изотропии можно установить микроскопическим или рентгенографическим путем.

Мы здесь перечислим старые экспериментальные работы, которые проводились для определения условия пластичности, или такие работы, данными которых по крайней мере можно воспользоваться для этой цели: Баушингер^[39], Фарлан^[40], Платт и Хейвард^[41], Унвин^[42], Фёпль^[43].

Из более новых работ мы приведем только наиболее существенные для настоящего исследования опытные данные.

Гест^[25] подвергал тонкостенные трубы из железа, меди и латуни осевому растяжению, внутреннему давлению и кручению, произведя над каждым опытным образцом несколько испытаний. Он приходит к выводу, что при его испытаниях у предела упругости и у предела текучести из всех величин напряжений и удлинений лучше всего сохранялось постоянство наибольшего касательного напряжения. Действительно, на диаграмме $\sigma_x - \sigma_y$ (третье главное напряжение равно внутреннему давлению и, следовательно, мало по сравнению с двумя другими главными напряжениями) точки, соответствующие данным измерений на железных трубах, группируются вблизи соответствующего условию наибольшего касательного напряжения шестиугольника. Данные измерений при чистом кручении

$$0,46\sigma_z < \tau_s < 0,59\sigma_z$$

особенно противоречат условию наибольшего нормального напряжения, а данные опытов при двустороннем растяжении

$$0,96\sigma_z < \sigma_{zz} < 1,00\sigma_z$$

противоречат условию наибольшего удлинения, а также гипотезе Бекера (соединение условия наибольшего касательного напряжения с условием наибольшего удлинения). Наоборот, измерения согласуются и с условием постоянства работы деформации и с условием

Занделя и, правда несколько хуже, с условием работы изменения формы. Для того чтобы выбрать между этими тремя условиями и условием наибольшего касательного напряжения, они недостаточно точны.

Два измерения Кокера^[44] на стержне при кручении и на стержне при растяжении и кручении не привели к надежным выводам. Ханкок^[45] нагружал сплошные стержни и толстостенные сжатые трубы (повидимому, при начальных испытаниях они не подвергались отжигу; в позднейших опытах они были отожжены) осевым растяжением, осевым сжатием и кручением. Он определял пределы упругости на наружных волокнах. Из его измерений получаются для отношения τ_s/σ_z значения между 0,500 и 0,882, а для отношения τ_s/σ_D — значения между 0,704 и 0,438. По этим цифрам, благодаря их большой разбросанности, можно только судить о непригодности условия наибольшего нормального напряжения.

Скобль^[46] исследовал предел текучести цилиндрических железных стержней при кручении и изгибе.

При помощи формул теории упругости он вычисляет по каждому измерению при чистом кручении и при чистом изгибе предельные значения τ_s и σ_z , отношение которых составляет 0,45.

Но здесь необходимо указать на то, что при пластическом состоянии распределение напряжений при том же виде нагрузки может быть совершенно иным, чем при упругом напряженном состоянии. Если, как предлагает Надаи^[47], считать, что большие деформации возникают тогда, когда пластическая область распространилась по всему поперечному сечению, то наибольшее касательное напряжение τ_s и наибольшее растягивающее напряжение σ_z нужно вычислять по крутящему моменту $M_{кр.}$ и изгибающему моменту $M_{изг.}$ не из формул теории упругости

$$M_{кр.} = \frac{\pi d^3}{16} \tau_s, \quad (3a)$$

$$M_{изг.} = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_z \quad (3b)$$

(d — диаметр стержня),

а из формул, предполагающих равномерное распределение напряжений по всему поперечному сечению, а именно:

$$M_{кр.} = \frac{\pi d^3}{12} \tau_s, \quad (4a)$$

$$M_{изг.} = \frac{d^3}{6} \sigma_z. \quad (4b)$$

Эти формулы (4) дают, следовательно, для τ_s и σ_z значения, получающиеся из их значений, даваемых формулами (3) в результате умножения на $\frac{3}{4}$ и $\frac{3\pi}{16}$ соответственно. Это приводит к следующим результатам, получаемым из опытов Скобля:

$$\frac{\tau_s}{\sigma_z} = \frac{4}{\pi} \cdot 0,45 = 0,57.$$

Фактически, при каждом испытании на кручение и испытании на изгиб внутри образца остается еще упругое волокно или упругий слой. Следовательно, действительная величина отношения $\frac{\tau_s}{\sigma_z}$ при испытаниях Скобля должна находиться между 0,45 и 0,57. Эти числа соответствуют только теории наибольшего касательного напряжения, пожалуй еще условию Бекера и условию Занделя.

Людвиг^[48] и Людвиг и Шеу^[49] на основании результатов опытов на растяжение, кручение и сжатие над медью пришли к выводу о справедливости условия наибольшего касательного напряжения. Для объяснения того обстоятельства, что они обнаружили во время пластической деформации для $2\tau_s$ значение на 16% большее, чем значения σ_z и σ_D , они указали на разницу удлинений плоскостей скольжения при испытании на кручение, с одной стороны, и при испытании на растяжение и сжатие — с другой. Если принять, что напряжения текучести не зависят от удлинения в плоскости скольжения, то эти опыты должны подтверждать условие Бекера.

Мазон^[50] испытывал отоженные и неотоженные тонкостенные железные трубы при осевом растяжении, осевом сжатии и внутреннем давлении и определял те напряжения, при которых отчетливо выявлялась пластическая деформация. Его измерения дают следующие средние цифры:

$$\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_z} = 0,96; \quad \frac{\tau_s}{\sigma_z} = 0,64; \quad \frac{\sigma_D}{\sigma_z} = 1,13; \quad \frac{\sigma_{DD}}{\sigma_z} = 1,15.$$

Небольшое различие между средними значениями $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_z}$, $\frac{\sigma_D}{\sigma_z}$, $\frac{\sigma_{DD}}{\sigma_z}$ опровергает условие наибольшего удлинения и условие постоянства работы деформации, а также условие Бекера. Закономерность же, имеющаяся в значениях отношений

$$\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_z} < \frac{\sigma_D}{\sigma_z} < \frac{\sigma_{DD}}{\sigma_z},$$

указывает на слабую зависимость пластического касательного напряжения от среднего напряжения $\bar{\sigma}$, а именно, что касательное напряжение предела текучести в среднем увеличивается на 15% величины, на которую уменьшается среднее напряжение (по терминологии Занделя: $n = 0,15$).

Найденное для $\frac{\tau_s}{\sigma_D}$ значение 0,64 опровергает также и условие наибольшего нормального напряжения, наибольшего касательного напряжения и условие Занделя. Наоборот, оно мало отклоняется от результата, следующего из гипотезы работы изменения формы, по которой:

$$\tau_s = \frac{\sigma_z}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{3}}.$$

Если приближенно учесть влияние среднего напряжения формулой

$$\tau_s = \frac{\sigma_z + \sigma_D}{2\sqrt{3}};$$

то получим:

$$\frac{\tau_s}{\sigma_z} = \frac{1 + \frac{\sigma_D}{\sigma_z}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 + 1,13}{2\sqrt{3}} = 0,61.$$

Смит^[51] испытывал железные стержни при растяжении, сжатии и кручении. Графические изображения предела упругости не дают никакого закономерного отклонения от условия наибольшего касательного напряжения. По измерениям в другой серии опытов, путем вычислений для $\frac{\tau_s}{\sigma_z}$, получается среднее значение 0,55. Этим опять опровергаются условия наибольшего нормального напряжения и наибольшего удлинения.

Свои измерения над другими металлами Смит приводит, не делая из них никаких выводов.

Тёрнер^[52] испытывал отожженные тонкостенные железные трубы при растяжении, кручении и внутреннем давлении. За исключением двух выпадающих, по его мнению, значений 0,641 и 0,693, из его измерений предела текучести получается 17 значений $\frac{\tau_s}{\sigma_z}$ между 0,460 и 0,572 со средним значением 0,52. Опыты Тёрнера по определению предела упругости неотожженных труб при растяжении и внутреннем давлении очень немногочисленны и дают большой разброс.

Испытания на растяжение и кручение отожженных железных стержней дали для предела упругости четыре значения $\frac{\tau_s}{\sigma_z}$ — между 0,502 и 0,596.

Наконец, из измерений Тёрнера для предела упругости толстостенных труб при осевом растяжении, внутреннем давлении и кручении получилось восемь значений $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_z}$, которые, за исключением одного, выделяющегося из других, значения $2 \frac{\tau_s}{\sigma_z} = 1,26$, колебались между 1,02 и 1,12 (со средним значением 1,07) без заметной закономерной зависимости от μ . Эти последние

опытные данные Тёрнера лучше всего отвечают условию Бекера; однако отклонения от условия наибольшего касательного напряжения также только немного больше отклонений, происходящих за счет разбросанности опытных данных, связанной с точностью измерений.

Кук и Робертсон^[53] определяли на толстостенных трубах ту величину внутреннего давления, при которой прекращается линейная зависимость между расширением и внутренним давлением, и приняли, что она является той величиной внутреннего давления, при которой достигает предела упругости самый внутренний слой испытываемого образца. Кроме того, на том же материале измерялся предел упругости при чистом растяжении. Хей^[54] установил, что измерения хорошо согласуются с гипотезой работы изменения формы. Однако надо отметить, что гипотеза работы изменения формы не так хорошо согласуется с данными этих измерений, как гипотеза работы деформации, все же она совпадает в пределах точности измерений (за исключением измерений у самых толстых стенок), и, таким образом, эти испытания, по крайней мере, не опровергают условия работы изменения формы.

Кренфорд^[55] пришел к выводу из испытаний над круглыми плитами, что предел текучести лучше удовлетворяет условию наибольшего удлинения, чем условию наибольшего нормального напряжения.

Описание опытов над мрамором Кармана^[10, 27] и Бёкера^[28] здесь не приводятся из-за различия в свойствах испытываемого материала. Опыты Бекера над цинком для определения влияния всестороннего сжатия на предел текучести не дают никакого определенного вывода относительно влияния среднего главного напряжения.

Бекер^[16] испытывал тонкостенные железные трубы на осевое растяжение, осевое сжатие и внутреннее давление. На каждой кривой напряжения — удлинения он определял такую точку, у которой ее касательная образует с осью напряжения угол, тангенс которого в 1,5 раза больше тангенса угла, образуемого упругой

прямой с осью напряжения. Относительно установленного таким путем предельного напряжения он обнаружил, как уже было упомянуто в п. II, (g), что оно ведет себя так, как будто ни нормальное напряжение, ни касательное напряжение не переходят за предельное значение, а именно, из трех серий испытаний (причем опытный образец в каждой серии испытаний вырезался из одной и той же трубы); он нашел для отношения $\frac{\tau_s}{\sigma_z}$ следующие величины: 0,59; 0,62; 0,56. Измерения 1-й и 2-й серий этих испытаний противоречат описанным выше опытам других исследований, поскольку они дают для отношения $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_z}$ значения 1,18 и 1,24 вместо единицы.

Измерения 3-й серии испытаний согласуются с условием работы изменения формы и условием Занделя.

Сили и Путман ^[17] испытывали железные сплошные стержни и тонкостенные трубы при кручении, стержни при растяжении и стержни при сжатии. Из их измерений предела текучести получились средние значения $\frac{\sigma_z}{\sigma_D} = 0,98$; $\frac{\tau_s}{\sigma_z} = 0,61$, или соответственно 0,55, причем первое число получилось из опытов над трубами, а второе — из опытов над сплошными стержнями при предположении равномерного распределения касательного напряжения по поперечному сечению (см. уравнение 4a). Эти данные согласуются с условием работы изменения формы.

Что касается опытов Бонте ^[15], то Надаи ^[47] показал, что они с известным приближением согласуются с условием наибольшего касательного напряжения. Отметим одно обстоятельство: если принять по Надаи, что здесь были приложены нагрузки, при которых пластическая зона распространялась по всему поперечному сечению, то нельзя установить (поскольку в материале обнаруживалось появление предела текучести), не зная точно кривую напряжения — удлинения, по какому закону распределялись напряжения в момент непосредственно перед началом течения стержня в целом,

Вейгль и Кристин^[56, 57] испытывали отожженные стальные стержни при растяжении и кручении. Данные опытов близко подходят только к условию наибольшего касательного напряжения. Имеется еще одна работа Кристина^[59], которую автору не удалось получить.

Сейгль^[60] испытывал отожженные стальные стержни при сжатии и кручении. Измерения на стержне из девственного материала подтверждают условие наибольшего касательного напряжения, на растянутом стержне они согласуются только с условиями работы деформации, работы изменения формы, Бекера и Занделя.

Кристин^[58] опровергает условие наибольшего нормального напряжения, испытывая отожженные и неотожженные стальные проволоки при растяжении и сжатии.

Учитывая трудность установления точного момента перехода от упругого состояния материала к пластическому, можно считать все вышеперечисленные условия и при пластических напряжениях действительными только с ограниченной точностью. Тем не менее, можно сделать следующие выводы.

Примерное совпадение предельных значений σ_{zz} , σ_z , σ_D и σ_{DD} опровергает условие наибольшего удлинения, условие постоянства работы деформации, условие Бекера.

Закономерность, обнаруживающаяся в различии между этими предельными значениями

$$\sigma_{zz} \leq \sigma_z \leq \sigma_D \leq \sigma_{DD},$$

указывает на незначительное влияние среднего напряжения на предел текучести.

То, что измеренные предельные значения τ_s всегда оказываются много меньше соответствующих предельных значений σ_z , опровергает также условие наибольшего нормального напряжения.

Все приведенные выше результаты могут быть согласованы с одним из двух условий пластичности, а именно: условием максимального касательного напряжения и условием предельной работы изменения формы в обобщенных формулировках, допускающих влияние среднего напряжения (Мор, Зандель, Шлейхер), О том,

какое из этих двух условий пластичности лучше, данные измерений дают противоречивые ответы. Возможным объяснением этого противоречия могут служить опыты Сейгля, указывающие на изменение условия пластичности под влиянием остаточной деформации.

В противоположность этому утверждению, Шлейхер^[69] считает, что опыты Геста, Кармана и Бекера, а также и некоторые данные из известных ему (ниже описанных) опытов автора — напряженные состояния в момент начала пластичности — противоречат всем описанным выше условиям пластичности, за исключением только условия Занделя и обобщенного условия работы деформации.

Не говоря уже о том, что измерения Геста едва ли дают возможность, а измерения автора по существу вовсе не позволяют точно определить отдельно друг от друга влияние среднего главного напряжения и среднего напряжения на касательное напряжение предела текучести, нужно еще добавить, что, как уже было упомянуто в п. II, обобщенное условие работы деформации может быть рассматриваемо как обобщение условия работы изменения формы.

К причинам, которые могли препятствовать получению необходимой точности измерений для установления правильного условия пластичности, нужно прежде всего отнести уже упомянутый выше, большею частью нецелесообразный, выбор исследуемого предельного напряженного состояния; напряжения текучести измерялись только в нескольких из вышеперечисленных работ, а именно: в работах Кармана^[56], Людвига^[48] и Людвига и Шеу^[49].

В работах остальных исследователей, когда на каждом образце производилось несколько измерений при различных видах нагрузки, упрочнение не учитывалось.

При сравнении измерений на различных опытных образцах скажутся ошибки, связанные с изменениями поперечных сечений и с неустранимой, даже при самом тщательном соблюдении одинаковости предварительной обработки, неоднородностью материала. Отсюда следует, что в тех случаях, когда речь идет о неоднородных

напряженных состояниях, мы можем вычислить напряжения по нагрузкам при известных допущениях относительно зависимости между напряжениями и удлинениями лишь в квази-изотропных элементах, т. е. в тех частях тела, которые малы по сравнению с его размерами, но велики по сравнению с кристаллитами.

IV. Перейдем теперь к описанию собственных опытов автора, целью которых было определить условие пластичности с такой точностью, которая была бы достаточна для выбора между имеющимися гипотезами. Опыты, предпринятые по инициативе проф. Надаи, проводились в Институте прикладной механики Геттингенского университета.

В качестве материала для образцов были выбраны литое железо и медь. Железо ведет себя в девственном состоянии как упругое тело в широких пределах, тогда как в отожженной до мягкости меди остаточные удлинения возникают уже при небольших напряжениях. Те закономерности, которые выявились для двух столь различных металлов, должны, очевидно, сохраняться и для других металлов. Помимо меди и железа, испытанию подвергалась еще и никелевая труба. В качестве формы опытных образцов были выбраны тонкостенные круглые цилиндрические трубы, в качестве нагрузки — осевое растяжение и внутреннее давление. Такой вид испытаний имеет то преимущество, что возникающее в стенках трубы напряженное состояние очень мало отличается в различных слоях цилиндра и без особых допущений с достаточной точностью может быть вычислено по нагрузке только при помощи условий равновесия. Кроме того, возникающие в трубах процессы текучести не отличаются друг от друга, тогда как при испытаниях на растяжение и сжатие, с одной стороны, и испытаниях на кручение — с другой, площади скольжения в материале деформируются различным образом. Недостатком тонкостенных труб является трудность сделать стенку трубы всюду одинаковой толщины. Этот недостаток особенно чувствовался при проведении постоянных испытаний, так как имевшиеся в распоря-

жении вспомогательные приспособления (нагнетательный насос, электрическая печь) вынуждали к более сильному ограничению размеров образцов, чем это требовалось для достижения вышеперечисленных преимуществ опыта. Опытные образцы вырезались из тннутых без шва труб. Концы были приспособлены для закреп-

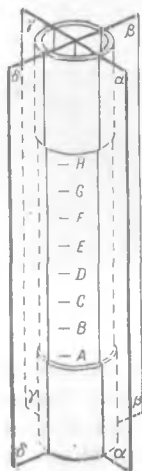


Рис. 3.

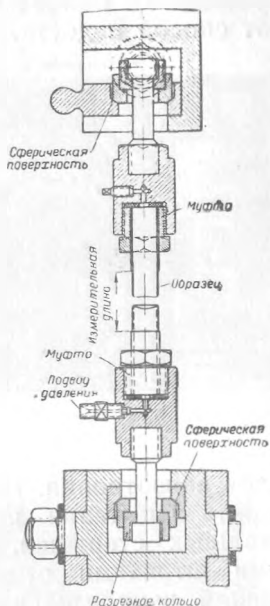


Рис. 4.

пления; расположенный между ними измерительный участок протачивался до желательной толщины стенки. Средние размеры следующие: внутренний диаметр $2\frac{1}{2}$ см, длина 30 см, длина измерительного участка 15 см (у железной трубы Fe III только 7 см), толщина стенок на измерительном участке 1 мм.

Для устранения, по возможности, анизотропии, получающейся при изготовлении, трубы подвергались отжигу в электропечи в струе водорода для уничтожения слоя окалины. Температура при этом измерялась термоэлементом. Медная труба Cu 5 подвергалась нагреву не в электрической печи, а в ванне с расплав-

ленной смесью из одинаковых частей азотнокислого натрия и азотистокислого натрия. Температура отжига была для трубы Сп 5 585° , у других медных труб — от 600 до 650° , у железных труб 950° и у никелевой трубы 920°C . Более поздние исследования выявили, что этот способ недостаточен для полного устранения всех

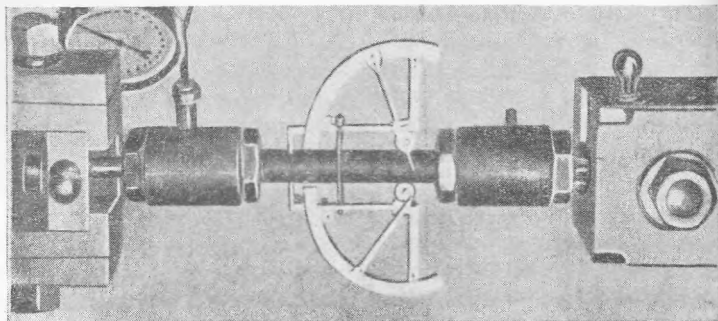


Рис. 5.

видов анизотропии. Поэтому было бы желательно повторить испытания над трубами, изготовленными из сплошных стержней. Для снятия измерений чернильными штрихами отмечались несколько поперечных сечений измерительного участка, расположенных на расстоянии 1 см друг от друга (A, B, C, D и т. д. на рис. 3), и четыре продольных сечения, отстоящих друг от друга на 90° ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ на рис. 3).

Испытания проводились на 15-тонной разрывной машине с подвижным грузом системы Мора и Федергоффа. Устройство зажимов показано на рис. 4 и 5. При этом медные и никелевая трубы вставлялись в муфты, а железные трубы ввинчивались при помощи сделанной на концах нарезки. Напорный трубопровод шел к нагнетательному насосу с прецизионным манометром.

Для измерения удлинения опытного образца внутри измерительного участка служил роликовый прибор, изображенный на рис. 5. Его база составляла 10 см ,

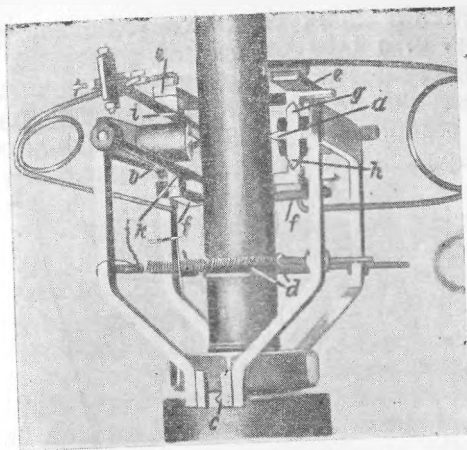


Рис. 6а.

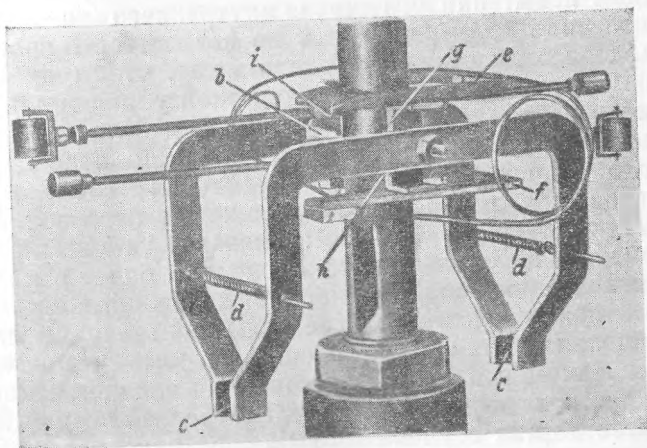


Рис. 6б.

а одно деление нониуса соответствовало удлинению $1/100$ мм, т. е. в $1/10\,000$ базы.

Для возможности измерения расширения труб во время испытаний применялся (после нескольких опытов с другими приборами) прибор для измерения расширения, изображенный на рис. 6а и рис. 6б.

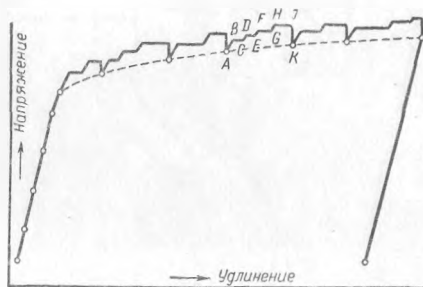


Рис. 7.

Определение предела текучести каждого образца производилось рядом отдельных испытаний, причем в каждом испытании отношение внутреннего давления к осевой силе поддерживалось по возможности постоянным. При этом старались сделать так, чтобы неизбежные при применении данной опытной установки отклонения в величине скорости удлинения давали возможно меньшие ошибки. Для этой цели при переходе от одного отсчета нагрузки и удлинения (точка А на рис. 7) к другому процесс приложения нагрузок проходил следующим образом: сначала устанавливался подвижной груз машины на несколько более высокую растягивающую силу (наиболее целесообразным оказалось применять в процессе испытаний такую ступень повышения растягивающей силы, чтобы ей при поддерживаемом в данном испытании постоянном отношении растягивающей силы к внутреннему давлению соответствовала ступень повышения внутреннего давления в 1 кг/см^2), затем поднималось внутреннее давление до соответствующей величины и в то же время образец растягивался до тех пор, пока рычаг машины

не становился в горизонтальное положение (кривая *AB* на рис. 7). Затем образец удлинялся с такой скоростью, чтобы рычаг оставался горизонтальным (кривая *BC* на рис. 7). Как только необходимая для этого скорость снижалась до определенной величины, определяемой тем, что при прекращении растяжения рычаг в течение нескольких секунд не опускался, этот процесс испытания повторялся снова один или несколько раз (*CD*, *EF*, *GH*, *IK* на рис. 7). Если таким путем получалось, что после последнего снятия отсчета увеличение наибольшей деформации (удлинения или расширения) возрастало примерно на 1%, то образец не подвергался дальнейшему растяжению, а рычаг удерживался в равновесии путем передвижки в обратном направлении подвижного груза и одновременно соответствующего уменьшения внутреннего давления, осуществляемого нагнетательным насосом, поскольку вентили не были плотно затянуты (прямая *IK* на рис. 7). По прошествии некоторого промежутка времени (от 3 до 5 минут) после последнего отсчета, обнаруживавшего увеличение удлинения на 1%, снимались отсчеты величин растягивающей силы, внутреннего давления и удлинения (точка *K* на рис. 7).

Таким путем производились измерения до тех пор, пока полное удлинение не составляло примерно 0,6%. После этого образец снова разгружался (не полностью, до его удержания в зажимах), и брался отсчет остаточной части полного удлинения.

Между двумя испытаниями производились измерения наружных диаметров образцов при помощи микрометрического винта, причем всегда в одних и тех же местах, которые, как указано выше, отмечались чернильными штрихами. Несколько типичных результатов, полученных таким образом, приведены на рис. 8.

Для вычисления напряжений по измеренным нагрузкам неизвестная зависимость величины напряжений от радиуса слоя цилиндра принималась приближенно линейной. При таком допущении для круглой цилиндрической трубы с закрытыми концами, подвергаемой внут-

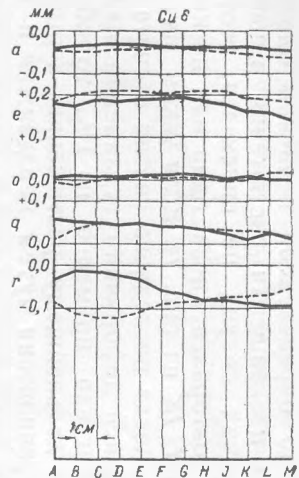
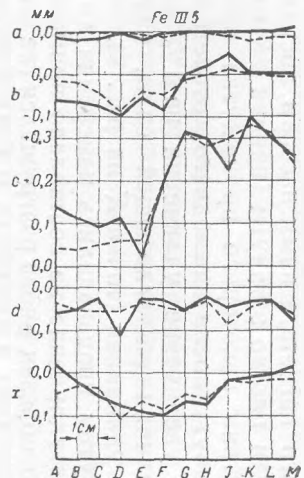
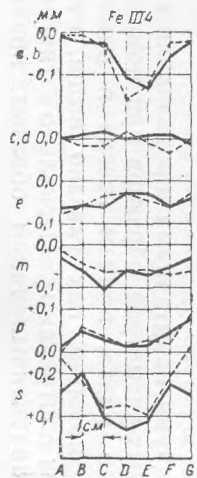


Рис. 8.

ренному давлению p и осевому растяжению g , из условий равновесия для напряжений получаются следующие средние значения.

Нормальное напряжение в направлении оси цилиндра:

$$\sigma_l = \frac{g + \pi a^2 p}{\pi (b^2 - a^2)}.$$

Нормальное направление в направлении касательной к цилиндру:

$$\sigma_t = \frac{ap}{b - a}.$$

Нормальное напряжение в направлении радиуса цилиндра:

$$\sigma_r = -\frac{p}{2}$$

(a — внутренний, b — наружный радиусы трубы).

Если мы введем площадь кольца $f = \pi (b^2 - a^2)$ и среднюю площадь круга $F = \pi \left(\frac{b+a}{2} \right)$ и будем пренебрегать квадратом толщины стенки по сравнению с квадратом диаметра, то получим:

$$\sigma_l = \frac{g + \pi \left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \right)^2 p}{\pi (b^2 - a^2)} \approx \frac{g + Fp}{f} - \frac{p}{2},$$

$$\sigma_t = \frac{\pi (b+a) \left[\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \right] p}{\pi (b+a) (b-a)} = 2 \frac{Fp}{f} - \frac{p}{2},$$

$$\sigma_r = -\frac{p}{2}.$$

Вследствие симметрии эти напряжения будут главными.

Наибольшее касательное напряжение, следовательно, будет либо:

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{g + Fp}{f},$$

либо:

$$\sigma_t - \sigma_r = 2 \frac{Fp}{f}.$$

Если в процессе испытаний в слое цилиндра с радиусом $\frac{b+a}{2}$ малые пластические удлинения ϵ_t , ϵ_t , ϵ_r направлены по оси цилиндра, касательной к цилиндру и радиусу цилиндра, то площадь кольца и средняя площадь круга соответственно будут:

$$f = f_0 (1 + \epsilon_t) (1 + \epsilon_r) \approx f_0 (1 + \epsilon_t + \epsilon_r),$$

$$F = F_0 (1 + \epsilon_t)^2 \approx F_0 (1 + 2\epsilon_t),$$

где f_0 и F_0 обозначают первоначальные значения f и F .

При обработке опытных данных применялись следующие формулы:

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{g + F_0(1 + 2\epsilon_t)p}{f}, \quad (5a)$$

$$\sigma_t - \sigma_r = 2 \frac{F_0 (1 + 2\epsilon_t)p}{f}. \quad (5b)$$

Вследствие малости толщины стенок можно было считать ϵ_t равным тангенциальному удлинению, измеренному при помощи микрометрического винта, у наружного слоя цилиндра. Изменением площади кольца можно пренебречь, т. е. считать $f_0 \cong f$.

Для тонкостенной трубы с переменной толщиной стенок уравнения (5) дают средние значения напряжений. Но последние могут рассматриваться как напряжения текучести только для таких нагрузок, при которых вся труба деформируется пластически, так как в противном случае вышеприведенные формулы дадут величины напряжений, которые будут являться средними из пластических и упругих напряжений.

Вычисленные по уравнениям (5) из данных измерений наибольшие касательные напряжения ($\sigma_t - \sigma_r$) или ($\sigma_t - \sigma_r$) нанесены на диаграммы напряжения — удлинения (рис. 9a, 9b). За абсциссу обычно бралось относительное осевое удлинение ϵ_t и именно так, что получаемое при каждом частичном испытании удлинение прибавлялось к остаточному удлинению, получившемуся

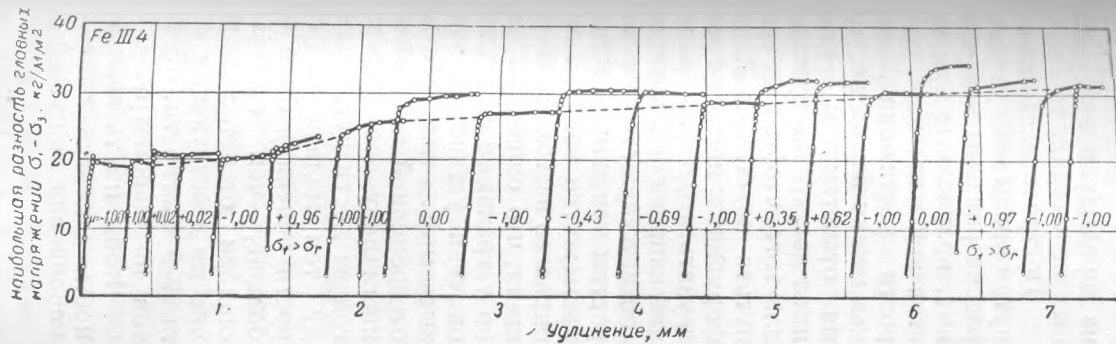


Рис. 9а.

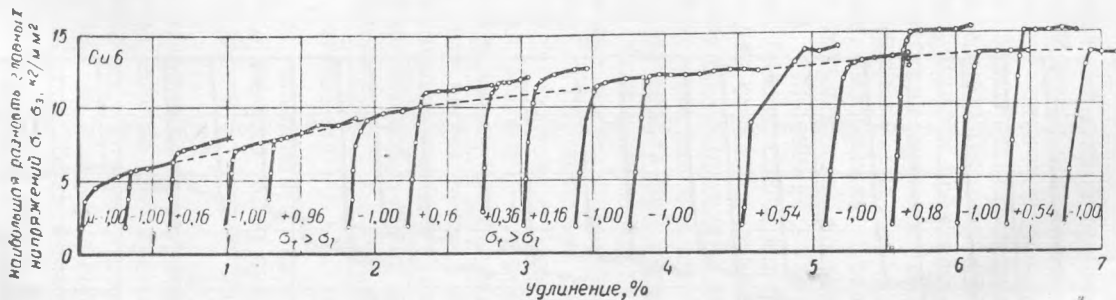


Рис. 9б.

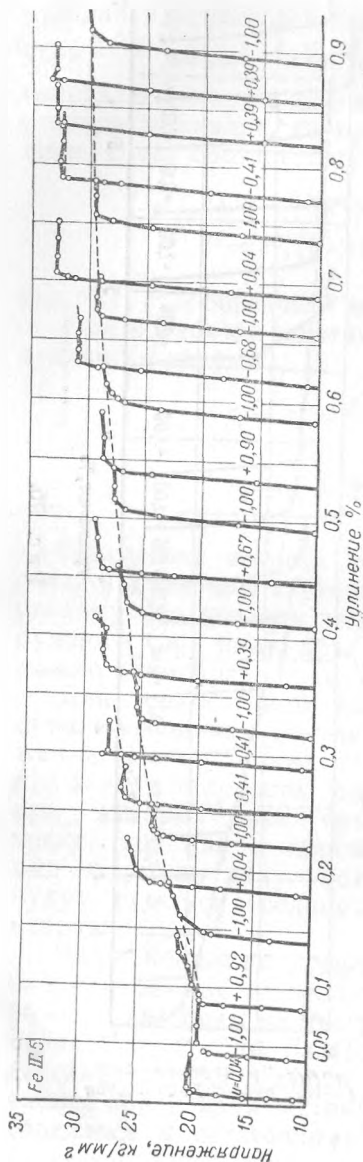


Рис. 9с.

из предыдущих частичных испытаний.

Построенные таким путем кривые могут быть рассматриваемы как кривые, полученные при постоянной медленной скорости растяжения, так как между каждыми двумя отсчетами материал имел достаточно времени для того, чтобы подвергнуться пластической деформации и при этом разгрузиться до тех значений напряжений, которые соответствуют малым скоростям течения. Именно, промежутки времени выбирались настолько большими, что ошибки (трудно устранимые на данной опытной установке), вызываемые отклонениями от временной закономерности (получившейся благодаря достигнутой между тем медленной скорости течения), были не больше, чем обычные ошибки отсчетов величин по действующим силам, в частности, отсчетов по манометру.

Чтобы иметь возможность отделить влияние упрочнения при установлении условия пластичности, в ряд частичных испытаний над каждым

образцом включалось несколько испытаний при чистом растяжении ($\mu = -1$). Участки получающихся при этом опытных кривых на диаграмме напряжения — удлинения, изображающих чисто пластическое состояние, соединялись между собой кривыми (на рис. 9с они нанесены пунктиром) так, что, будучи соединены между собой и соединяемыми частями кривых, они составляли непрерывную цепь кривых.

Эта последняя, очевидно, изображает зависимость между напряжениями текучести и опережающими их удлинениями, т. е. упрочнение. Так как эта цепь кривых, повидимому, близко совпадает с кривой напряжения — удлинения для случая непрерываемого испытания на растяжение, то ее ординаты могут быть обозначены через σ_z . Одновременно она дает возможность отделить состояние материала при переходе от упругого к пластическому состоянию от чисто пластического состояния; в качестве чисто пластических состояний нужно рассматривать, в соответствии со сделанным в п. I разъяснением, те состояния, которые изображаются на диаграмме напряжения — удлинения точками, лежащими на частях кривых, параллельных кривой σ_z . Из замеренных, по этим частям кривых, величин напряжений текучести, соответствующих удлинений и соответствующих ординат кривой σ_z легко могут быть теперь определены связанные друг с другом значения удлинения, числа μ и отношения $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_z}$. Благодаря слабой зависимости от удлинения из каждого частичного испытания бралось только одно среднее значение $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_z}$.

Такой способ составления отношений имеет, помимо устранения влияния упрочнения, еще то преимущество, что сравнительно большие ошибки, которые получаются при измерении кольцевых площадей опытных образцов в первом приближении, могут быть выявлены.

На рис. 10 представлена полученная таким путем зависимость между $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_z}$ и μ .

V. При сравнении рис. 10 с рис. 2 мы сейчас же замечаем, что из всех гипотез, устанавливающих условие пластичности, только гипотеза предельной работы изменения формы близко подходит к действительному условию пластичности, так как точки, изображающие

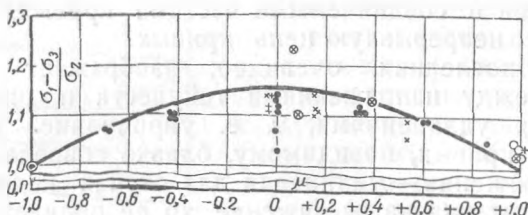


Рис. 10.

данные опытов, скучиваются в пределах полосы, которая так же, как и вычисленная по уравнению (2) кривая, симметрично расположена относительно прямой $\mu = 0$, и концы ее проходят через точки $\mu = \pm 1$, $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_2} = 1$, а наибольшее расстояние между этой полосой и кривой (при $\mu = 0$) составляет примерно 3% от величины ординаты. Правда, эта диаграмма (рис. 10) может указывать и на то, что касательное напряжение текучести зависит как от среднего главного напряжения, так и от среднего напряжения и соответствует, например, условию пластичности Шлейхера. Но это маловероятно, ибо тогда мы должны принять зависимость от среднего растяжения настолько сильной, что уже при увеличении $\bar{\sigma}$ на $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ величина касательного напряжения текучести при $\mu = \pm 1$ возрастает от $\sqrt{\frac{m}{2(m-1)}} \sigma_2 \approx 0,84 \sigma_2$ до σ_2 . Более вероятно, что зависимость касательных напряжений текучести от среднего напряжения очень мала, а зависимость их от μ

такова, что значения $(\sigma_1 - \sigma_3)$ при $\mu = -1$ и $\mu = +1$ совпадают.

Относительно того, является ли эта зависимость от μ в точности той, которая устанавливается гипотезой работы изменения формы на основании приведенных выше данных опытов, ничего определенного сказать нельзя. Возможно, что 3% наибольшего отклонения результатов измерений от ожидаемых согласно гипотезе вызывается связанными с измерениями ошибками. Но также вполне возможно, что действительное условие пластичности совпадает с условием работы изменения формы только с известным приближением.

При рассмотрении диаграммы рис. 10 мы еще не учли того обстоятельства, что условие пластичности может зависеть и от степени удлинения. В самом деле, на рис. 10 имеются две (Fe), отличающиеся от других, точки. Эти точки можно было бы вовсе не принимать во внимание, если бы такие же, несколько меньшие, но все же превосходящие σ_z , значения $(\sigma_1 - \sigma_3)$ не наблюдались часто при не приведенных здесь испытаниях над железными трубами, толщина стенок которых была довольно неравномерной и которые уже после удлинения в несколько сотых становились непригодными. Это говорит о том, что обе указанные точки рис. 10 также были получены из первых частичных испытаний над упомянутыми образцами (FeIII4 и FeIII5). Ведь известно, что железо при достаточно большой нагрузке не начинает деформироваться пластически одновременно всюду, а течение начинается только в некоторых местах и оттуда распространяется дальше (см., например, Надаи^[47]). До тех пор, пока длится такое распространение пластической деформации, материал будет течь лишь в слоях, лежащих между уже пластически деформированными и еще упруго деформированными частями тела, и этот процесс будет происходить при постоянных кажущихся напряжениях. В действительности же напряженное состояние в таких слоях будет во время этого процесса очень сильно меняться при переходе от кристаллита к кристаллиту.

Мы, следовательно, не в состоянии определить те напряженные состояния текучести, которые возникают в образцах в отдельных слоях материала, по двум причинам: во-первых, потому, что весь наш расчет напряжений текучести основан на предположении одновременной остаточной деформации всего измерительного участка, и, во-вторых, потому, что подвергаемые пластической деформации граничные слои, лежащие между упругим и пластическим материалом, будут наверное настолько тонки (охватывают только несколько кристаллитных слоев), что они не могут и приближенно рассматриваться как квази-изотропные.

Мы, следовательно, можем сделать из наших наблюдений следующие выводы.

Условие пластичности металлов: железа, меди и никеля, с точностью до 3% совпадает с условием предельной работы изменения формы:

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \text{const},$$

при всех степенях удлинения — по крайней мере, до 10%, за исключением тех степеней удлинения железа, при которых происходит распространение пластического состояния.

Во время такого слоистого течения материала железо ведет себя так, как будто его условие пластичности получилось путем перехода из условия максимального касательного напряжения к условию предельной работы изменения формы.

VI. Скорости течения. Для возможности вычисления пластических деформаций квази-изотропных металлов по нагрузке нужно знать зависимости, существующие между напряжениями и скоростями течения. Поскольку напряжения и скорости течения квази-изотропных элементов тела являются симметричными тензорами, то между 6 компонентами обоих тензоров должны существовать 6 уравнений. Из них 3 уравнения выражают тот факт, что главные оси обоих тензоров одинаково направлены.

4-е уравнение

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0 \quad (6)$$

мы получим из известного факта, что металлы заметно меняют объем только при больших деформациях (при которых они теряют квази-изотропию). Здесь $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$ обозначают главные скорости деформаций.

5-е и 6-е уравнения должны описывать зависимость главных скоростей деформаций от напряжений. Если мы ограничимся медленными скоростями деформаций и возьмем не абсолютные величины скоростей деформаций, а только отношения трех главных скоростей деформаций друг к другу, то мы будем иметь в качестве 5-го уравнения условие пластичности, и нам будет недоставать 6-го уравнения зависимости отношений $\dot{\varepsilon}_1 : \dot{\varepsilon}_2 : \dot{\varepsilon}_3$ от σ и μ [которая в силу уравнения (6) представится только одним уравнением].

Подобно тому, как мы составили по уравнению (1) величину μ из главных напряжений, составим теперь из главных скоростей деформаций величину

$$\nu = \frac{\frac{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3}{2}}{\frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{2}} = 2 \frac{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} - 1, \quad (7)$$

причем мы отмечаем каждую скорость деформации тем же индексом, что и одинаково с ней направленное главное напряжение.

В силу предлагаемой квази-изотропии, всегда, когда два главных напряжения равны друг другу, необходимо должны быть равны друг другу и одинаково направленные с ними главные скорости деформаций, следовательно:

$$\nu = -1 \text{ при } \mu = -1 \text{ и } \nu = +1 \text{ при } \mu = +1.$$

Далее, так как круговые стержни, подвергаемые кручению с остаточной деформацией, заметно изменяют

длину диаметра только при больших поворотах, должно быть:

при $\mu = 0$ и $\bar{\sigma} = 0$ также и $\nu = 0$.

Полагая теперь, что среднее напряжение оказывает так же, как и на условие пластичности, лишь очень небольшое влияние и на зависимость между μ и ν , мы можем считать установленным, что

$$\begin{aligned} \nu &= -1 & \text{при } \mu &= -1; \\ \nu &= 0 & \text{при } \mu &= 0; \\ \nu &= +1 & \text{при } \mu &= +1. \end{aligned} \quad (8)$$

Какова же будет зависимость между μ и ν для промежуточных значений ($-1 < \mu < 0$ и $0 < \mu < +1$)?

Основываясь на наблюдениях Треска^[1], Сен-Венан (этот сборник, стр. 11) считает, что металлы деформируются по законам, аналогичным законам течения всяких жидкостей. Следующие отсюда уравнения были впервые опубликованы Леви (этот сборник, стр. 20); в нашем написании они представляются так:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3}{\sigma_2 - \sigma_3}, \quad \text{или } \nu = \mu. \quad (9)$$

Это показывает, что внутри каждого элемента тела производные по времени пластических сдвигов в различных плоских элементах пропорциональны действующим в тех же элементах касательным напряжениям.

Хаар и Карман (этот сборник, стр. 41) делают одно предположение относительно средней главной скорости деформации, исходя из гипотезы Мора. Согласно Мору, пластические деформации сдвига всегда происходят в тех плоскостях, где действует наибольшее касательное напряжение, и именно в направлении этого наибольшего касательного напряжения. Поэтому за плоскости скольжения принимают только такие плоскости, которые параллельны направлению среднего

главного напряжения, а во всех этих плоскостях наибольшее касательное напряжение перпендикулярно среднему главному напряжению. Так как при параллельном скольжении плоских слоев удлинения и укорочения возникают только в плоскости, нормальной к слоям и направлению скольжения, то необходимо, как считают Хаар и Карман, чтобы средняя главная скорость деформации, если только два главных напряжения не равны друг другу, всегда равнялась нулю. Отсюда следуют равенства:

$$\nu = -1 \quad \text{при} \quad \mu = -1;$$

$$\nu = 0 \quad \text{при} \quad \mu = 0;$$

$$\nu = +1 \quad \text{при} \quad \mu = +1.$$

Состояния при $\nu = \pm 1$ были названы „вполне пластическими“, а состояния при $\nu = 0$ — „полупластическими“.

Из теории Брилуина^[63] следует:

$$\nu = 0 \quad \text{при} \quad -1 < \mu < +1.$$

Из опытов, относящихся к рассматриваемому вопросу, автору известны только опыты Сейгля^[64]. Сейгль испытывал круглые стальные стержни при растяжении и кручении. При этом производные по времени от радиального и тангенциального удлинения $\dot{\epsilon}_r$ и $\dot{\epsilon}_t$ связаны следующим условием совместности:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{d}{dr} (r \cdot \dot{\epsilon}_t)$$

(r — расстояние какого-нибудь элемента стержня от оси). Если бы, следовательно, при опытах Сейгля средняя главная скорость $\dot{\epsilon}_r$ (при кручении с незначительным растяжением, так как в этом случае $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$, радиальное направление является средним главным направлением) была бы равна нулю, то:

$$r \cdot \dot{\epsilon}_t = C, \quad \dot{\epsilon}_t = \frac{C}{r},$$

а осевое удлинение ε_l , в силу постоянства объема ($\varepsilon_l + \varepsilon_t + \varepsilon_r = 0$), должно было бы удовлетворять равенству:

$$\varepsilon_l = -\varepsilon_t = -\frac{C}{r}.$$

Но так как при опытах Сейгля поперечные сечения стержня, очевидно, оставались плоскими и, следовательно, удлинение ε_l не зависело от r , то, согласно вышеприведенному расчету, постоянная C и, в связи с этим, и удлинение ε_l должны были бы равняться нулю. На самом деле, Сейгель наблюдал уже при кручении с незначительным осевым растяжением большие удлинения, чем при чистом кручении. Это опровергает предположение, что средняя главная скорость деформации равна нулю.

VII. В п. IV было упомянуто, что после каждого частичного испытания измерялись наружные диаметры образцов при помощи микрометрического винта и таким путем определялись остаточные деформации расширения. Так как почти при всех испытаниях измерялось удлинение образцов и при сравнении толщины стенок до и после каждого ряда испытаний на каждом образце подтверждалось постоянство объема материала (с точностью измерений), то этими измерениями можно было воспользоваться для суждения о поведении средней главной скорости деформации. По измеренным наружным диаметрам всех поперечных сечений измерительного участка устанавливался, после каждого частичного испытания, средний наружный диаметр. Величина отношения разности к полусумме средних наружных диаметров до и после каждого частичного испытания давала среднее значение получающегося при данном частичном испытании тангенциального остаточного главного удлинения ε_t . По его величине и измеренному за время большинства из частичных испытаний остаточному осевому удлинению можно было вычислить третье остаточное удлинение:

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_l - \varepsilon_t,$$

а отсюда и величину ν :

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3}{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3} - 1 &= 2 \frac{\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3) dt}{\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3) dt} - 1 = \\
 &= 2 \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3)}{(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3)} (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3) dt}{\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3) dt} - 1 = \\
 &= 2 \frac{(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3)}{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3)} \frac{\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3) dt}{\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3) dt} - 1 = \\
 &= 2 \frac{(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3)}{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3)} - 1 = \nu.
 \end{aligned}$$

Эта величина на основании теоремы о среднем значении интеграла является средним значением всех ν , которые имели место в течение всего рассматриваемого частичного испытания (в промежутке времени между t_1 и t_2). Полученные таким путем и связанные друг с другом значения μ и ν нанесены на рис. 11. При большой разбросанности точек, изображающих данные измерений, и необходимости соблюдения условия, чтобы при $\mu = -1$ $\nu = -1$, мы видим, что эти измерения содержат большие ошибки. Все же они дают нам первое представление об искомой зависимости ν от μ . Мы видим, что данные измерений далеко не удовлетворяют условию:

$$\nu = 0 \text{ при } -1 < \mu < +1.$$

Напротив, точки сгущаются вблизи прямой:

$$\nu = \mu,$$

и во всяком случае с такой отчетливой закономерностью в отклонениях, что можно считать, что абсолютные величины ν в большинстве будут меньше соответствующих величин μ .

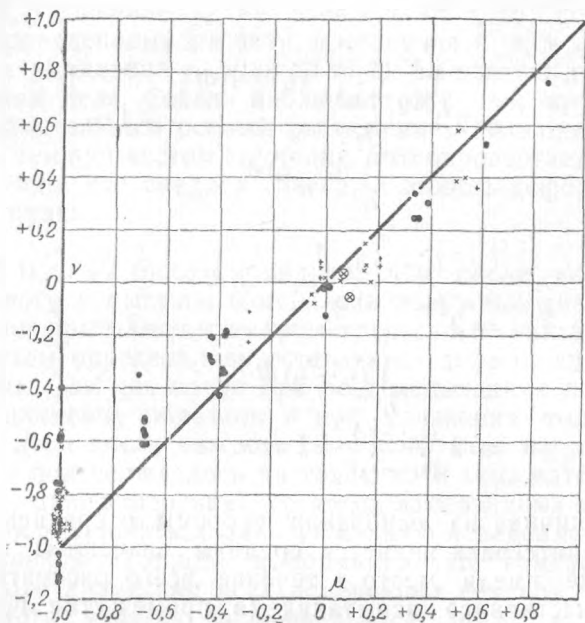


Рис. 11.

В надежде получить более точные данные над некоторыми образцами (Fe IV 1, Fe IV 2, Си 8) были проведены частичные испытания с неизменным μ , которые отличаются от описанных в п. IV тем, что, во-первых, удлинение доводится до больших величин (до 1%), и во-вторых, для экономии времени отсчеты нагрузок производились без соблюдения постоянства скорости деформации. Таким же способом были проведены

частичные испытания от h до m над никелевой трубой Ni 1. (См. прилагаемую в конце этой книги таблицу.)

При непосредственном чередовании нескольких частичных испытаний с одним и тем же μ для ν получались значения в первом частичном испытании с несколько меньшим отклонением, а в следующих испытаниях — с отклонениями без определенной закономерности. Так как такая тенденция имела место и при $\mu = -1$, где во всяком случае должно быть $\nu = -1$, то из этих данных нельзя сделать заключения об изменемости ν в зависимости от степени удлинения. Скорее можно считать, что на данные измерений заметно влияли различные виды анизотропии материала.

В заключение можно утверждать, что в первом приближении скорости остаточных сдвигов в различных плоских элементах тела пропорциональны действующим в тех же плоских элементах касательным напряжениям:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

УЧЕТ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ *)

I. Современное состояние теории пластичности.

При рассмотрении современного состояния теории пластичности бросается в глаза то обстоятельство, что большей частью рассматриваются такие задачи, при которых упругой деформацией пренебрегают по сравнению с пластической. Такого рода задачи играют в технологии металлов, в частности при горячей обработке, весьма значительную роль.

В настоящей статье показывается, что теория пластичности может быть приложена и к таким случаям, когда величина пластической деформации имеет тот же порядок, что и упругой.

Эта задача уже была поставлена и разрешена Хааром и Карманом (этот сборник, стр. 41) и затем Генки (этот сборник, стр. 114), причем для пластической деформации постулировался принцип минимума работы деформации. Их решения, однако, приводят, что можно показать, к противоречиям, а потому новая формулировка задачи, устраняющая эти противоречия, может себя оправдать.

II. Теория упруго-пластических деформаций. Для упругой части деформации существуют, как известно, следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \epsilon'_x - e' &= \frac{1}{2G} (\sigma_x - p); \quad \gamma'_x = \frac{1}{G} \tau_x; \\ \epsilon'_y - e' &= \frac{1}{2G} (\sigma_y - p); \quad \gamma'_y = \frac{1}{G} \tau_y; \\ \epsilon'_z - e' &= \frac{1}{2G} (\sigma_z - p); \quad \gamma'_z = \frac{1}{G} \tau_z; \end{aligned} \quad (1)$$

*) ZAMM, Bd. 10, H. 3, S. 226—274 (1930).

$$e' = \frac{m-2}{2(m+1)G} p. \quad (2)$$

Здесь

$$e' = \frac{1}{3} (\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z) \text{ и } p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3)$$

Мы принимаем при этом, что изменение объема вызывается исключительно упругими деформациями, так что равенства

$$e = \frac{m-2}{2(m+1)G} p \quad (4)$$

и

$$e = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (5)$$

сохраняются в общем случае.

Условие пластичности мы принимаем в форме, введенной Мизесом (этот сборник, стр. 57):

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 2k^2, \quad (6)$$

которая, повидимому, всего удобнее для аналитических выкладок и достаточно хорошо подтверждается опытами.

В теории пластичности, пренебрегая упругими деформациями по сравнению с пластическими, полагают скорость пластической деформации, пропорциональной девиатору напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon''_x}{dt} &= \frac{\lambda}{2G} (\sigma_x - p); & \frac{d\gamma''_x}{dt} &= \frac{\lambda}{G} \tau_x; \\ \frac{d\varepsilon''_y}{dt} &= \frac{\lambda}{2G} (\sigma_y - p); & \frac{d\gamma''_y}{dt} &= \frac{\lambda}{G} \tau_y; \\ \frac{d\varepsilon''_z}{dt} &= \frac{\lambda}{2G} (\sigma_z - p); & \frac{d\gamma''_z}{dt} &= \frac{\lambda}{G} \tau_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь уже учтена неизменность объема при пластической деформации. Мы эти зависимости постулируем.

Наконец, положим сумму вычисленных по (1) и (7) скоростей деформаций равной скорости полной деформации:

$$\left. \begin{aligned} 2G \frac{d}{dt} (\varepsilon_x - e) &= \frac{d}{dt} (\sigma_x - p) + \lambda (\sigma_x - p); \\ 2G \frac{d}{dt} (\varepsilon_y - e) &= \frac{d}{dt} (\sigma_y - p) + \lambda (\sigma_y - p); \\ 2G \frac{d}{dt} (\varepsilon_z - e) &= \frac{d}{dt} (\sigma_z - p) + \lambda (\sigma_z - p); \\ G \frac{d\gamma_x}{dt} &= \frac{d\tau_x}{dt} + \lambda \tau_x; \\ G \frac{d\gamma_y}{dt} &= \frac{d\tau_y}{dt} + \lambda \tau_y; \\ G \frac{d\gamma_z}{dt} &= \frac{d\tau_z}{dt} + \lambda \tau_z. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из этих уравнений первые три независимы. Если ε_x , ε_y , ε_z , γ_x , γ_y , γ_z заданы как функции времени, то уравнений (3), (4), (5), (6) и (8) достаточно для подсчета σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z , p , λ . Начальными значениями служат значения этих величин при переходе за предел текучести.

В частном случае, когда направления главных осей не меняются во время деформации, эти уравнения могут быть представлены достаточно наглядно. Примем направления главных осей за оси координат, так что $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$. Тогда каждое напряженное состояние изобразится в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ вектором, компонента которого в направлении 1:1:1 равна (p, p, p) . Следовательно, вектор $\sigma_1 - p, \sigma_2 - p, \sigma_3 - p$ будет лежать в плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Уравнение (6) в нашем частном случае примет следующий упрощенный вид:

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2k^2. \quad (9)$$

В пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ оно изобразится цилиндром с направлением оси 1:1:1, так как, если величины $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — координаты точки цилиндра, то ими будут и величины $\sigma_1 - p, \sigma_2 - p, \sigma_3 - p$. Этот цилиндр представляет собой поверхность второго порядка и имеет,

кроме того, три несовпадающих плоскости симметрии, соответствующие различным возможностям перестановки координат, а потому является круговым цилиндром. Он пересекается перпендикулярной к его оси плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ по кругу, на котором должны лежать конечные точки P векторов с пространственными компонентами $\sigma_1 - p$, $\sigma_2 - p$, $\sigma_3 - p$.

Рассмотрим несколько подробнее плоскость $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ (рис. 1). Полная деформация за вычетом изменения объема представлена в этой плоскости вектором OE с пространственными компонентами $2G(\epsilon_1 - e)$, $2G(\epsilon_2 - e)$, $2G(\epsilon_3 - e)$. В том же масштабе упругая деформация за вычетом изменения объема изображается радиусом OP . Разность, т. е. вектор PE , представляет пластическую деформацию.

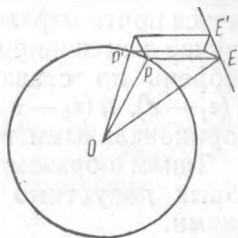


Рис. 1.

Бесконечно малое изменение деформации изображается бесконечно малым вектором EE' , проведенным из точки E . Бесконечно малое изменение напряженного состояния представится вектором, проведенным из точки P в направлении касательной к окружности. Тогда уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 2Gd(\epsilon_1 - e) &= d(\sigma_1 - p) + \lambda(\sigma_1 - p) dt, \\
 2Gd(\epsilon_2 - e) &= d(\sigma_2 - p) + \lambda(\sigma_2 - p) dt, \\
 2Gd(\epsilon_3 - e) &= d(\sigma_3 - p) + \lambda(\sigma_3 - p) dt
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

будут означать, что вектор бесконечно-малого изменения деформации может быть разложен на две составляющих, из которых одна направлена по касательной в точке P и дает изменение напряжения, или соответствует упругой деформации, а другая направлена по нормали и представляет собой изменение пластической деформации. Здесь мы находим наглядный критерий того, что тело находится в пластическом состоянии.

Вектор, изображающий пластическую деформацию, должен быть направлен наружу; в противном случае вся бесконечно-малая деформация была бы упругой. Короче говоря, деформация только тогда будет содержать пластическую часть, если точка E после перехода за предел текучести будет удаляться от центра.

Если радиус круга, изображающего предел текучести, мал по сравнению с радиусом кривизны траектории точки E , то тогда радиус OP будет поворачиваться почти параллельно касательной в точке E ; в этом случае изменением упругой деформации можно пренебречь по сравнению с пластической и величины $d(\epsilon_1 - e)$, $d(\epsilon_2 - e)$, $d(\epsilon_3 - e)$ будут приближенно пропорциональными величинам $\sigma_1 - p$, $\sigma_2 - p$, $\sigma_3 - p$.

Таким образом, можно выявить те условия, при которых допустимо пренебрежение упругими деформациями.

III. Приложение к случаю постоянной скорости деформации. Если вычесть три первых уравнения (8) попарно одно из другого и ввести обозначения

$$\zeta_x = 2G \frac{d}{dt} (\epsilon_y - \epsilon_z); \quad \eta_x = G \frac{d\gamma_x}{dt}; \quad (11)$$

$$\zeta_y = 2G \frac{d}{dt} (\epsilon_z - \epsilon_x); \quad \eta_y = G \frac{d\gamma_y}{dt};$$

$$\zeta_z = 2G \frac{d}{dt} (\epsilon_x - \epsilon_y); \quad \eta_z = G \frac{d\gamma_z}{dt};$$

$$\rho_x = \sigma_y - \sigma_z; \quad \rho_y = \sigma_z - \sigma_x; \quad \rho_z = \sigma_x - \sigma_y, \quad (12)$$

то уравнения (8) и (6) перейдут в уравнения следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_x &= \frac{d\rho_x}{dt} + \lambda\rho_x; & \eta_x &= \frac{d\tau_x}{dt} + \lambda\tau_x; \\ \zeta_y &= \frac{d\rho_y}{dt} + \lambda\rho_y; & \eta_y &= \frac{d\tau_y}{dt} + \lambda\tau_y; \\ \zeta_z &= \frac{d\rho_z}{dt} + \lambda\rho_z; & \eta_z &= \frac{d\tau_z}{dt} + \lambda\tau_z; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 2k^2. \quad (14)$$

Последнее уравнение в результате дифференцирования по t дает:

$$\rho_x \frac{d\rho_x}{dt} + \rho_y \frac{d\rho_y}{dt} + \rho_z \frac{d\rho_z}{dt} + 6\left(\tau_x \frac{d\tau_x}{dt} + \tau_y \frac{d\tau_y}{dt} + \tau_z \frac{d\tau_z}{dt}\right) = 0. \quad (15)$$

Умножая уравнения (13) по очереди на ρ_x , ρ_y , ρ_z , $6\tau_x$, $6\tau_y$, $6\tau_z$ и складывая, получаем, принимая во внимание (14) и (15), следующее уравнение:

$$\zeta_x \rho_x + \zeta_y \rho_y + \zeta_z \rho_z + 6(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y + \eta_z \tau_z) = 2k^2 \lambda. \quad (16)$$

Если компоненты скорости деформации постоянны, то тогда также будут постоянны ζ и η и в результате вторичного дифференцирования по t получаем:

$$\zeta_x \frac{d\rho_x}{dt} + \zeta_y \frac{d\rho_y}{dt} + \zeta_z \frac{d\rho_z}{dt} + 6\left(\eta_x \frac{d\tau_x}{dt} + \eta_y \frac{d\tau_y}{dt} + \eta_z \frac{d\tau_z}{dt}\right) = 2k^2 \frac{d\lambda}{dt}. \quad (17)$$

Умножая уравнения (13) по очереди на ζ_x , ζ_y , ζ_z , $6\eta_x$, $6\eta_y$, $6\eta_z$ и складывая, получаем, принимая во внимание (17):

$$\alpha^2 = \frac{d\lambda}{dt} + \lambda^2, \quad (18)$$

где для сокращения положено:

$$\alpha^2 = \frac{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 + 6(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}{2k^2}. \quad (19)$$

Начальное значение λ находим из (16), беря начальные значения

$$\rho_{x0}, \rho_{y0}, \rho_{z0}, \tau_{x0}, \tau_{y0}, \tau_{z0},$$

а именно:

$$\lambda = \frac{\zeta_x \rho_{x0} + \zeta_y \rho_{y0} + \zeta_z \rho_{z0} + 6(\eta_x \tau_{x0} + \eta_y \tau_{y0} + \eta_z \tau_{z0})}{2k^2}, \quad (20)$$

Считая время от момента перехода за предел текучести, получаем, интегрируя (18) при этих начальных значениях:

$$t - t_0 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arc th} \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{\alpha + \lambda}{\alpha - \lambda},$$

или

$$\lambda = \alpha \operatorname{th} \alpha(t - t_0) = \alpha \frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}}. \quad (21)$$

Здесь для сокращения положено:

$$t_0 = \frac{-1}{\alpha} \operatorname{arc th} \frac{\lambda_0}{\alpha} = \frac{-1}{2\alpha} \ln \frac{\alpha + \lambda_0}{\alpha - \lambda_0}. \quad (22)$$

При этом обозначении уравнения (13) переходят в следующие:

$$\zeta_x = \frac{d\rho_x}{dt} + \alpha \frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} \rho_x \text{ и т. д.} \quad (23)$$

Эти линейные дифференциальные уравнения легко решаются и дают при начальных значениях $t=0$, $\rho_x = \rho_{x0}$.

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{\zeta_x}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)} + \operatorname{const}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} = \\ &= \frac{\zeta_x}{\alpha} \operatorname{th} \alpha(t - t_0) + \frac{\rho_{x0} \operatorname{ch} \alpha t_0 + \frac{\zeta_x}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t_0}{\operatorname{ch} \alpha(t - t_0)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Принимая во внимание (22), получаем

$$\rho_x = \frac{\zeta_x}{\alpha} \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha t + \lambda_0 \operatorname{ch} \alpha t + \frac{\rho_{x0}}{\zeta_x} \alpha^2 - \lambda_0}{\alpha \operatorname{ch} \alpha t + \lambda_0 \operatorname{sh} \alpha t}.$$

Аналогичные выражения получаются для других компонент напряжения.

С возрастанием t величины ρ_x , ρ_y , ρ_z , τ_x , τ_y , τ_z , как и надо ожидать, стремятся к соответствующим им пропорциональным величинам $\frac{\zeta_x}{\alpha}$, $\frac{\zeta_y}{\alpha}$, $\frac{\zeta_z}{\alpha}$, $\frac{\eta_x}{\alpha}$, $\frac{\eta_y}{\alpha}$, $\frac{\eta_z}{\alpha}$.

Мы, следовательно, опять приходим к обычной теории пластичности.

По значениям p_x , p_y , p_z и p определяются напряжения по формулам:

$$\sigma_x = p - \frac{p_y - p_z}{3}; \quad \sigma_y = p - \frac{p_z - p_x}{3}; \quad \sigma_z = p - \frac{p_x - p_y}{3}. \quad (25)$$

Для скоростей деформаций имеем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_x}{dt} &= \frac{de}{dt} - \frac{\gamma_y - \gamma_z}{6G}; & \frac{d\varepsilon_y}{dt} &= \frac{de}{dt} - \frac{\gamma_z - \gamma_x}{6G}; \\ \frac{d\varepsilon_z}{dt} &= \frac{de}{dt} - \frac{\gamma_x - \gamma_y}{6G}; \\ \frac{d\gamma_x}{dt} &= \frac{\gamma_x}{G}; & \frac{d\gamma_y}{dt} &= \frac{\gamma_y}{G}; & \frac{d\gamma_z}{dt} &= \frac{\gamma_z}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Если начальные значения известны, эти дифференциальные уравнения интегрируются непосредственно.

Приведенное здесь решение для случая постоянной скорости деформации допускает еще одно обобщение. Параметр t не должен обязательно обозначать время, он сам может быть функцией t .

Наши выкладки будут поэтому применимы во всех тех случаях, когда скорости деформации хотя и изменяются, но остаются пропорциональными друг другу. В этом случае процесс деформации представится в 6-мерном пространстве, где компоненты скорости являются координатами и время — параметром, пространственным многоугольником.

IV. Первый пример. Возможное объяснение упрочнения. Представим себе тонкостенную цилиндрическую трубу, закручиваемую до предела текучести. Оси координат выберем следующим образом: ось x — в направлении образующей цилиндра, ось y — по касательной, а ось z — по нормали. Толщиною стенок трубы можно пренебречь по сравнению с диаметром цилиндра. Тогда все компоненты напряжения, за исключением τ_z , будут равны нулю, и из (14) получим:

$$\tau_z = \frac{k}{\sqrt{3}}. \quad (27)$$

Прекратим теперь дальнейшее закручивание и подвергнем закрученную трубу испытанию на растяжение, причем таким образом, чтобы она не могла раскручиваться.

В течение всего испытания должны, следовательно, иметь место следующие равенства:

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = \sigma_y = \sigma_z = \rho_x = 0; \quad -\rho_y = \rho_z = \sigma_x. \quad (28)$$

Принимая во внимание (27) и (28), получаем из (20) $\lambda_0 = 0$, из (22) $t_0 = 0$ и далее из уравнения (24) и по аналогии с ним построенных уравнений

$$0 = \frac{\zeta_x}{\alpha} \operatorname{th} \alpha t; \quad \sigma_x = -\frac{\zeta_y}{\alpha} \operatorname{th} \alpha t = \frac{\zeta_z}{\alpha} \operatorname{th} \alpha t,$$

откуда

$$\zeta_x = 0 \text{ и } \zeta_z = -\zeta_y. \quad (29)$$

При этих значениях вспомогательная величина будет

$$\alpha = \frac{-\zeta_y}{k} \quad (30)$$

и

$$\sigma_x = k \operatorname{th} \left(\frac{-\zeta_y t}{k} \right). \quad (31)$$

Уравнения (26) могут быть проинтегрированы при начальных значениях

$$\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{y_0} = \varepsilon_{z_0} = e_0 = 0$$

и дадут тогда:

$$\varepsilon_x = e - \frac{\zeta_y}{3G} t; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = e + \frac{\zeta_y}{6G} t; \quad \eta_x = \eta_y = \eta_z = 0. \quad (32)$$

Определив значение ζ_y из (31) и значение e из (4), (3) и (28) и подставив их в первое из уравнений (32), получим уравнение кривой напряжение — деформация:

$$\varepsilon_x = \frac{m-2}{6(m+1)} \cdot \frac{\sigma_x}{G} + \frac{k}{3G} \operatorname{arc th} \frac{\sigma_x}{k}. \quad (33)$$

Для сжатия получаем по аналогии:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{m-2}{6(m+1)} \cdot \frac{\sigma_x}{G} - \frac{k}{6G} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_x}{k}. \quad (34)$$

Наконец, для напряжений

$$\tau_x = \tau_y = 0; \quad \tau_z = \sqrt{\frac{k^2}{3} - \frac{\sigma_x^2}{3}}. \quad (35)$$

Значения σ_x , τ_z и

$$\mu = -\frac{d\varepsilon_x}{d\varepsilon_y} = -\frac{\frac{d\varepsilon_x}{d\sigma_x}}{\frac{d\varepsilon_y}{d\sigma_x}} = \frac{3m - (m-2) \frac{\sigma_x^2}{k^2}}{3 + (m-2) \frac{\sigma_x^2}{k^2}} \quad (36)$$

представлены на рис. 2 в функции абсциссы ε_x при следующих числовых данных:

$$m = 4; \quad G = 800\,000 \text{ кг/см}^2; \quad k = 3000 \text{ кг/см}^2.$$

При возрастании ε_x величина σ_x стремится к значению $\sigma_{x\max} = k$.

Если мы прервем теперь в каком-нибудь месте наше испытание на растяжение и разгрузим тело от растягивающей силы, не разгружая его от крутящего момента, оно выйдет из пластического состояния и сократится, что изображено на диаграмме прямой разгрузки, которая, как легко доказать, будет параллельна к касательной в начальной точке. Мгновенное касательное напряжение τ_z при этом остается.

Мы имеем, таким образом, состояние, когда все напряжения, за исключением одного, равны нулю. Разница по сравнению с начальным состоянием при испытании на растяжение состоит в том, что касательное напряжение τ_z стало меньше.

Если трубу снова подвергнуть растягивающему усилию, то напряжение поднимется по прямой разгрузки до предела текучести и затем будет подниматься дальше, как если бы вообще никакой разгрузки не было.

Подвергая тело вместо растяжения сжатию, мы получим совершенно такую же диаграмму, с той только разницей, что теперь напряжения будут сжимающими.

Мы видим, что предел пропорциональности при растяжении и сжатии, благодаря остаточной деформации, поднялся.

Очевидно, можно дать аналогичным путем объяснение и появлению упрочнения у таких тел, которые не были подвергнуты предварительному кручению. Надо только предположить, что в теле действуют микро-

скопические напряжения, которые уменьшаются благодаря остаточной деформации.

Этим объясняется один замечательный факт, заключающийся в том, что упрочнение получается одновременно для всевозможных нагрузок. Если материал упрочняется при растяжении, то его предел текучести повышается не только для растяжения, но и для кручения.

Полученная расчетным путем и построенная на рис. 2 диаграмма напряжения поразительно похожа на диаграммы,

получаемые на разрывных машинах. Это наводит поэтому на мысль определять из диаграммы напряжения постоянные E , G , σ_{\max} , входящие в формулу, связывающую напряжение с удлинением:

$$\epsilon = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{1}{3G} \left(\sigma_{\max} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_x}{\sigma_{\max}} - \sigma_x \right). \quad (37)$$

Мы далеки от мысли объяснять упрочнение во всех случаях микроскопическими напряжениями, но все же нельзя не упомянуть об этой возможности, которая, может быть, позволит разъяснить это явление для хрупких тел, как, например, чугун и бетон.

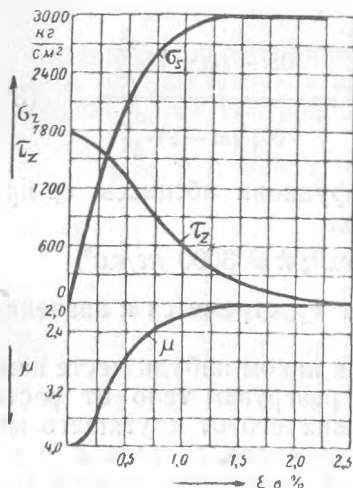


Рис. 2.

V. Второй пример. Разрушение материала от повторного гидростатического давления. Для рассмотрения еще одного примера, в котором имеет место неоднородная деформация, возьмем полый шар, находящийся под гидростатическим давлением. Пусть величина диаметра полости внутри шара того же порядка, что и толщина стенки.

В силу симметрии полагаем, что все тангенциальные направления эквивалентны. Все величины зависят только от расстояния точки от центра шара. Вводя полярные координаты и направляя ось x по нормали, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_t = \frac{u}{r}; \\ \gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0; \quad e = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Здесь u обозначает радиальное перемещение. Напишем условие равновесия бесконечно тонкого полусферического слоя:

$$\begin{aligned} d(r^2 \pi \sigma_r) - 2r \pi dr \cdot \sigma_t &= 0; \\ 2(\sigma_r - \sigma_t) + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Принимая во внимание (38), получаем для упругой деформации:

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{m-2} \frac{u}{r} \right). \quad (40)$$

Подставив эти выражения в (39) и произведя перегруппировку членов, получим дифференциальное уравнение:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u}{\partial r} - 2u = 0,$$

общий интеграл которого

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r^2}, \quad (41)$$

Для определения постоянных c_1 и c_2 имеем граничные условия $r=r_1$, $\sigma_r=0$ и $r=r_2$, $\sigma_r=-p$, где r_1 обозначает внутренний, а r_2 — наружный радиусы. Величина p_0 представляет собой действующее на полый шар гидростатическое давление и ее не нужно смешивать с величиной, обозначенной выше буквой p .

Подставляя (41) в (40) и принимая во внимание граничные условия, получаем:

$$\sigma_r = -p_0 \frac{r_2^3 (r^3 - r_1^3)}{r^3 (r_2^3 - r_1^3)}, \quad \sigma_t = -\frac{p_0}{2} \frac{r_2^3 (2r^3 + r_1^3)}{2r^3 (r_2^3 - r_1^3)} \quad (42)$$

II

$$\begin{aligned} u &= r\epsilon_t = \frac{r}{mE} [(m-1)\sigma_t - \sigma_r] = \\ &= \frac{-p_0}{2mE} \cdot \frac{r_2^3 [2(m-2)r^3 + (m+1)r_1^3]}{r^2 (r_2^3 - r_1^3)} \end{aligned} \quad (43)$$

Из условия пластичности (6) имеем:

$$\sigma_r - \sigma_t = k. \quad (44)$$

Подставляя сюда выражения для σ_r и σ_t и решая относительно p_0 , получаем:

$$p_0 = \frac{2}{3} k \frac{r^3 (r_2^3 - r_1^3)}{r_2^3 r_1^3}.$$

Наименьшее значение мы имеем в наиболее напряженной точке $r=r_1$, а именно:

$$p_0 = \frac{2}{3} k \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right]. \quad (45)$$

Если внутренний радиус мал по сравнению с наружным, то приближенно можно положить:

$$p_0 = \frac{2}{3} k. \quad (46)$$

При переходе за значение p_0 , выраженное через (45) или соответственно (46), полый шар постепенно начнет переходить, начиная от внутренней поверхности, в пластическое состояние.

В пластическом состоянии имеют место уравнения (39) и (44), из которых для σ_r получается дифференциальное уравнение

$$2k + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$$

с решением

$$\sigma_r = -2k \ln \frac{r}{r_1}, \quad \sigma_t = -k \left(1 + 2 \ln \frac{r}{r_1} \right), \quad (47)$$

где граничные условия $r=r_1$, $\sigma_r=0$ уже приняты во внимание. Так как теперь

$$e = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) \text{ и } p = -2k \left(\frac{1}{3} + \ln \frac{r}{r_1} \right),$$

то уравнение (4) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} = - \frac{(m-2)k}{(m+1)G} \left(1 + 3 \ln \frac{r}{r_1} \right);$$

отсюда определяется u :

$$u = - \frac{c}{r^2} - \frac{(m-2)k}{(m+1)G} r \ln \frac{r}{r_1}. \quad (48)$$

Постоянная интегрирования определяется из того условия, что перемещение u на поверхности сферы с радиусом ρ , ограничивающей область пластической деформации, должно быть одним и тем же, независимо от того, вычисляется ли оно из уравнения для пластической области, или из уравнения, действительного для упругой области.

Два следующих уравнения мы находим из условия, что на поверхности шара с радиусом ρ напряжения σ_r и σ_t изменяются непрерывно. Для σ_r это непосредственно следует из условия равновесия элемента тела; непрерывность же σ_t следует из равенства $\sigma_t - \sigma_r = k$, выполняющегося и для упругой и для пластической области на их общей границе.

Для точки ρ получаем:

$$\sigma_{r_0} = -2k \ln \frac{\rho}{r_1}, \quad \sigma_{t_0} = \sigma_{r_0} - k. \quad (49)$$

В упругой области имеют место следующие уравнения:

$$\sigma_r = -p_0 \frac{r_2^3 (r^3 - r_1'^3)}{r^3 (r_2^3 - r_1'^3)}, \quad \sigma_t = -p_0 \frac{r_2^3 (r^3 + \frac{1}{2} r_1'^3)}{r^3 (r_2^3 - r_1'^3)}, \quad (50)$$

из которых можно исключить постоянную r_1' , или соответственно p_0 , что приводит при $r = \rho$ к следующим соотношениям:

$$r_1'^3 = -\rho^3 \frac{k}{\sigma_{t_0} + \frac{\sigma_{r_0}}{2}}, \quad p_0 = -\sigma_{r_0} + \frac{2}{3} k \left(1 - \frac{\rho^3}{r_2^3}\right). \quad (51)$$

Из уравнений (47), (49) и (51) при известном ρ можно найти любые напряжения, из (43) при $r_1 = r_1'$ находится перемещение u в упругой области; далее, из (48) — перемещение u в пластической области и, наконец, из (38) — все удлинения.

Как теперь будет вести себя исследуемое нами тело, если давление p_0 несколько уменьшится? Уменьшение p_0 приводит к уменьшению во всем теле разности $\sigma_r - \sigma_t$, так что пластическое состояние сразу прекращается во всем теле.

Если гидростатическое давление вообще снять, тогда напряжения легко могут быть найдены; для этого надо только вычесть из полученных выше для гидростатического давления напряжений упругие напряжения, определяемые из (42), предполагая при этом, что предел текучести не будет превзойден в другом направлении и, следовательно, что $\sigma_r - \sigma_t > -k$.

Теперь переход за предел текучести опять будет происходить сначала на внутренней поверхности шара. Так как здесь вначале было $\sigma_r - \sigma_t = k$, то для вычисления предела текучести нужно наложить такое упругое напряженное состояние, для которого $\sigma_r - \sigma_t = 2k$, чтобы в результате получилось $\sigma_r - \sigma_t = -k$.

Мы видим отсюда, что если тело подвергнуто гидростатическому давлению, вдвое большему, чем то, при котором оно впервые перешло в пластическое состояние, при разгрузке на внутренней поверхности будет вновь достигнут предел текучести, но уже

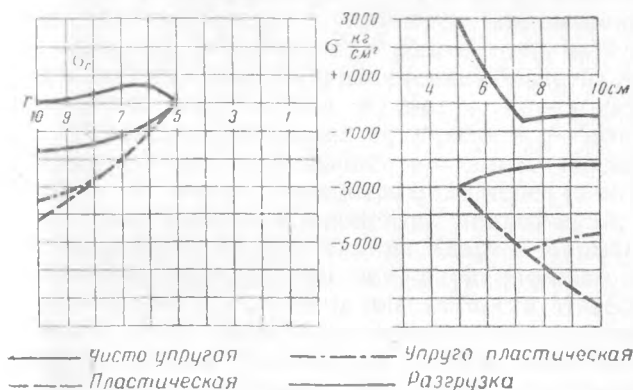
в противоположном направлении. Величина такого давления получается из (45):

$$p_0 = \frac{4}{3} k \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right] \quad (52)$$

или, если $r_1 \ll r_2$,

$$p_0 = \frac{4}{3} k. \quad (53)$$

Если эта величина давления превышает при нагрузке, то при разгрузке опять появляется пластическая деформация, но направленная в противоположную сторону.



Р и с. 3.

Если тело поочередно то нагружается первоначальным давлением, то опять разгружается, в материале развивается усталость в направлении изнутри наружу, и он разрушается.

Если r_1/r_2 недостаточно мало, может случиться, что все тело перейдет в пластическое состояние прежде, чем будет достигнуто значение p_0 , определяемое

из (52). Необходимое для этого значение r_1/r_2 получается из уравнения:

$$2k \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{4k}{3} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right],$$

равное $r_1/r_2 = 0,5879$.

Значения σ_r и σ_t после разгрузки представлены на рис. 3 для случаев:

$$p_0 = \frac{2}{3} k \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right], \quad p_0 = \frac{4}{3} k \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right].$$

Здесь бралось $r_1 = 5$ см, $r_2 = 10$ см, $m = 4$, $E = 2$ млн. кг/см², $G = 800$ тыс. кг/см², $k = 3$ тыс. кг/см².

ИСПЫТАНИЯ С ПЛАСТИЧЕСКИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ НАД
СТАЛЬНЫМИ ТРУБАМИ ПРИ СОВМЕСТНОМ ПРИЛОЖЕНИИ
РАСТЯЖЕНИЯ И КРУЧЕНИЯ *)

Для учета упругих деформаций в теории пластичности Сен-Венана Рейс (этот сборник, стр. 206) прибавляет основные уравнения теории пластичности Мизеса (этот сборник, стр. 57) к продифференцированным по времени уравнениям теории упругости. Другой способ учета упругих перемещений во время пластического течения был предложен Хааром и Карманом (этот сборник, стр. 41), а также и Генки (этот сборник, стр. 114). В формулах Хаара и Кармана вариационный принцип теории упругости видоизменяется в том отношении, что вводятся новые дополнительные условия в виде неравенств (ограничение областей), вследствие которых напряжения не могут переходить за предел текучести. За предел текучести в работе Хаара — Кармана берется условие $\tau = \text{const}$. Поскольку это условие не может быть выражено через одно единственное уравнение в компонентах напряжений, применение вариационного принципа Хаара — Кармана неясно. Генки пользуется тем же вариационным принципом, но только с условием пластичности Мизеса, которое выражается через одно единственное уравнение в компонентах напряжения. Это условие пластичности, дающее только небольшие числовые отклонения от условия $\tau_{\text{max}} = \text{const}$, очень хорошо подтверждающееся при испытании металлов (см. Лоде, этот сборник, стр. 168), имеет то большое преимущество, что в вариационный принцип входит одно единственное дополнительное условие, служащее для ограничения областей.

В теории упругости показывается, что множители Лагранжа, вводимые при решении задач в напряжениях, тождественны с компонентами перемещений. Если

*) ZAMM, Bd. 11, N. 1, S. 15—19 (1931).

предположить, что это имеет место и в вариационной задаче, видоизмененной введением условия пластичности, то по Генки для той части напряженного тела, в которой достигнут предел текучести, получается система уравнений (уравнения Эйлера вариационной задачи), устанавливающая однозначную зависимость тензора напряжений и тензора деформаций. По этой теории, следовательно, деформации без изменения напряжений невозможны. Процесс пластической деформации в собственном смысле системы уравнений Сен-Венана — Мизеса, естественно, нельзя представить такой теорией, в которой напряжения связаны однозначной зависимостью с удлинениями. Таким образом, теория Рейса приведет в случае стержня, подвергаемого совместному действию кручения и растяжения в пластической области, к другому результату, чем теория Генки. В настоящей работе приводится сравнение результатов двух теорий с данными опытов над стальными трубами.

Сначала напишем уравнения Генки применительно к интересующему нас случаю. Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1+\varphi}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1} \cdot s \right], & \gamma_{xy} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1+\varphi}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1} \cdot s \right], & \gamma_{yz} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1+\varphi}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1} \cdot s \right], & \gamma_{zx} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $s = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, G — модуль сдвига, ϵ и γ , σ и τ — деформации и соответствующие напряжения. При $\varphi = 0$ уравнения (1) переходят в обобщенный закон Гука теории упругости. Кроме того, имеют силу известные условия равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Функцию φ можно вычислить, так как, кроме того, должно выполняться условие пластичности:

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2k^2,$$

где k обозначает предел текучести при одноосном растяжении или сжатии, и отношение пределов текучести при чистом растяжении и при чистом сдвиге равно $\sqrt{3}$.

Предположим теперь, что труба подвергается кручению до тех пор, пока не достигается предел текучести на внутренней стенке, и затем подвергается растяжению при постоянном угле закручивания. Отношение толщины трубы к диаметру не играет никакой роли, так как, если пренебречь возможным упрочнением, в конце кручения касательное напряжение равномерно распределяется по поперечному сечению. Во время испытания на растяжение после предшествующего кручения до достижения предела текучести должно все время соблюдаться условие пластичности Мизеса, которое сводится к уравнению

$$\tau_{xy} = \sqrt{\frac{k^2 - \sigma_x^2}{3}}, \quad (2)$$

так как все напряжения, кроме σ_x и τ_{xy} , обращаются в нуль. В дальнейшем мы будем писать вместо них просто σ и τ .

Выведем теперь зависимость напряжения — деформации для описанного выше испытания на растяжение из уравнений (1). Первое из уравнений (1) принимает после небольших преобразований следующий вид:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{3G} \left[\varphi + 1 + \frac{m-2}{2(m+1)} \right]. \quad (3)$$

Соответствующая зависимость между τ и γ будет:

$$1 + \varphi = \frac{\gamma G}{\tau}. \quad (4)$$

Условие того, что при кручении угол закручивания должен постоянно равняться углу закручивания при пределе текучести, выразится так:

$$\gamma = \frac{k}{\sqrt{3G}}. \quad (5)$$

Подставляя (2) и (5) в (4) и затем в (3), получим следующую зависимость напряжения — деформации при испытании на растяжение:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{3G} \cdot \frac{k}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} + \frac{\sigma}{G} \cdot \frac{m-2}{6(m+1)}. \quad (H1)$$

Теория Рейса (см. приведенную выше ссылку) дает:

$$\varepsilon = \frac{k}{3G} \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{k} + \frac{\sigma}{G} \cdot \frac{m-2}{6(m+1)}. \quad (R1)$$

Целесообразно написать уравнения в безразмерных величинах, вводя отношение удлинения к удлинению у предела текучести:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} = e \quad \text{при} \quad \varepsilon_s = \frac{k}{E}$$

(где E — модуль упругости), отношение растягивающего напряжения к пределу текучести при одноосном напряжении:

$$\frac{\sigma}{k} = p$$

и отношение касательного напряжения к пределу текучести при сдвиге:

$$\sqrt{3} \frac{\tau}{k} = t.$$

Тогда получаем:

$$e = \frac{2(m+1)}{3m} \left[\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} + p \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)} \right) \right], \quad (H2)$$

$$e = \frac{2(m+1)}{3m} \left[\arctg p + p \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)} \right) \right]. \quad (R2)$$

Уравнение (2) обращается в следующее:

$$t^2 + p^2 = 1. \quad (2')$$

На рис. 1 построен график зависимости величины p в функции e , при $m = \frac{10}{3}$. Обе кривые (H2) и (R2) имеют в начале координат одну и ту же касательную, которая соответствует модулю E в упругой области, и одну и ту же асимптоту $p = 1$, но кривая (R2) значительно быстрее приближается к асимптоте, чем кривая (H2). На рис. 2 величина t нанесена к функции e , причем разница между обеими кривыми (H2) и (R2) значительно больше.

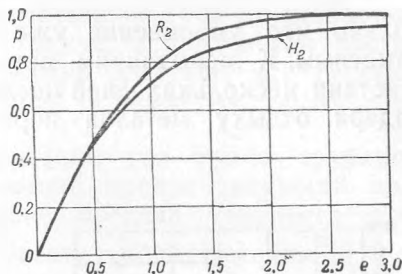


Рис. 1.

Испытания проводились на машине системы Лозенгаузен, которая позволяет производить одновременные измерения сил до 15 тыс. кг и крутящих моментов до 15 тыс. кг·см. Скорости удлинения и закручивания могут изменяться в самых широких пределах. Нанесенные на вращающейся головке деления позволяют производить отсчеты углов закручивания. Удлинения трубы измерялись при помощи зеркального прибора Мартенса. В качестве материала для труб использовалась сталь с содержанием углерода 0,08% и содержанием марганца примерно 0,5%. Трубы изготовлялись из круглых

стержней, затем после высверливания и предварительной обработки подвергались отжигу при температуре примерно 950° и, наконец, окончательно обрабатывались внутри и снаружи.

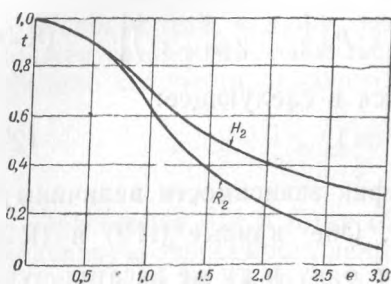


Рис. 2.

Существенным условием для получения безупречных результатов опыта является достаточная предварительная вытяжка трубы. Если этого не делать, материал будет течь неравномерно по измерительному участку. С другой стороны, трубы не должны быть вытянуты настолько сильно, что упрочнение уже становится существенно заметным. К испытаниям приступали только по прошествии нескольких дней после вытяжки, так как благодаря отдыху металла переходной криволинейный

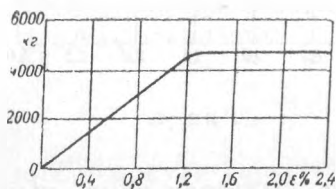


Рис. 3.

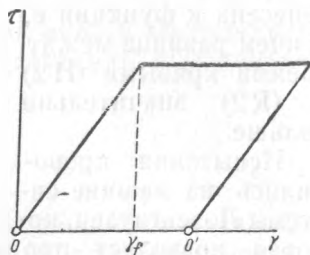


Рис. 4.

участок между упругой кривой и прямой пластического течения уменьшается. На рис. 3 изображена кривая напряжения — удлинения, полученная из опыта на растяжение трубы, проведенного незадолго до испытания на совместное кручение и растяжение. Здесь довольно хорошо выполняется гипотеза о постоянстве напряже-

ния текучести. За удлинение предела текучести ϵ_s берется удлинение, определяемое по закону Гука для напряжения, равного пределу текучести.

Испытания проводились следующим образом: сначала труба медленно закручивалась примерно до угла закручивания $\gamma = 4\gamma_s$, причем γ_s определяется совершенно так же, как ϵ_s ; напряжение во время текучести остается достаточно близким к постоянному¹⁾.

Скорость изменения угла закручивания на единицу длины составляет примерно $1,5 \cdot 10^{-6}$ сек. Затем труба подвергалась при постоянном угле закручивания растяжению со скоростью удлинения около $2 \cdot 10^{-6}$ сек. до удлинения примерно $\epsilon = 3\epsilon_s$. Скручивающее напряжение при этом снижалось на некоторую часть начального скручивающего напряжения текучести. Тогда труба полностью разгружалась от крутящего момента и подвергалась дальнейшему растяжению с той же скоростью для достижения предела текучести при чистом растяжении. Таким образом, теперь известны все данные, требующиеся для вычисления безразмерных величин p , e и t .

Испытания были проведены над тремя трубами. Некоторые данные, а именно: предел текучести при растяжении k , отношение предела текучести при кручении к пределу текучести при растяжении $\frac{\tau_s}{k}$, которое по условию пластичности Мизеса должно было иметь значение 0,577, наружный диаметр D и толщина стенки трубы δ приведены в следующей таблице.

¹⁾ Выводя формулу (Н1), мы предполагали, что угол закручивания должен быть равен γ_s , хотя мы проводили закручивание далеко за предел γ_s . При этом надо учитывать, что пластическое течение в собственном смысле слова, т. е. деформация без изменения напряжения, находится в противоречии с уравнениями Генки. Для возможности применения этих уравнений к нашему случаю надо себе представить, что нулевая точка, откуда вычисляются γ в уравнениях Генки, передвигается во время пластического течения в собственном смысле слова из точки O в точку O' и только при начале растяжения, т. е. прекращении увеличения крутящего момента, остается на месте (рис. 4).

Труба	k кг/см ²	τ_s/k	D мм	δ мм
I	3300	0,52	36,3	3,31
II	2800	0,55	25,6	3,00
III	6500	0,58	25,0	2,80

Труба III была подвергнута очень сильной вытяжке, так что предел текучести поднялся чрезвычайно высоко; с этим, пожалуй, связано то, что у этой трубы хуже всего удовлетворялось условие $p^2 + t^2 = 1$. Все же совпадение с кривыми (H2) довольно хорошо, тогда как кривые (R2) не согласуются с данными испытаний. Еще отчетливее это выявляется по опытным точкам для труб I и II, которые удовлетворяют условию пластичности $p^2 + t^2 = 1$ гораздо лучше.

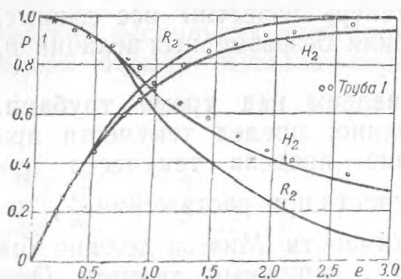


Рис. 5.

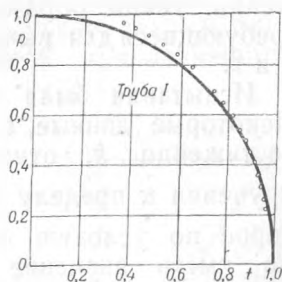


Рис. 6.

Кривые для трубы I приведены на рис. 5 и 6.

Резюмируя, можно сказать, что опыты обнаруживают удовлетворительное подтверждение уравнений Генки, тогда как теория Рейса находится в противоречии с данными испытаний. Повидимому, кроме пластического течения при постоянном напряжении в металлах имеют место и такие состояния, при которых напряжения меняются у предела текучести, и несмотря на это, существует однозначная зависимость между напряжениями и удлинениями.

Р. ШМИДТ

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ
И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ОБЛАСТИ УПРОЧНЕНИЯ *)

I. Введение. В большинстве рассмотренных до сего времени задач по теории пластичности предполагается, что мы имеем дело с идеально пластичным материалом, в котором течение происходит при постоянном напряжении, не зависящем от величины деформации. Такое предположение допустимо, если речь идет о деформациях настолько малых, что влияние упрочнения едва заметно. Однако упрочнение (увеличение пластического напряжения с возрастанием деформации) приобретает значение при больших деформациях, как, например, при обработке давлением. При испытании на растяжение литого железа область упрочнения занимает значительно большую часть всей диаграммы напряжения — деформации.

Несмотря на то, что в течение 20—30 лет проводятся многочисленные опыты для установления условия пластичности (см. Лоде, этот сборник, стр. 168), автору известны только две работы по установлению закона упрочнения: это работы Людвиг и Шеу [49] и Роша и Эйхингера [65]; обе — более позднего времени.

Людвиг и Шеу проводили опыты на растяжение, сжатие и кручение над сплошными медными стержнями.

По теории касательных напряжений максимальное касательное напряжение обуславливает появление текучести. Для общего случая плоского напряженного состояния из круга напряжений Мора получаем:

$$\tau_{\max}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2.$$

*) Ing. Archiv., Bd. 3, S. 215—235 (1932).

Условие пластичности при растяжении и кручении имеет следующий вид:

$$\sigma_x^2 + 4\tau^2 = \text{const} = \sigma_s^2.$$

Здесь σ_s обозначает предел текучести при растяжении.

При чистом кручении, следовательно, справедливы следующие равенства:

$$\tau_s^2 = \frac{1}{4} \sigma_s^2, \quad \tau_s = \frac{1}{2} \sigma_s.$$

Следуя этой теории, авторы изображали касательные напряжения в двойном масштабе по сравнению с растягивающими напряжениями. Для получения общей меры деформаций они рассматривали поворот плоскостей ω , которые состоят из одних и тех же материальных частиц и в недеформированном состоянии совпадают с плоскостями наибольшего касательного напряжения при данном напряженном состоянии. Для построения диаграммы они брали тот сдвиг γ_ω , который соответствует равным поворотам ω при испытании на растяжение — сжатие и кручение. Рассматривать этот сдвиг как меру деформации можно, конечно, лишь при таких испытаниях, в которых напряженное состояние изменяется с сохранением подобия, но не при испытаниях, в которых главные напряжения во время испытания меняют свое направление относительно материала.

Рош и Эйхингер испытывали тонкостенные трубы при продольном растяжении, сжатии и кручении, а также при внутреннем давлении в различных комбинациях с продольным растяжением или продольным сжатием. И при их испытаниях напряженное состояние менялось в течение одного испытания с сохранением подобия. Эти испытания проводились над сталью. На диаграмме, связывающей наибольшее касательное напряжение с наибольшим сдвигом, опыты обнаруживают отклонения до 20% и, следовательно, опровергают закон упрочнения, связывающий наибольшее касательное напряжение с наибольшим сдвигом. На второй диаграмме

они наносили приведенное напряжение:

$$s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3},$$

которое с точностью до числового множителя равно получающемуся из условия пластичности Мизеса пределу текучести.

Выражение, построенное аналогично из главных удлинений $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, они выбрали в качестве скалярной меры для деформаций:

$$e = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3};$$

оно переходит при условии постоянства объема: $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$ в одно из следующих выражений:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_1 \epsilon_2} = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_1 \epsilon_3} = \\ &= \sqrt{\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_2 \epsilon_3}. \end{aligned}$$

[Обе величины (s и e) соответственно равны с точностью до числового множителя вторым инвариантам девиатора напряжений и девиатора деформаций (см. раздел II).]

Рош и Эйхингер дают в своей работе наглядное объяснение, почему они использовали величины s и e , причем они показывают, что эти величины могут быть рассматриваемы как результирующие векторы трех главных касательных напряжений или соответствующих главных сдвигов. Конечно, такая точка зрения лишена физического смысла, поскольку общее напряженное или деформированное состояние не может быть заменено результирующим напряжением или результирующим сдвигом. На новой диаграмме, где s наносится в зависимости от e , опыты обнаруживают значительно меньшие отклонения, поэтому Рош и Эйхингер приходят к выводу: в области упрочнения s является однозначной функцией одного только e .

II. Формулы для закона упрочнения. Общий случай напряженного состояния задается тремя нормальными

напряжениями: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, и тремя касательными напряжениями: $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, отнесенными к прямоугольной системе координат x, y, z . Соответственно деформированное состояние может быть задано тремя удлинениями: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, и тремя сдвигами: $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$. Обычно величины напряжений или деформаций представляют в виде матрицы следующим образом:

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{pmatrix},$$

причем \mathfrak{P} носит название тензора напряжений, а \mathfrak{E} — тензора деформаций.

Для описания пластических процессов удобно пользоваться еще одной величиной, а именно — девиатором.

Можно принять, что всестороннее растяжение или сжатие не приводит материал в пластическое состояние (см. Надаи ^[66]). В пластической области, следовательно, нужно рассматривать напряженное состояние, получающееся из общего в результате вычитания гидростатического напряженного состояния с величиной, равной среднему арифметическому нормальных напряжений. Математически это значит, что в матрице тензора напряжений \mathfrak{P} , или, соответственно, тензора деформаций \mathfrak{E} , из главных диагональных членов $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (или, соответственно, $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) вычитается среднее нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

или, соответственно, среднее удлинение

$$\epsilon = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z).$$

Полученные таким путем тензоры носят название девиаторов напряженного, или деформированного, состояния; мы будем обозначать их здесь через \mathfrak{P}_0 и \mathfrak{E}_0 . Сумма

главных диагональных членов девиатора равна нулю. Тензор деформаций \mathfrak{E} обладает этим свойством с самого начала, если считать объемную деформацию равной нулю, т. е. принять $m=2$. Это достаточно точно выполняется в пластической области, как показали тщательные измерения Ганеманна и Ямада [67]. Пластическое изменение объема имеет порядок величины упругой деформации, и им можно поэтому пренебречь по сравнению с большими пластическими деформациями. Таким образом, пластическое поведение тела может быть описано девиаторами \mathfrak{F}_0 и $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$, чем мы и воспользуемся.

Для сложного напряженного состояния при растяжении и кручении тонкостенной трубы величины \mathfrak{F}_0 и \mathfrak{E}_0 принимают следующий вид:

$$\mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}$$

Деформированное и напряженное состояния при нагрузке такого вида могут быть наглядно представлены в системе координат с осями ε и γ или, соответственно, $\frac{\sigma}{3}$ и τ (рис. 1). В системе координат $\varepsilon - \gamma$ каждое деформированное состояние изображается одной точкой; путь, который приводит к известному деформированному состоянию, дается кривой, направленной к соответствующей точке, изображающей деформацию. Аналогичным образом каждое напряженное состояние представляется на диаграмме радиусом-вектором.

В настоящей работе рассматриваются только такие опыты, которые по предложению Хоэнмэзера и Прагера (этот сборник, стр. 257) могут быть названы „Испытаниями со свободными пластическими деформациями“. Этот вид пластического течения характеризуется зависимостью:

$$\mathfrak{F}_0 = \lambda \frac{d\mathfrak{E}_0}{dt}.$$

Здесь t является параметром, который связан с каждой точкой траектории деформации; затем λ — не постоянная, а скалярный множитель, определяемый в каждой точке пути деформации условием пластичности или законом упрочнения. Это уравнение выражает пропорциональность между соответствующими компонентами от \mathfrak{F}_0 и от изменения \mathfrak{E}_0 . В приведенном выше частном случае напряженного состояния мы получаем для компонент σ и τ следующие зависимости:

$$\frac{2}{3} \sigma = \lambda \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{и} \quad \tau = \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{2} \right)$$

и отсюда, деля оба уравнения одно на другое, получаем:

$$\frac{\sigma/3}{\tau} = \frac{d\varepsilon}{d\gamma}.$$

В графическом изображении, приведенном на рис. 1, это обозначает следующее: в каждой точке деформации вектор, изображающий напряженное состояние, должен быть параллелен касательной к траектории деформации в этой точке.

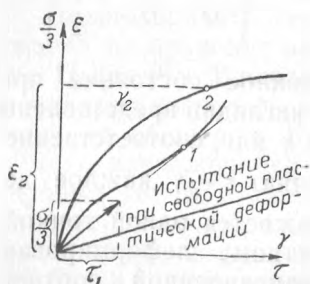


Рис. 1. Графики испытаний при одновременном приложении нагрузок на растяжение и кручение на плоскости напряжения — деформации.

Опыты Хоэнмэзера и Прагера (см. приведенную выше ссылку) показали, что этот вид деформаций имеет особо важное значение и для общего случая пластической деформации и что такое свободное течение возможно только для таких путей на диаграмме деформации, которые прямолинейны, начиная от свободного от напряжений состояния.

(Для одного какого-нибудь момента оно может появиться и при криволинейном пути, см. рис. 1.)

Осуществление свободных пластических деформаций при испытаниях будет описано ниже. При больших

деформациях течение вдоль любой полигональной траектории (если только прямолинейные отрезки содержат больше чем 15—20 удлинений предела текучести¹⁾), можно рассматривать с достаточной степенью точности как свободное пластическое течение.

Но в углах полигональной траектории не будет происходить внезапное отклонение вектора напряжения в новое направление, как это должно быть при действительно свободной пластической деформации, а будет иметь место непрерывное изменение вектора напряжения, более подробно исследованное в упомянутой выше работе Хоэнмзера и Прагера. Чем больше деформации, тем менее значительными становятся эти отклонения от точной свободной пластической деформации. Поэтому здесь, где прежде всего вопрос касается больших деформаций, упрочнение должно сначала исследоваться только на испытаниях при свободных пластических деформациях, тем более, что для общих видов пластического течения пластическое поведение еще слишком мало исследовано.

Закон упрочнения должен состояться из таких функций девиатора напряжений \mathfrak{F}_0 , которые характерны для упрочнения и не зависят от выбора системы координат, т. е. из инвариантов от \mathfrak{F}_0 . Чтобы получить математическое выражение того факта, что при упрочнении течение сопровождается увеличением напряжения с ростом деформации, в отличие от обычного условия текучести, означающего независимость напряжений от деформации, закон упрочнения должен также содержать некоторые инварианты девиатора деформации \mathfrak{E}_0 . Здесь приводятся три закона упрочнения, которые дают функциональную зависимость между соответствующими инвариантами девиатора напряжений \mathfrak{F}_0 и девиатора деформаций \mathfrak{E}_0 .

¹⁾ Удлинением предела текучести называется удлинение, связанное с соответствующим пластическим напряжением законом Гука.

1. Наибольшее главное значение девиатора напряжений является функцией наибольшего главного значения девиатора деформаций ($m=2$):

$$\sigma_{0\max} = f(\varepsilon_{0\max}). \quad (1)$$

2. Наибольшее касательное напряжение является функцией наибольшего сдвига:

$$\tau_{\max} = f(\gamma_{\max}). \quad (2)$$

3. Квадратный корень из второго инварианта девиатора напряжений с обратным знаком является функцией квадратного корня из второго инварианта девиатора деформаций с обратным знаком:

$$\sqrt{-\mathfrak{P}_{0II}} = f\left(\sqrt{-\mathfrak{E}_{0II}}\right). \quad (3)$$

Второй инвариант равен сумме главных миноров; он с точностью до множителя равен \mathfrak{P}_0^2 или, соответственно, \mathfrak{E}_0^2 , причем вторая степень понимается как двукратное скалярное умножение. Это двукратное скалярное умножение тензоров означает, что соответствующие члены в матрицах сомножителей умножаются друг на друга и затем складываются. Таким образом, уравнение (3) может быть написано еще и в таком виде:

$$\sqrt{\mathfrak{P}_0^2} = f\left(\sqrt{\mathfrak{E}_0^2}\right). \quad (3a)$$

В п. III, приводится на основе опытных данных еще закон упрочнения (4), более общего характера, чем (3). Опытным путем следует проверить, какой из предложенных законов лучше всего воспроизводит действительное поведение металлов.

III. Экспериментальная проверка. Опыты и их результаты. Опыты проводились по инициативе Прагера в Институте прикладной механики Геттингенского университета. Для проведения опытов имелась специальная

машина, на которой осуществлялось пластическое течение при одновременном растяжении и кручении. Машина специально сконструирована фирмой Лозенгаузен*). Пределы изменения осевой силы от 0 до 15 тыс. кг и крутящего момента от 0 до 15 тыс. кг·см.

При испытаниях использовалась в основном сталь с содержанием углерода 0,08% и содержанием марганца 0,05%. В качестве образцов брались тонкостенные трубы для получения, по возможности, однородного напряженного состояния. Изготовление труб производилось путем высверливания внутреннего диаметра до 30 мм и обтачивания снаружи до диаметра в 37 мм. Измерительная длина составляла 10 см. Для устранения анизотропии в материале трубы перед испытанием подвергались тщательной прокатке. Затем, после освобождения их от окалины, в 24 равномерно распределенных по измерительному участку и по окружности точках производились точные замеры толщины стенок δ и наружного диаметра d . Разница между наибольшим и наименьшим значением δ составляла у большинства труб не более 0,05—0,1 мм. По данным измерений, вычислялись использованные при расчете средние значения δ_m и $r_m = \frac{d_m}{2} - \frac{\delta_m}{2}$.

Благодаря незначительной толщине стенок можно считать, что касательное напряжение при испытании на кручение остается постоянным по всему поперечному сечению кольца.

Пользуясь зависимостью

$$M = 2\pi\tau \int_{r_i}^{r_a} r^2 dr,$$

где M — крутящий момент, и пренебрегая членами второй и третьей степени от δ , величину τ вычисляли

*) Имеющиеся в оригинале чертеж и описание конструкции машины и прибора для одновременного измерения удлинения и угла закручивания при переводе опущены. (Прим. ред.)

по измеренному моменту так:

$$\tau = \frac{M}{2\pi r_m^2 \delta_m},$$

где $r_m = \frac{d_m}{2} - \frac{\delta_m}{2}$ обозначает средний радиус трубы.

Для растягивающего напряжения получаем выражение:

$$\sigma = \frac{P}{2\pi r_m \delta_m},$$

где P обозначает растягивающую силу.

При растяжении трубы получаются изменения поперечного сечения, так что первоначальная площадь кольца $2\pi r_m \delta_m$ становится равной

$$2\pi r_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \delta_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

или, с достаточной точностью, $2\pi r_m \delta_m (1 - \varepsilon)$.

Таким образом, формулы, по которым производится расчет отнесенных к данному поперечному сечению напряжений σ и τ , будут иметь вид:

$$\sigma = \frac{P(1 + \varepsilon)}{2\pi r_m \delta_m} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{M}{2\pi r_m^2 \delta_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^3} = \frac{M \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon\right)}{2\pi r_m^2 \delta_m}.$$

В частности, для случая рассматриваемого здесь напряженного состояния при одновременном приложении растяжения и кручения приведенные в п. II формулы (1), (2) и (3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\sigma}{6} + 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \\ &= f\left(\frac{\varepsilon}{4} + 0,5 \sqrt{\gamma^2 + \frac{9}{4}\varepsilon^2}\right) = f(F_1), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}s_2 = 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = f\left(\sqrt{\frac{9}{4}\varepsilon^2 + \gamma^2}\right) = f(F_2), \quad (2)$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{2}{3}\sigma^2 + 2\tau^2} = f\left(\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{2}}\right) = f(F_3). \quad (3)$$

Под γ опять подразумевается сдвиг γ_{r_m} на расстояние r_m от оси трубы.

а) Опыты со свободными пластическими деформациями без промежуточной разгрузки. Формулы (1), (2) и (3) сначала проверялись при испытаниях со свободными пластическими деформациями без промежуточной разгрузки. Данные испытаний при чистом растяжении, чистом кручении и двух

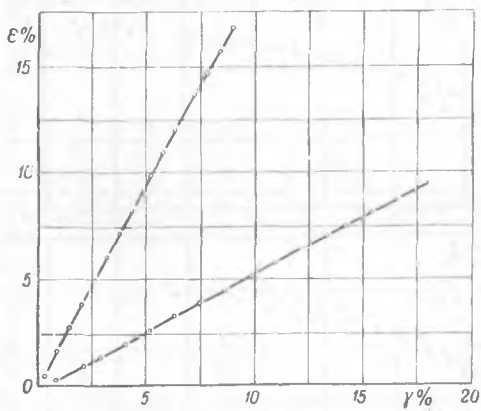


Рис. 2. Результаты проведенных испытаний со свободными пластическими деформациями.

испытаниях со свободными пластическими деформациями при различном отношении $\epsilon:\gamma$ сопоставлялись с кривыми, построенными по формулам (1), (2) и (3). Для поддержания при испытаниях на одновременное приложение растяжения и кручения постоянного отношения отнесенных к данному поперечному сечению напряжений σ и τ опыты проводились следующим образом: медленное кручение (или, соответственно, растяжение) осуществлялось при помощи мотора, в то же время растяжение (или кручение) производилось непрерывным вращением рукоятки так, чтобы отношение $\sigma:\tau$ было все время постоянным, равным заданному.

В отношении $P : M$ для учета изменений поперечного сечения нужно было вносить поправку, вводя для удлинений, больших, чем 10%, поправочный коэффициент

$$(1 + \frac{3}{2}\epsilon) : (1 + \epsilon).$$

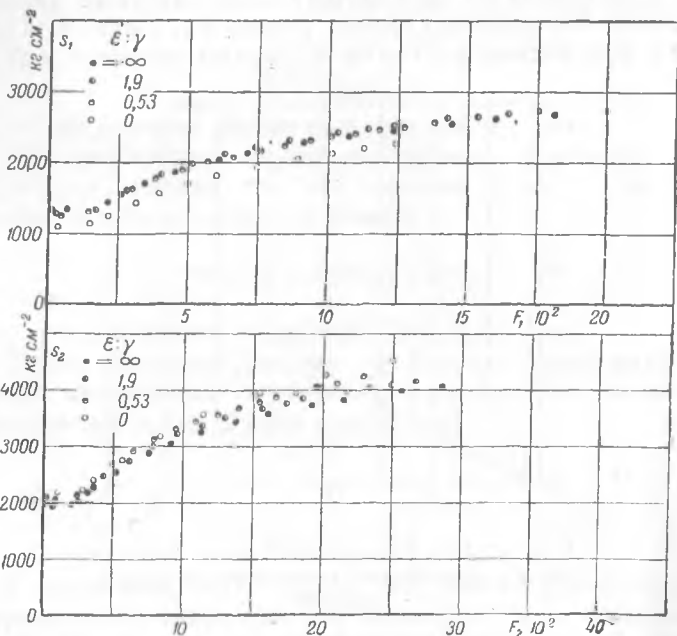


Рис. 3. Испытания при одновременном приложении растяжения и кручения образца из стали: вверху — кривая наибольшего главного напряжения относительно наибольшего удлинения; внизу — кривая наибольшего касательного напряжения относительно наибольшего сдвига.

В графическом представлении, рассмотренном в п. II, оба испытания на совместное растяжение и кручение со свободными деформациями приведены на рис. 2. Кружками обозначены точки, изображающие измеренные деформации, к ним пристроены соответствующие векторы, изображающие измеренные напря-

жения. Эти векторы фактически почти точно совпадают с направлением пути деформации, как это и требуется для случая свободных деформаций.

На рис. 3 нанесены данные указанных четырех испытаний, вычисленные по двум первым формулам. При

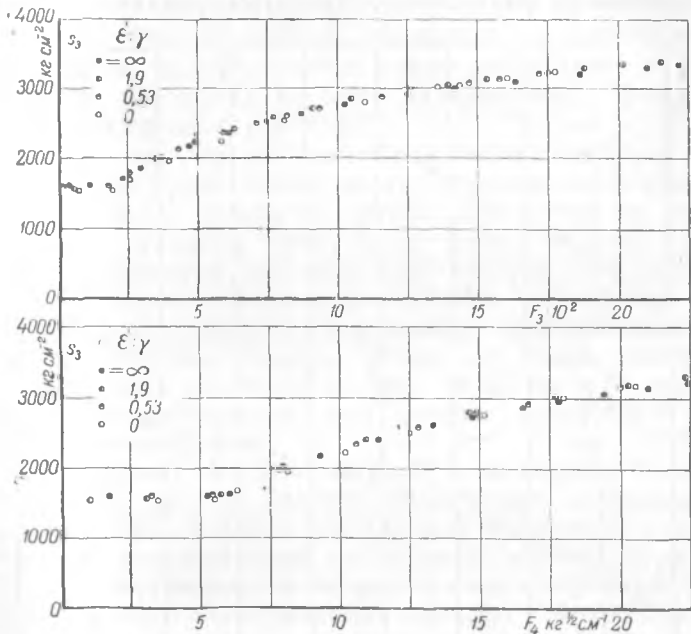


Рис. 4. Результаты испытаний при одновременном приложении растяжения и кручения к образцу из стали.

этом для сохранения наглядности чертежа сами кривые течения по опытным точкам различных испытаний не строились. При обработке по формуле (1) опытные точки, соответствующие испытанию на растяжение и двум испытаниям на растяжение с кручением, мало отклоняются друг от друга, тогда как данные испытания на кручение систематически выпадают более чем на 15%. На нижнем графике кривые испытаний расходятся с увеличением упрочнения. Кривая, соответ-

ствующая испытанию на кручение, лежит выше всех, за ней следует испытание со свободными деформациями при преобладающем кручении, затем — испытание со свободными деформациями при преобладающем растяжении и, наконец, ниже всего лежит кривая, соответствующая испытанию на растяжение. При этом кривая испытания

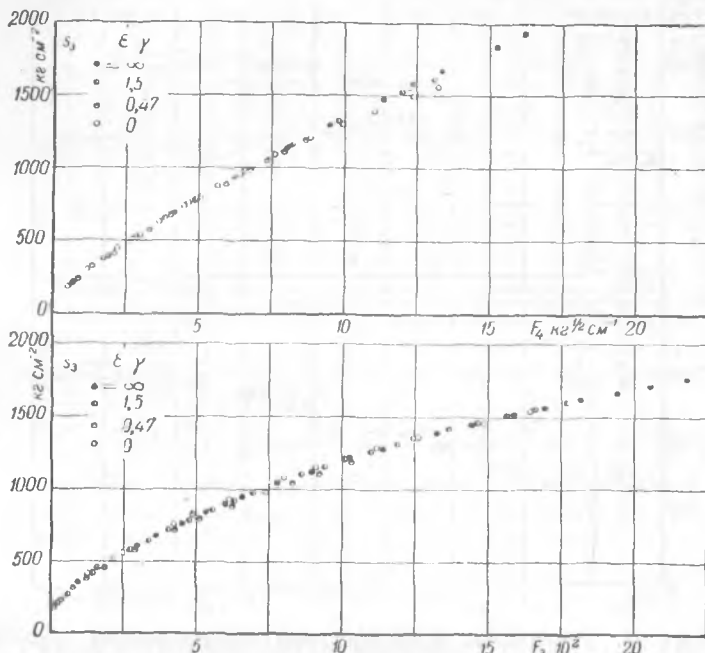


Рис. 5. Испытания на одновременное растяжение и кручение образца из меди.

на кручение лежит как раз примерно на 15,4% выше кривой испытания на чистое растяжение; это та величина, на которую вычисленный по теории касательного напряжения предел текучести на кручение превышает предел текучести на кручение, вычисленный по теории Мизеса. Действительно, опытные точки тех же испытаний, нанесенные по формуле (3) (рис. 4), которая использует в качестве меры напряжения предел

текучести по Мизесу, почти с точностью измерений покрывают друг друга. Только в начале упрочнения имеются отклонения в 5%; при дальнейшем увеличении упрочнения отклонения не превышают 3%.

Правильность закона (3), который был также подтвержден и опытами Роша и Эйхингера, а именно, что при упрочнении \mathfrak{N}_0^2 зависит однозначно от одного только \mathfrak{E}_0^2 , этим подтверждается и для испытаний со свободными деформациями при одновременном приложении растяжения и кручения.

Такие же четыре испытания были повторены над трубами из прокаленной меди. Поведение меди сильно отличается от поведения стали; она почти не обнаруживает упругих свойств, не имеет никакого предела текучести и никакой пластической деформации при постоянном напряжении; область упрочнения занимает всю диаграмму напряжение — деформация. Несмотря на такое сильное отличие от стали, опытные данные для меди, обработанные по формуле (3) (рис. 5, внизу), обнаруживают еще лучшее совпадение, чем опыты со сталью.

Из данных этих испытаний и испытаний Роша и Эйхингера можно сделать заключение о справедливости закона упрочнения (3) для испытаний со свободными деформациями без промежуточной разгрузки. На рис. 5 (вверху) и на рис. 4 (внизу) применен еще другой способ представления опытных данных, полученных при тех же испытаниях, который будет более подробно рассмотрен в следующем разделе.

б) Опыты со свободными пластическими деформациями с промежуточной разгрузкой с чередованием нагрузок на растяжение и кручение. Рош и Эйхингер в своей работе утверждают, что и в пластической области сохраняется квази-изотропия материала. Однако против такого утверждения говорят приведенные ниже опыты, при которых после промежуточной разгрузки происходит продолжение свободной пластической деформации при направлениях главных осей, повернутых относительно направлений главных осей до нагрузки. Такими опытами

являются, например, опыты с чередованием нагрузок на растяжение и кручение. После каждой разгрузки здесь поворачиваются направления главных осей на 45° относительно предполагаемой, связанной с трубой, системы цилиндрических координат. Вид проводимых испытаний различным образом менялся за счет числа

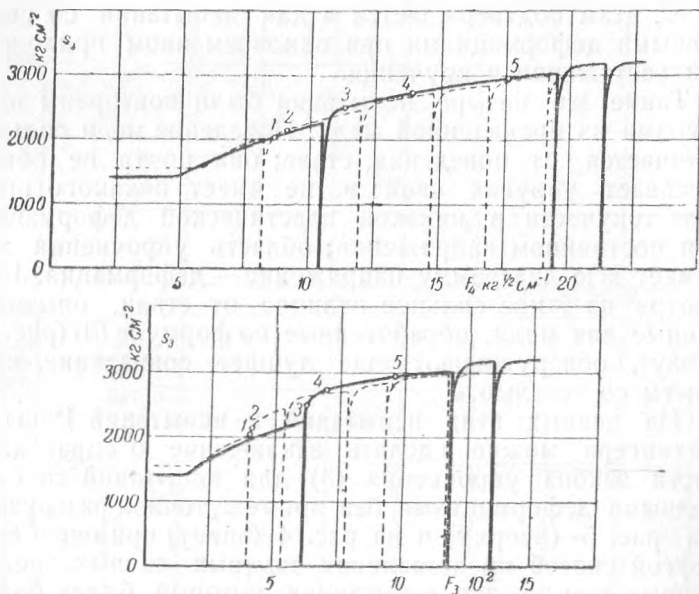


Рис. 6.

перемен нагрузок, их чередования во времени друг за другом и изменения начала испытания: либо растяжение, либо кручение. На рис. 6 (внизу) приведены кривые такого вида испытаний. Опытные данные изображаются величинами s_3 и F_3 . При этом, как и всегда, выражение для деформации F_3 составлено из пластических деформаций, измеряемых от недеформированного состояния. Таким образом, для случая чередования

растяжение, кручение, растяжение и т. д. выражение F_3 будет иметь вид:

$$F_3 = \sqrt{\frac{3}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots)^2}.$$

Сплошная кривая, нанесенная на рис. 6, соответствует испытанию, начинающемуся с кручения, пунктирная кривая—испытанию, начинающемуся с растяжения. Из обоих испытаний видно, что растяжение действует сильнее в смысле упрочнения на следующее за ним кручение, чем на себя самое, и наоборот. Второе частичное испытание приподнимает кривую упрочнения при третьем испытании много выше того уровня, какого она достигла бы при непосредственном продолжении первого частичного испытания. При большем числе перемен нагрузок кривые упрочнения при растяжении и кручении стремятся к некоторому предельному уровню, который лежит примерно на 400 кг/см^2 выше уровня кривой упрочнения при непрерывном испытании со свободными пластическими деформациями. Такие испытания не подчиняются больше закону (3), так как очевидно, что благодаря пластической деформации нарушается имевшая место в начале испытаний квази-изотропия.

в) Опыты на растяжение с изменением направления растяжения. То, что упрочнение действительно различно действует по различным направлениям в материале, было затем установлено для случая простого растяжения. Прокаленный плоский стержень из стали шириной в 10 см и толщиной в 1 см подвергался растяжению примерно на 6% в продольном направлении. Затем из него сразу же вырезался в поперечном направлении стержень длиной в 10 мм и поперечным сечением примерно в $0,6 \text{ см}^2$, над которым только после двухчасового перерыва продолжалось прерванное испытание на растяжение, начатое в продольном направлении. Для установления, при неблагоприятном отношении сторон $1:10$, у большого плоского стержня удлинения, эквивалент-

ного удлинению круглого стержня, измерения проводились при помощи четырех приборов (см. описание у Закса^[68]), которые располагались крест-накрест таким образом, что два из них показывали удлинение на узкой стороне стержня, а два других — удлинение на широкой стороне. Среднее арифметическое из четырех измерений бралось в качестве величины удлинения. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что этот прибор дает величины удлинения, отнесенные к соответствующей данному моменту измерения длине.

Для измерения удлинения на коротком, вырезанном в поперечном направлении стержне, который допускал

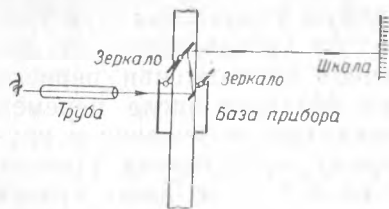


Рис. 7. Прибор для измерения удлинений с двумя зеркалами.

только двухсантиметровую измерительную длину, использовался прибор с двойными зеркалами (рис. 7). После прохождения через отметку телескопа всей шкалы всякий раз зеркало и лезвия ставились обратно, так что шкала снова могла быть использована.

Для того чтобы не прерывать испытания при таких перестановках, при движении шкалы несколько раз определялись скорости течения и затем время перестановки зеркала и лезвий. Из измеренных скоростей течения перед перестановкой можно было путем интегрирования получить среднюю скорость течения. По ней и по времени перестановки зеркала (примерно, от $1/2$ до 1 мин. при примерно получасовой продолжительности испытания) можно было дополнить с достаточной точностью не наблюдаемый отрезок шкалы. Благодаря частым перестановкам лезвий удлинения надо считать отнесенными к соответствующей данному моменту измерительной длине. Так как все деформации отсчитывались от недеформированного состояния, то нужно было вычислять деформацию, вызываемую продольным растяжением, в направлении вырезанного стержня и прибавлять ее к следующему за ней удлинению ϵ' в

поперечном направлении. Таким образом, выражение деформации F_3 нужно было составлять из девиатора:

$$\mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon' & 0 & 0 \\ 0 & +\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \end{pmatrix}$$

(при этом удлинения должны быть сначала пересчитаны при помощи формулы $\varepsilon = e^{\varepsilon} - 1$ на начальную измерительную длину). Для F_3 получаем тогда выражение:

$$F_3 = \sqrt{\frac{3}{2}(\varepsilon^2 - \varepsilon\varepsilon' + \varepsilon'^2)}.$$

Величина F_3 растет до конца растягивающей нагрузки, приложенной в продольном направлении, затем она к началу испытания на растяжение в поперечном направлении сначала убывает до тех пор, пока не погашается вызванное продольным растяжением поперечное сжатие, и только после этого F_3 снова начнет возрастать. Благодаря такому поведению F_3 при изменении направления растягивающего усилия опытные кривые должны были бы иметь отклоняющийся от обычной формы кривых пластической деформации S-образный вид.

Во избежание этого была использована другая инвариантная величина в качестве меры деформации, которая непрерывно, даже при повороте направления нагрузки, возрастает и имеет физический смысл, а именно: упруго-пластическая работа изменения формы. Она получается из девиаторов \mathfrak{F}_0 и \mathfrak{E}_0 в виде интеграла¹⁾:

$$\frac{\text{работа изменения формы}}{\text{единица объема}} = A = \int_0^{\mathfrak{E}_{01}} \mathfrak{F}_0 \dots d\mathfrak{E}_0$$

¹⁾ В упомянутом выше построении \mathfrak{E}_0 принимается постоянство объема (т. е. $m = 2$); поэтому здесь безразлично, отнесена ли работа A к начальному или соответствующему данному моменту объема.

(двумя точками обозначено двукратное скалярное умножение*).

В частности, для осевой нагрузки:

$$A = \int_0^{\xi_{01}} \sigma d\xi,$$

т. е. A равно площади кривой напряжения—деформации до некоторых значений удлинения. Как и при описанных в п. III испытаниях, деформации всегда должны быть отнесены к начальным размерам опытного образца. Вследствие этого измеренные при испытаниях

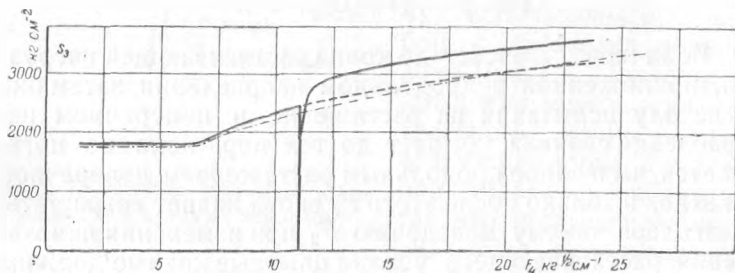


Рис. 8. Испытания на растяжение с изменением направления растяжения после промежуточной разгрузки.

- Испытание на продольное растяжение с последующим испытанием на поперечное растяжение.
- — — Испытание с непрерывным продольным растяжением.
- · — · Испытание с непрерывным поперечным растяжением.

удлинения подлежат пересчету на начальную измерительную длину (если удлинения отнесены к соответствующей данному моменту длине, то и напряжения, нанесенные на диаграмме, также должны быть отнесены к соответствующему поперечному сечению) по следующей формуле:

$$\epsilon = \epsilon^s - 1,$$

*) См. М. Лагалли, Векторное исчисление. (Прим. ред.)

где ϵ — условная деформация, $\bar{\epsilon}$ — истинная деформация и напряжения на диаграмме должны быть нанесены отнесенными к начальному поперечному сечению.

Таким образом, были построены кривые для продольного и поперечного растяжений, непосредственно чередовавшихся друг за другом; причем площадь вычислялась с помощью планиметра от начала кривой продольного растяжения. По аналогии с $F_3 = \sqrt{\sigma_0^2}$ вводим величину $F_4 = \sqrt{A}$. В зависимости от вычисленных таким путем значений F_4 , взятых в качестве абсцисс, были нанесены напряжения s_3 . На рис. 8 приведена полученная таким путем кривая, которая описывает испытания на растяжение при изменении направления растягивающего усилия.

Из этой кривой видно, что продольное растягивающее усилие оказывает большее упрочняющее действие в поперечном направлении, чем в продольном. Для подтверждения того, что здесь действительно речь идет о реальном эффекте, а не об анизотропии, которая имеет уже место с самого начала процесса прокатки, над тем же прокаленным материалом были проведены непрерывные испытания на растяжение в направлении прокатки и перпендикулярном к нему. При обоих испытаниях получились почти одинаковые кривые. Испытание на растяжение в продольном направлении, которое является также направлением прокатки, вначале, конечно, близко совпадает со сплошной кривой, а дальше идет по пунктирной кривой. Испытание на растяжение под углом в 90° к направлению прокатки представлено кривой, нанесенной пунктиром с точкой. При повторном испытании на растяжение с изменением направления нагрузки, после разгрузки, все время получалось одно и то же превышение, примерно на 500 кг/см^2 , кривой продольного растяжения над кривой поперечного растяжения. Этот эффект имел место не только при направлении нагрузки под углом 90° к направлению прокатки, но и при других направлениях, отклоняющихся от продольного, хотя и не в такой сильной степени, как это показали соответ-

ствующие испытания на растяжение над стержнями, которые вырезались под углами в 30 и 60°.

г) Четвертый закон упрочнения. Нанесение на диаграмме величины s_3 в зависимости от F_4 дает то преимущество, что при таком нанесении ближе совпадают расходящиеся на прежней диаграмме кривые. Поскольку ординаты более высоко лежащих кривых соответствуют более далеким абсциссам, а ординаты

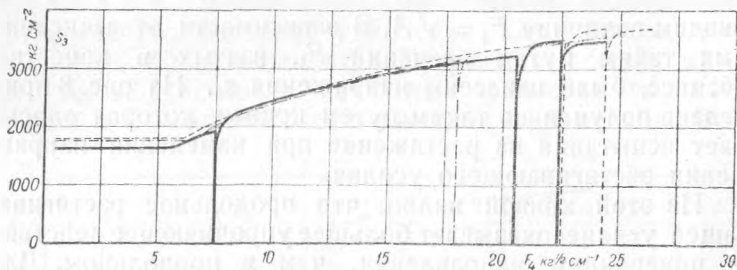


Рис. 9. Испытания с чередованием нагрузок на растяжение и кручение на образце из стали.

более низко лежащих кривых отвечают более близким абсциссам, то благодаря этому получается взаимное приближение кривых друг к другу. Это особенно хорошо обнаруживается при нанесении данных испытаний с чередованием нагрузок на растяжение и кручение (давших при нанесении относительно F_3 отклонения до 20%) в новом виде, а именно, с использованием в качестве абсциссы величины F_4 . Для этих опытов имеем:

$$F_4 = \sqrt{\int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon + \int \tau d\gamma}.$$

На рис. 6 (вверху) построены в этом новом представлении данные тех же испытаний, что и на том же рисунке внизу. Лучшее совпадение опытных данных при использовании величины F_4 в качестве меры деформации (кривые отклоняются друг от друга теперь

только примерно на 5%) имеет место не только при этих испытаниях, но и при других с любым чередованием во времени нагрузок на растяжение и кручение. Это видно из рис. 9, где нанесены вместе опытные данные трех испытаний совершенно различного типа. Испытание, представленное сплошной кривой, начинается с кручения, за ним следует продолжительное испытание на растяжение и в конце присоединяются два испытания с быстрым чередованием нагрузок на растяжение и кручение. Испытание, представленное пунктирной линией, является в общем испытанием на чистое растяжение, при котором только в конце делаются две разгрузки с изменением направления нагрузки.

Наконец, кривая, нанесенная пунктиром с точкой, представляет третье испытание, которое также начинается с растяжения, но раньше чем второе испытание переходит в кручение и после более продолжительного кручения опять кончается растяжением. И эти испытания не дают больших отклонений друг от друга, чем испытания, нанесенные на рис. 6.

Теперь остается еще показать, что нанесение s_3 в зависимости от F_4 применимо также и для описанных в п. III, а) испытаний со свободными пластическими деформациями без разгрузок, над сталью и медью. Это приведено на рис. 4 (внизу) для стали и на рис. 5 (вверху) для меди. Отсюда видно, что зависимость

$$s_3 = f(F_4) \quad (4)$$

или в более общем виде:

$$\sqrt{\mathfrak{F}_0^2} = f\left(\sqrt{\int \mathfrak{F}_0 \dots d\mathfrak{E}_0}\right) \quad (5)$$

подтверждается также и испытаниями со свободными пластическими деформациями без разгрузки и, следовательно, обладает большей общностью, чем (3), так как она в известной степени учитывает изменение направления, вызываемое упрочнением. Уравнение (4)

должно быть добавлено в качестве четвертого закона упрочнения к трем приведенным в п. II формулам.

д) Опыты на кручение с изменением направления закручивания. При испытании на кручение с изменением направления закручивания обнаруживается разупрочняющий эффект вращения главных осей.

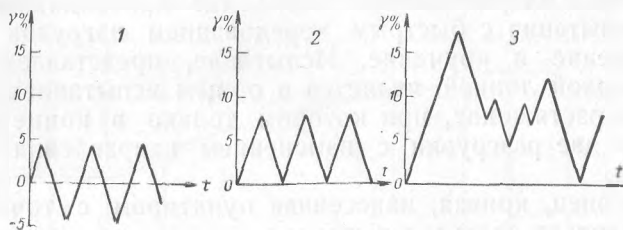


Рис. 10. Графики различных испытаний на кручение с изменением направления закручивания.

Здесь при каждом изменении направления закручивания главные оси поворачиваются на 90° . При этих испытаниях теряет силу и четвертый закон упрочнения.

Характерная диаграмма такого испытания приведена на рис. 11. Соответствующий закон изменения угла закручивания со временем изображен на рис. 10*).

IV. Общие выводы. Была сделана попытка найти на основе опытных данных зависимость между характеристическими величинами напряжения и величинами деформации, при помощи которых можно было бы выразить закон упрочнения. При тех испытаниях, при которых напряженное состояние изменяется с сохранением подобия и никаких разгрузок, вызывающих поворот главных осей, не делается, упрочнение может быть описано скалярным соотношением, а именно: квадра-

*) Этот пункт сокращен ввиду неясности выводов автора. (Прим. ред.)

тичный инвариант девиатора напряжений является однозначной функцией одного только соответствующего инварианта девиатора деформаций:

$$\sqrt{\Phi_0^2} = f(\sqrt{\mathcal{E}_0^2}).$$

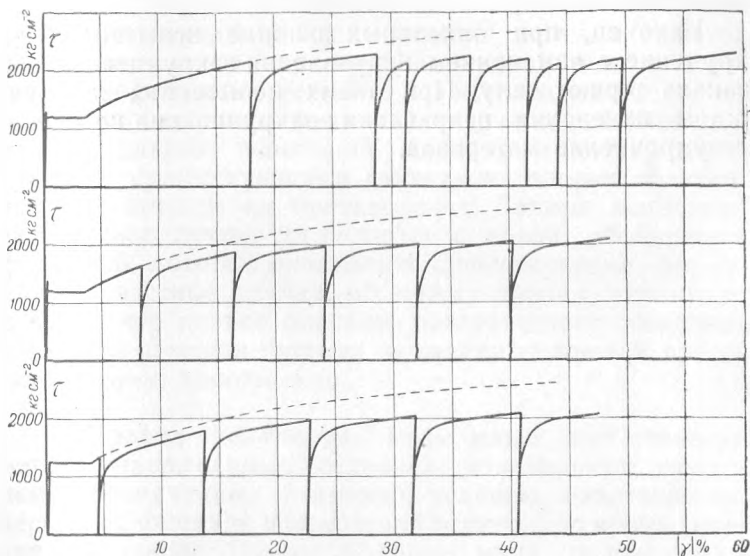


Рис. 11. Испытания на кручение с изменением направления закручивания над трубами из стали [ср. рис. 9].

Если же после разгрузки опыт продолжается при другом направлении главных осей, чем вначале, то скалярное описание упрочнения этим законом становится неверным, так как очевидно, что пластической деформацией нарушается квази-изотропия, имевшая место вначале. В частности, при испытаниях с чередованием нагрузок на растяжение и кручение это поведение может, однако, быть представлено другим законом, который связывает функциональной зависимостью

тот же квадратичный инвариант от \mathfrak{F}_0 с упруго-пластической работой изменения формы A :

$$\sqrt{\mathfrak{F}_0^2} = f\left(\sqrt{\int \mathfrak{F}_0 \dots d\mathfrak{E}_0}\right) = f(A)$$

и сохраняет силу также и для первых из названных выше испытаний.

Наконец, при описанных в конце испытаниях на кручение с изменением направления закручивания оба закона теряют силу. При таких испытаниях при каждом изменении направления закручивания возникает разупрочнение материала.

К МЕХАНИКЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СТАЛИ *)

I. В настоящей работе сначала дается в сжатой форме систематическое построение механики пластической деформации металлов в предположении, что их можно рассматривать как квази-изотропные. Затем приводятся данные испытаний, которые отчасти согласуются с существующими формулами теории пластичности и отчасти им противоречат. Данные испытаний значительно лучше согласуются с новой обобщенной формулой, которая охватывает существующие формулы как частные случаи, но, между прочим, указывают и на то, что полное описание пластического поведения стали при помощи формул механики сплошной среды, повидимому, невозможно.

II. Предел текучести. Возможные при течении металла напряженные состояния подчиняются известному ограничению, а именно, условию пластичности: некоторая функция напряжений остается во время течения постоянной. Вопрос о форме этого условия пластичности уже разрешен для стали с практически достаточной точностью. При не слишком большом среднем нормальном напряжении

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

условие пластичности не зависит от $\sigma^{[69]}$; поэтому из тензора напряжений

$$S = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

*) ZAMM, Bd. 12, N. 1, S. 1—14 (1932).

можно вычесть шаровой тензор

$$\sigma \mathbb{E} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{Bmatrix}$$

(\mathbb{E} — единичный тензор) и, следовательно, положить

$$S = \sigma \mathbb{E} + S_0.$$

Здесь S_0 обозначает девиатор

$$S_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{Bmatrix}.$$

Тогда для изотропного материала в качестве условий пластичности можно рассматривать лишь функции инвариантов девиатора. Если принять постоянной величину наибольшей разности главных значений S_0 , мы получим условие пластичности, выражающее постоянство наибольшего касательного напряжения; если же положить квадратичный инвариант девиатора напряжений равным постоянной, то получим условие пластичности Мизеса:

$$S_0^2 = 2k^2. \quad (1)$$

Здесь k обозначает предел текучести при чистом сдвиге. Под $S_0^2 = (S_0 \cdot S_0)$ подразумевается скалярное произведение от S_0 на самого себя, следовательно, это есть сумма квадратов всех составляющих S_0 , составленная по правилам скалярного произведения тензоров.

Условие постоянства наибольшего касательного напряжения выполняется с достаточной точностью для момента наступления пластического течения^[51], тогда как при возрастающих пластических деформациях лучше выполняется условие Мизеса (этот сборник, стр. 57). Это, пожалуй, связано с тем, что вначале появляется неравномерное, локализованное течение и только с начинающимся упрочнением становится

возможной равномерная пластическая деформация^[70]. Как показывают опыты Лоде, напряжения и в области упрочнения приближенно удовлетворяют уравнению (1), надо только стоящую в правой части постоянную изменить в масштабе соответствующего упрочнения¹⁾.

У стали увеличение величины S_0^2 с возрастанием деформаций настолько незначительно, что эта величина может рассматриваться как постоянная, если только деформация не слишком велика.

III. Зависимость между пластическими деформациями и напряжениями. Рассмотрение общих задач теории пластичности требует установления зависимости между напряжениями и деформациями. При построении формул пользуются тем фактом, что имеется большая область скоростей деформаций, при которых можно пренебречь явлениями внутреннего трения и релаксации.

Опыты Ганнемана и Ямада^[67] показывают, что пластическое изменение объема весьма мало по сравнению с упругим. Поэтому мы принимаем зависимость между средней деформацией

$$\epsilon = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

и средним нормальным напряжением в пластическом состоянии такой же, как и в упругом состоянии, а именно:

$$\epsilon = \frac{m-2}{2(m+1)} G \sigma,$$

где G обозначает модуль сдвига, а m — число Пуассона. Искомая зависимость между тензором напряжений S и тензором деформаций E сводится таким образом

1) Вопрос о том, каким образом зависит упрочнение от предшествующих деформаций, экспериментально исследуется в настоящее время в Геттингенском институте прикладной механики.

к зависимости между соответствующими девиаторами S_0 и E_0 :

$$E_0 = \begin{Bmatrix} e_x - e & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & e_y - e & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & e_z - e \end{Bmatrix}.$$

Перед тем как рассматривать частные типы зависимости между S_0 и E_0 , сделаем несколько принципиальных замечаний относительно тензорных уравнений.

Пусть A, B, C обозначают тензоры. Тогда уравнение

$$f(A, B, C, \dots) = 0$$

будет выражать, что взятые в одной и той же системе координат компоненты от A, B, C, \dots связаны между собой девятью соответствующими уравнениями. Функциональная зависимость $f(A, B, C, \dots) = 0$ должна быть инвариантна относительно преобразования координат. Такая зависимость между тензорами дается, например, линейным соотношением:

$$c_1 A + c_2 B + c_3 C + \dots = 0. \quad (2)$$

Величины c_1, c_2, c_3, \dots могут быть функциями скалярных инвариантов тензоров A, B, C, \dots , например скалярными произведениями двух тензоров. Если построить в пространстве девяти измерений из начала координат вектор, компоненты которого равны девяти компонентам заданного тензора, то при известных ограничениях можно рассматривать этот вектор как изображение тензора. В последующем мы будем относить все тензоры к одной и той же неподвижной системе координат и сможем воспользоваться приведенным выше изображением. Линейной форме (2) в изображающем пространстве соответствует сложение изображающих векторов. Если компоненты тензора связаны между собой n независимыми друг от друга линейными уравнениями, то тогда изображающий вектор будет лежать

в изображающем пространстве, имеющем $(9-n)$ измерений. Это замечание нам потребуется в дальнейшем.

Предположим теперь, что девиаторы E_0 и S_0 зависят от параметра t , который может, например, являться временем.

В упругом состоянии изменение девиатора напряжений пропорционально изменению девиатора деформаций и не зависит от самих напряжений и деформаций:

$$2G \cdot \frac{dE_0}{dt} = \frac{dS_0}{dt}.$$

Мы примем, во-первых, что в пластическом состоянии изменение девиатора напряжений зависит не только от изменения девиатора деформаций, но и от мгновенных значений E_0 и S_0 .

В качестве самой простой формулы выберем линейную зависимость:

$$c_1 E_0 + c_2 S_0 + c_3 \frac{dE_0}{dt} + c_4 \frac{dS_0}{dt} = 0. \quad (3)$$

Величины $c_1 - c_4$ могут являться функциями скалярных инвариантов четырех тензоров E_0 , S_0 , $\frac{dE_0}{dt}$ и $\frac{dS_0}{dt}$, но только такими, что соотношение (2) не зависит от времени, т. е. не зависит от того, с какой скоростью протекают деформации. Если величины $c_1 - c_4$ постоянны, требуемая независимость от времени не будет выполняться. Мы еще раз указываем на это основное различие между формулами теории пластичности и формулами для внутреннего трения и релаксации, так как здесь, повидимому, имеются некоторые неясности (Гутенберг и Шлехтвег, например, хотя описать „процесс пластической деформации“ при помощи уравнений для упругого тела с учетом внутреннего трения и релаксации)^[71].

Помимо уравнения (2), необходимо удовлетворить условию пластичности:

$$S_0^2 = 2k^2 = A^2, \quad (4)$$

и, кроме того, требуются еще два уравнения для определения трех величин: $\frac{c_1}{c_4}$, $\frac{c_2}{c_4}$, $\frac{c_3}{c_4}$.

IV. Среда Сен-Венана—Мизеса. Полагая в уравнении (3) $c_1 = c_4 = 0$, имеем:

$$c_2 S_0 + c_3 \frac{dE_0}{dt} = 0.$$

Умножая скалярно на S_0 и принимая во внимание уравнения (4), получаем:

$$\frac{c_3}{c_2} = -A^2 \cdot \frac{dt}{(dE_0 \cdot S_0)}.$$

Отсюда получается не содержащая времени зависимость:

$$dE_0 = \frac{(S_0 \cdot dE_0)}{A} \cdot \frac{S_0}{A}.$$

Следовательно, изображающие векторы dE_0 и S_0 будут иметь одинаковое направление и будет иметь место зависимость:

$$\frac{(S_0 \cdot dE_0)}{A} = \sqrt{dE_0^2}.$$

Поэтому:

$$\frac{dE_0}{\sqrt{dE_0^2}} = \frac{S_0}{A}. \quad (5)$$

Вектору dE_0 бесконечно малого изменения деформации соответствует однозначно вектор напряжений S_0 того же направления, что и dE_0 , и с абсолютной величиной A .

Все же при задании S_0 величина dE_0 остается неопределенной.

Если пренебрегать изменением объема, что при достаточно больших деформациях [всегда допустимо, уравнение (5) вместе с условием

$$\epsilon_j = 0$$

совпадут с уравнениями Мизеса (этот сборник, стр. 57). Приведенная здесь формулировка нам кажется более удачной, чем обычная, поскольку она лучше выявляет независимость от времени этих уравнений.

Если же S_0 не меняется в течение всей деформации, то уравнение (5) можно еще написать и так:

$$\frac{E_0}{\sqrt{E_0^2}} = \frac{S_0}{A}. \quad (6)$$

Действительность этого уравнения была доказана опытами Лоде (этот сборник, стр. 168) и подтверждается также нашими испытаниями, приводимыми ниже.

Таким образом, при неизменяющемся девиаторе напряжений S_0 , можно рассматривать только такие деформации E_0 , при которых вектор E_0 имеет то же направление, что и S_0 , но произвольную абсолютную величину. Такие деформации мы будем называть „свободными“, так как они могут происходить без изменения внешних сил.

Например, свободная деформация, соответствующая определенному напряженному состоянию, возникает при переходе напряжений любым образом за предел текучести на бесконечно малую величину.

Таким образом, формула Сен-Венана—Мизеса правильно воспроизводит свободные деформации в стали, соответствующие определенному напряженному состоянию.

Подобные деформации могут появиться при решении статически определимых задач теории пластичности. После того как напряжения вычислены внутри тела по заданным напряжениям на границе, задача, как это вытекает из уравнения (6), еще никоим образом не разрешима однозначно; напротив того, для деформаций получаются дифференциальные уравнения в частных производных, для решения которых требуется еще задание краевых значений деформаций.

Для плоской задачи, когда главное напряжение в направлении z равно среднему арифметическому двух остальных, из уравнения (5) следует, что

$$\epsilon_z - \epsilon = 0,$$

или, так как относительным изменением объема ϵ обычно можно пренебрегать по сравнению с пластическими удлинениями, $\epsilon_z = 0$; следовательно, деформация плоская.

Рассмотрим далее поведение среды Сен-Венана—Мизеса при любых деформациях. Из уравнения (5) следует, что при прерывном изменении направления dE_0 произойдет такое же прерывное изменение направления S_0 .

Это, например, означает, что в тонкостенной трубе, которая сначала подвергается пластическому кручению и затем растяжению, напряжения кручения исчезают в момент изменения деформации и вместо этого возникает растягивающее напряжение, равное пределу текучести при растяжении. Отсюда следует, что в среде Сен-Венана—Мизеса, в которой не происходит никаких изменений деформаций ($dE_0 = 0$), в соответствии с уравнением (5) у предела текучести может существовать любое напряженное состояние, тогда как фактически у металлов и в этом случае возникает напряженное состояние, однозначно определяемое деформациями. Вследствие неучета упругой части деформации формула Сен-Венана—Мизеса не воспроизводит действительного поведения металлов в этом случае. В самом деле, опыты Хоэнемзера (этот сборник, стр. 223) показали, что в случае стальной трубы, сначала пластически скрученной, а затем растянутой, напряжения кручения медленно и непрерывно убывают с возрастанием удлинения и остаются отличными от нуля при удлинениях, превышающих в четыре раза упругое удлинение у предела текучести.

Растягивающее напряжение тоже постепенно возрастает, причем уравнение (4) выполняется достаточно хорошо. В статически неопределимых задачах (например, смешанные краевые задачи) уравнения Сен-Венана—Мизеса, конечно, применять нельзя, так как там вообще во время деформации будет меняться направление S_0 .

V. Среда Прандтля—Рейса. Так как формула Сен-Венана—Мизеса правильно воспроизводит свободные деформации и, наоборот, не учитывает упругих, то

можно себе представить каждую бесконечно малую деформацию dE_0 составленной из свободной компоненты деформации:

$$dE'' = \frac{(S_0 \cdot dE_0)}{A} \cdot \frac{S_0}{A} \quad (7)$$

и упругой компоненты:

$$dE' = \frac{dS_0}{2G}. \quad (8)$$

Тогда мы будем иметь:

$$dE_0 = \frac{(S_0 \cdot dE_0)}{A} \cdot \frac{S_0}{A} + \frac{dS_0}{2G}. \quad (9)$$

Сюда нужно еще присоединить зависимость между средним нормальным напряжением σ и объемной деформацией:

$$\varepsilon = \frac{m-2}{2(m+1)G} \cdot \sigma.$$

Зависимость (9) получится из (3), если положить c_1 тождественно равным нулю и принять во внимание условие пластичности (4).

Получим:

$$\frac{c_2}{c_3} = - \frac{(S_0 \cdot dE_0)}{A^2 \cdot dt}.$$

Из требования, чтобы $\frac{c_1}{c_3}$ не зависело от E_0 , следует:

$$\frac{c_4}{c_3} = - 2G,$$

если взять именно деформацию вдоль поверхности $E_0 = \frac{A}{2G}$ в пространстве E_0 .

Уравнение (9) является, на наш взгляд, более удачной формулировкой уравнений Рейса (этот сборник, стр. 206), так как оно лучше выявляет независимость связи между напряжениями и деформациями от времени. (Прандтль^[72] дал одинаковую с Рейсом формулу для частного случая плоского деформированного

состояния, правда, при другом условии пластичности, еще в 1924 г.)

В уравнении (9) член

$$\frac{(S_0 \cdot dE_0)}{A} \cdot \frac{S_0}{A}$$

является составляющей dE_0 в направлении S_0 , а dS_0 , в силу того что $S_0^2 = A^2$ или $(S_0 \cdot dS_0) = 0$, направлено перпендикулярно к S_0 . Если dE_0 и S_0 заданы, из уравнения (9) получим $\frac{dS_0}{2G}$, беря составляющую

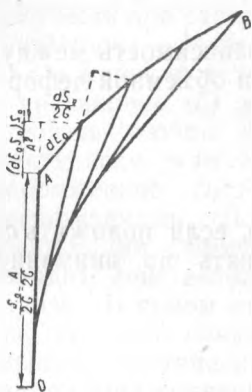


Рис. 1.

dE_0 в направлении, перпендикулярном к S_0 (рис. 1). Если, наоборот, задано dS_0 , можно получить только составляющую dE_0 в направлении dS_0 , в то время как составляющая в направлении S_0 остается неопределенной.

Само собой разумеется, что уравнение (9) действительно только тогда, когда составляющая от dE_0 в направлении S_0 положительна, так как в противном случае тело не будет больше находиться в пластическом состоянии.

Пусть AB на рис. 1 есть кривая деформации в изображающем пространстве тензора E_0 . В каждой точке этой кривой предстоит построить вектор упругой деформации, длина которого $\frac{A}{2G}$ постоянна. На рис. 1 каждый элемент кривой деформации разложен на свободную деформацию:

$$\frac{(S_0 dE_0)}{A} \cdot \frac{S_0}{A},$$

и упругую деформацию:

$$\frac{dS_0}{2G}.$$

Отрезки $\frac{dS_0}{2G}$ прибавляются к соответствующим отрезкам $\frac{S_0}{2G}$.

Путь начальной точки вектора $\frac{S_0}{2G}$ является трактриссой пути деформации. Трактрисса некоторой кривой характеризуется тем, что расстояние между соответствующими точками кривой и трактриссы постоянно, а соединяющая их прямая касается трактриссы.

Чтобы построить трактриссу, достаточно задать пару соответственных точек.

Преимущество зависимости (9) по сравнению с (5) состоит в том, что теперь прерывному изменению направления dE_0 соответствует непрерывное изменение направления S_0 .

В двумерном пространстве возможно механическое интегрирование уравнений Рейса с помощью планиметра. Оно основано на свойстве трактриссы. Напряжения на конце заданной кривой деформации определяются при этом однозначно, если они заданы в начале кривой. Обратная задача, состоящая в том, чтобы, зная ход изменения напряжений, определить кривую деформаций, однозначно неразрешима.

Характерным свойством среды Прандтля — Рейса является независимость связи между напряжениями и деформациями от начальной деформации E_0 .

Механическая интеграция уравнений Рейса возможна при таких плоских задачах, в которых главное напряжение в направлении z имеет значение:

$$\sigma_z = \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y).$$

Уравнение (9) напишется для составляющей ϵ_z так:

$$d(\epsilon_z - \epsilon) = \frac{(S_0 \cdot dE_0)}{A^2} (\sigma_z - \sigma) + \frac{d(\sigma_z - \sigma)}{2G},$$

а так как $\sigma_z - \sigma = 0$, то

$$\epsilon_z - \epsilon = \text{const.}$$

Так как σ_z главное напряжение, то

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

и из (9) следует:

$$\gamma_{xz} = \text{const. и } \gamma_{yz} = \text{const.}$$

Поскольку же к началу течения деформации должны соответствовать напряжениям по закону упругости, то и во время течения будет:

$$\varepsilon_z - \varepsilon = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Из-за малости объемного удлинения ε следует, что приближенно будет иметь место плоская деформация. Следовательно, напряженное состояние и деформированное состояние будут определяться плоскими тензорами:

$$S' = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{Bmatrix} \text{ и } E' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & \varepsilon_y \end{Bmatrix}.$$

Соответствующие плоские девиаторы будут иметь вид:

$$S'_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} & \tau \\ \tau & -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \end{Bmatrix} \text{ и } E'_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\gamma}{2} & -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \end{Bmatrix}.$$

Между каждым двумя соответствующими составляющими обоих девиаторов имеется одна и та же инвариантная зависимость; изображающие векторы S'_0 и $2GE'_0$ лежат поэтому в двухмерной плоскости четырехмерного изображающего пространства и имеют следующие составляющие:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, \tau\sqrt{2} \text{ и } 2G\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sqrt{2}}, 2G\frac{\gamma}{\sqrt{2}}.$$

Условие пластичности становится следующим:

$$S'_0 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + 2\tau^2 = S_0^2 = A^2.$$

Таким образом, уравнение (9) справедливо для плоских девиаторов S'_0 и E'_0 , и мы можем выполнить приведенное на рис. 1 построение при помощи планиметра¹⁾.

Если задана кривая деформаций, путем построения трактриссы находим величины напряжений $\sigma_x - \sigma_y$ и τ . Кроме того, имеют место еще уравнения:

$$\varepsilon = \varepsilon_z = \frac{m-2}{2(m+1)G} \cdot \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2},$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

так что напряжения определяются однозначно. Если же предположить, что тело несжимаемо, т. е. $m=2$, $\varepsilon=0$, то плоская деформация будет строго осуществлена, но зато теперь остается неопределенным значение $(\sigma_x + \sigma_y)$.

Для такого плоского состояния, при котором обращается в нуль главное напряжение в направлении z ($\sigma_z=0$), и, кроме того, в одном из перпендикулярных направлений нормальное напряжение равно нулю, так что:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0,$$

также может быть выполнена интеграция уравнений Рейса.

Из уравнения (9) следует, как было указано выше, что во время деформации:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \text{const.}^2).$$

¹⁾ Изображение плоского девиатора плоским вектором и указание на построение трактриссы в этом случае принадлежит Прандтлю.

²⁾ Векторы, изображающие S_0 и $2GE_0$, лежат при любых напряжениях и деформациях в одной и той же плоскости изображающего пространства и имеют в этой плоскости следующие составляющие:

$$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3}}, \tau \sqrt{2} \text{ и } 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sqrt{\frac{2}{3}}, 2G \frac{\gamma}{\sqrt{2}}.$$

Так как к началу течения тело опять должно иметь такие деформации, которые соответствуют напряжениям по закону упругости, то из $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ следует, что и $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Из условий: $\sigma_y = \sigma_z = 0$ следует, что $\epsilon_y = \epsilon_z$, и девиаторы S_0 и E_0 будут иметь вид

$$S_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & -\frac{1}{3}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x \end{pmatrix} \text{ и } E_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\epsilon_x - \epsilon_y) & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & -\frac{1}{3}(\epsilon_x - \epsilon_y) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\epsilon_x - \epsilon_y) \end{pmatrix}$$

В последнем приведенном случае плоского состояния $\sigma_y = \sigma_z = 0$, и выражение $\sigma^2 + c^2\tau^2$ при любом c будет являться инвариантом девиатора напряжений S_0 , а поэтому оно может служить в качестве условия пластичности.

Если в уравнениях Рейса

$$dE_0 = \lambda S_0 + \frac{dS_0}{2G}$$

определить величину λ при помощи условия пластичности

$$\sigma^2 + c^2\tau^2 = c^2k^2,$$

то получатся дифференциальные уравнения, которые, как легко можно убедиться, могут быть проинтегрированы при помощи планиметра, если на изображающей плоскости нанести:

$$\sigma_x, \quad c\tau \quad \text{и} \quad 2G(\epsilon_x - \epsilon_y), \quad Gc\gamma.$$

VI. Данные испытаний. Опыты проводились над тонкостенными стальными трубами со средним диаметром в 34 мм и толщиной стенок в 3 мм, которые подвергались одновременному растяжению и кручению на специальной машине, описание которой имеется в статье Хоэнмзера (этот сборник, стр. 223).

В качестве условия пластичности с хорошим приближением было взято следующее:

$$\sigma_x^2 + c^2 \tau^2 = c^2 k^2, \quad (10)$$

причем значения c колебались примерно между 1,70 и 1,85.

Отклонения вызываются упрочнением во время испытания, которое на диаграмме (σ_x^2, τ^2) (рис. 2) отмечается тем, что кривая пластической деформации при убывающем во время испытания касательном напряжении имеет более пологий, а при возрастающем касательном напряжении более крутой вид. Но даже тогда, когда влияние упрочнения пытались исключить путем следующих друг за другом испытаний с убывающим и возрастающим касательными напряжениями, все же остаются отклонения примерно $\pm 3\%$. Так как эти отклонения систематически зависят от предшествующих деформаций трубы, то мы приходим к выводу, что получающаяся при больших пластических деформациях анизотропия оказывает влияние уже и при таких малых пластических деформациях, какие имели место при наших испытаниях (см. также замечание, приведенное в п. II относительно зависимости упрочнения от предшествующих деформаций).

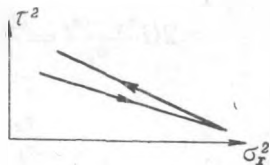


Рис. 2.

Изображая результаты испытаний описанным в п. V способом, мы получаем, помимо хорошего представления о кривой зависимости напряжений от деформаций, также и возможность проверки опытных данных при помощи планиметра. Путь деформации изображается, следовательно, в этом случае в системе координат:

$$2G(\epsilon_x - \epsilon_y) \text{ и } G\gamma.$$

Каждой точке траектории деформации соответствует вектор напряжения с компонентами σ_x и τ . Длина этого вектора будет на основании приближенного равенства (10) постоянной.

Для возможности сопоставления результатов испытаний, полученных на различных стадиях упрочнения, надо было перейти на графике к безразмерным величинам; для этого координаты разделены на величину предела текучести при чистом растяжении σ_s . Пользуясь зависимостью

$$c\tau_s = \sigma_s$$

и определениями

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}, \quad \gamma_s = \frac{\tau_s}{G},$$

где E и G обозначают модуль упругости и модуль сдвига, получаем:

$$2G \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_s} = \frac{2G}{E} \cdot \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_s} = p, \quad \frac{G \gamma}{\sigma_s} = \frac{\gamma}{\gamma_s} = g$$

и

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_s} = s, \quad \frac{c\tau}{\sigma_s} = \frac{\tau}{\tau_s} = t.$$

Принимая еще во внимание связь среднего нормального напряжения с объемной деформацией

$$\varepsilon_x + 2\varepsilon_y = \frac{m-2}{2(m+1)G} \cdot \sigma_x,$$

получаем для p зависимость:

$$p = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{(m+1)} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_s} - \frac{m-2}{2(m+1)} \cdot s.$$

Удлинения и углы закручивания измерялись при помощи зеркал и оптических труб, так как возникающие во время испытания деформации были малы. Обработка опытных данных проводилась следующим образом.

Растягивающие силы P и крутящие моменты M наносились на диаграмму с координатами P^2 и $\left(\frac{M}{r_m}\right)^2$, где r_m обозначает средний радиус трубы. Точки ложатся очень хорошо на прямую, см. рис. 7 и 8, которые отно-

сятся к испытаниям, приведенным на рис. 5. Так как прямая отсекает на осях величины P_s^2 и $\left(\frac{M_s}{r_m}\right)^2$, получаем:

$$s = \frac{\sigma_x}{\sigma_s} = \frac{P}{P_s}, \quad t = \frac{\tau}{\tau_s} = \frac{M}{M_s}.$$

Из испытания в упругой области, для которой имеют силу зависимости

$$P = c_1 \varepsilon_x, \quad M = c_2 \gamma,$$

где ε_x и γ обозначают удлинение и сдвиг, выраженные в единицах шкалы измерительных приборов, определяются c_1 и c_2 , и отсюда

$$\varepsilon_s = \frac{P_s}{c_1}, \quad \gamma_s = \frac{M_s}{c_2};$$

и далее, при $m = \frac{10}{3}$,

$$p = \frac{15}{13} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_s} - \frac{2}{13} \cdot s \quad \text{и} \quad g = \frac{\gamma}{\gamma_s}.$$

Упрочнение во время опытов было очень незначительным, максимум 4%. Был произведен учет упрочнения при обработке некоторых испытаний, который привел, однако, только к весьма малым поправкам.

На рис. 3 изображены данные испытаний при пластических деформациях при неизменяющихся напряжениях для того, чтобы еще раз подтвердить действительность уравнения (6). Для наглядности векторы напряжений повернуты на 90°.

На рис. 4 нанесены данные двух испытаний, при которых сначала прикладывалось растягивающее напряжение, при постоянном напряжении достигалась

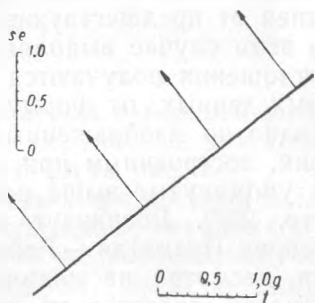


Рис. 3.

определенная величина пластической деформации, различная в обоих случаях, а потом труба закручивалась при постоянном удлинении. Если перенести кривые деформации вместе с векторами напряжения параллельно, совместив точки A и B , результаты совпадут; это значит, что течение при неизменяющихся напряжениях не оказывает никакого влияния на дальнейший вид зависимости

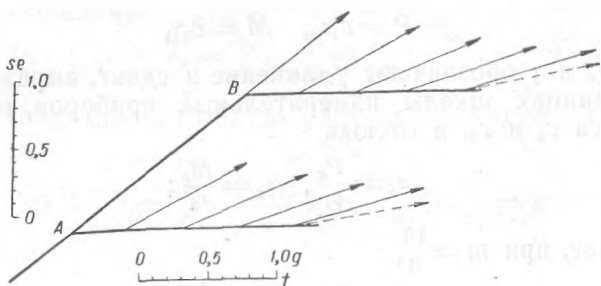


Рис. 4.

между напряжениями и деформациями. Основное предположение теории Прандтля—Рейса, а именно: независимость связи между напряжением и деформацией от предшествующей деформации, таким образом, в этом случае выполняется. Правда, в количественном отношении получаются значительные отклонения опытных данных от формулы Прандтля—Рейса, как это видно по изображенным пунктиром векторам напряжений, построенным при помощи планиметра (см. также и упомянутые выше опыты Хоэнемзера, этот сборник, стр. 223). Возникает вопрос, правильно ли отражает теория Прандтля—Рейса пластическое поведение стали, несмотря на количественные отклонения, и в частности, является ли зависимость между напряжением и деформацией действительно полностью независимой от предшествующих деформаций.

На этот вопрос отвечают результаты двух испытаний, приведенные на рис. 5. Траектории деформации в обоих случаях одинаковы, за исключением небольшого „крючка“

в точке A . Этот крючок на траектории деформации означает, что имела место небольшая пластическая деформация при неизменных напряжениях. Как видно, эта небольшая свободная деформация сильно влияет на дальнейший вид кривой напряжений. До точки A результаты обоих испытаний совпадают, а за этой точкой начинает обнаруживаться увеличивающееся отклонение. Нанесенные

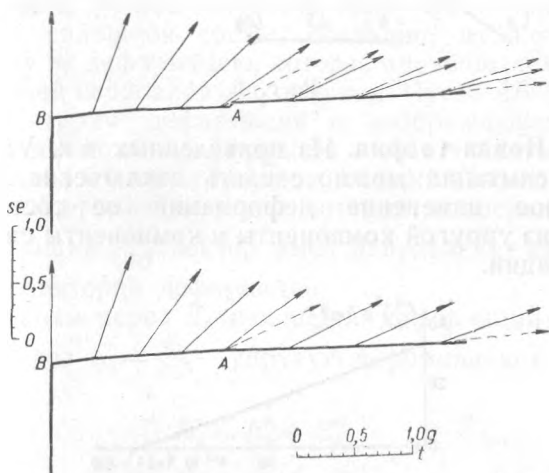


Рис. 5.

штрих-пунктирными линиями векторы в верхней части рис. 5 изображают напряжения, полученные при испытании, представленном в нижней части рис. 5.

На рис. 6 изображено испытание, при котором после начального течения при постоянных напряжениях (причем вектор напряжения имеет то же направление, что и вектор в точке A при испытаниях, представленных на рис. 5) в дальнейшем получилась такая же траектория деформации, как и на рис. 5. Ход напряжений при этом испытании такой же, как в верхней части рис. 5, начиная от точки A .

Из этих весьма заслуживающих внимания опытов обнаруживается, что формула Прандтля—Рейса дает не

только количественные отклонения от опытных данных, но и принципиально неправильно описывает процессы пластической деформации в стали.

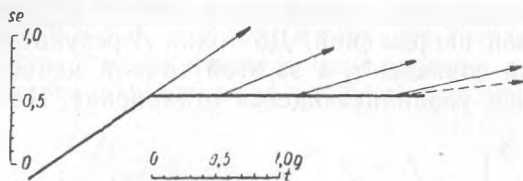


Рис. 6.

VII. Новая теория. Из приведенных в п. VI результатов испытаний можно сделать заключение, что произвольное изменение деформаций не составляется просто из упругой компоненты и компоненты свободной деформации.

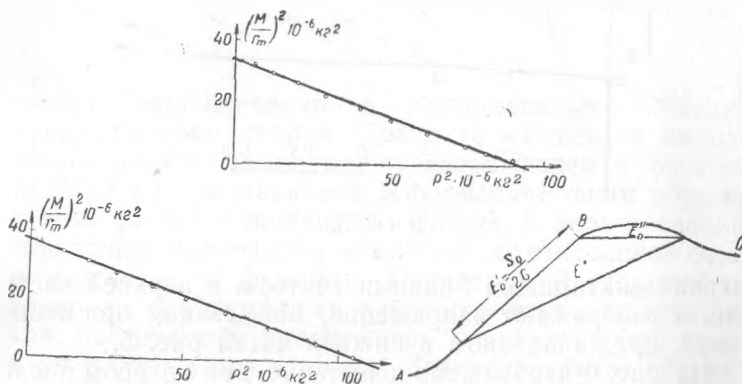


Рис. 7, 8, 9.

Механизм течения при произвольных пластических деформациях, очевидно, значительно сложнее, причем все же свободные деформации играют заметную роль.

Согласно рис. 4 они не оказывают никакого влияния на дальнейшие процессы в стержне, тогда как из рис. 5 и 6 видно, что достаточно уже небольшой свободной

деформации для того, чтобы „воспоминание“ материала о всех предшествующих процессах до некоторой степени пропало. В самом деле, крючок на траектории деформации действует таким образом, что материал в дальнейшем ведет себя так, как будто бы деформация от B до A , оказывающая при испытании, изображенном на нижней части рис. 5, значительное влияние на дальнейший вид кривой напряжения, не имела места. Чтобы отразить этот факт формулами механики сплошной среды, очевидно, нужно ввести в формулу ту деформацию, которая произошла, начиная от последней свободной деформации. Пусть ABC (рис. 9) есть траектория деформаций в изображающем пространстве девиатора деформаций и B точка, в которой в последний раз при движении к точке C имела место свободная деформация, т. е. в которой в последний раз изображающий $\frac{S_0}{2G}$ вектор имел направление касательной к траектории деформации.

Обозначим через E_0'' изменение деформации между B и C , через $E_0' = \frac{S_0}{2G}$ — упругую деформацию в B и через

$$E_0^* = E_0' + E_0''$$

сумму этих двух деформаций. Воспользуемся теперь уравнением (3), в котором вместо E_0 подставим величину E_0^* . Кроме этого, примем $c_3 = c_4 = 0$, как подсказывают опыты. Принимая во внимание условие пластичности (4), получим:

$$\frac{E_0^*}{\sqrt{E_0^*}} = \frac{S_0^1}{A}. \quad (11)$$

¹⁾ Выведенные Генки уравнения (этот сборник, стр. 80) формально совпадают с уравнениями (10) и (11), правда, с той существенной разницей, что Генки подставляет сюда *полную* деформацию вместо E_0^* и поэтому его уравнения находятся в противоречии с данными наблюдений над металлами в пластическом состоянии. Генки выводит свои уравнения из одного вариационного принципа, действительность которого уже была постулирована Хааром и Карманом (этот сборник, стр. 41).

Кроме того, имеет силу еще и равенство:

$$\varepsilon = \frac{m-2}{2(m+1)G} \cdot \sigma. \quad (12)$$

Новая среда, описываемая уравнениями (11) и (12), обладает двумя характерными свойствами. Первое состоит в том, что, в противоположность свойствам среды Прандтля—Рейса, различные траектории деформации, получающиеся после одного и того же деформированного состояния, создают одинаковые напряжения только в том случае, если свободные деформации на всех сравниваемых траекториях исключены.

Таким образом, в пространстве E_0 имеется поле векторов напряжения $\frac{S_0}{2G}$, направленных по радиусам, идущим от начала $E_0^* = 0$ к соответствующим точкам кривой деформации и имеющих, вследствие условия пластичности, величину $\frac{A}{2G}$. Такие деформации, пожалуй, целесообразно называть квази-упругими, так как здесь, как и в упругой области, каждое деформированное состояние находится в однозначном соответствии с напряженным состоянием.

Второе характерное свойство нового тела состоит в том, что *квази-упругое состояние неустойчиво*. Любое небольшое отклонение направления траектории деформации, связанное с непродолжительной свободной деформацией, вызывает смещение нулевой точки для E_0^* . При наложении на процесс пластической деформации колебаний, достаточно быстрых по сравнению со скоростью течения и имеющих любую малую амплитуду, неустойчивое квази-упругое состояние постоянно нарушается, и новая среда ведет себя в этом случае, как можно видеть, подобно среде Прандтля—Рейса. Таким образом, новая формула содержит как частные случаи среду Сен-Венана—Мизеса, если деформация происходит при неизменных напряжениях, и среду Прандтля—Рейса, если постоянно нарушается неустойчивое квази-упругое состояние.

VIII. Дополнительные данные испытаний. Описанные в п. VI испытания хорошо согласуются с новой формулой, т. е. векторы напряжений достаточно точно проходят через точку $E_0^* = 0$. Векторы, нанесенные пунктиром, попережнему изображают напряжения Прандтля—Рейса. Каждое испытание начиналось со свободной деформации и именно по следующей причине: между областью собственно пластической деформации и упругим состоянием лежит область перехода (AB на рис. 10); в этой области перехода не только имеет место другая закономерность, чем в области течения, но и вид кривой напряжений за точкой B зависит от того, каким образом была пройдена эта область перехода. Для получения при всех испытаниях одинакового начального состояния оказалось поэтому необходимым допустить за область перехода наличие свободных деформаций, которыми исключается влияние предшествующих процессов. Хотя испытания, которые здесь не приводятся, и указывают на то, что разгрузка в упругую область оказывает такое же действие, как и свободная деформация, и исключает влияние предшествующих процессов, все же не поддающиеся выяснению процессы в области перехода не дают возможности выявить этот факт с желательной точностью. Мы поэтому не оговариваем в новой теории требования неустойчивости квази-упругого состояния и при разгрузках ниже предела текучести, поскольку это явление не могло быть полностью реализовано на опыте. Вообще необходимо отметить, что новая формула, хотя и правильно воспроизводит пластические деформации стали при больших деформациях, но в отношении действительного поведения материала является сильно идеализированной. Это видно, например, из того, что при всех испытаниях в стадии возрастающей деформации, когда угол между касательной к траектории деформации



Рис. 10.

ции и вектором напряжения становится малым, напряжения ведут себя так, как будто имели место свободные деформации, хотя никаких измеримых отклонений в направлении траектории деформации не возникало. На рис. 11 полностью воспроизведено испытание, приведенное на рис. 6. Мы видим, что при дальнейшей деформации получают отклонения от квази-упругого поведения в сторону поведения по Прандтлю—Рейсу.

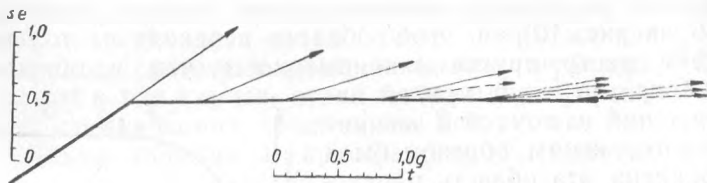


Рис. 11.

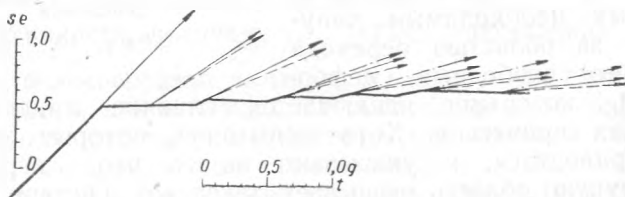


Рис. 12.

Векторы, изображенные пунктиром с точкой, опять представляют собой напряжения при ненарушенном квази-упругом поведении, а пунктирные векторы представляют собой напряжения по Прандтлю—Рейсу. То, что при этом мы, очевидно, имеем дело с типичным явлением неустойчивости, а не с закономерным отклонением от квази-упругого поведения, вытекает из полученного до сего времени обширного опытного материала. Опытные данные при одинаковой траектории деформации сначала хорошо согласуются друг с другом и с квази-упругими уравнениями; в дальнейшей же стадии они отклоняются друг от друга и именно в том смысле, что передвиже-

ние точки E_0^* при одних испытаниях происходит раньше, при других позднее.

На рис. 12 приведен случай многократно нарушенного квази-упругого состояния. Мы видим, что здесь результаты ближе к теории Прандтля—Рейса. В достаточно малой области деформации хорошо выполняется свойство поля векторов напряжения, как это видно из

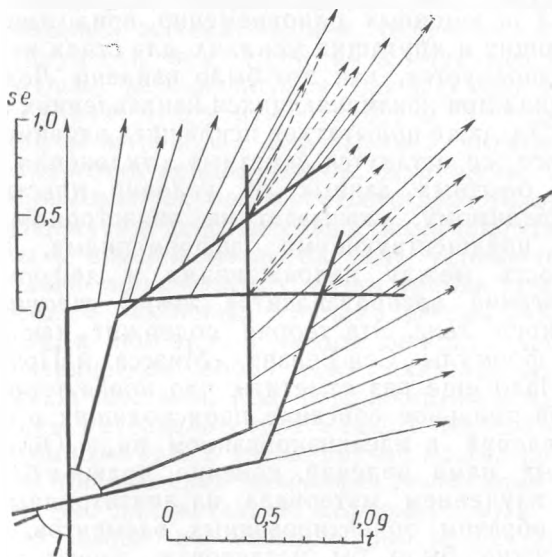


Рис. 13.

рис. 13, на котором нанесены друг на друга данные различных опытов, так что точки E_0^* совпадают.

Нанесенные пунктиром векторы в точках пересечения двух траекторий деформации опять изображают относящиеся к соответствующим траекториям напряжения по формуле Прандтля—Рейса. В дальнейшей стадии всех этих испытаний получают отклонения от квази-упругого поведения в сторону поведения по Прандтлю—Рейсу. Если даже вопрос относительно установления некоторого критерия для этих отклонений по

степени неустойчивости еще не совсем выяснен, все же можно считать установленным на опыте фактом, что квази-упругие уравнения и уравнения Прандтля—Рейса дают границы, между которыми находится действительное поведение стали во всех случаях.

IX. Общие выводы. Приведем еще раз вкратце результаты наших опытов. Условие пластичности Мизеса при переменных одновременно приложенных растягивающих и крутящих усилиях для стали не так хорошо выполняется, как это было найдено Лоде в его испытаниях при неизменяющихся направлениях главных осей. Если даже попытаться исключить влияние упрочнения, все же останутся заметные отклонения в полученных опытных данных от условий пластичности, что, повидимому, указывает на анизотропию, вызываемую предшествующими деформациями. Все же зависимость между напряжениями и деформациями *приблизженно* воспроизводится *новой теорией* для изотропного тела. Эта теория содержит как частные случаи формулы Сен-Венана—Мизеса и Прандтля—Рейса. Надо еще раз отметить, что новая теория дает только формальное описание происходящих при испытании явлений в идеализированном виде. Объяснение найденных нами явлений, конечно, должно быть связано с изучением материала из анизотропных, различным образом ориентированных элементов. Прежде всего нужно было бы исследовать, имеют ли место приведенные здесь наблюдения и в других металлах и в монокристаллах.

Ф. ОДКВИСТ

УПРОЧНЕНИЕ СТАЛИ И ЕЙ ПОДОБНЫХ МАТЕРИАЛОВ *)

В большинстве сделанных до сего времени попыток создания математической теории пластичности предел текучести при кручении k принимался за постоянную или рассматривался как функция среднего давления. Хотя существуют гипотезы [66, 73] для учета изменения величины k с деформацией, получаемые из них соотношения неинвариантны. Допущение постоянного напряжения текучести соответствует только редко встречающемуся в действительности случаю. Изменение величины k , которое могло бы быть установлено опытами, должно вызываться, с точки зрения молекулярной теории, в различных случаях весьма различными причинами, а поэтому и нельзя ожидать, что единая микромеханическая теория может охватить все относящиеся сюда явления. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением материалов типа ковкого железа при комнатной температуре. В таком случае можно пренебречь в первом приближении явлениями релаксации и последствия, что для металлов, деформируемых при температурах выше их температуры рекристаллизации, например свинец при комнатной температуре или железо при температуре красного каления, вряд ли возможно. Явление ползучести, которое, например, у литого железа наблюдается при температуре несколько выше 400°C , занимает промежуточное место.

В нашем исследовании мы будем всюду пренебрегать упругими деформациями по сравнению с пластическими и предполагать пластическую массу несжимаемой.

При сделанных ограничениях все же нельзя ожидать точного описания рассматриваемых явлений. Появление

*) ZAMM, Bd. 13, H. 5, S. 360—363 (1933).

анизотропии в отношении величины k является обстоятельством, которым особенно часто пренебрегают при использовании опытных данных и которое может привести к обманчивым заключениям. Эта анизотропия зависит отчасти от предварительной обработки, а отчасти вызывается и самой деформацией.

Упрочнение материала при пластическом течении (например, растягиваемый стержень из литого железа при комнатной температуре) состоит в том, что значение предела текучести при кручении увеличивается в функции времени и степени деформации характерным для данного материала образом. Поскольку мы исключаем из нашего исследования хрупкие материалы, как, например, чугун или мрамор, то мы можем считать, что повышение гидростатического давления не должно оказывать влияния на упрочнение. Если пренебречь явлением анизотропии, наши формулы, само собой разумеется, должны оставаться инвариантными относительно преобразования координат (поворотов осей).

Мы получаем удовлетворяющую поставленным условиям формулу, вводя в качестве условия пластичности следующее соотношение для k :

$$k = k_0 + F(I), \quad (1)$$

где

$$I = \int_{t_0}^t \sqrt{\sum_{i,j} E_{ij}^2} dt.$$

Здесь E_{ij} представляет собой тензор скоростей деформаций u_1, u_2, u_3 ; следовательно,

$$E_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

а \sum обозначает суммирование.

Интегрирование по времени t должно производиться вдоль линии тока, проходящей через точку x_1, x_2, x_3 , при этом, начиная с того момента времени t_0 , когда рассматриваемый элемент тела, находящийся в момент времени t в точке (x_1, x_2, x_3) , переходит в пластическое

состояние. Величина k_0 является некоторой постоянной, а величина $2k$, очевидно, представляет обычный предел текучести при растяжении. Функция F может быть любой монотонно возрастающей функцией ее аргумента.

Поясним прежде всего нашу гипотезу на примере однородного растяжения в направлении x_1 . Таким образом, мы будем рассматривать цилиндрический растягиваемый стержень, причем ось x_1 параллельна образующим цилиндра. Величина E_{ij} в этом случае одинакова для всех точек тела и зависит только от времени. Пусть

$$E_{11} = -2E_{22} = -2E_{33} = 2\omega,$$

$$E_{ik} = 0, \quad i \neq k.$$

Если пластическое состояние начинается в момент времени $t=0$ одновременно во всем теле, мы получаем:

$$I = \sqrt{6} \int_0^t |\omega| dt.$$

Обозначая через h расстояние двух материальных поперечных сечений тела, перпендикулярных к образующим, получаем:

$$\omega = \frac{h_0}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \frac{h}{h_0},$$

где h_0 — величина расстояния в момент времени $t=0$. Таким образом, в случае $dh/dt > 0$

$$I = \sqrt{6} \ln \frac{h}{h_0}. \quad (2)$$

Выбирая надлежащим образом функцию $F(I)$, очевидно, можно изобразить диаграмму растяжения. Если, например, положим

$$F(I) \equiv \frac{\alpha}{2} (e^{\frac{I}{\sqrt{6}}} - 1), \quad (3)$$

то легко получим:

$$2k = 2k_0 + \alpha \frac{h - h_0}{h_0}, \quad (4)$$

где χ постоянная, и именно — тангенс угла наклона диаграммы растяжения.

На самом деле чисто эмпирические формулы типа (4) очень хорошо подтверждаются в широких пределах для ковкого железа и стали¹⁾.

Как непосредственное применение уравнения (4) рассмотрим случай равномерного пластического удлинения растягиваемого стержня под действием постоянной силы P , придерживаясь при этом метода Генки (этот сборник, стр. 136.) Если направление растяжения совпадает с осью x , для растягивающего напряжения получится следующая формула [уравнение (16) только что цитированной работы]:

$$\sigma = 2k + 3\mu\omega, \quad (5)$$

где μ обозначает вязкость материала при пластическом течении. Пусть далее f — поперечное сечение стержня в момент времени t . Индекс 0 относится к начальному состоянию ($t=0$). Тогда будет иметь место соотношение:

$$\sigma = \frac{\sigma_0 h}{h_0} = \frac{\sigma_0 f_0}{f} = \frac{P}{f}. \quad (6)$$

Подставляя (4) и (6) в (5), получим:

$$(\sigma_0 - \chi) \frac{h}{h_0} - 2k_0 + \chi = \frac{3\mu}{h} \frac{dh}{dt}, \quad (7)$$

являющееся дифференциальным уравнением для определения h в функции времени. Начальным условием будет $h = h_0$ при $t = 0$; следовательно, решение имеет вид:

$$\frac{(2k_0 - \chi)t}{3\mu} = \ln \frac{(\sigma_0 - \chi)h - (2k_0 - \chi)h_0}{h(\sigma_0 - 2k_0)}. \quad (8)$$

Эта формула при $\chi = 0$ тождественна с формулой (17с) Генки. И в нашем случае поперечное сечение f

¹⁾ Ср. цитированную в ссылке [73] работу А. Надаи и, в частности, дискуссию Е. Норриса.

сократится до нуля по истечении конечного промежутка времени t^* . Имеем:

$$t^* = \frac{3\mu}{2k_0 - \alpha} \ln \frac{\sigma_0 - \alpha}{\sigma_0 - 2k_0}. \quad (9)$$

Эта формула должна быть доступна экспериментальной проверке в том смысле, как это понимал Генки (этот сборник, стр. 136). При этом не следует опасаться искажающего результат влияния упрочнения, как это делал Генки.

Теория Генки неоднократно оспаривалась главным образом потому, что она недостаточно согласуется с данными опыта. Как опытные, так и теоретические^[74] данные свидетельствуют о том, что для тел типа ковкого железа зависимость напряжения σ от скорости ω должна быть гораздо более слабой, чем она получается из формулы (5).

Наша формула (1) не связана, конечно, с теорией Генки, а относится и к другим теориям пластичности.

Рассмотрим в качестве следующего приложения пластическое кручение стержня в форме круглого цилиндра, беря в основу теорию Сен-Венана — Мизеса.

Мы ограничимся самым простым случаем, когда весь стержень переходит в пластическое состояние. Беря цилиндрические координаты r , ϑ , z , мы можем тогда утверждать, что единственной отличной от нуля компонентой тензора скоростей деформации будет скорость сдвига $\gamma_{\vartheta z}$ ^[73]. Из условий равновесия и в общем случае, когда касательное напряжение $\tau_{\vartheta z}^{\vartheta}$ является любой функцией r , получаем для точек, находящихся на расстоянии r от оси цилиндра,

$$\gamma_{\vartheta z} = \frac{r}{h} \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (10)$$

ϑ является углом относительного поворота двух материальных радиусов цилиндра, находящихся на

расстоянии h вдоль оси. Если кручение начинается в момент $t=0$, мы получаем:

$$I = V\sqrt{2} \int_0^t \frac{r}{h} \frac{d\vartheta}{dt} dt = \frac{V\sqrt{2}r\vartheta}{h}. \quad (11)$$

Подстановка этого выражения дает в общем случае зависимость предела текучести при сдвиге k от угла закручивания ϑ на различных расстояниях r от оси цилиндра.

Рассматривая приведенное выше специальное выражение (3) для функций $F(I)$, получаем для касательного напряжения

$$\tau_{\vartheta z} = \frac{2k_0 + \kappa (e^{\frac{r\vartheta}{h\sqrt{3}}} - 1)}{\sqrt{3}} \quad (12)$$

и для крутящего момента

$$M = \frac{2\pi a^3}{3} \cdot \frac{2k_0}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi\kappa}{\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{a^2 h \sqrt{3}}{\vartheta} - \frac{6ah^2}{\vartheta^2} + \frac{6\sqrt{3}h^3}{\vartheta^3} \right) e^{\frac{a\vartheta}{h\sqrt{3}}} - \frac{6\sqrt{3}h^3}{\vartheta^3} - \frac{a^3}{3} \right\}, \quad (13)$$

т. е. уравнение, которое должно быть доступно непосредственной экспериментальной проверке.

Наконец, рассмотрим случай, когда тонкостенная круглая труба радиуса a подвергается одновременному действию растяжения и кручения. Этот случай соответствует опытам Хоэнмезера (этот сборник, стр. 223).

В цилиндрических координатах получаем:

$$\epsilon_z = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, \quad \epsilon_r = -\frac{1}{2h} \frac{dh}{dt} = \epsilon_{\vartheta},$$

$$\gamma_{\vartheta z} = \frac{a}{h} \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \gamma_{zr} = \gamma_{r\vartheta} = 0,$$

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ij}^2 = 4 (\epsilon_z^2 + \epsilon_r^2 + \epsilon_{\vartheta}^2) + 2\gamma_{\vartheta z}^2,$$

и, следовательно,

$$I = \int_0^t \sqrt{\frac{6}{h^2} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{2a^2}{h^2} \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2} dt. \quad (14)$$

Здесь I уже не определяется однозначно начальными и конечными значениями h и ϑ . Но I сразу же определяется однозначно, если задан путь деформации, т. е. соотношение между соответствующими значениями h и ϑ . Величина I не зависит от изменения деформации во времени. Время t служит здесь, как и в предыдущих примерах, только параметром.

При экспериментальной проверке уравнений, начиная с (11) до (14), кручение нужно доводить так далеко, чтобы влияние существующего в начале испытания упругого ядра становилось бы малым по сравнению с действием упрочнения.

Дальнейшие применения формулы (1) будут опубликованы в другом месте.

Замечания автора при корректуре. Эта статья в приведенном здесь виде была закончена в марте 1932 г. С тех пор появилась работа Шмидта (этот сборник, стр. 231), в которой рассматривается тот же вопрос. Из предложенных Шмидтом различных формул, во всяком случае, одна очень близка к формуле, приведенной в настоящей работе, а именно та, по которой упрочнение зависит от величины A , равной работе деформации изменения формы на единицу объема. Та же мысль, впрочем, была уже выражена Тэйлором и Квиней^[75]. По сравнению с ними введенная нами величина I обладает преимуществом благодаря ее безразмерности, и, кроме того, разработанная нами теория должна оказаться проще при математической ее обработке. Разрешение же вопроса относительно выбора между различными теориями возможно только на основе дальнейших опытов. Сравнивая нашу, приведенную выше, теорию упрочнения при кручении с опытными данными Людвига и Шеу (приведенными в работе Шмидта) путем вычисления функции $F(I)$, с одной

стороны, по данным испытания на растяжение, и, с другой стороны, — по данным испытания на кручение, находим, что опытные точки ложатся между двумя теоретическими кривыми, которые получаются, если принять один раз условие пластичности Мизеса и другой раз гипотезу касательного напряжения. Такая согласованность получается во всей области упрочнения, примерно до $I \approx 1$, где начинается образование шейки при испытании на растяжение.

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ НА УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ
ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ*)

I. Введение. Большинство из существующих теорий пластичности не учитывает влияния деформации на предел текучести. В нижеследующем выводится возможно более простая формула, которая качественно правильно отражает наиболее важные факты влияния деформации на предел текучести у вязкопластических тел.

Для упрощения формулы мы будем пренебрегать упругими деформациями по сравнению с пластическими и считать тело несжимаемым.

Тензор деформаций:

$$E = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_z & \frac{1}{2} \gamma_y \\ \frac{1}{2} \gamma_z & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_x \\ \frac{1}{2} \gamma_y & \frac{1}{2} \gamma_x & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

будет, вследствие уравнения

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0, \quad (2)$$

девиатором.

Далее мы предполагаем, что среднее нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3)$$

не оказывает никакого влияния на условие пластичности. Поэтому в условии пластичности могут вхо-

*) ZAMM, Bd. 15, N. 1/2, S. 76—80 (1935).

дить не непосредственно компоненты тензора напряжений

$$S = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

а только компоненты девиатора напряжений:

$$S' = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - \sigma & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - \sigma \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Мы рассмотрим прежде всего наиболее существенные, на наш взгляд, виды влияния деформации на условие пластичности для частного случая плоской деформации. Если все перемещения не зависят от z и параллельны плоскости x, y , то тогда имеют силу равенства:

$$\gamma_x = \gamma_y = \varepsilon_z = 0. \quad (6)$$

Девиатор деформации приводится, следовательно, к плоскому девиатору:

$$E_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_z \\ \frac{1}{2} \gamma_z & \varepsilon_y \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

причем

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_x. \quad (8)$$

Для приведения и девиатора напряжений к плоскому девиатору будем считать, что всюду имеет место зависимость:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (9)$$

Тогда девиатор напряжений приведет к плоскому девиатору:

$$S'_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} & \tau_z \\ \tau_z & -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Плоские девиаторы E_0 и S_0' могут теперь быть представлены графически, как это впервые было указано Прандтлем [72].

Если обозначить через

$$\begin{aligned} & u_e = \epsilon_x \sqrt{2}, & v_e = \frac{\gamma_z}{\sqrt{2}} \\ \text{и} & u_s = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, & v_s = \tau_z \sqrt{2} \end{aligned} \quad (11)$$

прямоугольные координаты двух, изображающих девиатор деформаций и девиатор напряжений, точек e и s , то компоненты плоских девиаторов E_0 и S_0' преобразуются при повороте системы координат x, y, z на угол α вокруг оси z совершенно так же, как координаты точек e и s при повороте системы координат u, v на угол 2α вокруг начала O . Вследствие этого каждой не зависящей от выбора направлений осей x и y зависимости между плоскими девиаторами E_0 и S_0' соответствует не зависящая от выбора направления осей u и v зависимость между точками O, e и s .

Рассмотрим сначала условие пластичности для девственного состояния *изотропного* вязкопластического тела.

Изображающие точки девиаторов напряжений, находящихся у предела текучести, находятся на кривой, которая может быть названа кривой, изображающей условие пластичности. Поскольку тело предполагается изотропным, все отрезки, проведенные через начало O до этой изображающей кривой, должны быть одинаковы. Поэтому изображающая кривая может представлять собой только круг, описанный из центра O .

Радиус этого круга равен:

$$t = (u_s^2 + v_s^2)^{1/2}.$$

Принимая во внимание равенства (11), можно поэтому представить условие пластичности так:

$$t = \left\{ 2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + 2\tau_z^2 \right\}^{1/2} = k_0, \quad (12)$$

где k_0 представляет собой постоянную материала с размерностью напряжения. В самом деле, при рассматриваемых здесь частных случаях напряженного состояния, удовлетворяющих условию (12), формула (12) является единственно возможным условием пластичности, которое не зависит от среднего нормального напряжения в предположении изотропии.

II. Упрочнение. Хорошо известное влияние деформации на условие пластичности состоит в том, что радиус изображающего круга увеличивается с возрастанием деформации. Мы будем называть этот эффект „упрочнением“.

Самой простой формулировкой, учитывающей упрочнение, на языке нашего графического представления была бы следующая: радиус изображающего круга для условия пластичности является монотонной возрастающей функцией расстояния точки e , изображающей деформацию, от начала O . Такая формулировка дает зависимость упрочнения только от мгновенного деформированного состояния. Более же удовлетворительной является такая формулировка, которая учитывает влияние того пути, которым было достигнуто это мгновенное деформированное состояние. Такая формулировка была предложена Одквистом (этот сборник, стр. 283).

На языке нашего графического представления эту формулировку можно выразить так: радиус изображающего круга для условия пластичности является монотонной возрастающей функцией длины пути, пройденного точкой e , изображающей деформацию, начиная с момента прекращения девственного состояния материала. Эта длина пути деформации представится следующим выражением:

$$f = \int_0^l [(du_e)^2 + (dv_e)^2]^{1/2}.$$

Учитывая равенства (11), таким образом, получим:

$$f = \int_0^l \left[2 (d\varepsilon_x)^2 + \frac{1}{2} (d\gamma_z)^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

Самое простое выражение для условия пластичности, учитывающее упрочнение, будет иметь вид:

$$t = k_0 (1 + \lambda f). \quad (14)$$

Здесь t и f даются формулами (12) и (13), а λ — безразмерная постоянная материала.

III. Появление анизотропии. Упрочнение не нарушает изотропии тела; два же рассматриваемых ниже влияния деформации на условие пластичности нарушают изотропию. На одно из этих влияний впервые обратил внимание Шмидт (этот сборник, стр. 231). Он подвергал тонкостенные стальные трубы попеременно растяжению и кручению. В качестве меры упрочнения он брал некоторое приведенное напряжение, которое соответствует нашей величине t . Он нашел, что

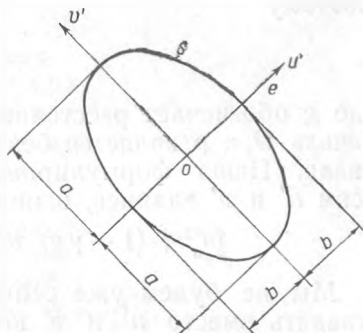


Рис. 1.

пластическое растягивающее напряжение сильнее влияет упрочняющим образом на прилагаемое вслед затем напряжение кручения, чем на растягивающее напряжение, и, наоборот, что пластическое напряжение кручения сильнее влияет упрочняющим образом на прилагаемое вслед затем растягивающее напряжение, чем на напряжение кручения.

Хотя чистое растяжение и не приводит, правда, к плоскому девiatorу, все же наблюдение Шмидта можно перевести на язык нашего графического представления следующим образом.

Изображающая кривая для условия пластичности, бывшая кругом при девственном напряженном состоянии, переходит вследствие деформации в эллипс. Малая ось этого эллипса совпадает с прямой Oe , центр эллипса лежит в O (рис. 1). Далее, если мы еще потребуем, чтобы новая формулировка для случая продолжающейся однородной нагрузки (например, испытание на растяжение) давала бы те же результаты, что и (14), то малая полуось эллипса должна иметь длину:

$$b = k_0(1 + \lambda f). \quad (15)$$

Длина a большой полуоси должна при этом соответствовать исчезающей деформации; мы полагаем поэтому

$$a = \frac{b}{1 - \mu g}, \quad (16)$$

где g обозначает расстояние точки деформации e от начала O , а μ является безразмерной постоянной материала. Наша формулировка, отнесенная к главным осям u' и v' эллипса, напишется поэтому так:

$$[u_s'^2 + (1 - \mu g)^2 v_1'^2]^{1/2} = k_0(1 + \lambda f). \quad (17)$$

Мы не будем уже сейчас в этой зависимости подставлять вместо u' и v' компоненты деватора напряжений, а сделаем это потом, обобщая наши выводы на пространственный случай.

IV. Эффект Баушингера. Третье влияние деформации на условие пластичности известно под названием „эффекта Баушингера“. Если наложить на пластическое напряженное состояние второе, которое получается из первого в результате перемены знаков у всех компонент напряжения, то рассматриваемое как предел текучести приведенное напряжение t уравнения (12) понизится. На языке нашего графического представления это положение может быть представлено так.

Изображающая кривая для условия пластичности, симметричная относительно начала O в девственном

состоянии, перемещается под влиянием деформации в направлении прямой Oe , причем одновременно происходит описанный в п. III переход в эллиптическую форму¹⁾ (рис. 2).

Величина смещения дается формулой:

$$\widehat{00'} = k_0 \nu g, \quad (18)$$

где ν обозначает безразмерную постоянную материала. Относя к главным осям u' и v' , получим следующее уравнение изображающей кривой для условия пластичности:

$$[u'_s - k_0 \nu g]^2 + (1 - \mu g)^2 v_s'^2 = k_0 (1 + \lambda f - \nu g). \quad (19)$$

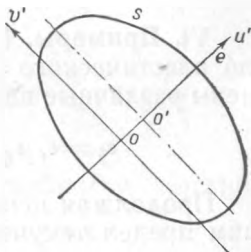


Рис. 2.

V. Обобщение. Обобщение приведенных здесь формул для пространственного случая может быть произведено просто. Если вместо условия пластичности (12) взять условие пластичности Мизеса, то это будет означать, что $u_s'^2$ заменяется через $[(\sigma_x - \sigma)^2 + (\sigma_y - \sigma)^2 + (\sigma_z - \sigma)^2]$ и $v_s'^2$ через $2[\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2]$.

Соответствующим образом должны быть преобразованы все выражения, содержащие координаты изображающих точек напряжения и деформации.

Если отнести напряженное состояние к главным осям ξ, η, ζ деформации, обобщенную формулу (19) можно представить в следующем виде:

$$[(\sigma_\xi - \sigma - k_0 \nu \varepsilon_\xi)^2 + (\sigma_\eta - \sigma - k_0 \nu \varepsilon_\eta)^2 + (\sigma_\zeta - \sigma - k_0 \nu \varepsilon_\zeta)^2 + 2(1 - \mu g)^2 (\tau_\xi^2 + \tau_\eta^2 + \tau_\zeta^2)]^{1/2} = k_0 (1 + \lambda f - \nu g). \quad (20)$$

¹⁾ Относительно формулы, соответствующей чистому перемещению изображающего круга для условия пластичности, Рейсом было сделано сообщение на IV международном конгрессе по прикладной механике, Кембридж, 1934.

Здесь инвариантные вспомогательные величины f и g даются формулами:

$$f = \int \left[d\varepsilon_x^2 + d\varepsilon_y^2 + d\varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (d\gamma_x^2 + d\gamma_y^2 + d\gamma_z^2) \right]^{1/2} \quad (21)$$

и

$$g = \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Интеграл в (21) должен быть взят по всему пути, пройденному с момента исчезновения девственного состояния.

VI. Примеры. К простому растяжению, доведенному до пластического удлинения ε , могут быть присоединены различные виды нагрузок. Для этого случая имеем:

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon, \quad \varepsilon_\eta = \varepsilon_\zeta = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad f = g = \varepsilon \sqrt{3/2}.$$

Продолжая испытание на растяжение дальше, получим предел текучести при растяжении σ_1 из соотношения:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 1 + \lambda \varepsilon \sqrt{3/2}, \quad (23)$$

где σ_0 обозначает предел текучести при растяжении в девственном состоянии.

Если присоединить к растягивающей нагрузке приложенную в том же направлении сжимающую нагрузку, то предел текучести при сжатии σ_2 получится из соотношения:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = 1 + (\lambda - 2\nu) \varepsilon \sqrt{3/2}. \quad (24)$$

Если после растягивающей нагрузки ($\sigma_\xi \neq 0$) приложить нагрузку на сдвиг ($\sigma_\zeta \neq 0$), то предел текучести при сдвиге τ_1 (пренебрегая членами более высокого порядка) получится из соотношения:

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} = 1 + (\lambda + \mu - \nu) \varepsilon \sqrt{3/2}, \quad (25)$$

где τ_0 обозначает предел текучести при сдвиге в девственном состоянии.

Для согласования с утверждением Шмидта надо, следовательно, положить $\mu > \nu$.

Рассмотрим, наконец, еще случай, когда к испытанию на сдвиг ($\tau_z \neq 0$) с доведением до пластического сдвига γ присоединяется испытание на растяжение ($\sigma_x \neq 0$). Отнесенные к главным осям деформации девиаторы деформаций и напряжений представятся в этом случае так:

$$E = \begin{Bmatrix} \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad S_0' = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma}{6} & -\frac{\sigma}{2} & 0 \\ -\frac{\sigma}{2} & \frac{\sigma}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

Далее имеем $f = g = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$. Пренебрегая высшими степенями от γ , получаем предел текучести при растяжении σ_4 из соотношения:

$$\frac{\sigma_4}{\sigma_0} = 1 + \left(\lambda + \frac{3}{4}\mu - \nu\right) \frac{\gamma}{\sqrt{2}}. \quad (27)$$

Выдвинутое в дополнение к равенству (26) требование $\mu > \nu$ должно, следовательно, быть уточнено путем приведения к виду $\mu > \frac{4}{3}\nu$, чтобы в этом случае учитывать наблюдаемый Шмидтом эффект.

VII. Общие выводы. Из рассмотренных выше случаев следует, что формула (20) вместе с (21) и (22) качественно правильно воспроизводит существенные с нашей точки зрения факты влияния деформации на условие пластичности.

Мы здесь рассматривали только самое условие пластичности. Формула (20) могла бы быть, конечно, взята как определение потенциала течения в смысле

Мизеса [76]. Это позволило бы тогда определить с точностью до неопределенного множителя компоненты тензоров скоростей деформации и таким образом прийти к полной системе уравнений теории пластичности. Такое применение формулы (20) кажется, однако, преждевременным, так как имеется еще слишком мало систематических опытов по кинематике предварительно пластически напряженных тел.

В. ПРАГЕР

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ „НАПРЯЖЕНИЯ —
ДЕФОРМАЦИИ“ В ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ
ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ*)

Краткое содержание. При одновременном кручении и растяжении тонкостенных труб осуществляется довольно общее состояние равномерного распределения напряжений без особых экспериментальных трудностей.

В настоящей статье применяется графическое изображение опытных данных таких испытаний для геометрического рассмотрения некоторых зависимостей между напряжениями и деформациями математической теории пластичности.

Здесь показывается, что теории Сен-Венана, М. Леви и Мизеса приводят к недопустимым с физической точки зрения выводам, если материал не предполагается жестким до тех пор, пока напряжения не достигнут предела текучести. Зависимости теории Прандтля, Рейса, Генки и Надаи сопоставляются с результатами испытаний над мягкой сталью; рассматривается также возможное влияние вязкости и упрочнения.

I. Введение. Приступая к исследованию зависимостей между напряжениями и деформациями в данном пластическом материале, всегда надо иметь в виду, что нельзя измерять местные величины напряжений и деформаций в произвольно выбранной точке опытного образца. Только некоторые результирующие напряжения и некоторые суммарные деформации поддаются измерениям. Например, при испытании на растяжение величинами, фактически измеряемыми, являются растягивающая сила и удлинение; при испытании на кручение — крутящий момент и угол закручивания. Эмпи-

*) Journ. of Appl. Phys., vol. 15, № 1, pp. 65—71 (1944).

рические зависимости между такими результирующими напряжениями и соответствующими суммарными деформациями позволяют установить надежные зависимости между напряжениями и деформациями только тогда, когда в опытном образце осуществлено равномерное распределение напряжений и деформаций. Кручение и изгиб сплошных стержней, таким образом, исключаются; совместное же приложение растяжения и кручения к тонкостенным трубам можно рекомендовать как одно из немногих испытаний, при которых осуществляется в общем случае равномерное напряженное состояние без слишком больших экспериментальных трудностей.

В настоящей статье используется метод графического изображения результатов такого вида испытания для геометрического рассмотрения некоторых хорошо известных зависимостей между напряжениями и деформациями, применяемых в математической теории пластичности.

Рассмотрим тонкостенную трубу, подвергаемую совместному действию кручения и растяжения. Пусть R обозначает средний радиус трубы (рис. 1), δ — толщину ее стенки, Δl и φ — удлинение и угол закручивания на длине l , P — растягивающее усилие и M — крутящий момент.

Растягивающее напряжение σ и касательное напряжение τ представятся так:

$$\sigma = \frac{P}{2\pi R\delta}, \quad \tau = \frac{M}{2\pi R^2\delta},$$

а соответствующие осевая деформация и деформация сдвига будут:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \gamma = \frac{\varphi R}{l}.$$

Если считать материал несжимаемым, то можно принять, что продольное удлинение ϵ будет сопровождаться радиальным и окружным сокращениями вели-

чиной $\frac{\epsilon}{2}$. Таким образом, максимальная деформация сдвига будет равна:

$$\gamma_{\max} = \left[\gamma^2 + \left(\frac{3\epsilon}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1)$$

а максимальное касательное напряжение будет:

$$\tau_{\max} = \left[\tau^2 + \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

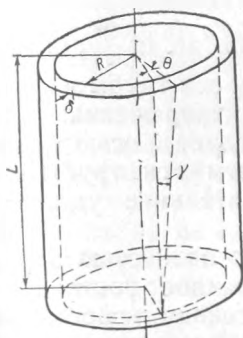


Рис. 1.

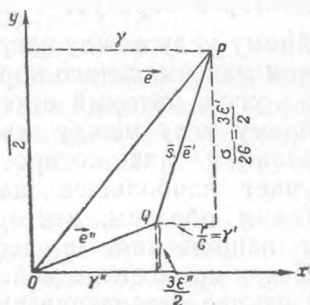


Рис. 2.

II. Графическое представление. Уравнения (1) и (2) допускают следующее графическое представление напряженных и деформированных состояний в тонкостенной трубе при одновременном кручении и растяжении; в прямоугольной системе координат $0, x, y$ (рис. 2) деформированное состояние изображается точкой P с координатами:

$$x_P = \gamma, \quad y_P = \frac{\sigma}{2}, \quad (3)$$

а напряженное состояние — точкой Q с координатами:

$$x_Q = x_P - \frac{\tau}{G}, \quad y_Q = y_P - \frac{\sigma}{2G}, \quad (4)$$

где G обозначает модуль сдвига рассматриваемого материала.

Поведение рассматриваемых здесь материалов предполагается упругим тогда, когда напряжения не достигают величин, необходимых для появления пластических деформаций, т. е. в течение начальной стадии нагрузки и во время разгрузки. Величина G относится именно к таким упругим изменениям состояния материала.

Согласно (1) и (2), векторы $e = OP$ и $s = QP$ имеют величины γ_{\max} и $\frac{\tau_{\max}}{G}$, соответственно.

Вектор s образует с осью γ угол $\arctg \frac{2\tau}{\sigma}$; он равен двойному углу между направлением оси трубы и направлением максимального нормального напряжения. Аналогично, угол, который вектор e образует с осью y , равен двойному углу между направлением оси трубы и направлением, для которого относительное удлинение получает наибольшее значение.

Таким образом, векторы s и e полностью определяют напряженное и деформированное состояние в трубе при совместном действии кручения и растяжения.

В случае рассматриваемых здесь пластических материалов полная деформация (γ , ϵ), возникающая при некотором напряжении (τ , σ), может быть разложена на упругую часть (γ' , ϵ'), исчезающую при разгрузке, и пластическую часть (γ'' , ϵ''), которая остается после разгрузки. Составляющие упругой деформации связаны с составляющими напряжения следующими зависимостями:

$$\gamma' = \frac{\tau}{G}, \quad \epsilon' = \frac{\sigma}{E},$$

где E обозначает модуль Юнга. Если в соответствии со сделанным выше предположением материал считать несжимаемым, то $E = 3G$ и, следовательно, $\epsilon' = \frac{\sigma}{3G}$. Составляющие вектора QP вдоль осей координат будут тогда:

$$\frac{\tau}{G} = \gamma', \quad \frac{\sigma}{2G} = \frac{3\epsilon'}{2}. \quad (5)$$

Сравнение (5) с (3) показывает, что вектор QP изображает упругую деформацию точно таким же образом, как вектор e изображает полную деформацию.

В таком понимании вектор QP будет обозначаться далее через e' ; только в том случае, если вектор QP рассматривается как изображающий напряженное состояние, он будет обозначаться через s .

Поскольку $e = OP$ изображает полную деформацию, а $e' = QP$ — упругую деформацию, то вектор $e'' = OQ = e - e'$ будет представлять остаточную деформацию. В случае, изображенном на рис. 2, векторы e , e' и e'' имеют разное направление, т. е. главные направления тензоров полной деформации, упругой деформации и пластической деформации не совпадают.

III. Чистое кручение. Рассмотрим тонкостенную трубу из идеально пластического материала, который течет при постоянном максимальном касательном напряжении $\tau_{\max} = kG$ и ведет себя как упругое тело всякий раз, когда $\tau_{\max} < kG$.

Пусть труба, начиная от нулевых значений напряжения и деформации, деформируется вполне определенным образом, графически представленным заданным движением точки P , как это было указано в предыдущем пункте.

Сначала обе точки P и Q совпадают в начале координат O . Когда P начинает двигаться по своей траектории, Q будет сперва оставаться в O . Действительно, остаточная деформация, изображенная через $e'' = OQ$, будет равна нулю до тех пор, пока напряжения будут оставаться ниже предела текучести, т. е. до тех пор, пока вектор $s = QP$ меньше k . Иными словами, Q остается в точке O до тех пор, пока P не достигнет круга с центром в O и с радиусом, равным k . Когда P пересечет этот круг, начнется пластическая деформация. Так как эта пластическая деформация предполагается происходящей при постоянном максимальном касательном напряжении $\tau_{\max} = kG$, то вектор s будет сохранять постоянную величину $\frac{\tau_{\max}}{G} = k$ в течение всего

периода пластической деформации. Поэтому точка Q будет следовать за точкой P на постоянном расстоянии k . Это утверждение, конечно, недостаточно для определения движения точки Q при заданном движении точки P . Точный вид траектории, по которой Q будет двигаться за точкой P при постоянном расстоянии $QP = k$, определяется зависимостью между напряжениями и деформациями, возникающими в рассматриваемом пластическом материале.

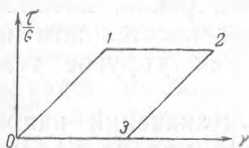
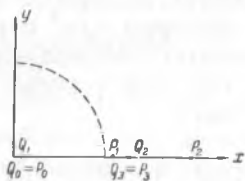


Рис. 3.

Перед тем как приступить к исследованию пластического поведения тонкостенной трубы при совместном действии кручения и растяжения, рассмотрим сначала простой случай чистого кручения.

На рис. 3 внизу изображается (идеализированная) диаграмма напряжения, соответствующая испытанию на кручение. Безразмерное касательное напряжение $\frac{\tau}{G}$ нанесено в зависимости от деформации сдвига γ ; участок 0—1 соответствует начальному упругому состоянию; участок 1—2—пластической деформации при постоянном касательном напряжении, а участок 2—3—разгрузке. Абсцисса точки 3 изображает остаточную деформацию сдвига.

Графически это испытание изобразится так.

В начале испытания точки P и Q совпадают в начале координат (P_0, Q_0 на верхней части рис. 3). Когда труба начнет подвергаться кручению, P будет двигаться вдоль оси x в положительном направлении, а Q будет оставаться в начале координат до тех пор, пока P будет находиться внутри круга текучести, т. е. внутри круга с центром Q_0 и радиусом k . Когда P пересечет этот круг в точке P_1 , точка Q начнет следовать за точкой P на постоянном расстоянии k , причем обе

точки P и Q будут двигаться вдоль оси x . Если трубу разгрузить после того, как P и Q достигнут положений P_2 и Q_2 соответственно, то точка Q останется в Q_2 , так как остаточная деформация, изображенная через Q_0Q_2 , остается без изменения во время процесса разгрузки. Так как напряжение изображается вектором $s = QP$, то разгрузка закончится тогда, когда точка P достигнет положения $P_3 = Q_3 = Q_2$.

Для отчетливого представления движения точек P и Q надо представить себе эти точки в виде двух частей, соединенных между собой нерастяжимой нитью длины k . Сперва точки P и Q совпадают с началом координат, и нить не натянута.

Для исключения влияния сил инерции, которые не будут уравниваться при пластическом кручении трубы, это движение нужно представлять себе бесконечно медленным.

Когда P начнет двигаться вдоль оси x , точка Q будет оставаться в начале координат до тех пор, пока P не достигнет точки P_1 , и нить не натянется. После этого точка Q будет следовать за точкой P на постоянном расстоянии k . Если направление движения точки P изменится на обратное, нить снова станет ненатянутой, и точка Q остановится.

Поведение опытного образца при чистом растяжении, очевидно, представится такой же механической моделью. При несколько более общем способе нагружения трубы точка P будет двигаться вдоль прямой, проведенной через точку O . В случае изотропного материала направления главных осей напряжения и деформации можно считать при таком виде испытания совпадающими. Это означает, что векторы e и s имеют одно и то же направление и механическая модель опять дает точное представление о поведении опытного образца.

Во всех рассмотренных до сих пор случаях вектор $s = e'$ сохраняет свое направление и величину в течение всего периода пластической деформации, следовательно, составляющие упругой деформации остаются постоянными и изменение полной деформации

полностью вызывается изменением остаточной деформации.

В последующем такие изменения деформации будем называть чисто пластическими изменениями деформации.

IV. Совместное действие кручения и растяжения.

При исследовании поведения тонкостенной трубы, подвергнутой совместному действию кручения и растяжения, определение зависимости между напряжением и

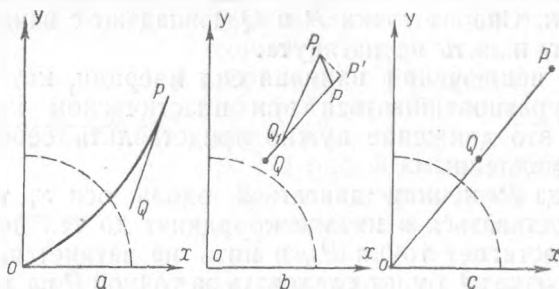


Рис. 4.

деформацией сводится к установлению закона, по которому можно предугадать движение точки Q , если задано движение точки P . В дальнейшем рассматриваются три таких закона; они все получаются как естественное обобщение законов, сформулированных выше для некоторых частных случаев.

а) Теории Сен-Венана, Леви и Мизеса. Первый закон, устанавливающий движение точки Q , может быть сформулирован так (рис. 4, а).

До тех пор, пока точка P остается внутри круга текучести, точка Q остается в точке O (упругое нагружение). Когда P находится вне этого круга, закон движения точки Q зависит от направления движения точки P . Проведем через P перпендикуляр p к QP . В зависимости от того, будет ли точка P двигаться в ту сторону от p , в которой лежит точка Q , или

в противоположном направлении, будет иметь место либо упругое разгружение, либо пластическая деформация. В случае пластической деформации вектор $s = = QP$ остается касательным к траектории точки P и сохраняет постоянную длину k . В случае упругого разгружения Q сохраняет свое положение, которое при повторном нагружении будет играть ту же роль, что и начало координат O при первом нагружении.

Вектор скорости точки P изображает скорость деформации точно таким же образом, как вектор QP изображает деформацию. Закон, требующий чтобы s имело направление касательной к траектории точки P , т. е. направление скорости точки P , сводится, следовательно, к утверждению, что составляющие напряжения пропорциональны соответствующим составляющим скорости деформации. Множитель пропорциональности не является, однако, постоянной характеристикой материала, но определяется в любой момент времени условием, что составляющие напряжения удовлетворяют условию пластичности, т. е. условию, что вектор s равен величине k . Таким образом, сформулированный выше закон соответствует, повидимому, зависимостям между напряжениями и деформациями математической теории пластичности, разработанной Сен-Венаном ^[1] и М. Леви ^[62]. Теория Мизеса (этот сборник, стр. 57) отличается от этой теории только тем, что в ней применяется другое условие пластичности вместо условия постоянства максимального напряжения.

Хоэнэмзером и Прагером (этот сборник, стр. 257) была дана несколько видоизмененная форма графического изображения, которая удобна для материалов, подчиняющихся этому условию пластичности.

б) Теории Прандтля и Рейса. Механическая модель, рассмотренная в предыдущем разделе, дает возможность сформулировать другой закон, определяющий движение точки Q , когда движение точки P известно.

Для того чтобы определить движение точки Q , когда движение точки P задано, нужно представить себе

точки P и Q в виде двух медленно движущихся частиц, соединенных нерастяжимой нитью длиной k .

В каждый момент времени точка Q будет тогда либо оставаться неподвижной (когда нить не натянута), либо двигаться в мгновенном направлении вектора QP (когда нить натянута). В последнем случае малое приращение деформации (PP_1 на рис. 4, b) может быть разложено на две составляющие: PP' вдоль вектора QP и $P'P_1$ перпендикулярно к вектору QP . Соответствующее малое перемещение двух точек и соединяющей их нити можно представить при этом как перемещение из положения QP в положение Q_1P' и поворот вокруг Q_1 , приводящий систему в положение Q_1P_1 . Перемещение, рассмотренное в отдельности, соответствует чистому пластическому изменению деформации в смысле, установленном в конце п. III.

Во время поворота точка Q сохранит положение Q_1 ; это значит, что остаточная деформация остается постоянной. Соответствующая деформация может быть по этому истолкована как чисто упругая.

Зависимости между напряжениями и деформациями, представленные этой механической моделью, являются зависимостями, введенными теорией Прандтля ^[72] и Рейса (этот сборник, стр. 206).

в) Теории Генки и Надаи. Существует третий, в такой же степени естественный способ обобщения законов, определяющих движение точки Q в случаях чистого кручения или чистого растяжения. Этот третий закон может быть сформулирован следующим образом (рис. 4, c).

До тех пор, пока точка P находится внутри круга пластичности, точка Q остается в точке O (упругое нагружение). Если точка P находится вне этого круга, случаи пластической деформации и упругого разгрузки должны быть разграничены так, как это сделано в п. IV, а).

При пластической деформации точка Q все время будет лежать на прямой OP между этими двумя точками на постоянном расстоянии k от точки P . В случае упругого разгрузки точка Q сохраняет свое

положение, которое при повторном нагружении будет играть ту же роль, какую играло начало координат O при первом нагружении.

Зависимость между напряжениями и деформациями, соответствующая этому закону, впервые была сформулирована Генки (этот сборник, стр. 114), который принимает только другое условие пластичности вместо условия постоянного максимального касательного напряжения.

А. Надаи [83] своими хорошо известными тремя законами пластичности по существу устанавливает такую же зависимость между напряжениями и деформациями.

V. Experimentum Crucis. Представляет интерес сопоставить введенные тремя теориями — а), б), в) — зависимости друг с другом, а также с небольшим количе-

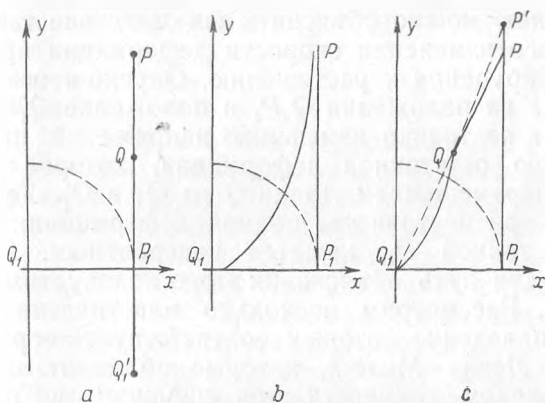


Рис. 5.

ством имеющихся опытных данных относительно механического поведения изотропных пластических твердых тел при сложном напряженном состоянии.

Зависимости, установленные тремя теориями, будут совпадать друг с другом всякий раз, когда образец

нагружается таким образом, что точка P движется по прямой, проходящей через начало координат. Для проверки же теории опытным путем, нужно рассмотреть более общие случаи нагружения опытного образца.

Приводимый ниже метод испытания был предложен Рейсом (этот сборник, стр. 206): опытный образец подвергается сначала чистому кручению до достижения предела текучести; после этого угол кручения поддерживается постоянным, в то время как труба растягивается в осевом направлении. На рис. 5, *a* Q , P_1 , P изображают траекторию, описанную точкой P во время такого испытания.

Согласно теореме Сен-Венана — Леви — Мизеса вектор s , имеющий в начале направление оси x , должен внезапно повернуться по направлению Q'_1P_1 , как только точка P начнет двигаться вдоль линии P_1P . Соответствующее этому представлению внезапное изменение напряженного состояния чистого кручения к чистому растяжению можно объяснить как следствие такого же внезапного изменения скорости деформации при переходе от кручения к растяжению. Однако перемещение вектора s из положения Q_1P_1 в положение Q'_1P_1 соответствует не только изменению напряжений, но также изменению остаточной деформации, которое изображается перемещением точки Q из Q_1 в Q'_1 . Такое изменение при постоянстве полной деформации, изображаемой точкой P_1 , кажется невероятным. Имеется только один путь объяснения этого недопустимого положения. Рассмотрим несколько пластических материалов, поведение которых соответствует теории Сен-Венана — Леви — Мизеса, которые обладают одинаковым пределом текучести при кручении, но разными модулями сдвига. Чем выше этот модуль, тем меньше постоянная k и, следовательно, тем ближе будет точка Q'_1 к точке Q_1 . В пределе $k \rightarrow 0$ внезапное изменение напряжения при переходе от чистого кручения к чистому растяжению будет все еще иметь место, но больше не будет недопустимого внезапного изменения остаточной деформации. Случай $k = 0$ будет характеризовать такой пластический материал, который

не может деформироваться упруго, поскольку модуль сдвига равен бесконечности. Несмотря на то, что такой именно материал обычно и рассматривается при применении теории Сен-Венана — Леви — Мизеса, это допущение обыкновенно оправдывается утверждением, что упругие деформации малы по сравнению с пластическими, а потому ими и можно пренебречь.

Действительно, эти теории приводят к совершенно недопустимым выводам, если не считать пластический материал абсолютно жестким при напряжениях ниже предела текучести.

Легко видеть, что теории Прандтля и Рейса, так же, как и теории Генки и Надаи, предусматривают непрерывное изменение как на-

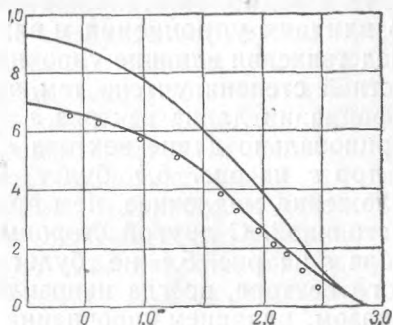


Рис. 6.

пряжения, так и остаточной деформации. На рис. 5, *b* и 5, *c* изображены траектории точки *Q*, согласно этим двум теориям; по теории Прандтля и Рейса получается трактрисса, а по теории Генки и Надаи — конхоида. В первом случае вектор *s* приближается к вертикальному положению быстрее, чем во втором случае. Это означает, что теория Прандтля и Рейса дает более быстрое уменьшение крутящего момента с увеличением растягивающего усилия, чем теория Генки и Надаи. Такого типа испытания позволяют поэтому делать заключения о правильности той или иной из этих двух теорий. На рис. 6 изображены опытные данные, полученные Хознемзером (этот сборник, стр. 230) на трубах из мягкой стали; здесь величина $\frac{\bar{\sigma}}{KG}$ нанесена в зависимости от $\frac{3\epsilon}{2K}$, причем нижняя кривая соответствует теории Прандтля и Рейса, а верхняя — теории Генки

и Надаи. Опытные точки ложатся близко к этой последней кривой. Более поздние опыты Хоэнмезера и Прагера (этот сборник, стр. 257), в которых осуществлялись более общие случаи нагружения, существенным образом подтверждают такое утверждение в пользу теории Генки и Надаи.

VI. Предположительные соображения относительно влияния упрочнения и вязкости. При графическом представлении влияние упрочнения может быть до известной степени учтено тем, что во время пластической деформации длина вектора $s = QP$ увеличивается пропорционально длине вектора $e'' = OQ$. Это значит, что вектор s на рис. 5, *b* будет достигать вертикального положения медленнее, чем при сохранении его длины постоянной. С другой стороны, увеличение длины вектора s на рис. 5, *c* не будет влиять на направление этого вектора, всегда направленного вдоль OP . Таким образом, влиянием упрочнения можно несколько уменьшить разницу, получающуюся между результатами теории Прандтля и Рейса и теории Генки и Надаи.

Более общий закон упрочнения устанавливает зависимость длины вектора s во время пластической деформации не только от длины, но и от направления e'' . Таким путем можно графически представить анизотропию, вызываемую деформациями.

Для ознакомления с теориями изотропного и анизотропного упрочнений читатель может обратиться к соответствующей литературе ^[85, 86, 87].

При учете вязкости рассмотренные до сих пор зависимости между напряжениями и деформациями нужно считать соответствующими бесконечно малым скоростям деформации.

В случае конечных скоростей деформации вектор, изображающий напряжения, представляется в виде суммы вектора s , рассмотренного выше, и вектора, изображающего напряжение, обусловливаемое вязкостью. Его можно взять пропорциональным скорости точки P . Рассмотрим, например, вектор QP на рис. 5, *c*, соответствующий бесконечно медленному движению P вдоль

PP' . Если точка P движется с конечной скоростью, то тогда вектор PP' , пропорциональный этой скорости, нужно прибавить к QP , и полное напряжение представится вектором QP' .

VII. Общее заключение. Еще до недавнего времени технические исследования в области пластичности касались почти исключительно условия пластичности. Действительно, инженеров интересовали гораздо больше процессы, происходящие в пределах упругих деформаций, чем процессы, происходящие за этими пределами. Стремление же иметь основу для анализа напряжений в частично перенапряженных деталях машин и необходимость развития исследований для лучшего понимания различных технических процессов изменили это положение. В то время как теоретиками разрабатывалось много теорий пластичности, экспериментальные исследования отставали от этих теоретических разработок.

Учитывая то внимание, которое уделялось исследованию сравнительно небольшого различия между почти адекватными условиями пластичности, приходится удивляться, что установлению зависимости между напряжениями и деформациями в пластической области уделялось так мало внимания.

Исследования этого вопроса строго ограничивались случаями чисто пластических изменений деформации (см. определение, приведенное в конце п. III), как это видно из работ Лоде (этот сборник, стр. 168), Роша и Эйхингера ^[65], Тэйлора и Квиняя ^[75]. В этих случаях три математические теории пластичности, рассмотренные в настоящей статье, приводят к одинаковым результатам. Поэтому необходимо экспериментально исследовать более общие случаи нагружения для установления зависимости между напряжениями и деформациями в пластических материалах.

**ОПЫТЫ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ
НАД ХРОМО-НИКЕЛЕ-МОЛИБДЕНОВОЙ СТАЛЬЮ *)**

Краткое содержание. Приводится описание статических испытаний при сложном напряженном состоянии, когда тонкостенные трубы из хромо-никелево-молибденовой стали подвергаются одновременному действию осевого растяжения или сжатия и внутреннего давления. Осевая нагрузка осуществлялась на 30-тонной гидравлической опытной машине, а внутреннее давление — при помощи насоса с маятниковым манометром. Поперечные деформации измерялись двумя гидравлическими экстензометрами нового типа, один из которых применялся при испытаниях с осевым растяжением, а другой — при испытании с осевым сжатием. Эти экстензометры обладают преимуществом по сравнению с экстензометрами того же назначения прежней конструкции, так как на них можно точно измерять среднее значение поперечных деформаций на значительной длине трубы, а не в одном только поперечном сечении.

Осевые деформации измерялись экстензометром Мартенса. В статье приводится также описание испытаний на кручение. Данные эксперимента хорошо совпадают со сравнительно недавно установленной теорией постоянства работы изменения формы.

I. Введение. Первая стадия работы проектировщика деталей машин состоит в расчете напряженного состояния при помощи формул теории упругости, а вторая — в выборе надлежащей теории прочности для данного материала при установлении размеров деталей. Суще-

*) Journ. of the Franklin Inst., v. 230, No 2, pp. 163—182 (1940).

ствуует очень много таких теорий прочности [83], но до сих пор еще не разработана такая, которая хорошо согласовалась бы с данными испытаний всех видов материалов и при всех напряженных состояниях. Следовательно, надлежащий выбор такой теории в силу необходимости может базироваться на данных эксперимента только для определенного материала. Много таких исследований сделано уже было давно. Мы можем упомянуть следующих авторов: Лоде, Надаи, Тэйлор и Квиней, Рош и Эйхингер и др. Их опыты проводились главным образом над такими материалами, как чистая медь, чистый никель, алюминий, бронза и мягкая сталь; данные эксперимента показывают, что теория постоянства работы изменения формы (теория Мизеса—Губера—Генки), сравнительно недавнего происхождения, лучше всего согласуется с опытом.

Для расширения уже прежде проведенных нами опытов [84] материал подвергался отжигу при 1200°F (648°C) с последующим охлаждением, и, кроме того, были изготовлены опытные образцы как для одновременного приложения осевого растяжения и внутреннего давления, так и для одновременного приложения осевого сжатия и внутреннего давления; дополнительно были изготовлены опытные образцы в виде сплошных стержней для испытаний на кручение.

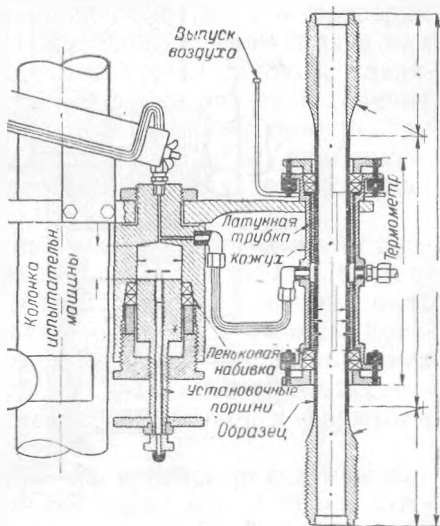


Рис. 1. Схема гидравлического экстензометра для испытаний при одновременном приложении внутреннего давления и осевого растяжения.

II. Опытная установка для осуществления сложного напряженного состояния. Опытные образцы подвергались внутреннему давлению при помощи насоса Амслера с маятниковым манометром и одновременно осевой нагрузке, причем осевое растяжение осуществлялось

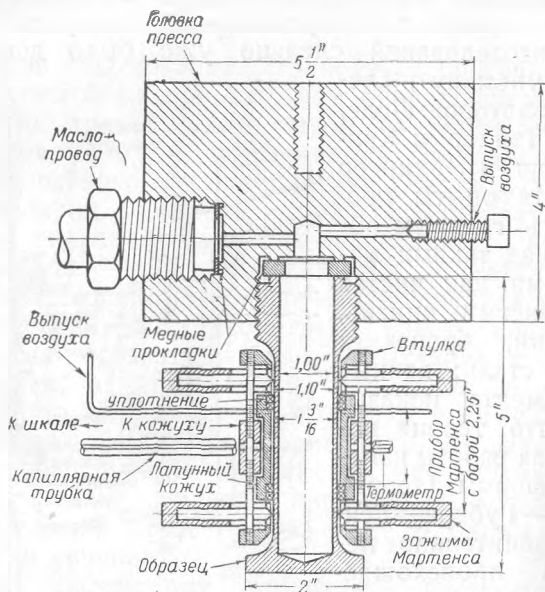


Рис. 2. Схема гидравлического экстензометра для испытаний при одновременном приложении внутреннего давления и осевого сжатия.

на 30-тонной разрывной машине системы Болдвин—Соузорк. Схематические чертежи гидравлических экстензометров для измерения поперечной деформации при одновременном действии осевого растяжения или сжатия и внутреннего давления изображены на рис. 1 и 2.

При работе с обоими гидравлическими экстензометрами (изображенными на рис. 1 и 2) соблюдались следующие предосторожности. Чтобы исключить возможность попадания воздуха, вода предварительно

кипятилась, после чего она вытеснялась через верхние отверстия и спускалась к концу стеклянной трубки. Затем передвигались вверх и вниз находящиеся в цилиндре поршни для удаления накопившихся пузырьков воздуха. После этого к концу стеклянной трубки прилагалось давление, и если наблюдалось заметное движение мениска, указывающее на наличие попавшего воздуха, то испытание не начиналось до тех пор, пока его не удаляли. Все время проводились пробные нагрузки в пределах упругой области для проверки работы прибора. После каждого испытания смазка или пыль, накапливавшиеся в стеклянных трубках, удалялись эфиром. Температура воды измерялась в течение всего испытания при помощи точного термометра. Так как температура мало изменялась во время испытания, то ее изменение требовало внесения только небольших поправок в отсчеты.

Применение такого типа экстензометров имеет преимущество по сравнению с соответствующими экстензометрами механического и оптического типа прежних испытаний. При применении последних отсчеты поперечной деформации брались только в одном или двух поперечных сечениях трубы. Гидравлический же экстензометр дает среднее значение поперечной деформации на значительной длине трубы.

Толщина каждой трубы измерялась перед каждым испытанием в девяти местах вдоль оси и через каждые 60° дуги окружности при помощи индикатора.

III. Опытные данные. Для каждой испытуемой трубы определялись кривые напряжение—деформация как в осевом, так и тангенциальном направлении. В каждом случае во время разгрузки получались одна или две петли гистерезиса (рис. 3 и 4).

Здесь рассматриваются только характерные результаты произведенных испытаний.

Следует отметить, что при одном внутреннем давлении осевая деформация оставалась почти чисто упругой, в то время как имелась значительная пластическая поперечная деформация (рис. 5).

Помимо этого, были проведены испытания на кручение на двух сплошных образцах. Это испытание, естественно, является также испытанием при сложном напряженном состоянии, при котором образец подвергается растягивающему и сжимающему напряжениям равной величины, направленным под углом в 45° к оси

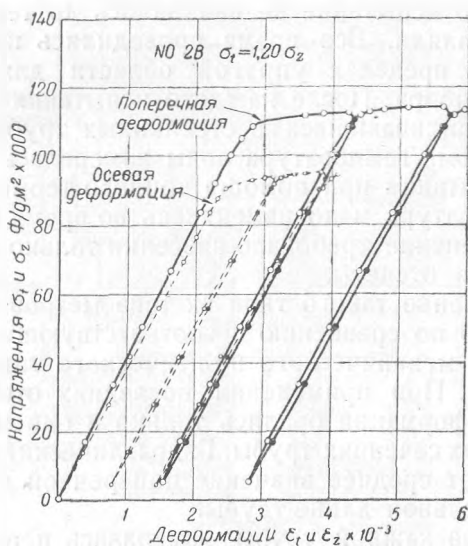


Рис. 3. Кривые „напряжения—деформации“ при осевом растяжении и внутреннем давлении.

стержня, причем третье главное напряжение равно нулю. При этих испытаниях отсчеты углов закручивания брались при помощи шелковой нити, протянутой между двумя секторами, прикрепленными к прямолинейной части опытного образца. По кривой крутящий момент—угол закручивания можно легко определить действительное касательное напряжение, возникающее во внешних волокнах при любом крутящем моменте в упругой и пластической областях [83].

Обозначив через τ_a это касательное напряжение, получаем:

$$\tau_a = \frac{1}{2\tau a^3} \left[3M_t + \theta \frac{dM_t}{d\theta} \right], \quad (1)$$

где a , M_t , θ обозначают радиус, крутящий момент и угол закручивания на единицу длины. Эта величина τ_a численно равна величине растягивающего и сжимающего напряжений, действующих под углом, равным

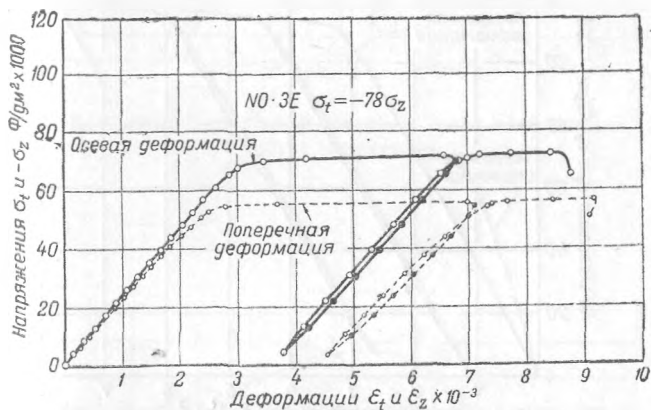


Рис. 4. Кривые «напряжения — деформации» при осевом сжатии и внутреннем давлении.

45° к оси скручиваемого образца во внешних волокнах. Деформация сдвига γ , соответствующая приведенному выше касательному напряжению, равна $a\theta$.

IV. Теория прочности. Здесь приводится сопоставление полученных в настоящем исследовании опытных данных только с наиболее распространенными теориями прочности*).

- 1) Теория максимального нормального напряжения.
- 2) Теория максимального удлинения.

*). Формулировку теорий прочности см. в статье Лоде (этот сборник, стр. 168).

- 3) Теория максимального касательного напряжения.
- 4) Теория полной работы деформации.
- 5) Теория постоянства работы изменения формы.

В случае тонкостенных труб, испытываемых в этих опытах, три главных напряжения, σ_1 , σ_2 , σ_3 , будут соответственно σ_r , σ_t , σ_z , обозначающие напряжения в осевом,

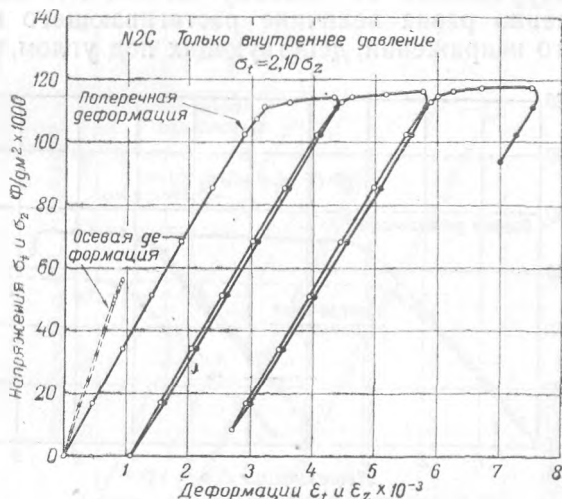


Рис. 5. Кривые „напряжения — деформации“ при одном внутреннем давлении.

радиальном и тангенциальном направлениях. Эти различные теории представлены в безразмерных величинах на рис. 7 (принято $\nu = 0,30$). Полученные экспериментальные данные также нанесены на этом рисунке. При определении величин главных напряжений на пределе текучести учитывалось влияние упрочнения материала, как это впервые было сделано Лоде, так что эти значения главных напряжений выбирались для того же пластического ϵ_z или той же пластической осевой деформации, которая бралась при определении σ_0 . В некоторых случаях, когда ϵ_z не могло быть использовано, оно заменялось через ϵ_t , как это указано на диаграмме.

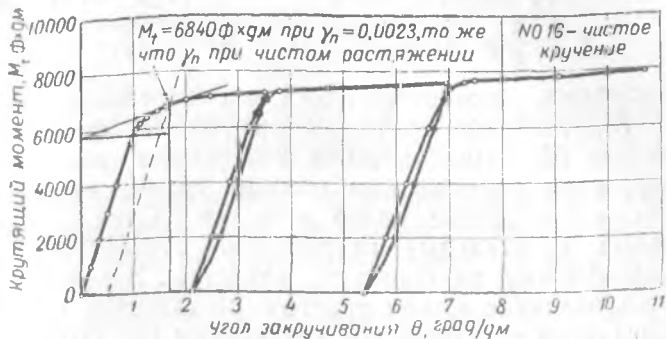


Рис. 6. Кривые „крутящий момент — угол закручивания“ (чистое кручение).

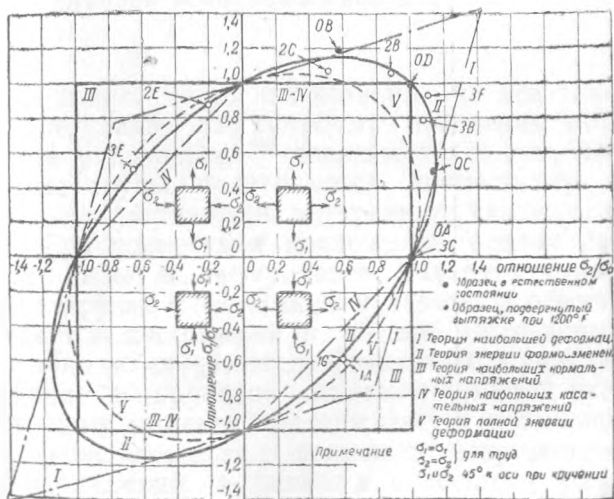


Рис. 7. Сравнение опытных данных с различными теориями прочности.

В случае кручения, октаэдральная деформация сдвига

$$\gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (2)$$

вычислялась соответствующей определенному значению M_t , данному графиком на рис. 6. При этом же значении M_t вычислялось и касательное напряжение в наружном волокне при помощи уравнения (1). Это последнее значение равно $\sigma_1 = -\sigma_2$. Следовательно, главные касательные напряжения, соответствующие определенному значению γ_n , известны. Затем определялось значение σ_0 при простом растяжении для того же значения γ_n , пользуясь уравнением (2). Отношения $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ и $\frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ затем наносились на график рис. 7.

Здесь можно отметить, что для всех использованных на опытах отношений напряжений, охватывающих больше половины диаграммы, теория постоянства работы изменения формы лучше всего согласуется с данными опыта.

В. ПРАГЕР

УПРОЧНЕНИЕ МЕТАЛЛА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ*)

Краткое содержание. Экспериментальные исследования упрочнения металлов при сложном напряженном состоянии обычно проводятся так, что направления главных напряжений, а также отношения их величин остаются постоянными в течение каждого испытания.

В настоящей статье рассматриваются несжимаемые изотропные тела, подвергаемые напряженному состоянию указанным способом и деформирующиеся в соответствии с некоторыми установленными постулатами. Устанавливается наиболее общая зависимость между напряжениями и деформациями, которая может иметь место при этом, а также рассматривается несколько частных случаев этой зависимости.

I. Введение. Часто применяемый на практике способ исследования пластического поведения металлов в области упрочнения ^[85] заключается в том, что тонкостенные трубы подвергаются совместному действию осевого растяжения, внутреннего давления и кручения. При совместном приложении осевой растягивающей силы и внутреннего давления отношение осевой нагрузки к внутреннему давлению обычно поддерживается постоянным в течение всего испытания. Аналогично в случае одновременного осуществления растяжения и кручения отношение осевой нагрузки к крутящему моменту поддерживается постоянным.

Во время такого вида испытания направления главных напряжений, а равно и отношения их величин сохраняются постоянными. В случае изотропного

*) Journ. of Appl. Phys., v. 16, No 12, pp. 837—840 (1945).

материала, испытываемого таким путем, главные оси напряжений и деформаций должны совпадать.

Если материал, в дополнение к тому, что он изотропен, еще и несжимаем, то надо предполагать, что отношения главных деформаций будут оставаться постоянными в течение каждого испытания¹⁾.

Кроме того, если материал обладает одинаковой диаграммой напряжения—деформации при чистом растяжении и при чистом сжатии, то надо ожидать, что изменение знаков на обратные у всех напряжений вообще приведет только к обратным знакам у всех деформаций. И так как, наконец, гидростатическое давление не может вызвать какой-либо деформации в несжимаемом изотропном теле, то можно предположить, что два напряженных состояния, отличающиеся только величиной гидростатического давления, вызовут одинаковые деформации.

В настоящей статье рассматриваются несжимаемые изотропные материалы, деформирующиеся в соответствии с приведенными выше постулатами и подвергаемые испытанию указанным выше способом. Здесь устанавливается наиболее общая зависимость между напряжениями и деформациями, которая может иметь место при таких условиях, и затем рассматривается несколько частных случаев этой зависимости.

II. Общая зависимость между напряжениями и деформациями. В последующем главные напряжения обозначаются через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, главные деформации — через e_1, e_2, e_3 . В случае малых деформаций, которыми и ограничивается настоящее исследование, условие несжимаемости выражается равенством:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (1)$$

¹⁾ Если материал сжимаем, то эти отношения будут изменяться даже в случае простого растяжения. Действительно, с увеличением растягивающего усилия величина отношения поперечного сжатия к продольному удлинению будет отклоняться от величины коэффициента Пуассона, имеющего место в упругой области, и будет приближаться к значению $1/3$, отвечающему сохранению объема.

Если σ обозначает среднее нормальное напряжение:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (2)$$

то девиатор напряжений есть тензор, который имеет те же главные оси, что и тензор напряжений, и следующие главные значения:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma, \quad s_2 = \sigma_2 - \sigma, \quad s_3 = \sigma_3 - \sigma. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0. \quad (4)$$

Два напряженных состояния, отличающиеся только гидростатическим давлением, очевидно, имеют одинаковые девиаторы напряжений.

Чтобы выполнить требование постулата о том, что два таких напряженных состояния вызывают одинаковые деформации, нужно предположить, что деформация зависит от девиатора напряжений, а не от тензора напряжений.

Для простого растяжения или сжатия в направлении первой главной оси

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{3}, \text{ и следовательно,}$$

$$s_1 = \frac{2\sigma_1}{3}, \quad s_2 = s_3 = -\frac{\sigma_1}{3} = -\frac{s_1}{2}. \quad (5)$$

Кроме того, так как материал предполагается несжимаемым и изотропным, то

$$e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2}. \quad (6)$$

Как видно из (5) и (6), напряжения и деформации полностью определяются в этом случае первыми компонентами s_1 и e_1 .

Предположим теперь, что зависимость между напряжениями и деформациями при простом растяжении или сжатии имеет следующий вид:

$$e_1 = c_1 s_1 + c_3 s_1^3 + c_5 s_1^5 + \dots, \quad (7)$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые постоянные. Исследуем возможность обобщения этой зависимости для других напряженных и деформированных состояний.

В уравнении (7) взяты только нечетные степени от s_1 , так как предполагается, что изменение знака у s_1 на обратный приводит к обратному знаку e_1 .

Зависимость между девиатором напряжений и девиатором деформаций мы будем брать также в форме (7), сохраняя те же показатели степеней.

В дальнейшем прописные буквы будут использованы для обозначения тензоров. n -я степень S^n девиатора напряжений S определяется как тензор, имеющий те же оси, что и S , но главные значения s_1^n, s_2^n, s_3^n . Однако положительные целые степени S не являются независимыми друг от друга. Если через I обозначить единичный тензор, все главные значения которого равны 1, то, вследствие так называемого уравнения Гамильтона — Кэли^[88], будем иметь для девиатора напряжения S :

$$S^3 = J_2 S + J_3 I, \quad (8)$$

где

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \quad J_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \dots \quad (9)$$

В самом деле, первая главная компонента тензора, представленного уравнением (8), равна:

$$s_1^3 = J_2 s_1 + J_3. \quad (8a)$$

Если подставить из (9) J_2 и J_3 и заменить всюду s_3 через $-(s_1 + s_2)$, согласно уравнению (4), то уравнение (8a) обратится в тождество¹⁾.

Умножая уравнение (8) на S , получим:

$$S^4 = J_2 S^2 + J_3 S. \quad (10)$$

¹⁾ Если тензоры A и B имеют одни и те же главные оси и главные значения a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 , соответственно, то произведение AB определяется как тензор, имеющий те же главные оси, что A и B , и главные значения $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3$.

Умножение уравнения (10) на S и подстановка в (8) дают:

$$S^5 = J_3 S^2 + J_2^2 S + J_2 J_3 I, \quad (11)$$

и т. д.

Каждая положительная целая степень S^n может, таким образом, быть представлена как линейная комбинация из S^2 , S и I , причем коэффициенты представляют собой полиномы от J_2 и J_3 , которые однородны относительно составляющих напряжения и степени которых соответственно равны $n-2$, $n-1$, n .

Несмотря на то, что правая часть уравнения (7) равна первой компоненте от $c_1 S + c_3 S^3 + c_5 S^5 + \dots$, нельзя путем обобщения уравнения (7) представить тензор деформаций E в виде

$$E = c_1 S + c_3 S^3 + c_5 S^5 + \dots \quad (12)$$

В самом деле, сумма главных деформаций, вычисленная по (12), обычно не обращается в нуль, что противоречит уравнению (1). При обобщении уравнения (7) каждая степень s_1 , например s_1^5 , должна быть заменена не соответствующей степенью S^5 девятиатора напряжений, а выражением, однородным относительно пятой степени составляющих напряжения:

$$a J_2^2 S + b J_2 S^3 + c S^5 + d J_2 J_3 I. \quad (13)$$

Коэффициенты a , b , c , d в тензоре (13) должны быть определены таким образом, чтобы сумма его главных значений тождественно обращалась в нуль, а его первое главное значение приводилось бы к s_1^5 , в случае чистого растяжения или сжатия.

Так как S^3 и S^5 в (13) могут быть выражены через линейные комбинации из S^2 , S и I , то это выражение может быть приведено к виду:

$$\alpha J_3 S^2 + \beta J_2^2 S + \gamma J_2 J_3 I. \quad (14)$$

Сумма главных значений тензоров S^2 , S , I соответственно равна $2J_2$, 0 и 3 . Поэтому сумма главных значений (14) будет обращаться в нуль всякий раз, когда

$2\alpha + 3\gamma = 0$. Вследствие этого условия выражение (14) может быть написано так:

$$\alpha J_3 \left(S^2 - \frac{2}{3} J_2 I \right) + \beta J_2^2 S. \quad (15)$$

Выражение $S^2 - \frac{2}{3} J_2 I$ есть не что иное, как девиатор квадрата девиатора напряжений. В последующем этот тензор обозначается буквой T :

$$T = S^2 - \frac{2}{3} J_2 I. \quad (16)$$

Коэффициенты α и β , входящие в (15), должны попеременно определяться так, чтобы первое главное значение этого тензора приводилось к s_1^5 в случае чистого растяжения или сжатия.

В этом случае

$$s_2 = s_3 = -\frac{s_1}{2}, \text{ и уравнения (9) дают}$$

$$J_2 = \frac{3}{4} s_1^2, \quad J_3 = \frac{1}{4} s_1^3;$$

следовательно, первые главные значения от S и T соответственно будут s_1 и $\frac{1}{2} s_1^2$. В случае чистого растяжения главное значение тензора (15), следовательно, будет равно $\left[\frac{\alpha}{8} + \frac{9\beta}{16} \right] \cdot s_1^5$. Оно приводится к s_1^5 , если

$$2\alpha + 9\beta = 16. \quad (17)$$

Поэтому при обобщении зависимости (7) степень s_1^5 может быть заменена любым тензором вида

$$\alpha J_3 T + \beta J_2^2 S \quad (18)$$

при условии, что α и β удовлетворяют (17).

Аналогичное исследование показывает, что любая степень s_1^n , входящая в (7), должна быть заменена линейной комбинацией тензоров $J_3 T$ и S , причем коэффициенты являются полиномами от J_2 и J_3^2 , однородными

относительно составляющих напряжения и имеющие степени $n - 5$ и $n - 1$, соответственно.

Числовые коэффициенты, входящие в эти выражения, не являются полностью произвольными, а должны удовлетворять линейному уравнению, аналогичному (17).

Если заменить степени от s_1 в (7) такими выражениями и получившиеся при этом члены собрать в виде множителей при T и S , то тензорная зависимость, эквивалентная зависимости (7), представится в таком виде:

$$E = p(J_2, J_3^2)J_3T + q(J_2, J_3^2)S. \quad (19)$$

Здесь p и q — полиномы от J_2 и J_3^2 ; их коэффициенты удовлетворяют условию, что e_1 , вычисленное по (19), должно сводиться к (7) в случае чистого растяжения или сжатия.

Так как J_2 и J_3^2 имеют четные степени 2 и 6 относительно составляющих напряжений, а составляющие тензоров J_3T и S имеют нечетные степени 5 и 1, то перемена знаков на обратные у всех напряжений в (19) приводит к обратным знакам у всех деформаций. Кроме того, так как J_2 и J_3 , так же, как и T , зависят скорее от девиатора напряжений, чем от самого напряжения, то два напряженных состояния, отличающихся только гидростатическим давлением, будут вызывать одинаковые деформации. Следовательно, зависимость между напряжениями и деформациями (19) удовлетворяет двум из трех постулатов, сформулированных в п. I.

Третий же постулат, который требует, чтобы отношения трех главных деформаций зависели только от отношений трех главных напряжений, как правило, не выполняется.

Чтобы удовлетворить этому постулату, зависимость между напряжениями и деформациями должна иметь вид:

$$E = f(J_2, J_3^2)[p(J_2, J_3^2)J_3T + q(J_2, J_3^2)S], \quad (20)$$

где f — соответствующая функция от J_2 и J_3 , а p и q — однородные полиномы относительно составляющих напряжения, причем степень у p на 4 меньше, чем у q . Главные значения выражения, стоящего в скобках в (20), будут в таком случае однородными функциями составляющих напряжения. Так как множитель f выпадает, когда отношения главных деформаций выражены численно, то эти отношения будут зависеть только от отношения главных напряжений, а не от их абсолютных величин.

Таким образом, уравнение (20) представляет собой наиболее общую зависимость между напряжениями и деформациями, которая может возникнуть при условиях, подробно определенных в п. I.

III. Частные случаи зависимости между напряжениями и деформациями. В этом пункте рассматриваются несколько частных случаев общей зависимости (20).

а) Если функция f зависит только от J_2 и $p=0$, $q=1$, то уравнение (20) приводится к виду

$$E = f(J_2) \cdot S. \quad (21)$$

Эта особенно простая зависимость между напряжениями и деформациями обуславливает равенство отношений главных деформаций и главных составляющих девиатора напряжений.

Лоде (этот сборник, стр. 168) был, повидимому, первым, который исследовал эту зависимость отношений экспериментально. Его опытные данные обнаруживают некоторые отклонения от поведения материала, обуславливаемого зависимостью (21), а в целом они настолько сильно разбросаны, что не позволяют сделать определенного заключения.

Тэйлор и Квиней^[75] вполне определенно установили такие отклонения для случая мягкой стали, меди и алюминия. Несмотря на то, что зависимость (21) не подтверждается опытами, она часто применяется при теоретических исследованиях благодаря своей простоте с математической точки зрения^[89].

б) Если функция f зависит только от J_2 и $p = -c$, $q = J_2^2$, то тогда уравнение (20) принимает вид

$$E = f(J_2) [J_2^2 S^2 - c J_3 T]. \quad (22)$$

Эта зависимость будет совпадать с результатами Тэйлора и Квиней при надлежащих значениях постоянной c . Для воспроизведения полученных результатов эти авторы пользуются параметрами:

$$\mu = 2 \frac{s_2 - s_3}{s_1 - s_2} - 1 \quad \text{и} \quad \nu = 2 \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2} - 1. \quad (23)$$

Так как множитель $f(J_2)$ выпадает, когда μ и ν выражены численно, то, согласно простой зависимости (21), график зависимости ν от μ должен представлять собой прямую линию; более сложная зависимость (22) допускает более широкое разнообразие форм зависимостей ν от μ ; некоторые из них нанесены на рис. 1.

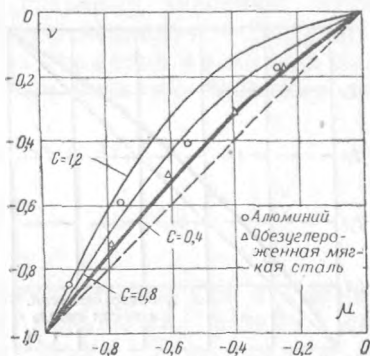


Рис. 1.

Опытные данные Тэйлора и Квиней для алюминия и обезуглероженной стали также приведены здесь для сравнения. Если числовое значение постоянной c в уравнении (22) уже выбрано, то функцию $f(J_2)$ можно подобрать таким образом, чтобы кривая, определяемая зависимостью (22), совпадала с экспериментальной диаграммой напряжений — деформаций для какого-либо случая напряжения опытного образца, например простого растяжения. Более свободный подбор для совпадения зависимости (22) с экспериментальными данными мы будем иметь, если возьмем функцию f зависящей как от J_2 , так и от J_3 . Так как $J_3 = 0$ в случае

чистого сдвига ($s_2 = 0, s_3 = -s_1$), то, следовательно, легко может быть получен вид уравнения (22), согласующийся с произвольными диаграммами напряжений — деформаций в случае чистого сдвига, так же, как и в случае чистого растяжения.

в) Выражение, стоящее в скобках в уравнении (22), пятой степени относительно компонентов напряжения. Если взять вместо этого выражение седьмой степени, то получим зависимость вида

$$E = f(J_2) [(J_2^3 + cJ_2^2)S + c'J_2J_3T]. \quad (24)$$

Такого вида зависимость была использована автором в 1937 г. для представления результатов Тэйлора и Квиня ^[90].

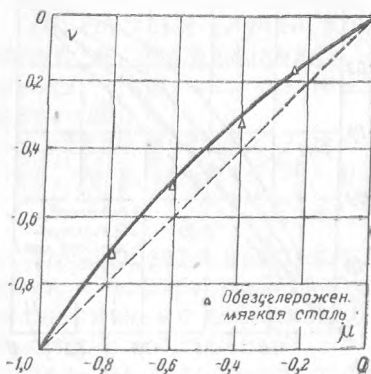


Рис. 2.

Для обезуглероженной стали при значениях $c = -0,120, c' = 0,466$ получается удовлетворительное совпадение. На рис. 2 нанесены опытные данные Тэйлора и Квиня, а также и кривая, обуславливаемая зависимостью (24) при этих значениях c и c' .

г) Зависимости между напряжениями и деформациями, предложенные Бейли ^[91] для ползучести металлов при слож-

ном напряженном состоянии, были применены Дэвисом (этот сборник, стр. 338) к испытаниям рассматриваемого здесь типа.

В обозначениях настоящей статьи первая главная составляющая этой зависимости между напряжениями и деформациями представится так:

$$e_1 = A [(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2]^m \times \\ \times [(s_1 - s_2)^{n-2m} - (s_3 - s_1)^{n-2m}], \quad (25)$$

где A — постоянная. Остальные две главные составляющие определяются из (25) путем круговой перестановки индексов. Для согласования с постулатом о том, что изменение знаков на обратные у всех напряжений приводит к обратным знакам у всех деформаций, показатель степени $n - 2m$ должен быть нечетным целым числом; показатель же степени m может быть и дробным. Общая зависимость (20) должна содержать все зависимости вида (25) как частные случаи.

Действительно, в силу (4), выражение в скобках в правой части (25) равняется $6J_2$, как легко проверить. Полное выражение, стоящее перед вторыми скобками в (25), эквивалентно поэтому множителю $f(J_2, J_3^2)$, входящему в правую часть (20). Вторая скобка в (25) оказывается равной первому главному значению скобки в выражении (20) для любого нечетного $n - 2m$. Например, для $n - 2m = 3, 5$ и 7 выражение во вторых скобках в (25) получается равным первому главному значению от

$$9J_2^3 S, 33J_2^2 S - 27J_3 T$$

и

$$(129J_2^3 - 81J_3^2) S - 162J_2 J_3 T,$$

соответственно.

Таким образом, зависимости Бейли для $n - 2m = 5$ и $n - 2m = 7$, повидимому, являются частными случаями (22) и (24), соответственно. Произвольные же постоянные c и c' , входящие в (22) и (24), придают, однако, большую степень гибкости зависимостям между напряжениями и деформациями, чем уравнения Бейли¹⁾.

¹⁾ В связи с опубликованием настоящей статьи автор упоминает, что Рейнер [93] в своей недавней статье при рассмотрении зависимости между напряжениями и деформациями в неьютоновских вязких жидкостях пользуется методом, до некоторой степени аналогичным настоящему.

Е. ДЭВИС

РОСТ НАПРЯЖЕНИЙ С ИЗМЕНЕНИЕМ ДЕФОРМАЦИЙ И ЗАВИСИМОСТЬ „НАПРЯЖЕНИЯ — ДЕФОРМАЦИИ“ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МЕДИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ *)

Образцы из отожженной меди в виде полых цилиндров подвергались одновременному осевому растяжению и внутреннему давлению. Заданное отношение внутреннего давления к осевой нагрузке сохранялось для каждого из испытаний, но для различных испытаний это отношение варьировалось так, чтобы исчерпать весь диапазон от чистого растяжения (как один предельный случай) до равномерного двухосного растяжения (другой предельный случай). Опытные данные были использованы для исследования характера роста пластических деформаций при росте напряжений, а также для определения соотношения между тремя главными деформациями для любого момента испытаний. Проведены также некоторые наблюдения над характером разрушения, получаемого при различных условиях нагружения.

1. Введение. Задача определения зависимости „напряжение — деформация“ в случае сложного напряженного состояния является сложной даже при малых деформациях. Если же деформации при сложном напряженном состоянии становятся большими, то сложность еще возрастает, и даже могут возникнуть расхождения в суждении: какие именно переменные должны быть использованы, чтобы наилучшим образом изучить поведение материала, деформированного более чем на 1 или 2%. Сложность задачи может быть частично объяснена тем, что площадь поперечного сечения образца изменяется настолько, что для определения напряжений нельзя использовать ее первоначальные

*) Journ. of Appl. Mech., v. 10, pp. 187—196 (1943).

размеры. Трудности возникают и по той причине, что начальные площадки максимальных касательных напряжений поворачиваются при дополнительной деформации так, что после деформации материала эти площадки совпадают уже с совершенно другим слоем материала.

Следует отличать две различные ступени в задаче сложного напряженного состояния: одна относится к прочности материала или к характеру изменения деформаций при росте напряжений; другая — к распределению различных деформаций или направлений, по которым имеет место течение материала в любой момент при заданном напряженном состоянии.

В данной статье в основном рассматривается вторая часть задачи; однако полученные опытные данные могут быть использованы для некоторых выводов в отношении первой части этой задачи. Приводятся также соображения о характере полученных разрушений.

В статье приняты следующие обозначения:

- σ — нормальное напряжение,
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные нормальные напряжения,
- τ — напряжение сдвига,
- ϵ — относительная деформация,
- $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — главные относительные деформации,
- γ — относительная деформация сдвига.

Черта (—) над напряжением обозначает истинное напряжение, определяемое с учетом истинных размеров образца в момент возникновения напряжений. Та же черта (—) над деформацией обозначает истинную деформацию, о которой будет сказано ниже.

Три главных напряжения сдвига определяются уравнениями

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (1)$$

Аналогично три главные деформации сдвига могут быть представлены в виде

$$\gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \quad \gamma_2 = \epsilon_3 - \epsilon_1, \quad \gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2. \quad (2)$$

Для больших деформаций истинное нормальное напряжение обычно может быть выражено через условное напряжение σ и деформацию ϵ . Поскольку объем материала во время пластических деформаций не изменяется, истинные напряжения в любом случае могут быть вычислены на основе опытных данных. Другим следствием постоянства объема материала является то, что для малых пластических деформаций сумма трех нормальных деформаций равна нулю:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0. \quad (3)$$

Следовательно, необходимо измерить только два значения деформаций. Однако для больших деформаций уравнение (3) несправедливо и для получения подобного соотношения следует ввести новые переменные. Это достигается определением истинной деформации $\bar{\epsilon}$ в виде:

$$\bar{\epsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(1 + \epsilon). \quad (4)$$

Сумма трех перпендикулярных истинных деформаций равна нулю даже для больших деформаций

$$\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_3 = 0. \quad (5)$$

Три главные истинные деформации сдвига имеют вид

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_3, \quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_1, \quad \bar{\gamma}_3 = \bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2. \quad (6)$$

Эти переменные, т. е. истинные напряжения $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ и истинные деформации $\bar{\epsilon}$ и $\bar{\gamma}$, могут быть использованы для получения зависимости „напряжение — деформация“ для материала за пределами малых деформаций. Следовательно, для опыта на чистое растяжение на круглом образце длиной l_0 условная диаграмма „напряжение — деформация“ может быть преобразована в диаграмму „истинное напряжение — истинная деформация“ на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P}{A_0}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \\ \varepsilon_1 &= \frac{l - l_0}{l_0}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2}; \\ \bar{\sigma}_1 &= \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} (1 + \varepsilon_1) = \bar{\sigma}_1 (1 + \varepsilon_1); \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0. \\ \bar{\varepsilon}_1 &= \ln(1 + \varepsilon_1); \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_3 = \ln(1 + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Эти соотношения вытекают из условия равномерной деформации всей расчетной длины образца и, следовательно, не могут быть применены за точкой, соответствующей временному сопротивлению в опыте на растяжение или за точкой перегиба в опыте на ползучесть.

II. Постановка задачи. В случае опыта на чистое растяжение, когда $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0$, очевидно, что $\bar{\varepsilon}_2$ может быть принята равной $\bar{\varepsilon}_3$, если материал является изотропным. Другими словами, сплошной брус круглого сечения до начала испытания не меняет формы сечения во время испытания. Исследование соотношения между $\bar{\varepsilon}_2$ и $\bar{\varepsilon}_3$ для общего случая, когда промежуточное главное напряжение $\bar{\sigma}_2$ может иметь любое значение между $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_3$, составляет основную задачу настоящего исследования. Это может быть проще всего объяснено при помощи схемы на рис. 1, изображающей элементарный кубик под действием трех главных напряжений: $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\sigma}_3$, где $\bar{\sigma}_1 > \bar{\sigma}_2 > \bar{\sigma}_3$. Если $\bar{\sigma}_2$ равно $\bar{\sigma}_1$, то деформация $\bar{\varepsilon}_2$ в направлении $\bar{\sigma}_2$ должна быть равна деформации $\bar{\varepsilon}_1$ в направлении $\bar{\sigma}_1$, а так как сумма трех деформаций должна быть равна нулю, то $\bar{\varepsilon}_3$ должна быть вдвое больше, чем $\bar{\varepsilon}_1$ или $\bar{\varepsilon}_2$, и иметь противоположный знак. Если $\bar{\sigma}_2$ равно $\bar{\sigma}_3$, как было указано для опыта на растяжение, $\bar{\varepsilon}_2$ равно $\bar{\varepsilon}_3$. Обе величины являются отрицательными и равны половине $\bar{\varepsilon}_1$. Если $\bar{\sigma}_2$ находится между $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_3$, так что τ_1 равно τ_3 , то, как показывает эксперимент, $\bar{\varepsilon}_2 = 0$.

Это было установлено Нортонем [77, 100] в опытах на внутреннее давление (данные одного из них приведены на рис. 2) и было также проверено опытными данными настоящего исследования. Можно утверждать, что в трех только что упомянутых зависимостях результаты обусловлены симметрией главных касательных напряжений, так как в каждом случае два из них имеют одинаковую величину. Когда σ_2 имеет другое промежуточное значение, симметрия не имеет места, и очень мало можно сказать по поводу относительных значений трех главных деформаций до тех пор, пока не станет известным закон, управляющий распределением этих деформаций.

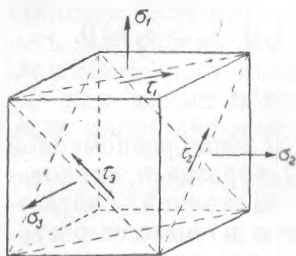


Рис. 1. Куб, подвергнутый сложному напряженному состоянию.

Рис. 1. Куб, подвергнутый сложному напряженному состоянию.

III. Обзор предшествующих работ. Поскольку автору известно, имеются две различные теории относительно распределения деформаций, упомянутых

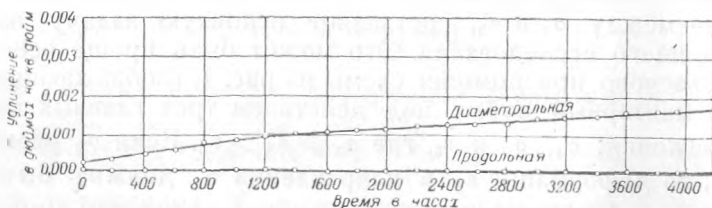


Рис. 2. Опыты на ползучесть с трубами, проведенные Нортонем (температура 1050° F, давление 1617 ф. на кв. дюйм).

в предыдущем разделе. Обе эти теории рассматривают лишь малые деформации. Более ранняя из этих двух теорий утверждает, что в случае установившегося течения главные деформации сдвига в каждый опре-

деленный момент пропорциональны главным касательным напряжениям и могут быть записаны в виде

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = k (\text{const}). \quad (8)$$

Эти уравнения, вытекающие из уравнений Сен-Венана (этот сборник, стр. 11), были использованы Лоде (этот сборник, стр. 168), Надаи^[83], Зодербергом^[101] и другими. Соотношение (8) эквивалентно утверждению, что диаграммы Мора для напряжений и деформаций, как показано на рис. 3, геометрически подобны: Лоде испытал трубы при их совместном растяжении

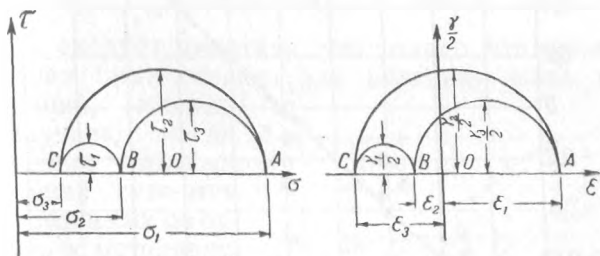


Рис. 3. Круги Мора для напряжений и деформаций.

и внутреннем давлении. Для сравнения результатов им введены две новые переменные μ и ν , которые определяются как отношение отрезков OB к OA на рис. 3.

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}; \quad \nu = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \quad (9)$$

Для того чтобы уравнение (8) было справедливо, очевидно, что μ должно быть равно ν . Результаты опытов Лоде, приведенные на рис. 4, дают отклонение от линии $\mu = \nu$, но для практических целей эта зависимость была взята как характеризующая поведение материала. Тэйлор и Квиней^[73] проводили опыты на совместное растяжение и кручение с различными материалами и нашли, что отклонение от линии $\mu = \nu$ было для каждого материала различным. Это показывает, что форма

диаграммы „напряжение — деформация“ может влиять на распределение главных деформаций. Результаты их испытаний приведены на рис. 5.

Эта теория может быть приложима к скоростям деформаций в опытах на ползучесть при сложном напряженном состоянии, если испытание продолжено

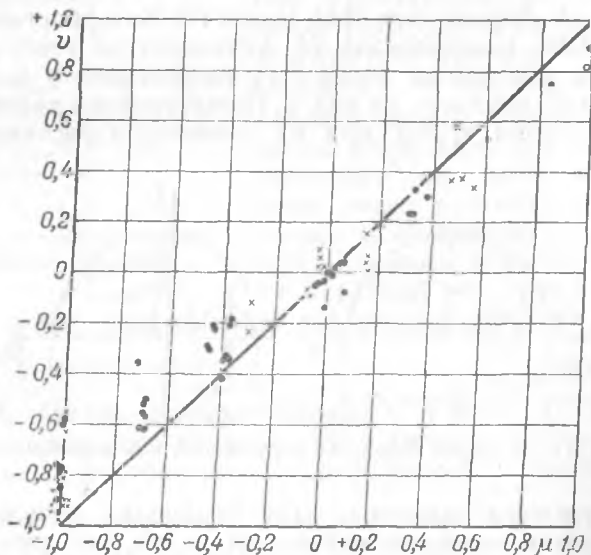


Рис. 4. Результаты опытов Лоде.

до той стадии, когда кривые ползучести становятся прямолинейными, т. е. до той точки, где скорости деформаций зависят только от напряжений. Можно получить уравнение, подобное уравнению (8):

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} - \frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{d\epsilon_2}{dt} - \frac{d\epsilon_3}{dt} = \frac{d\epsilon_3}{dt} - \frac{d\epsilon_1}{dt} = k'. \quad (10)$$

Уравнение (10) действительно представляет закон вязкого течения, и уравнение (8) вытекает непосред-

ственно из уравнения (10), которое может быть также записано в виде

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = k''\tau_1, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = k''\tau_2, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = k''\tau_3. \quad (11)$$

Для выражения условия, подобного уравнению (9), может быть введена новая переменная ξ :

$$\xi = \frac{2 \frac{d\varepsilon_2}{dt} - \frac{d\varepsilon_1}{dt} - \frac{d\varepsilon_3}{dt}}{\frac{d\varepsilon_1}{dt} - \frac{d\varepsilon_3}{dt}}, \quad (12)$$

и если уравнение (10) справедливо, очевидно, что $\xi = \mu$.

Здесь следует отметить, что только что приведенная теория была создана для описания лишь малых деформаций, именно для случаев, когда

направления главных напряжений остаются фиксированными по отношению к материалу. В случаях, когда направления главных напряжений изменяются, можно рассматривать только отдельные виды деформации. Автор считает, однако, что данная теория может быть приложима также и в случае больших деформаций, если в уравнениях (8) — (12) обычные деформации ε и γ заменить истинными деформациями $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\gamma}$ и если, как это имеет место в опытах автора, направления и относительная величина главных напряжений не изменяются во время испытаний.

Другая теория, которая, видимо, может быть приложена к этой задаче, была построена для определения скоростей главных деформаций в испытаниях на

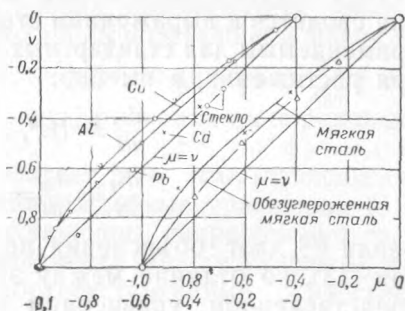


Рис. 5. Результаты опытов Тэйлора и Квиня.

ползучесть при сложном напряженном состоянии. Эта теория, принадлежащая Бейли^[91] и с некоторыми ограничениями использованная Тэпселлем и Джонсоном^[102], дает следующие выражения для скоростей главных деформаций:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = A [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^m [(\sigma_1 - \sigma_2)^{n-2m} - (\sigma_3 - \sigma_1)^{n-2m}]; \quad (13)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = A [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^m [(\sigma_2 - \sigma_3)^{n-2m} - (\sigma_1 - \sigma_2)^{n-2m}];$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dt} = A [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^m [(\sigma_3 - \sigma_1)^{n-2m} - (\sigma_2 - \sigma_3)^{n-2m}].$$

Показатели в уравнениях (13) выбраны так, что для случая чистого растяжения, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, уравнения сводятся к выражениям степенной функции, обычно применяемым для стандартных испытаний на ползучесть при растяжении, а именно:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = B\sigma^n, \quad (14)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{d\varepsilon_3}{dt} = -\frac{B}{2}\sigma^n.$$

Бейли^[91] дает объяснения по поводу записи уравнения (13), но отличие между этой теорией и теорией, представленной уравнением (8), может быть легко объяснено, если представить себе три куба, подобных приведенному на рис. 1. Пусть каждый куб представляет элемент, взятый из трех различных образцов, причем предполагается, что напряжения различны для каждого куба, но что в каждом случае $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Из опытов на ползучесть при растяжении известно, что максимальные главные скорости деформации и сдвига не будут пропорциональны максимальным напряжениям сдвига, но что они могут быть приближенно представлены в виде степенной функции вида

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = A\tau_2^n. \quad (15)$$

Обе теории допускают такого рода выражения, но отличаются в том, что касается зависимости между мгновенными значениями трех главных напряжений сдвига в том же кубе и соответствующими скоростями деформации сдвига. В отношении главных скоростей деформаций более ранняя теория утверждает, что в любой момент

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{1}{3} \left(\frac{d\gamma_3}{dt} - \frac{d\gamma_2}{dt} \right) = \Phi(\tau_3 - \tau_2); \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{1}{3} \left(\frac{d\gamma_1}{dt} - \frac{d\gamma_3}{dt} \right) = \Phi(\tau_1 - \tau_3); \\ \frac{d\varepsilon_3}{dt} &= \frac{1}{3} \left(\frac{d\gamma_2}{dt} - \frac{d\gamma_1}{dt} \right) = \Phi(\tau_2 - \tau_1), \end{aligned} \quad (16)$$

где Φ не обязательно является константой, но может быть некоторой функцией напряжения, например, такой, как первая квадратная скобка правой части уравнения (13). Уравнения (16) получены подстановкой напряжения сдвига τ вместо скорости деформации сдвига $\frac{d\gamma}{dt}$ с внесением соответствующего коэффициента пропорциональности, содержащего Φ .

Теория Бейли предполагает, что если зависимости в виде степенной функции [подобные уравнению (15)] справедливы для соответствующих напряжений в трех различных кубах, то зависимости между главными напряжениями сдвига и соответствующими скоростями деформаций сдвига для одного и того же куба в любой момент не должны быть линейными, как в уравнениях (11), но должны быть некоторой формой степенной функции. Уравнения Бейли могут быть получены подстановкой τ^{n-2m} вместо τ в уравнениях (16), а именно:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{1}{3} \left(\frac{d\gamma_3}{dt} - \frac{d\gamma_2}{dt} \right) = \Phi(\tau_3^{n-2m} - \tau_2^{n-2m}); \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{1}{3} \left(\frac{d\gamma_1}{dt} - \frac{d\gamma_3}{dt} \right) = \Phi(\tau_1^{n-2m} - \tau_3^{n-2m}); \\ \frac{d\varepsilon_3}{dt} &= \frac{1}{3} \left(\frac{d\gamma_2}{dt} - \frac{d\gamma_1}{dt} \right) = \Phi(\tau_2^{n-2m} - \tau_1^{n-2m}). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь следует указать, что подстановки, сделанные в уравнениях (17), неэквивалентны допущению, что скорости деформации сдвига пропорциональны соответствующим напряжениям сдвига, возведенным в некоторую степень, так как подобное предположение подразумевало бы изменение объема для любого показателя, кроме $n - 2m = 1$. Скорости деформаций сдвига, полученные из уравнений (17), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \Phi (2\tau_1^{n-2m} - \tau_2^{n-2m} - \tau_3^{n-2m}); \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= \Phi (2\tau_2^{n-2m} - \tau_3^{n-2m} - \tau_1^{n-2m}); \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \Phi (2\tau_3^{n-2m} - \tau_1^{n-2m} - \tau_2^{n-2m}). \end{aligned} \quad (18)$$

Для удобства сравнения этих двух теорий необходимо подставить уравнения (17) в уравнение (12), что дает:

$$\xi = \frac{3\tau_1^{n-2m} - 3\tau_3^{n-2m}}{\tau_1^{n-2m} - 2\tau_2^{n-2m} + \tau_3^{n-2m}}. \quad (19)$$

На рис. 6 дана кривая $\mu - \xi$ для различных значений показателя $n - 2m$. Отсюда непосредственно вытекают два интересных факта: 1) если $n - 2m$ равно 1 или 3, то $\mu = \xi$ и две теории в этом отношении тождественны; 2) если $n - 2m$ имеет значение, отличающееся от 1 или 3, то наблюдается отклонение от прямой линии $\mu = \xi$, но для промежуточных значений между 1 и 3 отклонение происходит в одну сторону от прямой, в то время как для значений больших 3 отклонения получают в противоположную сторону. Максимальное отклонение для значений между 1 и 3 имеет место, когда $n - 2m$ равно приблизительно 1,8.

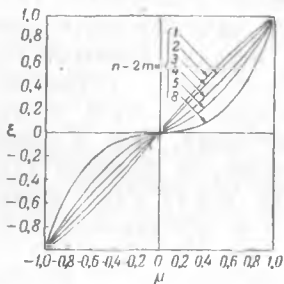


Рис. 6. График $\mu - \xi$ для теории пластичности Бейли.

Максимальное отклонение для значений между 1 и 3 имеет место, когда $n - 2m$ равно приблизительно 1,8.

Поскольку известно автору, все опубликованные данные испытаний показывают отклонения с той стороны, где $n - 2m$ должно быть больше 3, но, к сожалению, большая часть этих опытных данных относится к распределению деформаций, а не скоростей деформации. Тэпселл и Джонсон^[102] сообщают о материале, для которого $m = 0$ и $n = 2,2$, но их опытные данные не могут быть для сравнения легко перенесены на график, подобный приведенному на рис. 6. В какой степени это указывает на недостаточность теории Бейли, не может быть определено до тех пор, пока не будут получены новые опытные данные испытаний на ползучесть при сложном напряженном состоянии. Представляется, однако, странным, что материал, который должен был бы подчиняться сложным выражениям уравнения (13) при $n - 2m = 3$, должен в то же время деформироваться так же, как идеально вязкое тело, поскольку это относится к распределению главных скоростей деформации в определенный момент. Другой интересный момент, который может быть отмечен, состоит в том, что обе теории согласуются для тех симметричных случаев, когда два главных касательных напряжения равны ($\mu = -1,0$ и $+1,0$).

Для того чтобы можно было приложить теорию Бейли к настоящему исследованию, необходимо было бы написать уравнения (17) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{3} (\bar{\gamma}_3 - \bar{\gamma}_2) = \Phi(\bar{\tau}_3^k - \bar{\tau}_2^k); \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{3} (\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_3) = \Phi(\bar{\tau}_1^k - \bar{\tau}_3^k); \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \frac{1}{3} (\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1) = \Phi(\bar{\tau}_2^k - \bar{\tau}_1^k).\end{aligned}\quad (20)$$

Значение переменной $\bar{\nu}$ может быть представлено из этих уравнений в виде:

$$\bar{\nu} = \frac{2\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3}{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3} = \frac{3\bar{\tau}_1^k - 3\bar{\tau}_3^k}{\bar{\tau}_1^k - 2\bar{\tau}_2^k + \bar{\tau}_3^k}.\quad (21)$$

Во всех тех уравнениях, в которых касательные напряжения возведены в некоторую степень, необходимо, чтобы значение касательного напряжения оставалось положительным. Например, если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, значение $\tau_2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2}$ отрицательно и если оно должно быть возведено в некоторую степень, его надо рассматривать как

$$\tau_2^k = - \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^k \right].$$

IV. Проведение испытаний. Испытания настоящего исследования представляют собой совместные испытания на внутреннее давление и осевое растяжение, в которых отношение внутреннего давления к осевой нагрузке сохранялось в течение всего испытания постоянным. Поскольку эти испытания не были испытаниями на ползучесть при постоянной нагрузке, изучалось в большей степени распределение деформаций, чем скоростей деформаций. Образцами для испытаний служили отожженные медные трубы, подобные показанным на рис. 7 и 8. Цилиндрическая часть труб имела 8 дюймов длины, но в качестве измерительной длины была использована только средняя часть образца длиной в 4 дюйма. Образцы были укреплены в специальных зажимах, показанных на рис. 7, и растягивались на 30-тонной испытательной машине Амслера, которая давала осевую нагрузку. Внутреннее давление осуществлялось при помощи отдельного насоса Амслера, высокого давления, с маятниковым манометром. Насос был связан с образцом специальными зажимами.

Во всех испытаниях, кроме испытания на чистое внутреннее давление и испытаний, в которых $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$, напряжение в осевом направлении было наибольшим; таким образом, за указанными исключениями, σ_1 — осевое напряжение, σ_2 — тангенциальное напряжение и σ_3 — радиальное напряжение. Радиальное напряжение σ_3 было принято равным нулю, хотя в действительности

его значение колебалось от нуля на наружной поверхности до отрицательного значения, равного внутреннему давлению на внутренней поверхности цилиндра.

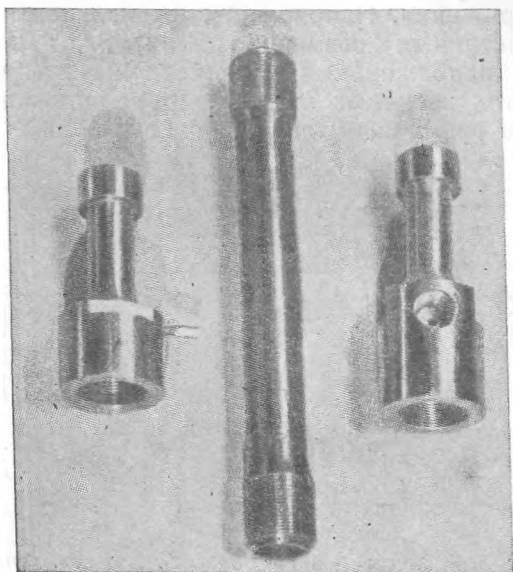


Рис. 7. Образцы и зажимы.

Измеряющий маятник насоса высокого давления был смонтирован по длине таким образом, что при отклонении на полную шкалу как испытательной машины, так и насоса высокого давления устанавливалось определенное отношение между σ_2 и σ_1 . Для поддержания постоянным этого отношения в течение всего испытания необходимо было лишь поддерживать одинаковыми углы отклонения стрелок обеих машин. На границах расчетной четырехдюймовой длины были нанесены на образце две риски, и осевое удлинение замерялось при помощи циркуля и шкалы с точностью 0,01 дюйма. Внешний диаметр замерялся в шести сечениях в пределах расчетной длины обычным микрометром. В мо-

мент взятия отсчетов нагрузка всегда снималась, так что дальнейшее растяжение при этом не имело места. По этим данным можно было вычислить толщину стенки и средний диаметр и определить три главных напряжения. Напряжения, вычисленные на основании истинных размеров цилиндров, являются истинными напряжениями. Следует указать, что отношение этих истинных напряжений не оставалось постоянным во время испытания, и относительное значение

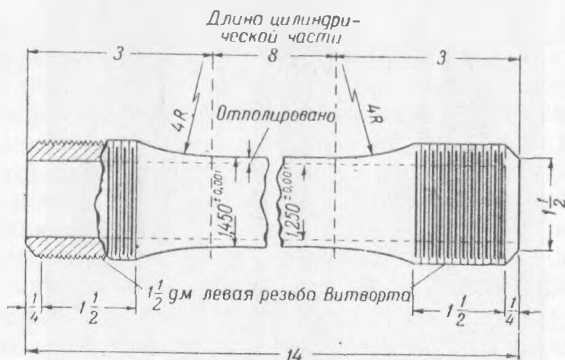


Рис. 8. Размеры полого образца для испытания на растяжение.

тангенциального напряжения увеличивалось в тех случаях, когда диаметр образца увеличивался, и слегка снижалось в тех случаях, когда имело место уменьшение диаметра. Этот эффект был наиболее явно выражен в опытах на чистое внутреннее давление и в опытах, в которых касательное напряжение было равно осевому напряжению в момент начала испытаний, так как в этих случаях рост диаметра и уменьшение толщины стенки приводят к увеличению тангенциальных компонентов напряжения. В других испытаниях это изменение отношения напряжений было величиной, которой можно было пренебречь, за исключением случаев крайне больших деформаций; и вследствие этого некоторые испытания не были доведены до разрушения образца.

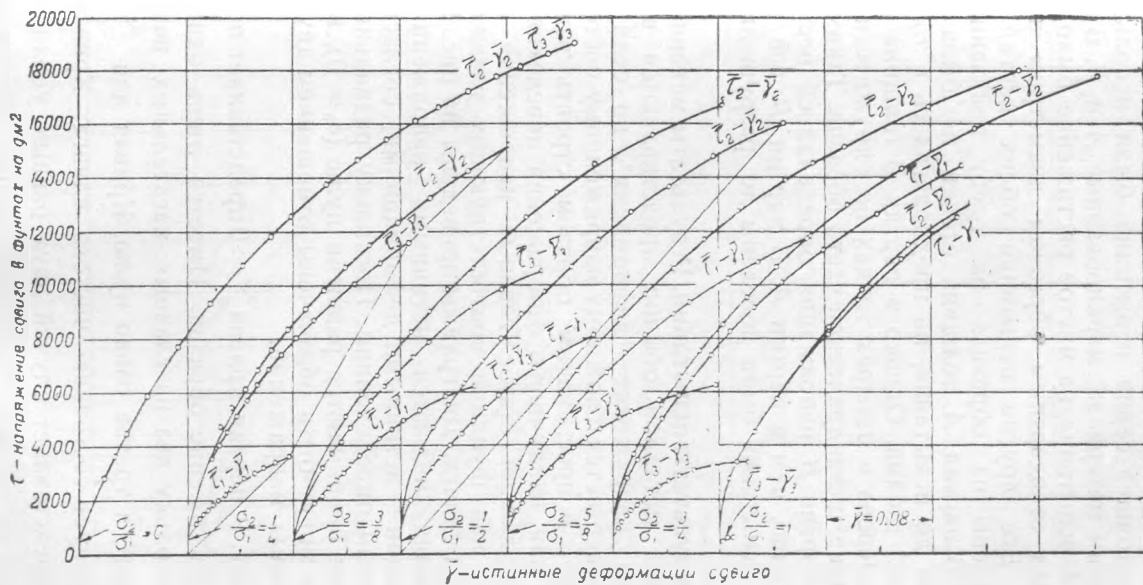


Рис. 9. Диаграмма „напряжение — деформация“ для различных условий нагрузки; партия А.

В настоящей серии испытаний были использованы две партии материала, маркированные *A* и *B*. В партии марки *A* испытание на чистое растяжение было проведено над стандартным образцом диаметром в 0,505 дюйма. Все другие испытания обеих партий были произведены на образцах из труб, показанных на рис. 8. В партии *A* толщина стенки не была точно замерена до испытания, но предполагалась в точности равной 0,1 дюйма. Однако в партии *B* толщина стенки была замерена в четырех точках по окружности и по всей длине цилиндрической части образца. Таким образом, в партии *B* напряжения определялись несколько более точно, чем в партии *A*. В партии *B* все проведенные испытания были доведены до разрушения.

V. Результаты испытаний. Результаты механических испытаний металлов обычно представляются в виде диаграмм „напряжение — деформация“, но если материал подвергается сложному напряженному состоянию, возникает вопрос, каким образом строить эти диаграммы для наилучшего отображения поведения материала. В данной статье главные напряжения сдвига нанесены как функции соответствующих главных деформаций сдвига. Диаграммы приведены на рис. 9 и 10. Напряжения являются истинными напряжениями и деформации — истинными деформациями, согласно ранее данным определениям. Поскольку радиальные напряжения принимаются равными нулю ($\sigma_3 = 0$), все испытания могут быть обозначены отношением двух других главных напряжений.

На рис. 9 первая кривая $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0$ представляет опыт на чистое растяжение образца. Имеется лишь одна кривая, поскольку два из главных касательных напряжений равны, а третье равно нулю. Кривая для $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1/2$ соответствует состоянию чистого сдвига. Кривая для $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$ представляет случай двух равных усилий, действующих во взаимно перпендикулярных направлениях.

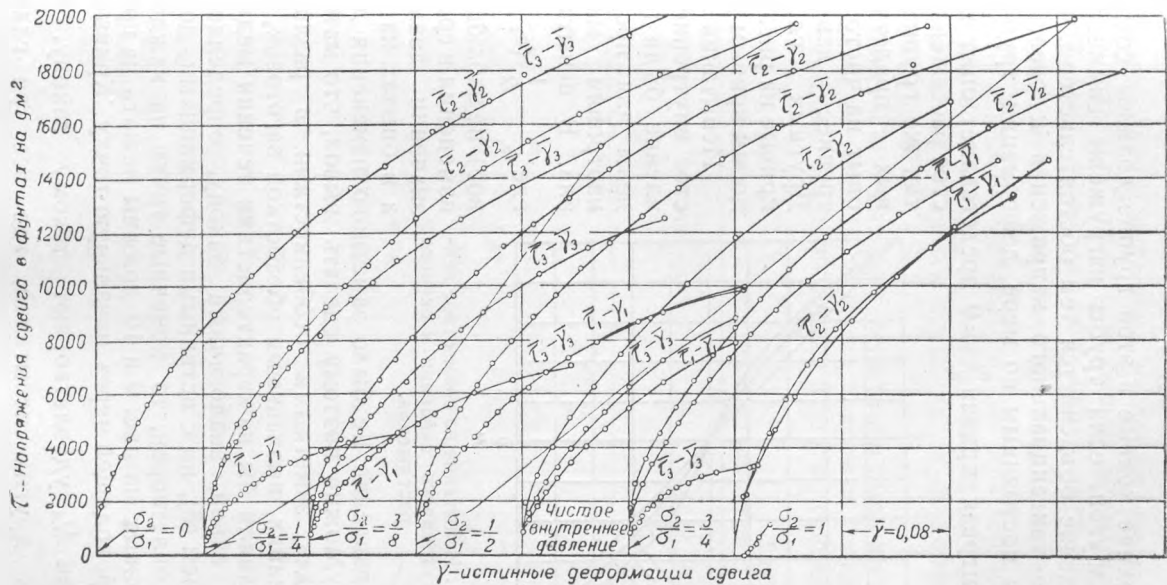


Рис. 10. Диаграммы „напряжение—деформация“ для различных условий нагрузки; партия В.

Две верхние кривые в этой группе должны совпадать одна с другой, если трубы нагружены симметрично. Расхождение объясняется тем обстоятельством, что отношение тангенциального напряжения к осевому не остается постоянным по мере деформации трубы. На рис. 10 первая кривая $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0$ представляет опыт на чистое растяжение, пятая же группа кривых представляет опыт на чистое внутреннее давление. Другими словами, кривые на рис. 10 подобны кривым рис. 9.

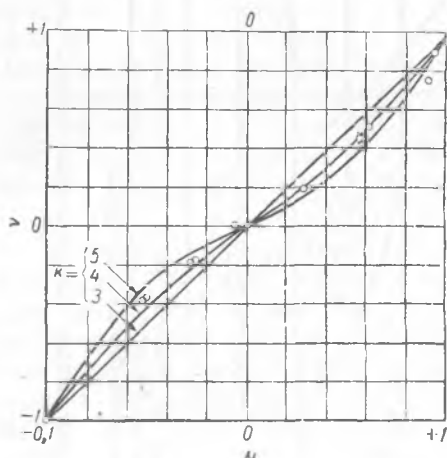


Рис. 11. Испытания на совместное действие внутреннего давления и осевого растяжения.

Испытания на чистое внутреннее давление были проведены для проверки изотропии материала. В испытаниях, где $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2}$ (σ_1 — осевое), не наблюдалось изменения в среднем значении диаметра, а в опытах на внутреннее давление не было заметного изменения длины образца.

Можно поэтому сделать вывод, что материал не обладал заметными особенностями в различных направлениях, вызванными обработкой заготовок, которые повлияли бы на характеристики течения меди.

Если закон, аналогичный закону, определяемому уравнением (8), но с истинными деформациями, должен быть удовлетворен, то конечные точки на каждой из серии кривых на рис. 9 и 10 должны лежать на прямой линии, проходящей через начальную точку. Кривые для $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0$ или $\frac{1}{2}$ удовлетворяют такому закону. Кривые для других испытаний, где все три главных

напряжения сдвига различны, не согласуются. В этом можно убедиться, если соединить прямыми линиями конечные точки любой серии, как это было сделано для случая, где $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1/4$. Необходимо лишь сравнить распределение деформаций для одной точки на кривых, поскольку отношение любых двух из главных деформаций остается практически постоянным во время испытания.

Значения $\bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ для этих испытаний были вычислены и нанесены на рис. 11, а равно и кривые, представляющие несколько значений показателя k в уравнении (21).

Таблица 1
ЗНАЧЕНИЯ $\bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ ДЛЯ ОТОЖЖЕННОЙ МЕДИ

Условное отношение $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	Истинное отношение $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	$\bar{\nu}$
0	0	Партия А — 1,00	1,00	— 1,00
1/4	0,24	— 0,52	0,29	— 1,38
3/8	0,37	— 0,26	0,11	— 0,16
1/2	0,50	0	0	0
5/8	0,64	0,28	— 0,12	0,19
3/4	0,78	0,56	— 0,26	0,45
1	0,96	0,92	— 0,48	0,95
		Партия В		
0	0	— 1,10	1,00	— 1,00
1/4	0,24	— 0,52	0,29	— 0,36
2/3	0,37	— 0,26	0,12	— 0,17
1/2	0,50	0	0	0
Чистое внутреннее давление	0,47*)	— 0,06	0	0
3/4	0,80	0,60	— 0,29	0,51
1	0,95*)	— 0,90	— 0,40	0,75

*) В этом случае σ_2 — осевое напряжение.

Точки лежат очень близко к кривой для $k=4$. Полученные значения и истинные отношения напряжений и деформаций приведены в табл. 1. В тех случаях, когда отношения истинных напряжений отличаются от условных отношений, взятые значения представляют среднее значение, соответствующее второй половине испытания. Чтобы показать, насколько эти отношения изменяются во время испытания, в табл. 2 приведены данные для $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 3/4$ партии В.

Таблица 2
РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ ПАРТИИ В; $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 3/4$

Нагрузка, фунт	Давление, фунт/кв. дюйм	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1}$	$\bar{\epsilon}_1$	$\frac{\bar{\epsilon}_2}{\bar{\epsilon}_1}$
2500	1085	9160	6930	0,76	0,0099	— 0,32
3500	1520	13050	9930	0,76	0,0211	— 0,30
4500	1955	17050	13120	0,77	0,0332	— 0,30
5500	2390	21340	16500	0,77	0,0513	— 0,29
6500	2825	26030	20450	0,79	0,0748	— 0,28
7500	3260	31680	25300	0,80	0,1114	— 0,29
8000	3480	35900	29250	0,81	0,1530	— 0,29
8250	3590	Разрушение

Верхние кривые в каждом из испытаний рис. 9 и 10 перечерчены в тех же осях координат на рис. 12. Результаты для различных условий нагрузки нанесены на графике „максимальное касательное напряжение — максимальная деформация сдвига“. Заметим, что точки могут быть очень хорошо представлены одной кривой $\bar{\tau}_2 = f(\bar{\tau}_1)$. Наибольшее отклонение дает опыт на чистое растяжение партии А. Это может быть объяснено тем обстоятельством, что испытание было проведено со сплошным бруском, а не с трубчатым образцом. Однако следует указать, что хотя форма образцов была различной, но все они были изготовлены из одной и той же

заготовки и были отожжены одновременно с образцами партии А.

В некоторых работах Надаи^[85] и автора для сравнения результатов опытов на растяжение и кручение

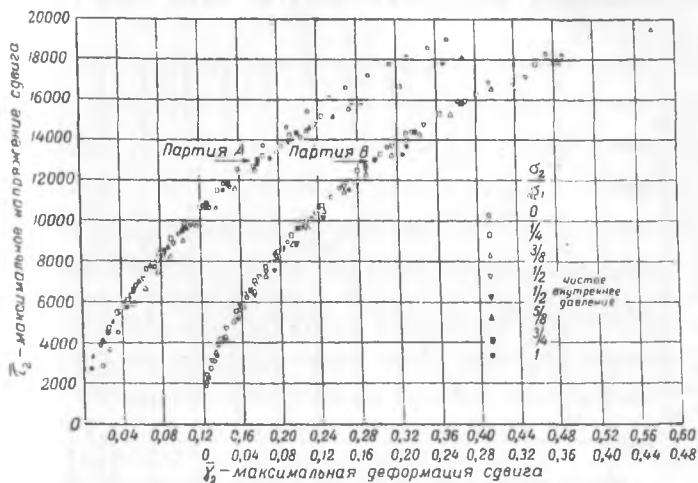


Рис. 12. Результаты опытов на сложное напряженное состояние меди.

были применены октаэдральное напряжение сдвига $\bar{\tau}_n$ и октаэдральная деформация сдвига $\bar{\gamma}_n$. Эти величины определяются следующими уравнениями:

$$\bar{\tau}_n = \frac{2}{3} [\bar{\tau}_1^2 + \bar{\tau}_2^2 + \bar{\tau}_3^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

$$\bar{\gamma}_n = \frac{2}{3} [\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2 + \bar{\gamma}_3^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

На рис. 13 приведены результаты испытаний, нанесенные в виде функций этих двух переменных. Здесь снова результаты могут быть представлены в виде одной кривой $\bar{\gamma}_n = f(\bar{\tau}_n)$, но совпадение не столь хорошо, как показано на рис. 12. Таким образом в этом случае наибольшее отклонение от хорошо выраженного пове-

дения других кривых дают опыты на чистое растяжение.

Согласно уравнению (20) и данным, приведенным на рис. 12, теперь может быть получен закон, очень точно описывающий поведение мягкой меди при сложном

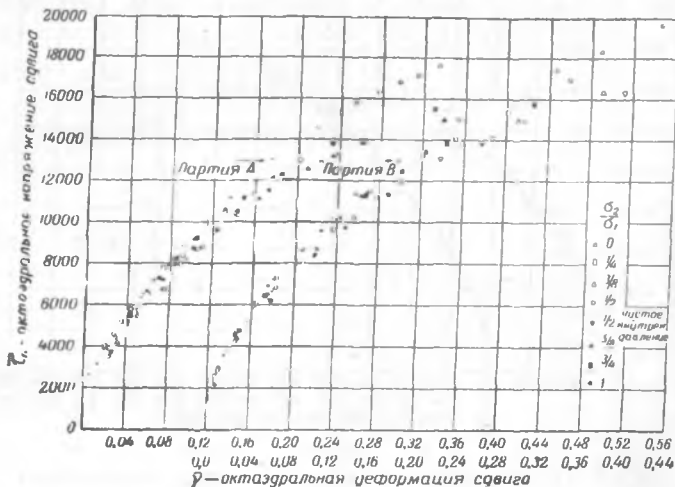


Рис. 13. Результаты опытов на сложное напряженное состояние меди.

напряженном состоянии. Эти данные могут быть представлены в виде

$$\bar{\gamma}_2 = f(\bar{\tau}_2), \quad (24)$$

где $\bar{\tau}_2$ — максимальное напряжение сдвига и $\bar{\gamma}_2$ — соответствующая деформация сдвига. Если это сделано, тогда находится значение Φ в виде

$$\Phi = \frac{f(\bar{\tau}_2)}{2\bar{\tau}_2^k - \bar{\tau}_1^k - \bar{\tau}_3^k}, \quad (25)$$

и выражения для трех главных деформаций принимают вид:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_1 &= \frac{\bar{\tau}_2^k - \bar{\tau}_3^k}{\bar{\tau}_1^k - 2\bar{\tau}_2^k + \bar{\tau}_3^k} f(\bar{\tau}_2); \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \frac{\bar{\tau}_3^k - \bar{\tau}_1^k}{\bar{\tau}_1^k - 2\bar{\tau}_2^k + \bar{\tau}_3^k} f(\bar{\tau}_2); \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \frac{\bar{\tau}_1^k - \bar{\tau}_2^k}{\bar{\tau}_1^k - 2\bar{\tau}_2^k + \bar{\tau}_3^k} f(\bar{\tau}_2),\end{aligned}\quad (26)$$

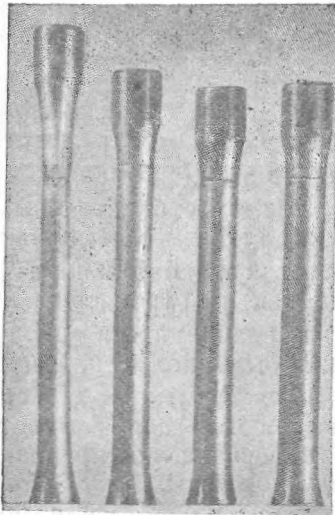
где $k=4$ приближенно и значения $f(\bar{\tau}_2)$ могут быть взяты из рис. 12. Алгебраический знак $f(\bar{\tau}_2)$ является отрицательным, поскольку как $\bar{\tau}_2$, так и $\bar{\gamma}_2$ отрицательны. Таким образом определяются знаки для главных деформаций: $\bar{\varepsilon}_1$ всегда положительно, $\bar{\varepsilon}_3$ всегда отрицательно, а $\bar{\varepsilon}_2$ может быть как положительно, так и отрицательно, в зависимости от относительных значений $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_3$.

Аналогичный результат может быть получен, если использовать $\bar{\gamma}_n = f(\bar{\tau}_n)$ из рис. 13, а не $\bar{\gamma}_2 = f(\bar{\tau}_2)$, как только что было сделано, но выражение для f будет более сложным и, для этого материала по крайней мере, совпадение будет не столь хорошим.

Уравнения (26) отличаются от уравнений Бейли, но автор полагает, что они представляют теорию Бейли в том виде, в каком она может быть приложена к задаче распределения пластических деформаций в вязком материале при сложном напряженном состоянии.

Задача разрушения в настоящем исследовании была рассмотрена лишь в ограниченном объеме. Изменение относительных значений главных напряжений, когда деформации становятся большими и неравномерными, затрудняет рассмотрение условий разрушения в материале столь вязком, как отожженная медь. Конечные точки на кривых рис. 9 и 10 не дают представления о материале при его разрушении, однако можно отметить определенное стремление к снижению значения максимальной главной деформации сдвига $\bar{\gamma}_2$ при раз-

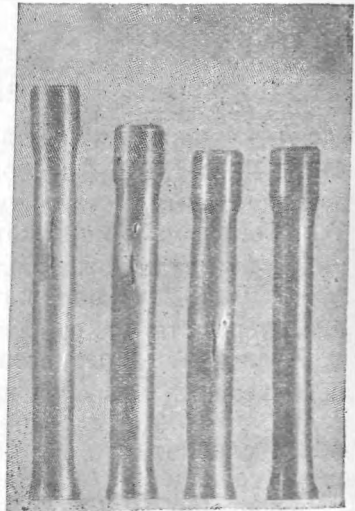
рушении, по мере увеличения отношения $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ от нуля до единицы. Таким образом, в случае чистого растяжения разрушение представляется точкой на кривой $\bar{\gamma}_2 = f(\bar{\tau}_2)$, лежащей значительно дальше, чем соответствующая точка, представляющая разрушение для случая равных двухосных усилий.



$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0 \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{4} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{3}{8} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2}$$

Чистое растяжение

Рис. 14. Разрушенные образцы партии В (чистое растяжение).



$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{3}{4} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \quad \text{Образец до испытания}$$

Чистое внутреннее давление

Рис. 15. Разрушенные образцы партии В (чистое внутреннее давление).

Разрушенные образцы партии В представлены на рис. 14 и 15, а данные, относящиеся к разрушению с максимальной точностью, которая могла быть достигнута, приведены в табл. 3. Размеры, указанные в табл. 3, получены путем возможно более тщательных замеров шаровым микрометром области шейки по сечениям. Первые четыре опыта, приведенные в табл. 3,

Таблица 3

ДАННЫЕ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К РАЗРУШЕНИЮ ОБРАЗЦОВ ПАРТИИ В

σ_1	Разрушающая нагрузка, фунт	Разрушающее давление, фунт/кв. дюйм	Наружный диаметр, дюйм	Толщина стенок, дюйм	Осевое напряжение, фунт/кв. дюйм	Тангенциальное напряжение, фунт/кв. дюйм
	12610	0	1,030	0,060	68900	0
1/4	11600	1235	1,321	0,048	68000	15800
3/8	10900	1860	1,375	0,047	67800	25400
1/2	10200	2500	1,418	0,050	63600	33000
3/4	8250	3590	1,585	0,068	43700	38200
1	5200	3660	1,680	0,067	33500	42200
1/2*)	0	3750	1,720	0,075	18700	39200

*) Опыты на чистое внутреннее давление.

дали разрушение по окружности, последние же три дали продольные трещины. Испытание при $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{3}{4}$ дало разрушение, вызванное касательным напряжением, хотя осевое напряжение было выше. Данные табл. 3 показывают, что для четырех образцов, которые дали разрушение по окружности, разрушающее напряжение в осевом направлении было равно примерно 68 тыс. фунтов на кв. дюйм, в то же время для трех образцов, разрушившихся при продольных трещинах, тангенциальное напряжение в момент разрушения достигло значения около 40 тыс. фунтов на кв. дюйм. Таким образом, оказывается, что, рассматривая явления разрушения, мы сталкиваемся с явлением анизотропии материала. Это может быть также продемонстрировано сравнением максимального главного напряжения при разрушении в двух испытаниях, где $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2}$. В случае испытания на чистое внутреннее давление удлинение при разрушении по окружности было равным $\epsilon_1 = 0,27$. В случае испытания при $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2}$ (σ_1 — осевое) удлинение

при разрыве было $\bar{\epsilon}_1 = 0,68$. При вычислении этих деформаций уменьшение площади сечения при разрушении определялось по формуле:

$$\bar{\epsilon} = \ln \frac{A_0}{A}. \quad (27)$$

Таким образом, материал оказывается более вязким по оси, чем по окружности. Эти результаты согласуются с результатами Зибеля и Майера^[103], проводившими

испытания труб в аналогичных условиях.

На рис. 16 даны в увеличенном виде образцы при продольном их разрушении. Эти образцы дали внезапное разрушение без заметного снижения нагрузки до момента разрыва. Шейка, если таковая имела место, была весьма мала, что является характерным при опытах на неосевое растяжение.

В образцах, разрушившихся по окружности, в стенке по ее толщине начиналось образование шейки, но наблюдалось очень не-

Рис. 16. Увеличенное изображение продольных трещин.

значительное отклонение от среднего значения диаметра, за исключением опыта на чистое растяжение, но и в этом случае уменьшение диаметра было меньше, чем следовало бы ожидать для сплошного бруса.

VI. Заключение. В настоящей статье сравниваются две теории пластических деформаций. Более ранняя, представляемая уравнением (8), значительно проще теории, недавно изложенной Бейли, и вследствие своей

простоты она, видимо, должна быть использована в тех случаях, когда встречается необходимость вычислять напряжения. В особенности эта теория удобна для случаев, когда распределение напряжений изменяется по мере деформации материала. Другая теория, представленная уравнением (20), лучше согласуется с опытными данными, но вследствие характера входящих в нее математических выражений применение ее будет, очевидно, ограничено случаями, когда распределение напряжений известно и остается постоянным во время деформации.

Зависимость между главной максимальной деформацией сдвига и максимальным касательным напряжением дается обычно кривой $\bar{\gamma}_2 = f(\bar{\tau}_2)$, независимо от значения промежуточных главных напряжений. Эта кривая, однако, не может быть использована в настоящее время для предсказания момента разрушения, но можно утверждать, что более высокие значения промежуточного напряжения σ_2 вызовут снижение значений максимального напряжения сдвига, при которых имеет место разрушение.

На основе небольшого количества имеющихся данных можно заключить, что разрушение происходит тогда, когда истинные главные нормальные напряжения достигают определенного предельного значения. В трубах, использованных в наших испытаниях, это предельное значение было приближенно равным 68 тыс. фунтов на кв. дюйм в осевом направлении или 40 тыс. фунтов на кв. дюйм в тангенциальном направлении.

Е. ДЭВИС

ТЕКУЧЕСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ СТАЛИ СО СРЕДНИМ
СОДЕРЖАНИЕМ УГЛЕРОДА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ
СОСТОЯНИИ *)

Краткое содержание. Приводятся результаты опытов над сталью со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии. Особое внимание уделялось установлению величины напряжений и деформаций и их распределения в момент, предшествующий появлению трещин. Исследовалось также влияние формы образца и изотропии материала на прочность. Опыты проводились в исследовательских лабораториях Вестингауза.

I. Введение. Сложное напряженное состояние осуществлялось путем одновременного приложения осевого растяжения и внутреннего давления к трубчатому образцу. Опыты аналогичны более ранним опытам автора над медными трубами, опубликованным раньше (этот сборник, стр. 336).

II. Опытные образцы. Из стального прутка диаметром в $2\frac{1}{8}$ дюйма и длиной примерно в 18 футов было вырезано 12 брусков длиной в 14 дюймов, которые подвергались нормализации. Из этих 12 брусков было сделано 11 трубчатых образцов и 5 сплошных образцов меньшего размера. Цилиндрические части труб были длиной в 8 дюймов, но только средние 4 дюйма использовались в качестве измерительных участков. Наружный диаметр составлял 1,450 дюйма, а толщина стенок была 0,100 дюйма. Отклонение в толщине стенок было меньше, чем 0,001 дюйма, т. е. 1⁰/₀.

*) Journ. of Appl. Mech., v. 12, A 13 — A 24 (1945).

Статья сокращена, опущен последний раздел, в котором рассматриваются условия разрушения.

Для получения некоторой оценки изотропии материала из бруска диаметром в $2\frac{1}{8}$ дюйма вырезались два небольших трубчатых образца, первоначально перпендикулярных друг другу. В одном образце ось трубы совпадала с осью бруска, в другом образце ось трубы была перпендикулярна оси бруска. Эти образцы имели полную длину в 2 дюйма, внутренний диаметр в $\frac{1}{2}$ дюйма и толщину стенок в $\frac{1}{20}$ дюйма.

III. Обозначения.

- σ_x — главное нормальное напряжение в осевом направлении,
- σ_θ — главное нормальное напряжение в тангенциальном направлении,
- σ_r — главное нормальное напряжение в радиальном направлении,
- τ — касательное напряжение,
- τ_n — октаэдральное касательное напряжение,
- γ — относительная деформация сдвига,
- γ_n — октаэдральная деформация сдвига.

Черта (—) над буквой, изображающей напряжение, обозначает истинное напряжение, которое определяется по действительным размерам образца в момент возникновения напряжения. Такая же черта (—) над буквой, изображающей деформацию, обозначает истинную деформацию, которая будет определена ниже.

Три главных касательных напряжения определяются так:

$$\tau_{x\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_\theta}{2}, \quad \tau_{\theta r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2}, \quad \tau_{rx} = \frac{\sigma_r - \sigma_x}{2}. \quad (1)$$

Аналогично, три главные деформации сдвига выразятся следующим образом:

$$\gamma_{x\theta} = \varepsilon_x - \varepsilon_\theta, \quad \gamma_{\theta r} = \varepsilon_\theta - \varepsilon_r, \quad \gamma_{rx} = \varepsilon_r - \varepsilon_x. \quad (2)$$

При больших деформациях истинное нормальное напряжение σ обычно может быть выражено через условное напряжение σ и относительную деформацию ε . В любом случае истинные напряжения всегда могут быть вычислены по данным, полученным во время испытания,

так как объем материала при пластической деформации не меняется. При постоянстве объема материала в случае малых пластических деформаций сумма трех нормальных деформаций равна нулю:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 0, \quad (3)$$

поэтому требуется измерять только две деформации. При больших деформациях, однако, уравнение (3) теряет силу и, если желательно иметь некоторую, подобную этой, зависимость, нужно ввести новые переменные.

Для этого вводят понятие истинной деформации $\bar{\varepsilon}$ следующим образом:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(1 + \varepsilon). \quad (4)$$

Сумма истинных деформаций для трех взаимно перпендикулярных направлений равна нулю и при больших деформациях:

$$\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\varepsilon}_r = 0. \quad (5)$$

Три главные истинные деформации сдвига суть:

$$\bar{\gamma}_{x\theta} = \bar{\varepsilon}_x - \bar{\varepsilon}_\theta, \quad \bar{\gamma}_{\theta r} = \bar{\varepsilon}_\theta - \bar{\varepsilon}_r, \quad \bar{\gamma}_{rx} = \bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}_x. \quad (6)$$

Октаэдральное касательное напряжение равно:

$$\tau_n = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{x\theta}^2 + \tau_{\theta r}^2 + \tau_{rx}^2}, \quad (7)$$

и октаэдральная деформация сдвига равна:

$$\gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_{x\theta}^2 + \gamma_{\theta r}^2 + \gamma_{rx}^2}. \quad (8)$$

В настоящей статье индексы (x), (θ) и (r) указывают на направления напряжений, независимо от относительной их величины. Отношение $n = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_x}$ меняется от нуля при чистом осевом растяжении до бесконечности при окружном растяжении.

IV. Процесс испытания. В испытаниях при сложном напряженном состоянии внутреннее давление осуществлялось при помощи гидравлического пресса Амслера с маятниковым манометром для измерения давления. Внешняя осевая нагрузка осуществлялась на 30-тонной испытательной машине Амслера. Осевая нагрузка и осевое давление прилагались к образцу одновременно.

Отношение осевой нагрузки к внутреннему давлению поддерживалось постоянным во все время испытания.

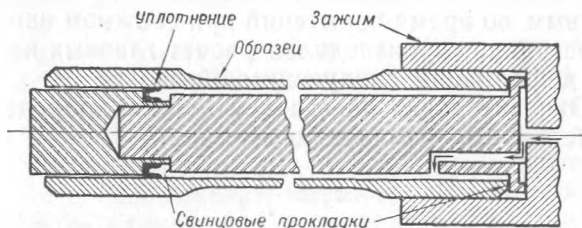


Рис. 1. Установка для проведения испытания на чистое окружное растяжение.

Это достигалось подбором длины маятника таким образом, что желаемое отношение нагрузок получалось тогда, когда указатели на обеих машинах отклонялись на один и тот же угол. Таким образом, для поддержания желаемого отношения осевой нагрузки к внутреннему давлению необходимо, чтобы оба указателя отклонялись все время на одинаковую величину. Две отметки на расстоянии 4 дюймов друг от друга были нанесены на цилиндрической части труб, и осевые удлинения измерялись при помощи циркуля и стальной масштабной линейки. Наружный диаметр измерялся в шести местах измерительного участка. Средняя величина из шести диаметров бралась для подсчета тангенциальных деформаций. Осевая нагрузка и внутреннее давление при снятии измерений удалялись.

После того как трубчатые пробные образцы подвергались разрушению, они разрезались и в области излома

измерялись толщина стенок и наружный диаметр для определения величин напряжений при изломе.

При испытании трубчатых образцов чистым окружным растяжением осевая нагрузка воспринималась стержнем, помещенным внутри образца (рис. 1). Труба могла свободно сокращаться в осевом направлении.

Два малых трубчатых образца подвергались испытанию на чистое внутреннее давление.

V. Расчет по данным испытаний. По измерениям, сделанным во время испытаний при сложном напряженном состоянии, производился расчет главных напряжений и деформаций следующим образом:

1. Относительная осевая деформация определялась по измеренному изменению в длине:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (9)$$

а истинная осевая деформация была получена из выражения

$$\bar{\epsilon}_x = \ln(1 + \epsilon_x). \quad (10)$$

2. Средняя величина диаметра была вычислена по измерениям длины и наружного диаметра в предположении, что объем материала не изменяется. Средние тангенциальные деформации сдвига определялись по изменению средней величины диаметра:

$$\epsilon_\theta = \frac{\Delta d_m}{d_{m_0}} \quad (11)$$

$$\bar{\epsilon}_\theta = \ln(1 + \epsilon_\theta). \quad (12)$$

Средняя радиальная деформация $\bar{\epsilon}_r$ получалась из соотношения

$$\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_\theta + \bar{\epsilon}_r = 0. \quad (13)$$

3. Истинные главные напряжения могут быть вычислены, если известны действительные диаметры и толщины стенок.

Осевое напряжение равно

$$\bar{\sigma}_x = \frac{P}{F} + \frac{p\pi d_i^2}{4F}; \quad (14)$$

поперечное напряжение:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{pd_i}{2h}; \quad (15)$$

и радиальное напряжение:

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{p}{2}. \quad (16)$$

Приведенные выше значения для главных напряжений и деформаций являются средними значениями. Все они меняются в зависимости от радиуса, за исключением осевой деформации ϵ_x , которая не зависит от радиуса до тех пор, пока образец сохраняет цилиндрическую форму. По достижении временного сопротивления, когда трубы начинают деформироваться неравномерно, деформации нельзя измерять описанным способом. После излома измерялись толщина стенок и диаметры в сечении излома и определялись местные главные деформации. В этом случае радиальная деформация определялась из соотношения:

$$\epsilon_r = \frac{\Delta h}{h_0} \quad (17)$$

и

$$\bar{\epsilon}_r = \ln(1 + \epsilon_r). \quad (18)$$

Тангенциальная деформация вычислялась при помощи уравнений (11) и (12), а осевая деформация получалась из уравнения (13).

VI. Данные испытаний. Испытание при сложном напряженном состоянии. Над трубчатыми образцами было проведено два ряда испытаний, по пять испытаний в каждом.

Первый ряд испытаний охватывал напряженные состояния от чистого осевого растяжения до чистого

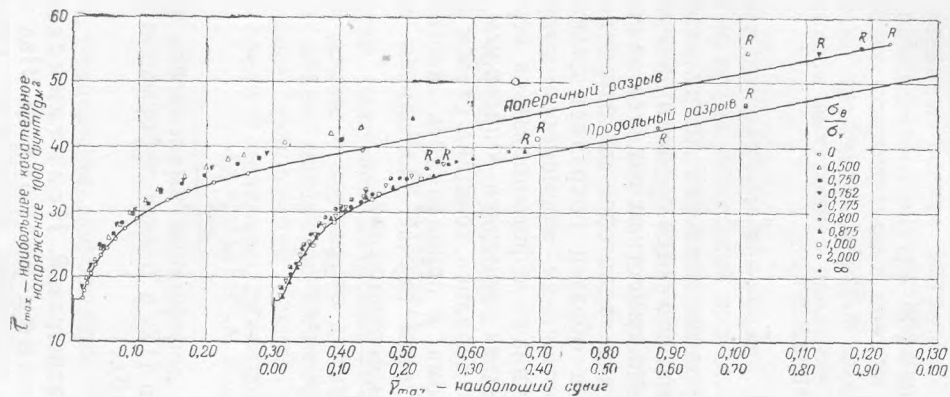


Рис. 2. Максимальное касательное напряжение, нанесенное относительно максимальной деформации сдвига, при различных видах напряжения.

окружного растяжения. Отношения $\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_x}$ равнялись 0; 0,50; 1,00; 2,00 и ∞ .

Второй ряд испытаний проводился в области тех напряженных состояний, при которых происходило изменение характера разрыва (от круговой трещины до продольной). Отношения напряжений $\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_x}$ составляли 0,750; 0,762; 0,775; 0,800 и 0,875.

Все напряжения и деформации отложены так, как если бы они были положительными, для экономии места. Радиальные напряжения и деформации во всех случаях будут отрицательны, при чистом осевом растяжении $\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_x} = 0$ тангенциальная деформация будет отрицательна, а при окружном растяжении $\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_x} = \infty$ осевая деформация будет отрицательна.

Для сравнения поведения материала при различных напряженных состояниях построены кривые на рис. 2 и 3. На рис. 2 максимальные главные касательные напряжения τ_{\max} отложены в функции соответствующих истинных деформаций сдвига $\bar{\gamma}_{\max}$. Точки, относящиеся к тем образцам, которые подвергались излому с круговой трещиной, отложены в группе, лежащей слева. Кривая проведена через точки, соответствующие испытанию на чистое растяжение. Эта же кривая перенесена вправо на 3 деления по оси абсцисс; там нанесены точки, соответствующие другим испытаниям. Большинство точек ложится близко к кривой, соответствующей чистому растяжению, но несколько выше ее.

На рис. 3 октаэдральное касательное напряжение τ_n нанесено в зависимости от октаэдральной истинной деформации сдвига $\bar{\gamma}_n$. Данные опытов группируются так же, как на рис. 2. Здесь большинство точек ложится ниже кривой, соответствующей чистому растяжению.

Как видно из диаграммы рис. 3, полученные на опыте величины τ_n и $\bar{\gamma}_n$ лучше ложатся на кривую

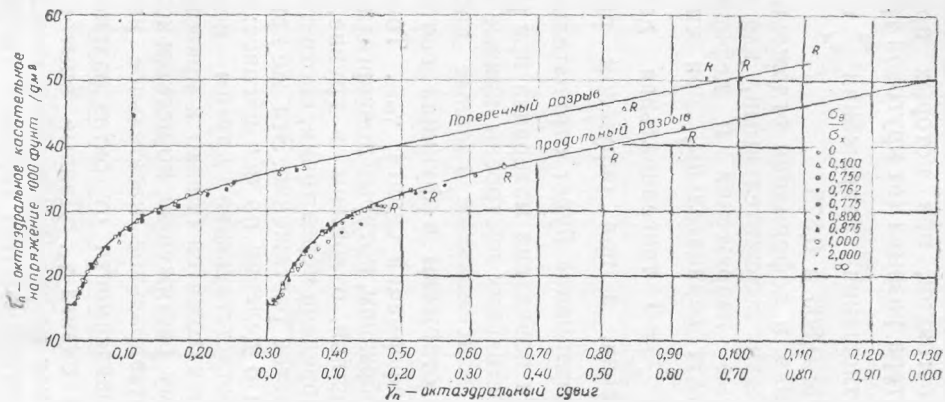


Рис. 3. Октаэдральное касательное напряжение, нанесенное относительно октаэдральной деформации сдвига, при различных видах напряжения.

чистого растяжения, чем величины $\bar{\tau}_{\max}$ и $\bar{\gamma}_{\max}$ на рис. 2. Этот результат прямо противоположен упомянутым выше данным испытаний над отожженной медью. Раньше нами не учитывалось радиальное напряжение, ввиду его малости, но в данной работе учтено его среднее значение $\bar{\sigma}_r = -\frac{P}{2}$. Кривая, нанесенная на рис. 3, построена с учетом влияния третьего главного напряжения, но одного этого недостаточно для объяснения разницы, получившейся в результате испытаний стали и меди. Учет при подсчете радиального напряжения σ_r уменьшает значение октаэдрального касательного напряжения $\bar{\tau}_n$ для любой деформации. Это уменьшает ординаты точек, соответствующих данным всех испытаний, кроме испытания на чистое осевое растяжение, и вызывает, таким образом, больший разброс точек на рис. 3.

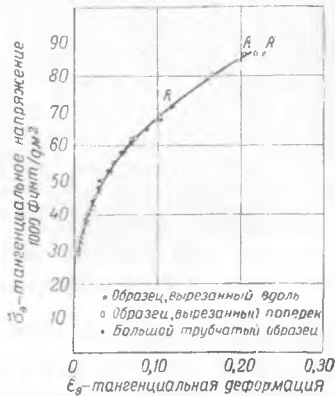


Рис. 4. Испытания на чистое внутреннее давление.

Испытания на внутреннее давление для проверки изотропии материала. Эти данные вместе с данными испытания на чистое внутреннее давление над большим по размеру образцом, приведены на рис. 4. Получается очень небольшая разница в величинах напряжения и деформации при разрушении малых труб. Действительно, все три кривые ложатся очень близко одна к другой.

Эти опыты показывают, что практически можно считать, что анизотропии материала не обнаруживается.

VII. Выводы. 1. Используемый при данных испытаниях материал совершенно пластичный, но величина удлинений при разрушении зависела от того способа, каким материал подвергался напряженному состоянию,

При испытании на чистое осевое растяжение осевая деформация вблизи места разрушения составляла 0,780. При испытании же на окружное растяжение соответствующая деформация составила 0,164.

2. Кривые максимального касательного напряжения относительно максимальной истинной деформации сдвига или октаэдрального касательного напряжения относительно октаэдральной деформации сдвига очень хорошо совпадают друг с другом, независимо от вида сложного напряженного состояния. В настоящее время это можно считать установленным для тех случаев, когда не происходит поворота осей главных напряжений относительно материала.

3. До достижения временного сопротивления материал вел себя так, как будто он совершенно изотропен. В сплошных образцах с прямоугольным поперечным сечением деформация в направлении ширины получалась та же, что и деформация в направлении толщины.

В трубчатом образце при отношении $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,5$ средний диаметр не увеличивался и не уменьшался. Длина трубчатого образца, подвергаемого чистому внутреннему давлению, не изменялась.

4. После достижения временного сопротивления материал не вел себя больше как изотропное тело.

5. Разрушение появлялось при достижении касательным напряжением некоторой критической величины. Эта величина не была одинаковой для всех направлений.

П. БИЙЛАРД

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ
К ГЕОФИЗИКЕ *)

Как было достаточно подтверждено экспериментальными и теоретическими исследованиями, в кристаллических материалах, которые становятся пластическими при достаточно высоком напряжении, текучесть наступает при достижении определенного значения удельной энергии сдвига. Это условие пластичности, данное Губером, Мизесом и Генки, для плоского напряженного состояния при главных напряжениях σ_1 и σ_2 , когда $\sigma_3 = 0$, выражается уравнением

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2. \quad (1)$$

Здесь σ_s — предел текучести для чистого растяжения или сжатия.

Пластические деформации, как говорят, квази-изотропны, т. е. зависимость напряжение — деформация для изотропного упругого материала сохраняется, но обычный модуль упругости E следует заменить переменным модулем деформации E_p , который, вообще говоря, также зависит от времени; при этом коэффициент поперечного сжатия m становится равным двум, поскольку пластические деформации не вызывают изменения объема [61, 65].

Кроме того, предполагается, что пластическая деформация в любой момент определяется только напряженным состоянием в этот момент; это допущение приблизительно верно для мягкой стали (Хоэнмезер и Прагер, этот сборник, стр. 257).

Если для всех напряженных состояний ($\sigma_1, \sigma_2, 0$), удовлетворяющих уравнению (1), мы построим круги

*) Proc. Kon. Ned. Akad. d. Wet., v. 41, № 5, p. 467 (1938), Amsterdam.

Мора, определяемые величинами σ_1 и σ_2 , то найдем, что они касаются огибающего их эллипса, уравнение которого:

$$3\sigma^2 + 12\tau^2 - 4\sigma_s^2 = 0. \quad (2)$$

Если это условие пластичности и законы деформации приложимы, то можно доказать, что в пластинках при плоском напряженном состоянии $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$ местные пластические деформации, как, например, линии текучести, образование шейки, произойдут, если напряжение $S = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ на плоскости, проходящей через эти линии текучести, достигнет огибающей (2).

Это приводит к заключению, что в пластинке, подвергаемой плоскому напряженному состоянию, нормаль к линии скольжения образует угол α с направлением σ_1 , причем ^[62]

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{(\sigma_1 - 2\sigma_2)/(2\sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (3)$$

Если $\sigma_1 > \sigma_2$, уравнение (3) даст мнимые значения $\operatorname{tg} \alpha$ при $\sigma_2 > \frac{1}{2}\sigma_1$. В этом особом случае для создания пластических деформаций σ_1 должно достичь величины:

$$\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} = 1,154 \sigma_s, \quad (3a)$$

причем

$$\alpha = 0.$$

Эти законы приложимы к касательным напряжениям, налагаемым на гидростатическое давление в коре земли. При большом гидростатическом давлении сопротивление кристаллитов сдвигу может быть превышено, прежде чем растягивающие напряжения достигнут величины сопротивления отрыву, и при достаточном плоском напряженном состоянии, наложенном на состояние всестороннего сжатия, кора может пластически деформироваться. Так как деформация медленна и происходит при высокой температуре, то упрочнения не будет. Таким образом, при чи-

стом сжатии диаграмма напряжение — деформация имеет вид, приведенный на рис. 1¹⁾. Местные пластические деформации в коре земли, вызывающие слои отрицательных гравитационных аномалий, цепи островов и цепи гор, следовательно, также образуются в плоскости, определяемой уравнением (3) или (3а). Это, наряду с другими соображениями, приводит нас к заключению, что цепи островов и отрицательных аномалий в западной части Тихого океана были созданы сжимающими силами, действующими со стороны Азиатского континента, а также дает объяснение происхождению котловин, горных цепей и вулканов [92, 94].

Хотя эти факты в достаточной мере соответствуют имеющимся данным геологии, однако необходимо выяснить еще, не может ли земная кора потерять устойчивость, прежде чем появятся местные пла-

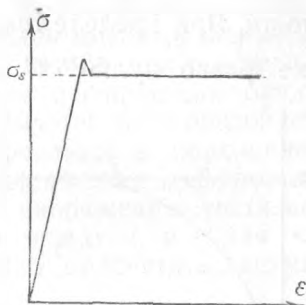


Рис. 1.

стические деформации. В упругой области наибольшее главное напряжение σ_1 , необходимое для потери устойчивости, равно $2\sqrt{\frac{Nc}{h}}$, где $N = \frac{m^2 EI}{(m^2 - 1)}$ и $I = \frac{1}{12} h^3$ [78, 93].

Модуль упругости (E) для земной коры может быть взят равным $840\,000 \text{ кг/см}^2$, m равным 5, и толщину h коры можно считать $3 \cdot 10^6 \text{ см}$. Если кора лежит под поверхностью воды, тогда противодействие внутренних слоев достигает $0,0023 \text{ кг/см}^2$. Отсюда следует, что $\sigma_1 = 45\,000 \text{ кг/см}^2$. Однако эксперименты Роша, Адамса, Бейли и других авторов с кристаллическими материалами, проведенные при высоких температурах и высоких давлениях, видимо, показывают, что материал земной коры начинает течь уже при сжимающих напряжениях порядка $3\,000 \text{ кг/см}^2$. Отсюда следует,

¹⁾ В дальнейшем сжимающие напряжения и укорочения предполагаются положительными.

что потеря устойчивости возможна лишь в пластической области.

Согласно ныне существующей теории пластического изгиба пластинок вместо обычного модуля упругости E должен быть введен так называемый сниженный модуль упругости T , значение которого находится между значением E и значением модуля полной деформации $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ при напряжении потери устойчивости. При пределе текучести, когда $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$, T также равно нулю^[78, 95]. Для диаграммы σ — ε , приведенной на рис. 1, потеря устойчивости ниже предела текучести невозможна, но для диаграммы, изображенной на рис. 2, такая возможность существует, хотя и представляется маловероятной. На последней диаграмме в точке A , например, E_t может сделаться настолько малым, что снизит T до величины, меньшей $(3000/45\,000)^2 E = E/225$, и напряжение потери устойчивости может оказаться меньше 3000 кг/см^2 . Тогда между точками A и S может произойти потеря устойчивости, прежде чем образуются области местной пластической деформации, соответствующие точке текучести S . Однако расстояние AS сравнительно мало и поэтому будет быстро пройдено; вследствие высокой вязкости подпочвенного слоя, вероятно, точка S будет достигнута, прежде чем возникнут значительные деформации изгиба.

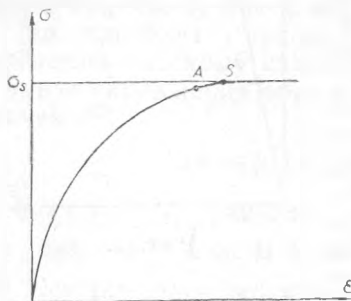


Рис. 2.

Как будет ниже объяснено, пластическая устойчивость пластинки значительно выше, чем это предполагалось до сих пор, и если в точке текучести сопротивление пластинки дальнейшему сжатию действительно равно нулю, то это неверно для изгиба. Я упоминал однажды, что здесь положение значительно

сложнее, чем при центральном сжатии, так как при потере устойчивости на начальное напряженное состояние накладывается другое напряженное состояние^[96]. Этот факт вызывает, очевидно, повышение предела текучести, если деформация изгиба конечна, и рост сопротивления, если эта деформация бесконечно мала.

Если на пластинку на упругом основании, как, например, земная кора, действует сжимающее напряжение $\sigma_1 = \sigma_s$ в направлении x , то эта пластинка может изогнуться волнами, перпендикулярными направлению σ_1 . Элемент $dx dy dz$ на вогнутой стороне волны, вследствие изгиба, получит укорочение в направлении оси x , но в направлении оси y деформации не произойдет. А при невозможности деформироваться в поперечном направлении значительные пластические деформации возникнут лишь тогда, когда напряжение достигнет величины $1,154 \sigma_s$. Зависимость между σ_x и ϵ_x для вогнутой стороны пластинок можно подсчитать следующим образом.

Для пластических деформаций имеем:

$$\epsilon_{x,p} = \frac{\sigma_x}{E_p} - \frac{\sigma_y}{2E_p} \quad (4a) \quad \text{и} \quad \epsilon_{y,p} = \frac{\sigma_y}{E_p} - \frac{\sigma_x}{2E_p} = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sigma_x - \sigma_y} \epsilon_{x,p}. \quad (4b)$$

Общая деформация в направлении y , включающая упругую деформацию, равна:

$$\epsilon_y = \epsilon_{ye} + \epsilon_{y,p} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} + \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sigma_x - \sigma_y} \epsilon_{x,p}, \quad (5)$$

также общая деформация в направлении x равна:

$$\epsilon_x = \epsilon_{xe} + \epsilon_{x,p} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE} + \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma_y - \sigma_x} \left(\epsilon_y + \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{E} \right). \quad (6)$$

Так как σ_x и σ_y должны удовлетворять уравнению (1), то имеем ($\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$):

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \sqrt{\sigma_s^2 - \frac{3}{4} \sigma_x^2}. \quad (7)$$

Начальному напряженному состоянию соответствует

знак минус в уравнении (7), поэтому в дальнейшем он сохраняется. Из уравнений (6), (7) следует, что

$$\epsilon_x = \frac{(m-2)(3\tau_x^2 - 2\sigma_s^2 + \sigma_x \sqrt{4\sigma_s^2 - 3\tau_x^2}) - (3\sigma_x + \sqrt{4\tau_x^2 - 3\sigma_s^2}) E \epsilon_y m}{2mE \sqrt{4\tau_x^2 - 3\sigma_s^2}}. \quad (8)$$

Согласно уравнению (8) $\epsilon_x = \sigma_s/E$, при $\epsilon_y = -\sigma_s/mE$ и если $\sigma_x = \sigma_s$, если же, например, $\sigma_x = 1,156 \sigma_s$, при $\epsilon_x = 5,64 \sigma_s/E$ и, таким образом, когда диаграмма $\sigma_x - \epsilon$ для сжатия принадлежит к типу, изображенному на рис. 3, к изгибу будет относиться диаграмма рис. 4. В задаче продольного изгиба рассматриваются лишь бесконечно малые деформации, следовательно, точка предела текучести на

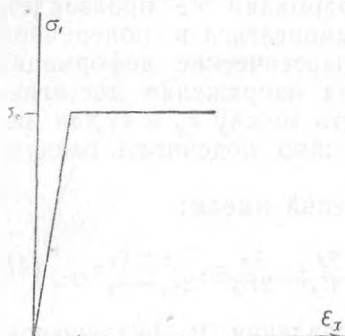


Рис. 3.

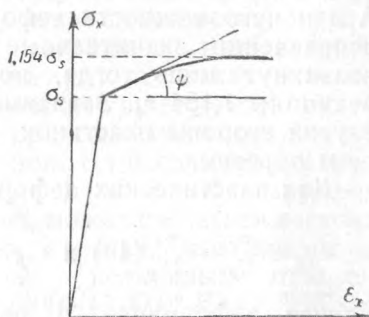


Рис. 4.

диаграмме не пройдена, но угол ψ , определяющий наклон диаграммы $\sigma_x - \epsilon_x$, т. е. жесткость при изгибе, тем не менее имеет в точке предела текучести большое значение. Так, при $\epsilon_x = 1,043 \sigma_s/E$, согласно уравнению (8), $\sigma_x = 1,01 \sigma_s$; это показывает, что $\operatorname{tg} \psi > E/4,3$. До сих пор предполагалось, что в этом случае $\operatorname{tg} \psi$ равен нулю. Для определения $\operatorname{tg} \psi$ или зависимости между деформациями и напряжениями при потере устойчивости можно вместо дифференцирования уравнения (8) поступить проще. Сначала предположим, что $\sigma_1 = \sigma_s$ и $\sigma_r = 0$, и зададимся произвольной формой потери устойчивости. На плоскости x , на которой действует σ_1 , при изгибе возникают добавочные напряжения сдвига τ_{xy} и также

добавочные нормальные напряжения σ'_x на плоскости y и добавочные нормальные напряжения σ'_y и $\tau'_{yx} = \tau'_{xy}$. Теперь условие пластичности (1) принимает следующий вид:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2. \quad (9)$$

Бесконечно малые добавочные напряжения при потере устойчивости либо вызовут разгрузку элемента и возвратят его в область упругих деформаций, либо не уничтожат пластичность, и точка, представляющая в этом случае напряженное состояние, будет оставаться на предельном эллипсоиде (9). Для этих бесконечно малых добавочных напряжений мы можем заменить предельную поверхность касательной плоскостью в точке A , изображающей начальное напряженное состояние, предшествующее изгибу:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \sigma_s; \quad \sigma_2 = 0 = \sigma_y.$$

Уравнение этой касательной плоскости, выраженное в добавочных напряжениях, которые прибавляются к начальным напряжениям, соответствующим точке A , будет следующее:

$$2\sigma'_x - \sigma'_y = 0. \quad (10)$$

Добавочные напряжения сдвига τ'_{xy} , очевидно, не оказывают влияния на комбинации σ'_x и σ'_y , возможные в точке предела текучести¹⁾. Если в уравнении (6), принимая во внимание (10), мы положим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_s + \sigma'_x; & \sigma_y &= \sigma'_y = 2\sigma'_x; \\ \epsilon_x &= \sigma_s/E + \epsilon'_x; & \epsilon_y &= -\sigma_s/mE + \epsilon'_y, \end{aligned} \quad (11)$$

причем ϵ'_x и ϵ'_y представляют деформации изгиба, тогда σ'_x , ϵ'_x и ϵ'_y будут единственными неизвестными величинами в уравнении (6). Отсюда σ'_x , а следовательно,

¹⁾ Также не влияют добавочные вертикальные напряжения сдвига τ'_{xz} и τ'_{yz} , деформациями от которых пренебрегают по сравнению с изгибом.

Если, например, в уравнениях (4a) и (4b) мы заменим σ_x и σ_y через σ_1 и σ_2 , соответственно, и соединим их с уравнением (13), то получим:

$$\sigma_q = \frac{2}{\sqrt{3}} E_p \sqrt{\varepsilon_{xp}^2 + \varepsilon_{yp}^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} E_p \varepsilon_q. \quad (15)$$

Обычно мы предполагаем, что при линейном напряжении σ_q происходит пластическая деформация $\varepsilon_p = \sigma_q/E_p = e \sigma_q/E$ (мы полагаем $E_p = E/e$); в дальнейшем будем обозначать $d\sigma_q/d\varepsilon_q = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 6).

Точка B, представляющая напряженное состояние σ_1, σ_2 , расположена теперь на эллипсоиде

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_q^2, \quad (16)$$

который пересекает ось σ_x в точке A, соответствующей эквивалентному линейному напряжению σ_q (рис. 5)¹⁾.

Если для исследуемого элемента σ_q при потере устойчивости увеличивается, то точка C, представляющая напряженное состояние, оказывается на подобном эллипсоиде, который пересекает ось σ_x в точке A'. Для этой точки $\sigma_x = \sigma_q + d\sigma_q$ (рис. 5). Два эллипсоида могут, в свою оче-

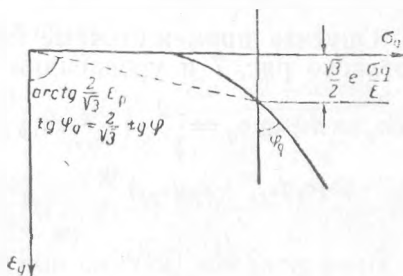


Рис. 7.

редь, быть заменены соответственными касательными плоскостями R и R' в соответственных точках $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ и $\sigma_x = \sigma_1 + d\sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2 + d\sigma_2$, которые снова параллельны оси τ_{xy} и образуют угол γ с осью σ_x , причем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{d\sigma_y}{d\sigma_x} = \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x - 2\sigma_y} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - 2\sigma_2} = \frac{2 - \beta}{1 - 2\beta}. \quad (17)$$

¹⁾ На рис. 5 сечение эллипсоида (16) с плоскостью $\tau_{xy} = 0$ дано в другом масштабе.

Поскольку точки A и A' , так же как B и B' , являются соответствующими точками двух эллипсоидов, мы имеем $BB'_x = \sigma_1 \frac{d\sigma_q}{\sigma_q}$ и $BB'_y = \sigma_2 \frac{d\sigma_q}{\sigma_q}$. Зависимость между σ'_x и σ'_y должна быть, согласно рис. 5, следующей:

$$\begin{aligned}\sigma'_y &= BB'_y + (\sigma'_x - BB'_x) \operatorname{tg} \gamma = \\ &= (\sigma_2 - \sigma_1 \operatorname{tg} \gamma) \frac{d\sigma_q}{\sigma_q} + \sigma'_x \operatorname{tg} \gamma.\end{aligned}\quad (18)$$

Поэтому в уравнении (6) мы полагаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 + \sigma'_x, \\ \sigma_y &= \sigma_2 + \sigma'_y = \sigma_2 + \sigma'_x \operatorname{tg} \gamma + (\sigma_2 - \sigma_1 \operatorname{tg} \gamma) \frac{d\sigma_q}{\sigma_q}, \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 \right) + \frac{e}{E} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2 \right) + \varepsilon'_x, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\sigma_2 - \frac{1}{m} \sigma_1 \right) + \frac{e}{E} \left(\sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1 \right) + \varepsilon'_y.\end{aligned}\quad (19)$$

Опуская промежуточные преобразования, находим, согласно рис. 7 и уравнениям (14) и (15):

$$\begin{aligned}d\sigma_q &= d\varepsilon_q \operatorname{tg} \varphi_q = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial \varepsilon_q}{\partial \varepsilon_{xp}} d\varepsilon_{xp} + \frac{\partial \varepsilon_q}{\partial \varepsilon_{yp}} d\varepsilon_{yp} \right) \operatorname{tg} \varphi = \\ &= (\sigma_1 d\varepsilon_{xp} + \sigma_2 d\varepsilon_{yp}) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sigma_q} = \frac{(1-2\beta) m E \operatorname{tg} \varphi}{(1-2\beta) m E (1-m\beta) 2 \operatorname{tg} \varphi} \frac{\sigma_1}{\sigma_q} \times \\ &\quad \times (\varepsilon'_x + \beta \varepsilon'_y - \frac{(m-2)(1-\beta^2)}{(1-2\beta) m E} \sigma_x).\end{aligned}\quad (20)$$

После ряда преобразований уравнение (6) дает σ_x как функцию ε'_x и ε'_y , а затем из уравнения (18) находится σ'_y :

$$\sigma_x = E (A\varepsilon'_x + B\varepsilon'_y), \quad \sigma'_y = E (C\varepsilon'_x + D\varepsilon'_y), \quad (21)$$

где

$$A = \frac{\varphi_1}{\varphi_4}, \quad B = \frac{\varphi_2}{\varphi_4} = C, \quad D = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= m^2 (1-2\beta) \{ (1-2\beta)^2 E - (4\eta^2 + 3e) \operatorname{tg} \varphi \}, \\ \varphi_2 &= m (1-2\beta) \{ (2-\beta) (1-2\beta) m E + (4\eta^2 + 3em\beta) \operatorname{tg} \varphi \},\end{aligned}$$

$$\varphi_3 = m^2 (1 - 2\beta) \{ (2 - \beta)^2 E + (4\tau_1^2 + 3e\beta^2) \operatorname{tg} \varphi \},$$

$$\varphi_4 = m (1 - 2\beta) \left[(5m - 4)(1 + \beta^2) + \frac{2}{5} - \frac{4m}{\beta} + 3em\tau_1^2 \right] E +$$

$$+ \{ 4(m^2 - 1)(1 - 2\beta)\tau_1^2 + 3em[2(1 - m\beta)\tau_1^2 +$$

$$+ (m - 2)(1 - \beta^2)] \} \operatorname{tg} \varphi; \quad (23)$$

$$\beta = \sigma_2/\sigma_1 \quad \text{и} \quad \tau_1^2 = \sigma_0^2/\sigma_2^2 = \beta^2 - \beta + 1.$$

Деформации ε'_x и ε'_y бесконечно малы, поэтому при потере устойчивости конечные напряжения σ_1 и σ_2 вызывают бесконечно малые пластические деформации. Бесконечно малые напряжения сдвига τ'_{xy} , следовательно, вызывают пластические деформации сдвига, являющиеся бесконечно малыми величинами второго порядка. Согласно предыдущему модуль пластической деформации E_p был равен $\frac{E}{e}$. Поэтому пластический модуль сдвига G_p принимает значение $\frac{mE_p}{2(m+1)} = \frac{E}{3e}$. Следовательно,

$$\gamma'_{xy} = \frac{\tau'_{xy}}{G} + \frac{\tau'_x}{G_p} = \left\{ \frac{2(m+1)}{m+3e} \right\} \frac{\tau'_{xy}}{E} = \frac{(2m+2+3em)\tau'_{xy}}{mE}$$

или

$$\tau'_{xy} = \frac{mE}{2m+2+3em} \gamma'_{xy} = EF\gamma'_{xy}. \quad (24)$$

Для земной коры важен случай, когда $\operatorname{tg} \varphi = 0$. Из уравнений (22) и (23) следует, что при этом

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{C}{A} = \frac{D}{B} = \frac{\sigma'_y}{\sigma'_x} = \frac{(2-\beta)}{(1-2\beta)} = \operatorname{tg} \gamma. \quad (25)$$

Этого следовало ожидать, так как точка, представляющая напряженное состояние, должна оставаться на касательной плоскости к одному и тому же эллипсоиду, которая образует с осью σ_x угол γ , определяемый уравнением (17). Мы знаем, что в упругой области

$$\sigma'_x = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left(\varepsilon'_x + \frac{1}{m} \varepsilon'_y \right) \quad \text{и} \quad \sigma'_y = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left(\frac{1}{m} \varepsilon'_x + \varepsilon'_y \right). \quad (26)$$

Это следует также из уравнения (21), в котором теперь $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ и $e = 0$; отсюда

$$\frac{\sigma'_y}{\sigma'_x} = (\varepsilon'_x + m\varepsilon'_y) / (m\varepsilon'_x + \varepsilon'_y) = \operatorname{tg} \gamma_e. \quad (27)$$

Если мы обратимся к случаю произвольной деформации пластинки при потере устойчивости, то обнару-

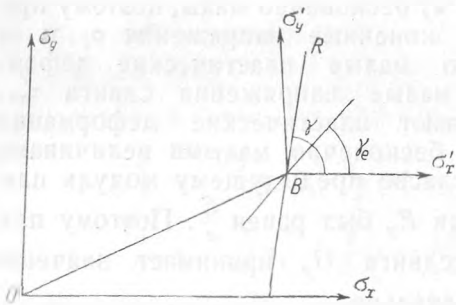


Рис. 8.

жим, что те элементы, для которых изображающие упругую деформацию точки находятся слева от касательной плоскости R (рис. 8), будут деформированы упруго. Элементы, для которых эта точка находится справа от R , будут деформироваться пластически, прич-

чем в этом случае изображающая точка остается на R . Так как при изгибе сечения предполагаются плоскими, ε_x и ε'_y будут меняться по линейному закону в зависимости от z по всей толщине пластинки, и таким

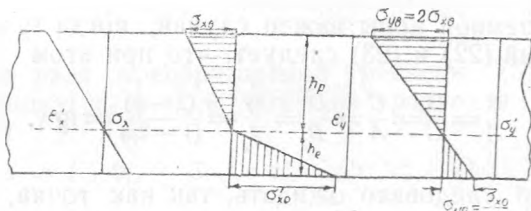


Рис. 9.

образом, согласно уравнениям (21) и (26), σ'_x и σ'_y для некоторого малого элемента $hdxdu$ будут также изменяться по линейному закону, в зависимости от z ,

как в пластической, так и в упругой области (рис. 9). Следует отметить, однако, что равновесие возможно лишь в том случае, если пластинка деформируется пластически по всей высоте¹⁾, причем в средней плоскости пластинки $\sigma'_x = \sigma'_y$ должны быть равны нулю^{*}).

Если деформации в средней плоскости ϵ'_{xm} и ϵ'_{ym} , то согласно уравнениям (21) и (25) $\frac{\epsilon'_{ym}}{\epsilon'_{xm}} = -\frac{A}{B} = -\frac{(1-2\beta)}{(2-\beta)}$.

Обозначая деформации изгиба в прямом смысле слова через ϵ''_x и ϵ''_y , так, что, например, $\epsilon'_x = \epsilon'_{xm} + \epsilon''_x$, получим из уравнения (21):

$$\sigma''_x = E(A\epsilon''_x + B\epsilon''_y) \text{ и } \sigma''_y = E(C\epsilon''_x + D\epsilon''_y). \quad (28)$$

ϵ'_{xm} и ϵ'_{ym} должны быть одинаковыми для всей пластинки, для того чтобы $\int \tau'_{xy} \cdot dh = \int \tau'_{yx} \cdot dh$ был равен нулю, так как при этом $\gamma_{xy} = 0$ в средней плоскости.

¹⁾ Переход от упругой к пластической области произойдет на высоте h_p в верхней части пластинки (рис. 9), где $\text{tg } \gamma_e = \text{tg } \gamma$ (рис. 8) или где $\epsilon'_x = \epsilon'_y = 0$. Условия равновесия требуют, чтобы $\iint \sigma'_x \cdot dhdy = 0$ и $\iint \sigma'_y \cdot dhdx = 0$. Так как в пластической области

отношение $\frac{\sigma'_y}{\sigma'_x}$ постоянно, мы замечаем, что если $\iint \sigma'_x \cdot dhdy = 0$,

$\iint \sigma'_y \cdot dhdx$ может быть тоже равен нулю, если в упругой области сохраняется то же постоянное отношение и $\text{tg } \gamma_e = \text{tg } \gamma$, что, как правило, не имеет места. Для того чтобы были удовлетворены оба условия, сечения должны деформироваться либо упруго, либо пластически. Полная упругая деформация невозможна, так как если изображающая точка элемента, находящегося под средней плоскостью, находится слева от R (рис. 8), элемент, находящийся над плоскостью, находится вправо от R , и на этой стороне будет иметь место пластическая деформация. Отсюда вытекает, что все деформации будут пластическими.

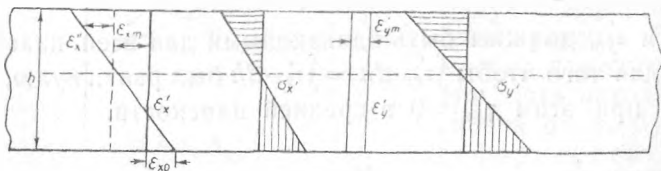
^{*} А. А. Итьюшин [13] показал, что в теории устойчивости нельзя пренебрегать изменением усилий, как это делает Бийлард. (Прим. ред.)

Из теории упругости мы знаем, что если w представляет прогиб пластинки, то ϵ_x'' , ϵ_y'' и γ_{xy}'' для верхней и нижней поверхностей пластинки даются формулами:

$$\epsilon_x'' = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y'' = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \gamma_{xy}'' = 2 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Отсюда, согласно уравнениям (28) и (24), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= -E \frac{h}{r} \left(A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y' &= -E \frac{h}{r} \left(C \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{и} \\ \tau_{xy}' &= \tau_{yz}' = E f h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (29)$$



Р и с. 10.

Изгибающие моменты M_x' и M_y' и крутящие моменты $H_{xy} = H_{yx}$ на единицу длины получаются из последних уравнений в результате умножения w на $\frac{h^2}{6}$, что можно заключить непосредственно из рис. 10 или 11. Так как $\frac{h^3}{12}$ представляет момент инерции I пластинки, то имеем:

$$M_x' = -EI \left(A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y' = -EI \left(C \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

и

$$H_{xy}' = H_{yx}' = 2EIF \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (30)$$

Повторяя обычный в теории упругости вывод, получаем следующее уравнение:

$$EI \left\{ A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (B + C + 4F) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} + h \sigma_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h \sigma_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c w = 0. \quad (31)$$

Ищем решение уравнения (31) в виде

$$w = w_0 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right). \quad (32)$$

Полагаем $C = B$, $\omega b = a$ и $\sigma_2 = \beta \sigma_1$ и получаем из (31):

$$h \sigma_1 (1 + \beta \omega^2) = \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right) EI \left\{ A + 2(B + 2F) \omega^2 + D \omega^4 \right\} + \frac{a^2 c}{\pi^2}. \quad (33)$$

Дифференцированием находим критическую длину a , для которой σ_1 есть минимум, а именно:

$$a = \pi \left[\frac{EI}{c} \left\{ A + 2(B + 2F) \omega^2 + D \omega^4 \right\} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (34)$$

Тогда

$$h \sigma_1 = \frac{2}{1 + \beta \omega^2} \left[\frac{EI}{c} \left\{ A + 2(B + 2F) \omega^2 + D \omega^4 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Дифференцирование показывает, что σ_1 становится минимумом при $\omega = 0$, отсюда $b = \infty$. Затем $\frac{d(h \sigma_1)}{d\omega}$ также равно нулю, если

$$\omega^2 = \frac{(B + 2F - AB)}{(B\beta + 2F\beta - D)},$$

причем эта величина всегда отрицательна, поэтому ω мнимо. Только если β равно единице, это условие даст неопределенность типа 0/0, так как при этом имеется наибольшая возможность изгиба волнами, пересекающимися одна другую,

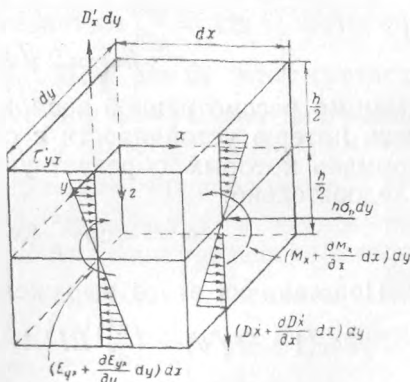


Рис. 11.

поскольку $B = -A$ и $D = F = A$, согласно уравнениям (22), (23) и (24). Только в этом случае будет возможен изгиб волнами, пересекающимися одна другую перпендикулярно. Если, например, $\omega = 0$, то, согласно (34),

$$a = \pi \left(\frac{EIA}{c} \right)^{\frac{1}{4}} \text{ и } b = \infty.$$

Если $\omega = \infty$, тогда

$$\lambda = \infty \text{ и } b = \frac{a}{\omega} = \pi \left(\frac{EIA}{c} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Критическая сила $h\sigma_1$ для $\beta = 1$, согласно (35), не зависит от ω . Подстановка коэффициентов B , D и F дает:

$$h\sigma_1 = 2 \sqrt{EIAc}.$$

Не считая случая $\beta = 1$, потеря устойчивости, следовательно, всегда происходит единичными волнами и перпендикулярно направлению наибольших главных напряжений σ_1 , аналогично тому, что имеет место в упругой области. Подстановка $\omega = 0$ в (34) и (35) дает для половины длины волны и критической силы следующее выражение:

$$a = \pi \left(\frac{EIA}{c} \right)^{\frac{1}{4}}$$

и

$$h\sigma_1 = 2 \sqrt{EIAc}. \quad (36)$$

Помимо рассмотренной возможности, следует рассмотреть потерю устойчивости с образованием таких волн, нормаль которых образует угол α с направлением σ_1 , следовательно:

$$\omega = \omega_0 \cos \frac{\pi}{a} (x + v \operatorname{tg} \alpha). \quad (37)$$

Подстановка этого выражения в (31) дает

$$h\sigma_1 (1 - \beta \operatorname{tg}^2 \alpha) = \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right) EI \{ A + 2(B + 2F) \operatorname{tg}^2 \alpha + D \operatorname{tg}^4 \alpha \} + \frac{a^2 c}{\pi}. \quad (38)$$

Это уравнение тождественно с уравнением (33), если в последнем ω заменено на $\operatorname{tg} \alpha$. Отсюда непосредственно вытекает, что $h\sigma_1$ становится минимумом, если $\operatorname{tg} \alpha = 0$, т. е. для волн, перпендикулярных направлению σ_1 . Поэтому $\operatorname{tg} \alpha$ может иметь произвольное значение лишь для $\beta = 1$; это и должно быть так, ибо в этом случае все направления равнозначны.

Следовательно, хотя напряжение в земной коре достигло предела текучести, максимальное главное напряжение σ_1 , требуемое для потери устойчивости, будет иметь значение, даваемое формулой (36). Подставляя $h = 3 \cdot 10^6$ см, $E = 84\,000$ кг/см², $I = \frac{h^3}{12}$ и $c = 0,0023$ кг/см², мы находим:

$$\sigma_1 = 44\,000 \sqrt{A} \text{ кг/см}^2. \quad (39)$$

Согласно уравнениям (22) и (23), при β , равном 1, 1/2, 0, -1 и ∞ , A становится равным соответственно

$$\frac{m}{2m+2+3em}, \quad 0, \quad \frac{m}{5m-4-3em}, \quad \frac{m}{2m-2-3em}$$

и $\frac{4m}{5m-4+3em}$.

Это очень ясно показывает, что сопротивление потери устойчивости, т. е. значение A , растет в зависимости от абсолютной величины $\frac{\partial \tau_x}{\partial \sigma_y} = \operatorname{ctg} \gamma$, которая, согласно (17), равна $\frac{(1-2\beta)}{(2-\beta)}$. Для $\beta = 0$, что соответствует одноосному сжатию, при $m = 5$ и при диаграмме $\sigma - \epsilon$, изображенной на рис. 3 когда $e = 0$, находим, что $A = \frac{1}{4,2}$. При самом невероятном предположении, что пластические деформации становятся в десять раз больше упругих еще до достижения предела текучести, A становится равным $\frac{1}{34,2}$, отсюда σ_1 , согласно (39), снижается до 7500 кг/см². Эта величина еще значительно превышает предел текучести.

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ
К ТОНКИМ СТАЛЬНЫМ ПЛАСТИНКАМ *)

Развитая нами в предыдущей работе (этот сборник, стр. 375) теория имеет особое значение для вычисления критических напряжений пластинок и оболочек в инженерных конструкциях. Так, например, для конструкционных сталей она приводит к значительно более высоким критическим напряжениям, чем существующая теория, и в то же время удовлетворительно согласуется с экспериментами. Ниже мы ограничимся лишь рассмотрением основных вопросов¹⁾.

Для стержня, размеры поперечного сечения которого малы по сравнению с длиной, новые уравнения, естественно, дают тот же результат, который получается из рассмотрения одноосного случая. При изгибе в направлении z , $\sigma_y = 0$, так как сокращение может произойти свободно, поэтому из уравнения (21) следует, что $\varepsilon'_y = -\frac{C\varepsilon'_x}{D}$. Если мы введем это значение в первое уравнение (21) и воспользуемся уравнениями (22) и (23), то получим:

$$\sigma'_x = \frac{E \operatorname{tg} \varphi}{E + \operatorname{tg} \varphi} \varepsilon'_x = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_e}\right) \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}\right)}{\frac{d\sigma}{d\varepsilon_e} + \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}} \varepsilon'_x = \varepsilon'_x \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \text{ или } d\sigma_x = d\varepsilon_x \frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$

Это доказывает, что теория Энгессера — Кармана для стержней верна.

Теперь рассмотрим случай, когда пластинка теряет

*) Proc. Kon. Ned. Akad. d. Wet., v. 41, № 7, pp. 731—743 (1938), Amsterdam.

¹⁾ Статья печатается в сокращенном виде.

устойчивость в пластической области ниже предела текучести при $\operatorname{tg} \varphi > 0$.

Если исследовать напряжения малого элемента $h dx dy$, то обнаруживается, что на вогнутой стороне пластинки, где имеет место небольшое укорочение, деформации являются пластическими и применимо уравнение (21). В то же время на выпуклой стороне, где происходит растяжение, деформация упруга, и, следовательно, применимо уравнение (26). При заданной форме изогнутой поверхности пластинки напряжения на сторонах малого элемента полностью определяются расстояниями h_x и h_y от внешней поверхности двух слоев, для которых соответственно равны нулю ϵ'_x и ϵ'_y . При потере устойчивости пластинок в упругой области удовлетворяются три условия равновесия, а именно:

$$\int \sigma'_x dh = 0, \quad \int \sigma'_y dh = 0, \quad \int \tau'_{xy} dh = \int \tau'_{yx} dh = 0;$$

поэтому мы предполагаем, что это же имеет место в пластической области. Эти три условия, однако, в нашем случае приводят к трем уравнениям только с двумя неизвестными величинами h_x и h_y , и, следовательно, не представляется возможным им удовлетворить. Укорочение при постоянных напряжениях, происходящее, если $\operatorname{tg} \varphi = 0$, и рассмотренное в нашем первом сообщении, когда вся пластинка переходит в пластическую область, невозможно, если $\operatorname{tg} \varphi > 0$.

Как пример можно привести прямоугольную стальную пластинку бесконечной длины в направлении Y , сжимаемую в направлении X (рис. 2а). Можно считать, что при потере устойчивости до предела текучести сниженный модуль упругости

$$T = 4EE_t / (\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2 = 875\,000 \text{ кг/см}^2, \\ \operatorname{tg} \varphi = 0,294E \text{ и } e = 0,1675.$$

При $m = 10/3$ из уравнений (21) — (24) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= E (0,421\epsilon'_x + 0,426\epsilon'_y), \\ \sigma'_y &= E (0,426\epsilon'_x + 0,938\epsilon'_y), \\ \tau'_{xy} &= 0,322 E \gamma'_{xy}, \end{aligned} \quad (40)$$

в то же время из уравнения (26) получается, что в упругой области

$$\sigma'_x = E(1,099 \epsilon'_x + 0,329 \epsilon'_y), \quad \sigma'_y = E(0,329 \epsilon'_x + 1,099 \epsilon'_y)$$

и, наконец,

$$\tau'_{xy} = 0,385 E \gamma'_{xy}. \quad (41)$$

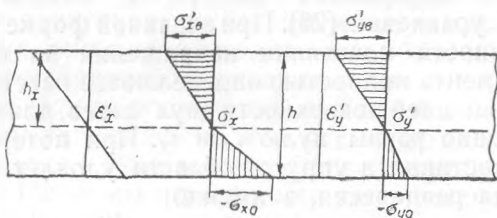


Рис. 1а.

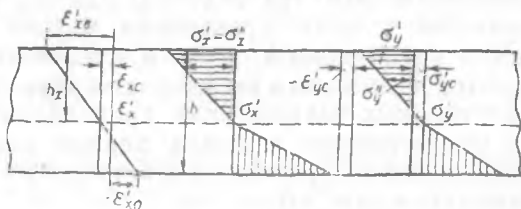


Рис. 1б.

Сначала мы предположили, что $\epsilon'_y = 0$ (рис. 1а). Если h_x выбрано таким образом, что $\int \sigma'_x dh = 0$, тогда $\int \sigma'_y dh$ будет соответствовать сравнительно большому сжатию, так как на верхней стороне $\frac{\sigma'_{yb}}{\sigma'_{xb}} = 0,426/0,421$, в то время

как на нижней стороне $\frac{\sigma'_{y0}}{\sigma'_{x0}}$ равно лишь $0,329/1,099$.

Сжимающая сила $\int \sigma'_y dh$ будет пропорциональна $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

(рис. 2а). Это вызовет растяжение — ϵ_{yc} пластинки в направлении y , в результате которого произойдет укорочение ϵ'_{xc} в направлении x . Поскольку для $x = \pm \frac{a}{2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ равны нулю, σ'_x должно всюду быть равным нулю, так как при потере устойчивости σ_x не растет. Так как в случае укорочения пластинка ведет себя как пластическая по всей высоте, σ'_x в уравнении (40) должно быть равно нулю. Если мы введем вытекающее

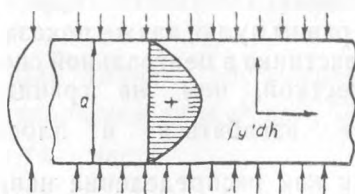


Рис. 2а.

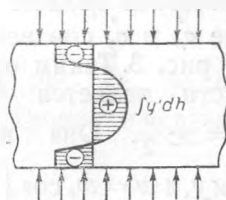


Рис. 2б.

отсюда отношение $\frac{\epsilon'_{xc}}{\epsilon_{yc}}$ во второе уравнение группы (40), то найдем, что $\sigma'_{yc} = 0,507 \epsilon'_{yc}$. Деформация ϵ_{yc} должна быть одинакова для всей пластинки. Предположив, что ϵ'_{xc} также всюду одинакова, находим $\sigma_{yc} = 0,507 \epsilon_{yc}$ и $\sigma'_{xc} = 0$ для всей пластинки. Так как ϵ_{yc} отрицательно, σ_{yc} есть растягивающее напряжение. Теперь для равновесия необходимо, чтобы при любых x расстояние h (рис. 1б) было таким, чтобы напряжения от добавочного изгиба удовлетворяли условию $\int \sigma'_x dh = \int \sigma''_x dh = 0$ и, далее, чтобы ϵ'_{yc} было выбрано так, чтобы $\iint \sigma'_y dh dx = ah\sigma'_{yc} + \iint \sigma''_y dh dy$ обратился в нуль. Через σ'_x и σ'_y обозначены добавочные напряжения изгиба. Графическое решение дает для ϵ'_{yc} приближенное значение $-0,05(\epsilon'_{xb} - \epsilon'_{x0})$, причем ϵ'_{xb} и ϵ'_{x0} представляют собой деформации крайних слоев (вверху и внизу) при $x=0$, где $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

достигает максимума. Пластинка остается пластической в области, где $\epsilon'_x > (m-2)\epsilon'_y/(2m-1)$, и, следовательно, в зависимости от деформаций ϵ'_{xc} и ϵ'_{yc} вблизи границы $x = \pm \frac{a}{2}$ пластинка остается пластической по всей высоте (рис. 3). Ближе к центру она является упругой на выпуклой стороне. $\int \sigma'_y dh$ представлен на рис. 2b. На рис. 3 приводится разрез сечения плоскостями, перпендикулярными оси y (высота h отложена в увеличенном масштабе), вогнутая сторона предполагается сверху. Пластическая область заштрихована. Плоскости N_x и N_y , где σ'_x и σ'_y соответственно равны нулю, также показаны на рис. 3. Таким образом пластинка в центральной своей части является более жесткой, чем на границах $x = \pm \frac{a}{2}$. Она не будет изгибаться в плоскости y , и $w = w_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$. Так как распределение напряжения теперь известно для различных сечений, можно графически определить напряжение изгиба σ_B как функцию a , E и h . С другой стороны, это показывает, при каком отношении $\frac{a}{h}$ пластинка теряет устойчивость ниже предела текучести.

Нет смысла определять точное распределение напряжений для других граничных условий. Обозначим через σ_e критическое напряжение для вполне упругой пластинки, σ_p — для вполне пластической. Тогда истинное критическое напряжение σ_B всегда находится между σ_e и σ_p . В рассмотренном случае оказалось приближенно:

$$\sigma_B = \frac{1}{4} \sigma_e + \frac{3}{4} \sigma_p.$$

Можно показать, что для конструкционной стали эта зависимость выполняется довольно точно и при других граничных условиях. Значение для σ_e известно [96]. Для определения σ_p мы можем воспользоваться уравнением (31) в том случае, когда оси x и y направлены

по главным осям напряжений. Дифференциальное уравнение в упругой области можно проинтегрировать, например для прямоугольных пластинок с границами, параллельными осям X и Y , и с различными граничными условиями; в пластической области интегрирование возможно таким же образом, хотя, естественно, результат несколько более сложен. Для часто встречающегося случая, когда $c=0$ и $\sigma_2=0$, уравнение (31) при $\sigma_1=\sigma_p$ и $C=B$ приводится к следующему:

$$EI \left\{ A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(B+2F) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} + h\sigma_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (42)$$

Для случая, рассмотренного на рис. 2а, 2б, мы предполагаем $w = w_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$. Подстановка в уравнение (42) дает

$$h\sigma_p = \pi^2 EI \frac{A}{a^2}.$$

Для того чтобы показать разницу по сравнению с существующей теорией, вычислим критические напряжения для случая, когда стороны $x = \pm \frac{a}{2}$ и $y = \pm \frac{b}{2}$ оперты. Этот случай представляет большой интерес для подсчета критических напряжений в панелях сжатых элементов стальных мостов. Отношение $\frac{a}{b}$ обычно велико. Так как в упругой области мы полагаем:

$$w = w_0 \cos\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(n \frac{\pi y}{b}\right),$$

то, подставляя, находим:

$$h\sigma_p = \left(\pi^2 \frac{EI}{b^2}\right) \left\{ Am^2 \frac{b^2}{a^2} + 2(B+2F)n^2 + D \frac{n^4 a^2}{m^2 b^2} \right\}. \quad (43)$$

Для минимального напряжения изгиба n должно быть равным a , в то время как дифференцирование

показывает, что m должно быть равным $\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{D}{A}\right)^{\frac{1}{4}}$. Подстановка дает

$$h\sigma_p = \left(2\pi^2 \frac{EI}{b^2}\right) (\sqrt{AD} + B + 2F). \quad (44)$$

Такая критическая сила возможна тогда, когда $\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{D}{A}\right)^{\frac{1}{4}}$ есть целое число. Если $\frac{a}{b}$ больше $3/4$, а это практически всегда имеет место, то истинное значение $h\sigma_p$, если $\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{D}{A}\right)^{\frac{1}{4}}$ не является целым числом, окажется лишь немного выше, и, следовательно, мы всегда можем пользоваться уравнением (44). Если в уравнении (44) для A , B , D и F мы вводим значения уравнения (40), справедливые ниже предела текучести, тогда уравнение (44) дает $h\sigma_e = 3,40 \pi^2 \frac{EI}{b^2}$. Сила, вызывающая потерю устойчивости $h\sigma_e$, известна, но это, естественно, вытекает также из уравнения (44), если вместо A , B , D и F мы подставим значения, получающиеся для упругой области, где $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ и $e = 0$. Эти значения могут быть вычислены при помощи уравнений (22), (23) и (24). A , B и D можно также найти непосредственно, сравнивая уравнения (21) с уравнениями (26) и (41), а именно: $A = D = \frac{m^2}{(m^2 - 1)} = 1,099$; $B = \frac{m}{(m^2 - 1)} = 0,329$; $F = \frac{m}{(2m + 2)} = 0,385$. Подстановка в уравнение (44) дает $\sigma_e = 4,40 \pi^2 \frac{EI}{b^2}$, так что $h\sigma_B = \left(\frac{4,40}{4} + \frac{3 \cdot 3,40}{4}\right) \pi^2 \frac{EI}{b^2} = 3,65 \pi^2 \frac{EI}{b^2}$ или $\sigma_B = 3,00 E \left(\frac{h}{b^2}\right)^2$. Так как вблизи σ_s сниженный модуль упругости $T = 875\,000 \text{ кг/см}^2$, в то время как $E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$, согласно существующей теории [97], мы должны иметь $h\sigma_B = \left(\frac{T}{E}\right)$

$h\sigma_e = 1,83 \pi^2 \frac{EI}{b^2}$ или $\sigma'_B = 1,50 E \left(\frac{h}{b}\right)^2$. Большинство применяемых в машиностроении деталей, работающих на сжатие, имеет такое отношение свободной длины к радиусу инерции поперечного сечения, что напряжение потери устойчивости близко к напряжению текучести. Необходимо, чтобы панели не изгибались до того, пока не изогнулась вся деталь в целом. Если можно считать их опертыми, то при $\sigma_s = 2400 \text{ кг/см}^2$ требование $\sigma'_B = \sigma_s$ приводит к условию $\frac{b}{h} = 36$ [96]. Согласно вышеприведенной теории, достаточно, чтобы $\sigma^B = \sigma_s$, так что $\frac{b}{h} = 51$.

То, что σ_B несколько меньше σ_e , объясняется значительным сопротивлением сдвигу в пластической области. Это сопротивление выражается величиной $F = 0,322$.

Для других граничных условий при $y = \pm \frac{b}{2}$ можно предположить, как и в упругой области, что $w = Y \cos\left(m \frac{\pi x}{a}\right)$, где Y есть функция y . При этом (42) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$D \frac{d^4 Y}{dy^4} - 2(B + 2F)\lambda^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + (A\lambda^2 - \varphi^2)\lambda^2 Y = 0, \quad (45)$$

в котором

$$\lambda = m \frac{\pi}{2} \text{ и } \varphi^2 = h \frac{\sigma_p}{EI}.$$

Предполагая в (45) $Y = e^{\alpha y}$, получаем общее решение

$$w = (C_1 \cos \alpha_1 y + C_2 \sin \alpha_1 y + C_3 \cos \alpha_2 y + C_4 \sin \alpha_2 y) \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right), \quad (46)$$

где

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{D} \sqrt{\pm (B + 2F) D \lambda^2 + D \lambda \sqrt{\{(B + 2F)^2 - AD\} \lambda^2 + D \varphi^2}}. \quad (47)$$

Константы интегрирования $C_1 - C_4$ должны быть определены для каждого частного случая из граничных условий на сторонах $y = \pm \frac{b}{2}$.

Если граничные условия не позволяют принять направления главных напряжений за оси X и Y , уравнения (21) — (24) должны быть преобразованы. Если мы предположим, что главные напряжения действуют параллельно осям R и S , тогда в уравнениях (21) — (24) следует заменить индексы x и y индексами r и s . Для преобразования $\sigma'_r, \sigma'_s, \tau'_{rs}, \epsilon'_r, \epsilon'_s$ и γ'_{rs} в $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, \epsilon'_x, \epsilon'_y$ и γ'_{xy} используем известные формулы и сделаем подстановку. Например, если прямоугольная пластинка с размерами a и $b < a$ подвергается чистому сдвигу, действующему параллельно ее краям, мы выбираем оси X и Y также параллельно краям пластинки.

Находим, что для этого случая мы должны внести в уравнения (21) и (24) выражения

$$\begin{aligned} A = D &= \frac{4m^2(1+e)}{\{4(m^2-1) + 4em(2m-1) + 3e^2m^2\}}, \\ B = C &= \frac{2m(2+em)}{\{4(m^2-1) + 4em(2m-1) + 3e^2m^2\}}, \\ F &= \frac{m \operatorname{tg} \varphi}{\{3mE + 2(m+1) \operatorname{tg} \varphi\}} \quad \text{или} \quad EF = \frac{d\tau}{d\gamma}. \end{aligned} \quad (48)$$

Так как $D = A$ и напряжение сдвига $\tau_{xy} = \tau_p$, действующее на элемент $h dx dy$, вызывает при изгибе равнодействующую силу $h\tau_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy$, условия равновесия принимают следующий вид:

$$EI \left\{ A \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2(B + 2F) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} - 2h\tau_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (49)$$

Дифференциальное уравнение, представляющее условие равновесия в упругой области, известно. Прямое решение возможно лишь при $a = \infty$. Предполагается, что $w = Ye^{i\alpha x}$, а затем применяется подстановка $Y = e^{i\beta y}$. Это было сделано Саусвеллом и Скэн

в 1924 г. При конечном a дифференциальное уравнение в упругой области не интегрируется. Непосредственное интегрирование невозможно также в пластической области. В этом случае мы применяем энергетический метод [98]. Решение может быть получено таким же путем, как и для упругой области. Поскольку энергия деформации изгиба dV для элемента $hdx dy$ равна

$$dV = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2H_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy,$$

подстановка выражений (30) даст нам энергию деформации для вполне пластической пластинки.

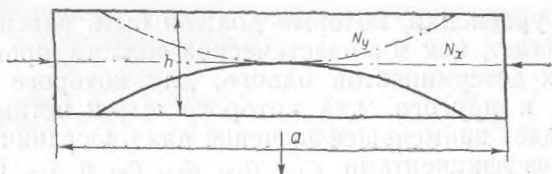


Рис. 3.

$$V = \frac{1}{2} EI \iint \left\{ A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (B + C) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (50)$$

Работа, произведенная внешними силами, та же, что и для упругой пластинки, т. е.

$$T = -h\tau \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Направляя оси X и Y по сторонам и представляя прогиб пластинки двойным тригонометрическим рядом

$$w = \sum \sum a_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right),$$

удовлетворяющим граничным условиям, получим из

условия $V = T$ критическое значение напряжения сдвига

$$\tau = - \frac{\pi^4 EI}{32abh} \times \frac{Aa^2b^2 \Sigma \Sigma a^2_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2(A - B - 2F) \Sigma \Sigma a^2_{mn} m^2 n^2}{\Sigma m \Sigma n \Sigma p \Sigma q a_{mn} a_{pq} \frac{mnpq}{(p^2 - m^2)(n^2 - q^2)}}. \quad (51)$$

Для нахождения минимального значения τ мы должны приравнять нулю производные τ по каждому из коэффициентов a_{mn} , откуда получаем систему однородных линейных уравнений, содержащих единственную неизвестную величину τ . В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку при $\frac{a}{b} = 1$. Знаменатель детерминанта этих уравнений, который должен быть равен нулю, представляет, как и в пластической области, произведение двух детерминантов одного, для которого $m + n$ нечетны, и другого, для которого $m + n$ четны. Последний дает наименьшее значение для τ . Ограничиваясь пятью коэффициентами a_{11} , a_{13} , a_{22} , a_{31} и a_{33} , найдем

$$\tau_p = \frac{225\pi^4}{384} (A + B + 2F) E \left(\frac{h}{b} \right)^2 \sqrt{\frac{41A + 9(B + 2F)}{8249A + 2601(B + 2F)}}. \quad (52)$$

При значениях $m = \frac{10}{3}$ и $\text{tg } \varphi = 0,294 E$ и $e = 0,1675$, справедливых для напряжений, близких к пределу текучести, уравнения (48) дают $A = 0,960$, $B = 0,316$, $F = 0,078$; при этих значениях уравнение (52) дает $\tau_p = 5,64 E \left(\frac{h}{b} \right)^2$. В упругой области, где $\text{tg } \varphi = \infty$ и $e = 0$, уравнения (48) дают

$$A = \frac{m^2}{(m^2 - 1)}, \quad B = \frac{m}{(m^2 - 1)}, \quad E = \frac{m}{(2m + 2)}$$

и (52)

$$\tau_e = 8,52 E \left(\frac{h}{b} \right)^2,$$

так что

$$\tau_B = \left(\frac{8,52}{4} + \frac{16,92}{4} \right) \cdot E \left(\frac{h}{b} \right)^2 = 6,36 E \left(\frac{h}{b} \right)^2.$$

Условие, что τ_B должно достигать предела текучести при сдвиге, т. е.

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \frac{2400}{\sqrt{3}} \text{ кг/см}^2,$$

является, однако, слишком громоздким и в большинстве случаев приводит к условию $\frac{b}{h} \leq 98$. Согласно существующей теории, $\tau'_B = \left(\frac{T}{E}\right) \tau_e = 3,55E \left(\frac{h}{b}\right)^2$; так как $T = 875\,000 \text{ кг/см}^2$ — около предела текучести, то это приводит к условию $\frac{b}{h} \leq 73$.

Дифференциальное уравнение (49) может быть записано следующим образом:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2h\tau_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (53)$$

где $D_1 = D_2 = EIA$ и $D_3 = EI(B + 2F)$. Уравнение (53) есть дифференциальное уравнение так называемой ортотропной пластинки, т. е. ортогонально-анизотропной, имеющей две различные жесткости по отношению к изгибу в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Пластинки из фанеры ведут себя именно таким образом; предполагается, что гофрированные пластинки ведут себя так же и в упругой области. Так как такие пластинки применяются в самолетостроении, где они подвергаются, главным образом, касательным напряжениям, некоторые авторы определяют напряжение потери устойчивости при сдвиге этих ортотропных пластинок (Бергман и Рейсснер^[99]). Все авторы используют дифференциальное уравнение (53) как отправное. При бесконечной длине пластинки, решение может быть получено аналогично тому, как это сделано Саусвеллом и Скан для изотропной пластинки. Если a и b конечны, то уравнение (53) интегрируется методом, примененным Бергманом и Рейс-

снером, при помощи которого получается детерминант, аналогичный найденному методом энергии. Эти вычисления были проделаны Зейдедем. Он выразил значения τ через величины $\frac{a}{b}$, D_1 , D_2 , D_3 и b , так что их можно использовать непосредственно для определения критического напряжения сдвига в пластической области, согласно нашей теории. Таким образом мы находим для указанного выше случая:

$$\tau_B = 6,26 E \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad \text{вместо} \quad 6,36 E \left(\frac{h}{b}\right)^2.$$

Изгиб ортотропной пластинки при другом состоянии деформации рассматривался Тимошенко ^[96] для случая пластинки, опертой со всех сторон и подвергаемой чистому сжатию. Полагая

$$D_1 = EIA, \quad D_2 = EID, \quad D_3 = EI(B + 2F)$$

в выражении для критических напряжений, получаем уравнение (44).

А. НАДАИ

ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕНИ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ *)

I. Введение. В механической теории пластических деформаций при низких температурах и ползучести металлов при высоких температурах рассматриваются соотношения, связывающие напряжение, деформацию и скорость деформации. В случае, если существует вполне определенный предел текучести, напряжения могут быть установлены независимо от величины деформаций. Однако, если металл при увеличении нагрузки постепенно начинает течь, напряжения при низких температурах зависят в большей степени от величины деформации, нежели от скорости деформации; при высоких температурах наблюдается обратное явление. Пользуясь одним из этих допущений, мы исследовали несколько частных случаев пластического течения и ползучести.

Эти частные случаи содержатся в более общем допущении, согласно которому напряжение σ есть функция пластической деформации ϵ и скорости деформации $u = \frac{d\epsilon}{dt}$, откуда

$$d\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon} d\epsilon + \frac{\partial\sigma}{\partial u} du = \psi d\epsilon + \varphi du. \quad (1)$$

Независимо от того, существует ли функция конечного вида,

$$\sigma = f(\epsilon, u) \quad \text{или} \quad F(\sigma, \epsilon, u) = 0, \quad (2)$$

выражающая поведение металла при заданной температуре и простом напряженном состоянии, как, например, чистое растяжение или чистый сдвиг, это допущение

*) Contributions to the 60-th Anniversary St. Timoschenko, pp. 165—170 (1938).

является, конечно, предположительным и установленным лишь *a priori*. Уравнение (2) может быть геометрически интерпретировано, как „поверхность напряжений“, и представлено графиком напряжений σ в зависимости от ε и u , как прямоугольных координат точек в пространстве. Подобная „поверхность напряжений“ существует для металла, если удовлетворяется условие:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}. \quad (3)$$

Обычно небольшая часть ε' от полной деформации ε восстанавливается после разгрузки, и эта упругая деформация $\varepsilon' = \frac{\sigma}{E}$ пропорциональна напряжению σ (E — модуль упругости). Часто как упругие ε' , так и остаточные деформации ε'' невелики, и деформация ε есть сумма двух деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon''. \quad (4)$$

Примером может служить вязко-упругая среда, рассмотренная Максвеллом, которая впоследствии более широко была использована Джеффрисом и Гутенбергом в их исследованиях по геофизике. Для этой среды $\sigma = \varphi \frac{d\varepsilon''}{dt} = \varphi u''$, т. е. скорость остаточной деформации u'' предполагается пропорциональной напряжению σ (φ — коэффициент вязкости при растяжении). Уравнение поверхности напряжений в этом случае имеет вид:

$$\sigma = f(\varepsilon'', u'') = \varphi u''. \quad (5)$$

Вводя обозначение $\frac{\varphi}{E} = t_0$ (t_0 имеет размерность времени), можно (4) и (5) привести к одному из двух следующих уравнений:

$$t_0 \frac{d\varepsilon''}{dt} + \varepsilon'' = \varepsilon, \quad (6)$$

$$t_0 \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = \varphi u. \quad (7)$$

Уравнение (7) получается из уравнения (6) дифференцированием его по t . Заметим, что этот результат может быть обобщен, если предположить, что поверхность напряжений представляет не плоскость, а цилиндр и

$$\sigma = f(u'') \quad \text{или} \quad u'' = \frac{d\varepsilon''}{dt} = g(\sigma). \quad (8)$$

Целый ряд встречающихся в практике случаев ползучести металла может быть исследован с точки зрения уравнения (8), если ввести подобную обобщенную вязко-упругую среду; $u'' = \frac{d\varepsilon''}{dt}$ можно рассматривать как минимальную скорость ползучести, наблюдаемую в длительных опытах при поддержании постоянным напряжения σ . При этих же допущениях может быть рассмотрена и *релаксация* напряжения.

Затухание упругих колебаний, вызванное внутренним трением материала, описывается аналогичным образом, если предположение, что $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, заменить предположением, что

$$\sigma = \sigma' + \sigma'', \quad (9)$$

т. е. напряжение представляет сумму упругой и вязкой частей. Допустим, что первая $\sigma' = E\varepsilon$ пропорциональна упругой деформации ε и вторая $\sigma'' = \varphi \frac{d\varepsilon}{dt}$ пропорциональна скорости изменения деформации $u = \frac{d\varepsilon}{dt}$. Принимая во внимание, что $\frac{\varphi}{E} = t_0$, получаем из (9) уравнение

$$\sigma = E \left(\varepsilon + t_0 \frac{d\varepsilon}{dt} \right) = E (\varepsilon + t_0 u), \quad (10)$$

что приводит к случаю внутреннего затухания от сопротивления вязкого характера. Уравнение (10) есть уравнение поверхности напряжений для этого случая¹⁾.

¹⁾ Это—упругая среда с трением Джеффриса. Если стержень растянут путем перемещения концов с относительно равномерной скоростью, тогда деформация $\varepsilon = ut$ и $\frac{d\varepsilon}{dt} = u = \text{const.}$ *Упруго-*

Обобщение возможно, если предположить, что зависимость внутреннего трения от скорости деформации не является линейной, а есть некоторая функция от u ,

$$\sigma'' = f(u). \quad (11)$$

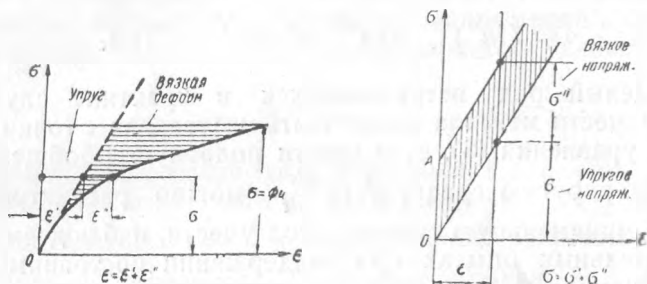


Рис. 1 и 2. Испытания с постоянной скоростью деформации.

Последние исследования, проведенные с монокристаллами чистого свинца, олова и агрегатами кристалла свинца и его сплавов, в особенности исследования Х. Ф. Мура,

вязкое тело деформируется в этом случае, следуя кривой „напряжение — деформация“ $\sigma = Eut_0(1 - e^{-\varepsilon/ut_0})$, а упругое тело с вязким внутренним трением, следуя прямой

$$\sigma = E[t_0u + \varepsilon] = \text{const} + E\varepsilon.$$

На рис. 1 и 2 показаны упругая и вязкая части для ε и σ соответственно. В случаях приложения к явлению медленной ползучести оказывается, что как деформация ε , так и скорость деформации $u'' = \frac{d\varepsilon}{dt}$ чрезвычайно малы. Константа t_0 в уравнениях (6) и (7) для упруго-вязкого тела, ползучесть которого проходит медленно, должна быть, следовательно, большой величиной. С другой стороны, во время затухающих упругих колебаний $\frac{d\varepsilon}{dt}$ велико по сравнению с ε , и постоянная t_0 в уравнении (10) должна быть малой величиной. Соответствующие коэффициенты вязкости φ пропорциональны t_0 , и φ для медленного вязкого течения велико, в то время как φ для затухания очень мало. На рис. 3 и 4 показаны соответствующие петли гистерезиса для этих двух видов материала, если прямой брус растянут внешней периодической синусоидальной силой $\sigma = \sigma_1 \sin \omega t$. По истечении достаточного времени петли переходят в эллипсы,

проведенные в Илинойском университете, Ж. Н. Гринвуда и его сотрудников в Австралии [79, 80, 81, 82, 104], ясно показали то, что в течение многих лет оставалось лишь предположением, а именно, что внутрикристаллический процесс ползучести металлов, видимо, имеет сложный характер. Различные структурные изменения сопоставлялись с их влиянием на характер кривых деформация

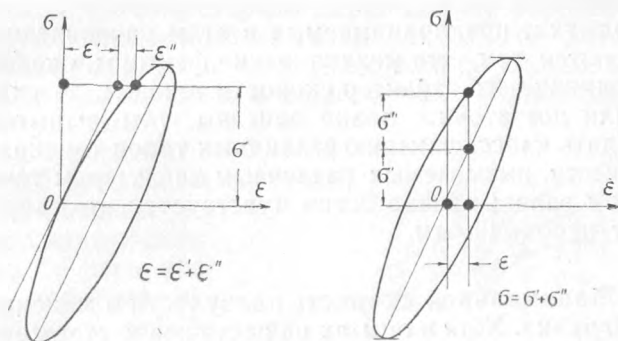


Рис. 3 и 4. Петли гистерезиса.

ползучести — время. Для стали обнаружено, что переход цементита в сфероидальное состояние и объемные изменения, вызванные выделением составляющих, отражаются на скорости ползучести. Другие явления, известные в практике пластического течения монокристаллов и их агрегатов, как, например, скольжение, переориентировка атомов в решетке, рекристаллизация, локализованная текучесть, вызванная изменением положения атомов в решетке, и появление внутрикристаллических трещин, особенно в случае ползучести свинца, как оказывается, имеют большое влияние на характер кривых ползучести. При этих условиях почти бесполезно стараться предугадать поведение металла с физической точки зрения, если он подвергается воздействию напряжений и температуры, как например, в случае длительного действия нагрузки при высоких температурах. Тем не менее физики, металлурги и инженеры не прекратили, и, вероятно, не прекратят, работу по исследо-

ванию ряда вопросов в этой области. Механический анализ такого рода явлений неизбежен, к тому же он связан с желанием сократить длительность времени испытаний металлов на ползучесть путем установления характера поведения металла за пределами кратковременного наблюдения во время опытов, а также распространением полученных результатов на случаи сложного напряженного состояния.

Попытки, предпринимаемые в этом направлении, затрудняются тем, что механические факторы, оказывающие влияние на характер скорости течения, до сих пор не были достаточно полно описаны. Мы не пытаемся здесь дать классификацию различных типов течения при ползучести, вызываемых различным характером течения в самом зерне; однако остро чувствуется, что скоро это станет необходимым.

II. Минимальная скорость ползучести и максимальная нагрузка. Хотя в опытах на растяжение стержня при постоянной нагрузке ползучесть обычно вызывает небольшие деформации, представляет интерес распространение наших рассуждений на значительные деформации. Однако для поставленной нами задачи достаточно понимать под ε условную деформацию и аналогично под u — условную скорость деформации, $u = \frac{d\varepsilon}{dt}$, не вводя истинной деформации $\bar{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon)$ и истинной скорости деформации $\bar{u} = \frac{u}{1 + \varepsilon}$. Необходимо, однако, различать напряжения $S = \frac{P}{A_0}$ и $\sigma = \frac{P}{A}$, где P — нагрузка, A_0 и A — начальная и истинная площади поперечного сечения стержня, связанные уравнением

$$\sigma = (1 + \varepsilon) S. \quad (12)$$

Предположим, что поверхность напряжений

$$\sigma = f(\varepsilon, u) \quad (13)$$

существует. Ей должно соответствовать напряжение S , определяющее внешнюю нагрузку в опыте на растяжение:

$$S = \frac{\sigma}{1 + \varepsilon} = \frac{f(\varepsilon, u)}{1 + \varepsilon}. \quad (14)$$

Поверхности σ и S могут быть представлены в виде графика в прямоугольных координатах, где ε и u — ординаты. Испытание стержня на растяжение определяется, как путь, пройденный на одной или другой поверхности. Например, испытания с постоянной скоростью деформации представлены пересечением плоскостей, перпендикулярных

к оси u с поверхностями σ и S (рис. 5). На рис. 6 и 7 показан ряд кривых при $u = \text{const}$. На рис. 6 даны кривые „истинные напряжения — деформации“ $\sigma = f_1(\varepsilon)$, а на рис. 7 — „условные напряжения — деформации“ $S = f_2(\varepsilon)$,

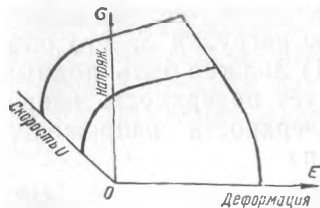


Рис. 5. Поверхность напряжений.

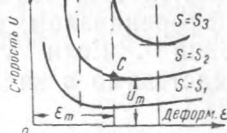
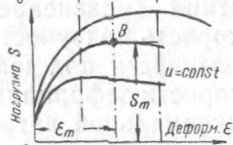
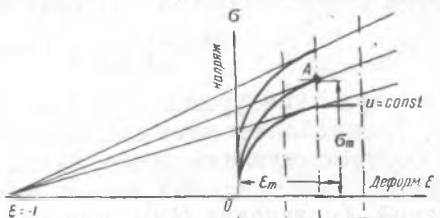


Рис. 6, 7, 8. Сечения через поверхности σ и S .

если $u = \frac{d\varepsilon}{dt}$ сохраняется постоянным. На одном из этих рисунков использовано известное построение касательных для определения напряжения σ_m и деформации ε_m , соответствующих максимальной нагрузке S_m (условное временное сопротивление).

Обычные длительные испытания представлены аналогичным семейством кривых, расположенных на поверхности S . Они получены пересечениями поверхности S рядом горизонтальных плоскостей $S = \text{const}$. Эти контурные линии поверхности S (рис. 8) указывают, следовательно, каким образом изменяется u в зависимости от ε , т. е.

$$u = \frac{d\varepsilon}{dt} = g(\varepsilon). \quad (15)$$

Если S остается постоянным, уравнение (15) есть дифференциальное уравнение для кривых „деформация—время“, определяемых интегрированием

$$t = \int \frac{d\varepsilon}{g(\varepsilon)} + \text{const}. \quad (16)$$

Минимум контурных линий $u = g(\varepsilon)$, показанный на рис. 8, определяет минимальные скорости ползучести u_{\min} и соответствующие деформации ε_{\min} . Теперь можно сделать существенный вывод: если поверхность напряжений (уравнение (13)) существует, то минимальная скорость ползучести u_{\min} для длительных испытаний на ползучесть под действием постоянной нагрузки S равна скорости деформации u , необходимой для возникновения максимальной нагрузки S_m (временное сопротивление), равной определенному значению нагрузки S . Это объясняется тем, что выражение (1) должно быть полным дифференциалом, если существует поверхность напряжений¹⁾. Если уравнение поверхности напряжений представимо в виде произведения

$$\sigma = f_1(\varepsilon) \cdot f_2(u), \quad (17)$$

то максимальная нагрузка S_m при испытаниях с постоянной скоростью деформации достигается всегда при

¹⁾ Проведем две прямые в плоскости ε, u соответственно двум испытаниям на растяжение, произведенным при различных условиях, причем оба начинаются при одинаковых начальных состояниях образца, определяемых $\varepsilon_1, u_1, \sigma_1$ и заканчивающихся при одинаковых значениях $\varepsilon = \varepsilon_2$ и $u = u_2$. Тогда, если поверхность напряжения имеет место, напряжения σ_2' и σ_2'' , которые будут достигнуты по двум направлениям, будут одинаковы: $\sigma_2' = \sigma_2''$.

одинаковых деформациях (рис. 9). Отсюда можно сделать вывод, что и минимальные скорости ползучести u_{\min} должны иметь место при одинаковых деформациях ϵ_m , если испытания производятся при постоянной нагрузке S . Кривые ползучести для поверхности (17) показаны на рис. 10.

На рис. 11 приведена серия кривых ползучести, полученных Мак Куином^[81] для свинца, причем только что указанные условия, видимо, были приближенно достигнуты.

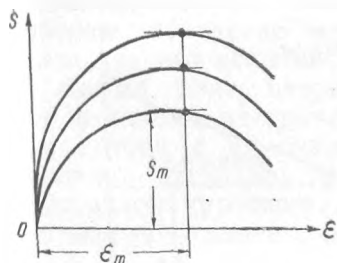


Рис. 9. Максимальная нагрузка S в опытах с постоянной скоростью деформации.

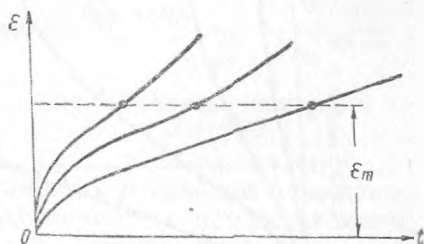


Рис. 10. Минимальные скорости ползучести в опытах с постоянной нагрузкой.

Горизонтальная пунктирная линия, указывающая место точек перегиба на этих кривых ползучести, добавлена автором. Примером для уравнения (17) может служить поверхность напряжений, заданная степенной функцией от ϵ и u

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^m \left(\frac{u}{u_0} \right)^n, \quad (18)$$

где σ_0 , ϵ_0 , u_0 , m , n — заданные константы. Деформация ϵ_m , для которой нагрузка S становится максимальной в опытах с постоянной скоростью деформации, находится из уравнения (18) при максимальном значении

$S = \frac{\sigma}{1 + \epsilon}$. Она равна

$$\epsilon_m = \frac{m}{1 + m} \quad (19)$$

и представляет собой также деформацию, при которой в опытах с постоянной нагрузкой достигаются минимальные скорости ползучести. Указанные условия могут быть использованы для объяснения некоторых экспериментальных данных. Одним из них является то, что при высоких температурах максимальная нагрузка S_m при скоростных испытаниях на растяжение обычно достигается

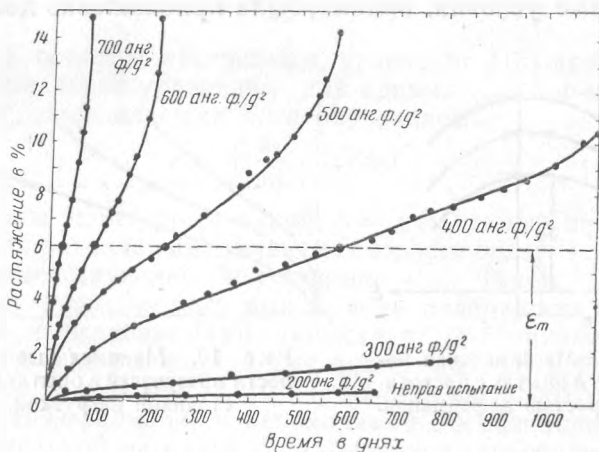


Рис. 11. Испытания свинца на ползучесть растяжением при комнатной температуре, произведенные Мак-Куинном.

при значительно меньших значениях деформации ϵ_m по сравнению с испытанием металлов при комнатной температуре. Для сталей при 450°C значения ϵ_m оказываются равными нескольким процентам. Это, очевидно, подтверждается по крайней мере для одного вида кривых ползучести, по найденным для них формам кривых, в которых ϵ_{\min} того же порядка.

Серия кривых ползучести совершенно иного характера, взятая из книги Тэпселля^[102], представлена на рис. 12. Значения деформации ϵ_{\min} , соответствующие минимальным скоростям ползучести, здесь растут пропорционально напряжению, так что если поверхность S существует,

то в этом случае контурные линии $S = \text{const}$ должны иметь форму, аналогичную показанной на рис. 13. Кривые для свинца во всем их многообразии были недавно исследованы.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению этих вопросов, следует остановиться на нижеследующем. Рассмотрим поведение металла при его испытании на чистый сдвиг, например в опытах на кручение трубок с не очень тонкими стенками при

постоянном крутящем моменте, и сравним поведение металла при сдвиге с поведением его при растяжении,

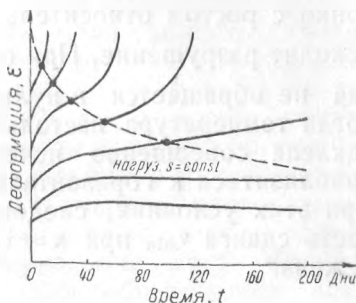


Рис. 12. Кривые ползучести по Тэйселлу.

только что нами рассмотренном при постоянной нагрузке S . Касательное напряжение обозначим через τ , относительный сдвиг через γ и скорость сдвига через $\nu = \frac{d\gamma}{dt}$. Как и в испытаниях на растяжение, мы можем аналогично допустить, что для чистого сдвига

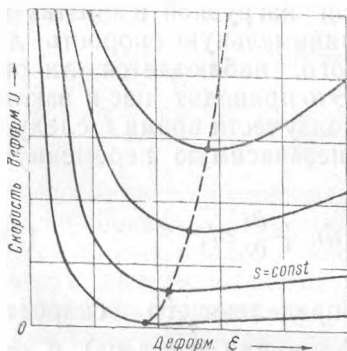


Рис. 13. Скорости деформации при постоянной нагрузке S , соответствующей рис. 12.

поверхность напряжений сдвига $\tau = f_1(\gamma, \nu)$ должна существовать. Однако в опытах на кручение поперечное сечение не изменяется, что имело место в опытах на растяжение.

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \tau}{\partial \nu} d\nu. \quad (20)$$

Если это уравнение интегрируемо, то поверхность напряжений сдвига $\tau = f_1(\gamma, \nu)$ должна существовать. Однако в опытах на кручение поперечное сечение не изменяется, что имело место в опытах на растяжение.

Для случая чистого сдвига дополнительное условие, выраженное уравнением (14), не имеет места. В опытах на кручение касательное напряжение τ растет монотонно с ростом относительного сдвига γ , пока не происходит разрушение. При обычных условиях $\frac{\partial \tau}{\partial \gamma}$ никогда не обращается в нуль, за исключением случаев, когда температура настолько высока, что деформация наклепа совершенно исчезает, так что τ стремится приблизиться к горизонтальной прямой, если $\nu = \text{const}$. При этих условиях, следовательно, минимальная скорость сдвига v_{\min} при $\tau = \text{const}$ не может быть обнаружена.

III. Разупрочнение со временем и упрочнение.

В опытах на ползучесть при кручении, проведенных Эверетом с тонкостенными трубами при постоянных тангенциальных напряжениях, наблюдались минимальные скорости сдвига v_{\min} ¹⁾. Следовательно, мы должны отыскать другую причину, отличную от рассмотренной нами, в связи с максимальной нагрузкой в опытах на растяжение, вызывающей минимальную скорость деформации, независимо от того, наблюдается ли она при $\sigma = \text{const}$ или $\tau = \text{const}$. Это приводит нас к заключению, что в этих явлениях ползучести время t следует рассматривать как новую независимую переменную, так что

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial u} du + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt. \quad (21)$$

Кроме отношения $\psi = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$, определяющего скорость упрочнения в результате деформации (наклепа), и отношения $\varphi = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$, определяющего скорость упрочнения в зависимости от скорости (вязкость), вводится скорость

¹⁾ Может оказаться, что на деформации, при которых в этих испытаниях замечены минимальные скорости ползучести, повлиял до некоторой степени продольный изгиб труб.

упрочнения от времени $\kappa = \frac{d\sigma}{dt}$. Металлургам хорошо известно, что предел текучести материала может изменяться со временем t , если металл подвергается температурному воздействию. Если скорость упрочнения $\kappa \neq 0$, подобные изменения могут быть обнаружены.

Если $\kappa > 0$, металл твердеет, а если $\kappa < 0$, он размягчается со временем. Если $\kappa = 0$, предел текучести σ не изменяется со временем при постоянных ϵ и u , и мы получаем условия, аналогичные рассмотренным нами в п. II. Опыты по пробиванию, определяющие скорее предел текучести, не дают значения κ . Если σ изменяется слишком медленно, они могут быть недостаточно чувствительны для обнаружения малых скоростей $\kappa = \frac{d\sigma}{dt}$.

Для испытаний на ползучесть при постоянном напряжении мы получаем условие

$$d\sigma = \psi d\epsilon + \varphi du + \kappa dt = 0. \quad (22)$$

Минимальная скорость ползучести достигается, когда в уравнении (22) $du = 0$. Тогда из уравнения (22) получаем

$$\psi d\epsilon = -\kappa dt, \quad (23)$$

или

$$\frac{d\epsilon}{dt} = u_{\min} = \frac{-\kappa}{\psi}. \quad (24)$$

Из последнего уравнения находим минимальную скорость ползучести u_{\min} . Уравнение (23) может быть пояснено следующим образом: когда приращения предела текучести, вызванные незначительным увеличением деформации $d\epsilon$, становятся равными снижению предела текучести, вызванному разупрочнению металла в течение малого интервала времени dt , скорость деформации u не изменяется¹⁾. Таким образом возможность того, что упрочнению противодействует одновременное и равное

¹⁾ Такое объяснение условий, при которых имеет место минимальная скорость ползучести при длительных испытаниях на ползучесть, было ранее дано Д. Мак-Ветти.

по величине разупрочнение металла, вызванное его отжигом, рассматривается в том случае, когда ползучесть стержня происходит с равномерной скоростью. Условие (24) может быть достигнуто во время испытаний на ползучесть либо в одной точке (точка перегиба кривой $\epsilon = f(t)$), либо оно может постепенно развиваться со временем, причем в этом случае кривая ползучести асимптотически приближается к прямой. Если во время испытания на ползучесть при растяжении поперечное сечение образца заметно изменяется, то мы можем снова принять условие $\sigma = (1 + \epsilon) S$. Если нагрузка $S = \text{const}$, тогда будем иметь

$$d\sigma = Sd\epsilon = \psi d\epsilon + \varphi du + \kappa dt. \quad (25)$$

Принимая в уравнении (25) $du = 0$, находим условие достижения минимальной скорости ползучести в виде

$$u_{\min} = -\frac{\kappa}{\psi - S}. \quad (26)$$

Таким образом, мы видим, что при изменении площади поперечного сечения ψ в уравнении (24) должно быть заменено на $\psi - S$.

Относительно точного характера скорости предела текучести $\kappa = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ при высоких температурах известно очень немного. До тех пор пока не будут лучше с механической точки зрения известны законы, определяющие „размягчение“ предела текучести со временем, дальнейшее исследование явлений релаксации и ползучести будет затруднительно. Если скорость предела текучести $\kappa = \frac{d\sigma}{dt} > 0$, то происходит, как говорят, „старение“ металла. Явление упрочнения со временем (старение) приобретает особое значение и привлекает все большее и большее внимание в последних работах по металлургии; оно делается доступным для рассмотрения, если κ для этих случаев будет определено достаточно хорошо.

Эти условия могут быть иллюстрированы примером. Предположим, что $\psi = 0$ и что как φ , так и κ постоянны.

Наш пример относится к материалу без упрочнения (как, например, стекло), который течет подобно чисто вязкому веществу, но предел текучести σ которого линейно увеличивается со временем t . Испытание на ползучесть, проведенное при напряжении ($d\sigma = 0$), должно удовлетворять уравнению (22), в предположении, что $\psi = 0$ и что φ и χ являются постоянными. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\chi}{\varphi} = \text{const}, \quad u = -\frac{\chi}{\varphi}t + c. \quad (27)$$

Допустим, что старение начинается в момент, когда приложено напряжение σ . Тогда для $t=0$, $u = \frac{\sigma}{\varphi} = c$ и, следовательно,

$$u = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma - \chi t}{\varphi}. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) дает кривую ползучести, а именно

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\chi}{2\varphi}t^2 \quad (29)$$

в виде обычной параболы. В этом случае минимальная скорость ползучести не может существовать, и ползучесть прекращается спустя конечное время

$$t_1 = \frac{\sigma}{\chi}, \quad (30)$$

когда скорость деформации u снижается до нуля¹⁾.

IV. Закон гиперболического синуса для ползучести.

В последние годы Дэвисом в Исследовательской лаборатории Вестингауза было проведено большое число испытаний сталей при постоянной скорости деформации

¹⁾ В этом случае поверхность напряжения существует. Это выражается уравнением $\sigma = \zeta u + \gamma t + \text{const}$. Интересно отметить, что если $u = 0$, „предел текучести“ $\sigma = \gamma t + \text{const}$ постепенно растет. Пример наш относится к телу, аналогичному описанному Бинггэмом, причем вязкое тело имеет предел пластичности, который в нашем случае рассматривается как причина „старения“ (σ растет со временем t).

и при температурах от 450 до 550° С. Результаты опытов Дэвиса представлены на диаграммах, причем скорости деформации u по оси абсцисс даны в логарифмическом масштабе, напряжения по оси ординат нанесены в обычном масштабе. Эти кривые получены автоматической записью диаграмм „напряжение—деформация“ и построены для определенного значения деформации, например, $\epsilon = 1/2\%$ или 1% . В одном или двух случаях были получены данные для одних и тех же сталей при длительных испытаниях на ползучесть. В тех случаях,

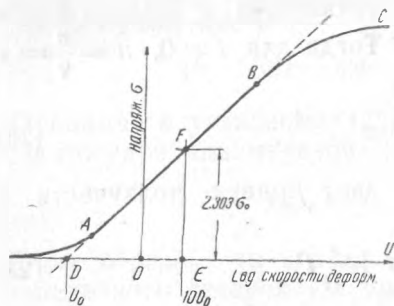


Рис. 14. Напряжение как функция скорости деформации.

когда проводились длительные испытания на ползучесть, полный диапазон скоростей деформации, охваченный этими двумя видами испытаний, был от $u = 10^{-9}$ до $u = 1$ в час, так что максимальные скорости в миллион раз превышали скорости ползучести, представляющие интерес для конструкторов турбин.

Хотя различные стали, подвергнутые испытанию, дали значительные расхождения в характере кривых на полулогарифмической сетке, крайне интересно отметить, что для нестареющих сталей (не изменяющихся в этих графиках, рис. 14) появляются три более или менее явных участка, в которых кривая „напряжение—скорость деформации“ $\sigma = f(u)$ может быть выражена различными функциями. При очень малых скоростях кривая (рис. 14) является выпуклой (участок левее точки A), асимптотически приближающейся к оси; в промежуточном пределе скорости (AB) она представляет почти прямую линию, а для больших скоростей она вогнута (BC) в сторону горизонтали. Наибольшее значение, видимо, представляет то, что испытания на ползучесть проводятся как раз в области, в которой прямоли-

нейный участок кривой начинает изгибаться в сторону горизонтальной оси. Прямая линия на полулогарифмическом графике, как например, участок AB на кривой (рис. 14), указывает, что функция $\sigma = f(u)$ должна иметь вид:

$$\sigma = \sigma_0 \ln \frac{u}{u_0}. \quad (31)$$

Таким образом константы σ_0 и u_0 в этом уравнении могут служить для определения закона скорости на среднем участке скоростей деформации. u_0 определяется продолжением прямой AB до ее пересечения с осью u в точке D . u_0 берется по масштабу скоростей деформации u в точке D .

σ_0 находится приравниванием длины DE к длине одного цикла логарифмического масштаба и построением перпендикуляра в точке E к оси. Ордината $EF = 2,303 \sigma_0$ определяет константу σ_0 .

Физические и механические соображения подтверждают, что функция скорости $\sigma = f(u)$ должна быть нечетной функцией от u , проходящей через начальную точку $u = 0$, $\sigma = 0$. Эти условия не удовлетворяются логарифмической функцией уравнения (31), которое не имеет места при малых скоростях деформации u .

Л. Прандтль ^[74] впервые обратил внимание на эти условия, когда пытался объяснить поведение твердых тел при помощи кинетической модели. Наиболее характерной особенностью этой модели является ее свойство предугадывать линейный закон для малых и логарифмический закон для промежуточных скоростей деформации. Непосредственные наблюдения показали, что при низких температурах предел текучести повышается, согласно логарифмическому закону, выраженному уравнением (31), в то время как линейный закон скорости при этих температурах не поддается экспериментальному наблюдению. Известно, что в этих пределах температуры текучесть вызывается скольжением в зернах кристалла (за некоторым исключением). Линейный логарифмический предел скоростей деформации становится, с другой стороны, очевидным и в общем

характере наблюдаемого поведения функции скорости, как это было указано в наших испытаниях с постоянной скоростью деформации, проведенных над различными сталями в интервале температур от 450 до 550° С. Эти наблюдения до некоторой степени подтверждают, что если при повышенных температурах имеет место почти прямолинейный участок рис. 14, то аналогичное явление происходит при низких температурах, вследствие скольжения зерен кристаллитов. Чем выше температура, тем более явно выражено приближение к линейной зависимости скорости в кривых $\sigma = f(u)$. Подобная линейная зависимость выражает поведение вещества в жидком состоянии¹⁾. Это, видимо, подтверждает тот факт, что при снижении скоростей деформации постепенно изменяется также и механизм процесса текучести²⁾. Уже было указано, что целый ряд совместно действующих явлений может повлиять на этот механизм. Но одно из них, а именно старение (precipitation hardening), обращает особое внимание. Возможность наличия фактора старения в приводимых ниже замечаниях исключается.

Наиболее простой функцией, удовлетворяющей указанным выше требованиям для $\sigma = f(u)$ и для закона „напряжение — скорость деформации“, совпадающей с опытными данными, является:

$$u = u_1 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{\sigma_1}. \quad (32)$$

Эта функция была предложена автором несколько лет назад³⁾. Обе константы u_1 и σ_1 могут быть легко выра-

¹⁾ Вопросы, связанные с вязкостью жидкости, рассмотрены Andrade. Phil. Magazin, p. 497, 1933. Journal Inst. of Metals, vol. 60, p. 427, 1937.

²⁾ Линейный предел, при котором напряжения пропорциональны скорости деформации, и предел, при котором скорости деформации растут значительно быстрее, чем напряжения, был замечен V. Chalmers, Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 166, p. 427 (1936) для единичных кристаллов.

³⁾ Этот закон скорости был недавно принят для объяснения явлений упругого последействия в целлулоиде. H. M u s s m a n, Annalen der Physik, Series S, vol. 31, p. 130 (1938).

жены при помощи констант u_0 и σ_0 , введенных в уравнение (31). Для больших значений u уравнение (32)

дает
$$u = \frac{u_1}{2} e^{\frac{\sigma}{\sigma_1}}$$

или
$$\sigma = \sigma_1 \ln \frac{2u}{u_1}. \quad (33)$$

При сравнении этого уравнения с уравнением (31) нетрудно видеть, что уравнения (31) и (32) могут

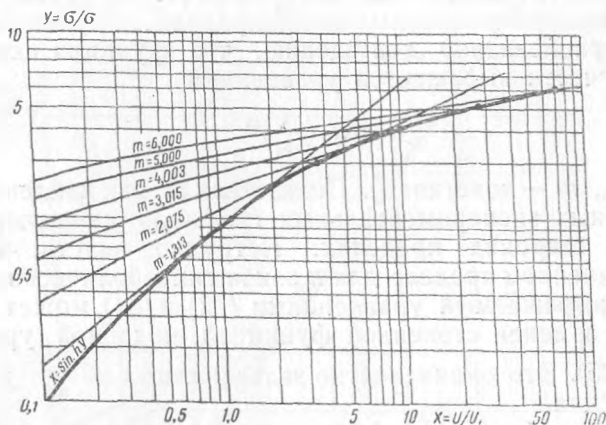


Рис. 15. Сравнение закона гиперболического синуса для ползучести с законом степенной функции, применяемым для экстраполяции опытных данных.

выражать одну и ту же функцию для достаточно больших значений u , если для констант u_1 и σ_1 взять следующие величины:

$$\sigma_1 = \sigma_0, \quad u_1 = 2u_0. \quad (34)$$

Функция (32) допускает удобную экстраполяцию данных, полученных в испытаниях на ползучесть до значительно большего времени и до значительно более низких напряжений, чем те, при которых ползучесть может быть легко обнаружена. Экстраполяция, основанная на

функции гиперболического синуса, исключает также некоторые трудности, свойственные степенным функциям, которые почти исключительно были предложены и применены в научных исследованиях по ползучести металлов в Америке.

Быть может, поэтому представляет значительный интерес сравнение закона гиперболического синуса с законом, выраженным степенной функцией. Обычно минимальные скорости ползучести u_{\min} и напряжения σ представляются на двойной логарифмической сетке, и через экспериментальные точки проводится прямая линия. Это равнозначно допущению, что функция скорости ползучести выражается уравнением

$$u = u_2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} \right)^m \quad (35)$$

(u_2 , σ_2 , m — константы). Показатели m , как найдено, для подобных экспериментальных графиков изменяются в очень широких пределах. Нетрудно видеть, что в ограниченном пределе для u закон гиперболического синуса, выражаемый уравнениями (32) и (34), может быть также заменен степенной функцией, подобной уравнению (35). Это эквивалентно задаче: дано $x = \frac{u}{u_1}$, $y = \frac{\sigma}{\sigma_1}$ и функция

$$x = \text{sh } y. \quad (36)$$

Надо найти степенную функцию

$$x = C y^m \quad (37)$$

так, чтобы обе кривые прошли через общую точку x_0 , y_0 и являлись бы касательными в этой точке. Константы C и m должны быть выбраны равными

$$m = y_0 \text{cth } y_0, \quad C = y_0^{-m} \text{sh } y_0. \quad (38)$$

Практически это было показано на рис. 15 и 16. Рис. 15 изображает двойную логарифмическую сетку функции $x = \text{sh } y$, представляющей закон скорости деформации от напряжения, выражаемый уравнением (32). Степенные функции, выраженные уравнением (37), даны в двойной логарифмической сетке в виде прямых линий;

эти прямые линии должны быть касательными к кривой, представляющей функцию $x = \text{sh } y$, что показано на рис. 15 для ряда точек x_0, y_0 . Эти точки есть:

$y_0 = 1$	2	3	4	5	6
$x_0 = 1,175$	3,627	10,02	27,29	74,20	201,7.

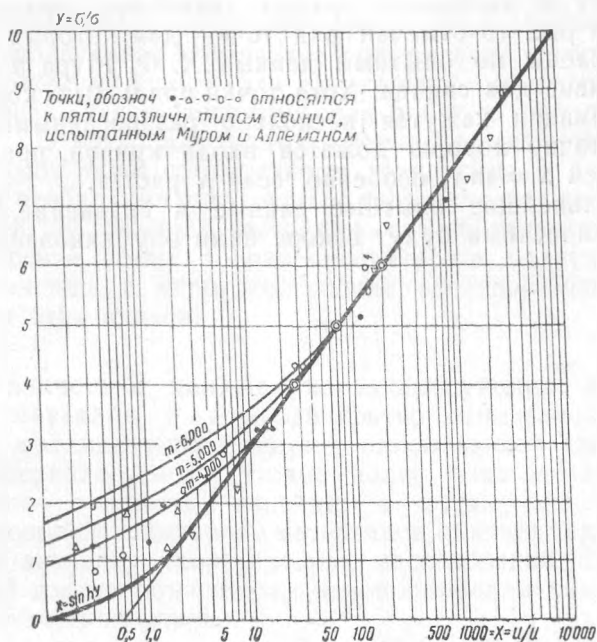


Рис. 16. Закон гиперболического синуса для ползучести по сравнению с законом степенной функции по опытам со свинцом, проведенным Х. Ф. Муром и Н. Аллеманом.

Соответствующие значения для показателя m вычислены согласно уравнению (38) и равны:

$$m = 1,313 \quad 2,075 \quad 3,015 \quad 4,003 \quad 5,000 \quad 6,000.$$

На рис. 15 показано различие между законом гиперболического синуса, который был здесь предложен для экстраполяции на малые скорости ползучести, и

степенными функциями, соответствующими различным показателям m , широко применяемыми инженерами. На рис. 16 приведены данные, аналогичные данным на полулогарифмическом графике. Степенные функции представлены в виде кривых. На таком графике кривая, представляющая функцию гиперболического синуса, есть касательная к горизонтальной оси и быстро приближается к наклонной прямой линии при повышении.

На рис. 16 отмечен ряд точек, для которых x и y вычислены по опытным данным Х. Ф. Мура и Н. Ж. Аллемана для свинца. Хотя точки при малых скоростях деформации кажутся несколько разбросанными, они достаточно хорошо ложатся вдоль кривой, представляющей $x = \text{sh } y$, особенно, если x растет.

Дальнейшие опытные данные и сравнение их с теоретическими будут вскоре нами опубликованы.

Г. ГЕНКИ

НОВАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ, УПРОЧНЕНИЯ, ПОЛЗУЧЕСТИ И ОПЫТЫ НАД НЕУПРУГИМИ МЕТАЛЛАМИ *)

Появившиеся в последнее время исследования в области ползучести материалов при высоких температурах положили основу для дальнейших как экспериментальных, так и теоретических работ в этой области [106]. Однако для малых скоростей деформации опыты дают лишь сомнительные результаты, и в этих случаях необходимо пользоваться теоретической экстраполяцией [107]. Задачей настоящей статьи является не рассмотрение новых теорий пластичности, ползучести и упрочнения, а лишь построение последовательной картины этих явлений.

I. Физические данные, характеризующие поведение металлов. Уже неоднократно отмечалось, что законы математической теории, описывающей поведение материалов, недостаточно полно охватывают физическую сущность явлений, а потому инженер, занимающийся испытанием материалов, склонен недооценивать значения теоретических исследований. Такой ложный взгляд объясняется недопониманием значения математических теорий.

Значение математической теории заключается не в подробной характеристике свойств отдельных материалов, а в обосновании данных, помогающих определить и предсказать истинное поведение материалов.

Однако авторитетные ученые и инженеры уже признали ценность выводов прикладной механики и математической физики и пытались использовать методы классической теории упругости с тем, чтобы

*) Trans. A. S. M. E., APM, oct.-dec., pp. 151--155 (1933).

свести имеющиеся данные о материале к определенным физическим константам, которые могут быть определены и вычислены [108].

В основу математической теории должны быть положены физические данные, общие для всех пластических металлов. При этом необходимо принять во внимание следующее:

1. Все металлы являются поликристаллическими. Напряжение и деформация определяются лишь для элемента, содержащего тысячи кристаллических зерен. Истинные напряжения и деформации на границах зерен мы называем *микронапряжениями и микродеформациями*. Эти микронапряжения и микродеформации в настоящее время не могут быть определены, так как измерения дают лишь средние статистические данные.

2. Явление пластичности может быть вызвано двумя причинами: тепловые движения молекул материала, находящегося в напряженном состоянии, могут вызвать изменение расстояния между точками, находящимися на определенном расстоянии одна от другой, — *термическая пластичность*. Отдельные кристаллические зерна могут претерпевать конечные деформации вследствие скольжения по некоторым плоскостям — *атермическая пластичность*.

3. Пластичность поликристаллических металлов всегда представляет сочетание термической и атермической пластичности. Однако, для железа и стали, в особенности, можно утверждать, что пластичность начинается при некотором определенном значении интенсивности напряжения, определяемой следующим образом:

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}, \quad (1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения, а $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ — гидростатическая часть напряжения.

Интенсивность является положительной величиной и не зависит от гидростатического напряжения σ .

Условие пластичности выражается уравнением

$$|\sigma_i| = 2k = \text{const.}$$

4. При повышенных температурах нагруженный материал не достигает статического равновесия, а непрерывно течет (ползучесть). Для больших скоростей деформации известна эмпирическая формула зависимости скорости деформации от напряжения.

5. Как в статике сыпучей среды, когда мы рассматриваем пассивное и активное давление земли, так и здесь мы должны различать два упруго-пластических состояния: при нагрузке и при разгрузке. Практически пластичность может появиться лишь в случае нагружения. Запишем условия нагружения следующим образом:

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dt} > 0; \quad \frac{d\bar{\sigma}_r}{dt} = 0.$$

Здесь $\bar{\sigma}_r$ — значение микронапряжений.

Условие разгрузки имеет вид:

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dt} < 0.$$

Ниже мы покажем, что все эти условия могут быть получены на основе математической теории, содержащей классическую теорию как частный случай и в то же время разрешающей проблему ползучести при малых скоростях деформации, без дополнительных условных допущений. Прежде чем давать математические формулы, выясним, как следует понимать термины „напряжение“ и „микронапряжение“ [83].

Макромеханическое напряжение есть сила, действующая на единицу поверхности, представляющей поперечные сечения сотен кристаллических зерен. Если бы представлялось возможным определить напряжение в каждом отдельном зерне, мы бы, переходя от одного кристалла к другому, не обнаружили постоянства напряжения. Имеет ли определение истинного напряжения практическое значение? Очевидно, нет, так как напряжения в отдельных кристаллах не представляют интереса. Однако истинная упругая энергия, накопившаяся в теле, имеет для нас чрезвычайно большое

значение, так как, чтобы создать ее, нужно затратить равную по величине механическую энергию.

Количество механической энергии, определяемое средней величиной макромеханических напряжений, естественно, меньше истинной упругой энергии. Очевидно, истинная упругая энергия, накопленная в теле, связана с системой микронапряжений $\bar{\sigma}_i$ ($i=1, 2, 3$) и с системой обычных (средних) напряжений σ_i ($i=1, 2, 3$).

Чтобы помочь разобраться в этих двух системах напряжений, допустим, что каждая из них связана с собственной упругой структурой, а также, что обе структуры вынуждены находиться в одном и том же пространстве. Назовем эти две структуры системой $\bar{\sigma}_i$ и системой σ_i .

Допустив теперь, на один момент, что системы $\bar{\sigma}_i$ не существует, приходим к классической теории идеально пластического тела.

Обозначая главные удлинения через e_1, e_2, e_3 , мы, вычитая величину $e = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3}$, можем исключить изменения объема и получить чистую деформацию в виде

$$e_i - e \quad (i=1, 2, 3).$$

В упругой области при $\sigma_r \leq 2P$ получим закон Гука в следующей форме

$$\sigma_i = \sigma = 2G(e_i - e) \quad (i=1, 2, 3). \quad (2)$$

Относительная деформация определяется как логарифм отношения истинной длины к первоначальной. Закон упругости для изменения объема

$$\sigma = 3Ke \quad (2a)$$

остается одинаковым как в упругой, так и в пластической областях. Если $\sigma_r = 2P$ и система продолжает нагружаться, следует ввести понятие интенсивности деформации:

$$e_r - e = \sqrt{(e_1 - e)^2 + (e_2 - e)^2 + (e_3 - e)^2}, \quad (2b)$$

дающее зависимость

$$\sigma_i - \sigma = 2P \frac{e_i - e}{e_r - e} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2c)$$

удовлетворяющую условию пластичности $\sigma_r = 2P$.

Разгрузка подобной системы не вызывает дальнейшего явления текучести, если остающиеся после разгрузки напряжения не превышают значений допускаемых напряжений.

Затруднения, возникающие при рассмотрении такого идеально пластического тела, заключаются в том, что при нагружении образца напряжение должно оставаться одинаковым, независимо от того, с какой скоростью деформации производится опыт за пределом упругости. Как известно, работа деформации тела должна быть превращена в тепловые колебания, а такое превращение требует определенного времени. К тому же, если мы сократим это время, то нужно преодолеть силы инерции молекул, которые возникают независимо от ускорений макромеханической системы, рассматриваемых в основном уравнении динамики.

Идеально пластическое состояние тела, следовательно, является статически возможным, но динамически невозможным. Кроме того, так как металлы имеют зернистую структуру, истинные напряжения у границы зерен перетерпевают разрыв, и явление упрочнения должно быть особо объяснено. Для устранения математических трудностей, возникающих при этом, берем простейший закон для упрочнения, а именно:

$$\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma} = 2H(e_i - e). \quad (3)$$

Принимая $\bar{\sigma} = 0$ для полного напряжения, получим выражение:

$$\sigma_i + \bar{\sigma}_i - \sigma = 2(A + H)(e_i - e). \quad (3a)$$

Следует иметь в виду, что влияние упрочнения имеет место также в пределах упругости, но здесь оно не может быть замечено, так как коэффициент упрочнения H настолько мал по сравнению с G , что даже

колебания значения G являются большими. Мы имеем, таким образом, двухфазную систему, или две упругие структуры, подвергаемые одинаковым деформациям, причем одна система ($\bar{\sigma}_i$) по сравнению с другой (σ_i) имеет очень незначительный модуль сдвига ($H \cong 10^{-3}G$). Система σ_i имеет ту особенность, что интенсивность напряжения никогда не превышает постоянного значения $2P$. Интенсивность напряжения $\bar{\sigma}_r$ системы $\bar{\sigma}_i$ безусловно также ограничена определенным пределом, но в настоящее время нам мало что известно относительно этого предела. Очевидно лишь, что с повышением температуры появляется заметная релаксация. Вполне возможно, что для появления релаксации должна быть достигнута определенная интенсивность микронапряжения. В дальнейшем мы вернемся к этому вопросу.

Здесь мы предположим, что релаксация возникает немедленно, но лишь в системе $\bar{\sigma}_i$. Система же σ_i релаксации не подвергается.

Если мы вспомним, что система $\bar{\sigma}_i$ представляет лишь упругую энергию, вызванную нарушением непрерывности напряжений у границ зерен, то поймем, что механическая энергия, сконцентрированная в таком небольшом пространстве, вероятно, переходит в тепловое движение молекул, причем это происходит с наибольшей легкостью в случаях, когда энергия микронапряжений велика.

Очевидно, что уравнение (3) должно быть заменено другим, которое учитывает рассеяние энергии.

Согласно теории Максвелла:

$$\frac{d\bar{\sigma}_i}{dt} = 2H \frac{d(e_i - e)}{dt} - \frac{\sigma_i}{T}. \quad (4)$$

Если мы захотим теперь приложить к нашей теории данные Дейтлера, Надаи и Зодерберга, то будем иметь лишь одно возможное значение для времени релаксации T . Оно должно зависеть от интенсивности напряжения $\bar{\sigma}_i$, а именно:

$$T = T_0 \frac{\omega |\bar{\sigma}_r|}{e^{|\bar{\sigma}_r|} - 1}, \quad (4a)$$

где T_0 — время релаксации для небольших значений ω ; $1/\omega$ имеет размерность напряжения и является новой важной константой.

Простой моделью такой упруго-пластической системы является стальной образец с приклеенным к его поверхности резиновым слоем. Пластические деформации стального образца будут сопровождаться упругим растяжением резинового слоя.

В связи с большим различием в значениях модулей упругости, разгрузка вызовет лишь небольшое ослабление напряжения в резине. Если же мы возьмем сырую резину, то будет иметь место релаксация, и через несколько дней напряжения в резине также исчезнут.

Мы видим, что уравнения (1) — (4) дают схему, пригодную для изучения неупругих состояний вещества. Каждый вводимый коэффициент имеет определенное механическое значение. На основе этих уравнений может быть рассмотрен целый ряд интересных проблем, касающихся процессов штамповки, а также значительно упрощена экспериментальная работа.

II. Некоторые приложения уравнений пластичности и ползучести. Будем рассматривать материал как несжимаемый. Индексы у напряжений в дальнейшем мы опускаем, это не должно привести к смешению с ранее введенными обозначениями.

Количество механической энергии, необходимой для деформации образца. Рассмотрим прежде всего простой опыт на растяжение и сжатие. Для осевой деформации мы введем обозначения: λ — относительное удлинение, σ — напряжение и

$\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} p$ — предел упругости.

Наши уравнения упростятся и будут следующими: $\sigma = 3G\lambda$ в упругой области; $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}$ в пластической области.

$$\frac{d\sigma}{dt} = 3H \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\sigma}{T}, \quad (5)$$

$$T = T_0 \frac{\omega |\bar{\sigma}| \sqrt{\frac{2}{3}}}{e^{\omega |\bar{\sigma}|} \sqrt{\frac{2}{3}} - 1}. \quad (6)$$

Записывая, в целях упрощения, вместо $\omega \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ просто ω , получим:

$$T = \frac{T_0 \omega |\bar{\sigma}|}{e^{\omega |\bar{\sigma}|} - 1}. \quad (7)$$

Если один конец образца укреплен, а другой движется со скоростью v , то скорость эта не может быть постоянной, если мы хотим иметь постоянную скорость течения.

При постоянной скорости имеем

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\lambda}{dt} = \text{const.}$$

При $t=0$ длина есть l_0 и скорость v_0 , в момент времени t длина есть l и $v = \frac{d\lambda}{dt}$. Получаем:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{l}{l_0} \right) \right] = \frac{dl}{dt} \cdot \frac{1}{l} = \frac{v}{l},$$

откуда

$$\frac{v_0}{l_0} = \frac{v}{l},$$

что является условием постоянной скорости течения.

Соединяя уравнения (5) и (7) и учитывая, что в уравнение (7) надо ввести абсолютные величины, получим:

$$\bar{\sigma} = \pm \frac{1}{\omega} \cdot \ln \left\{ 1 + 3N\omega \cdot v_0 \cdot \frac{T_0}{l_0} \right\}, \quad (8)$$

где $+$ (плюс) обозначает растяжение, а $-$ (минус) сжатие.

Согласно принятому закону ползучести, поведение материала должно быть совершенно одинаково как при растяжении, так и при сжатии. Для сохранения $\frac{v}{l}$ постоянным, конец образца должен двигаться ускоренно в случае растяжения и замедленно — в случае сжатия.

Если F есть мгновенное поперечное сечение, то работа будет равна

$$Wv = \int (\sigma_0 + \bar{\sigma}) \cdot F \delta l$$

и при

$$F \cdot l = v = \text{const}$$

$$W = \left\{ \sigma_0 + \frac{1}{\omega} \ln \left[1 + 3H\omega v_0 \frac{T_0}{\dot{\lambda}_0} \right] \right\} \ln \left(\frac{l}{l_0} \right). \quad (9)$$

Это уравнение можно применять для определения степени податливости материала. Возьмем постоянную величину W и сравним соответствующие деформации. Беря энергию W в виде кинетической энергии и решая уравнение (5) для случая удара, получим величину динамической вязкости или ковкости.

Вообще мы должны подчеркнуть, что применение какой-либо пропорциональности между скоростью деформации и напряжением встречает серьезные возражения. Для доказательства возьмем более простой случай, когда ω мало. Тогда, по закону Максвелла, получим

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = 3H \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\bar{\sigma}}{T_0}. \quad (10)$$

Допустим, что скорость v быстро убывает, так что $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{v_0}{l_0} e^{-\frac{t}{T_0}}$. Вводя это выражение в уравнение (10), получим уравнение

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} + \frac{\bar{\sigma}}{T_0} = \frac{3Hv_0}{l_0} e^{-\frac{t}{T_0}}, \quad (11)$$

решение которого имеет вид

$$\bar{\sigma} = e^{-\frac{t}{T_0}} \left(\bar{\sigma}_0 + \frac{3Hv_0}{l_0} \cdot t \right);$$

при $t = 0, \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0$; или, используя значение $\frac{d\lambda}{dt}$, получим

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{\bar{\sigma}_0 v_0}{l_0} - 3Ht \right) \frac{d\lambda}{dt}. \quad (12)$$

Эта формула дает так называемый коэффициент вязкости как функцию времени. Ясно, что при допущении релаксации, вообще говоря, трения, аналогичного вязкости в жидкостях, не существует.

Возвращаясь снова к нашему опыту на растяжение и сжатие в пластической области, выясним, является ли закон трения, определяемый для стационарного течения уравнением (8), хотя бы приближенно пригодным для тех случаев, когда скорость не удовлетворяет условию $\frac{v_0}{l_0} = \frac{v}{l}$. Большинство из наших испытательных машин сконструировано таким образом, что конец образца перемещается с постоянной скоростью. В этом случае

$$l = l_0 + v_0 t; \quad \frac{dl}{dt} = \frac{v_0}{l} \quad \text{и} \quad dl = v_0 dt.$$

Вводя в качестве новой переменной $x = \frac{l-l_0}{v_0}$ вместо t и $\sigma = 3H\Sigma$ для нахождения численных значений, получаем следующее видоизмененное уравнение (10):

$$\frac{d\Sigma}{dx} + \Sigma = \frac{1}{x}. \quad (13)$$

Для интегрирования воспользуемся известным обозначением интегральной показательной функции:

$$Ei(x) = \int_0^x e^x \frac{dx}{x}.$$

Решение уравнения (13) дает

$$\Sigma = e^{-x} \left[\frac{e^{x_0}}{x_0} + Ei(x) - Ei(x_0) \right] \quad (14)$$

для растяжения и

$$\Sigma = e^x \left[-\frac{e^{-x_0}}{x_0} + Ei(-x) - Ei(-x_0) \right] \quad (15)$$

для сжатия. Уравнение (8) при $\omega = 0$ дает, после раскрытия неопределенности: $\sigma = 3Hv_0 \frac{T_0}{l}$.

Для закона трения, принятого в гидродинамике, имеем выражение

$$\Sigma = \frac{1}{x}. \quad (16)$$

Для сравнения приводим значения Σ , найденные из уравнений (14), (15) и (16):

Р а с т я ж е н и е			С ж а т и е		
x	Σ (14)	Σ (16)	x	Σ (15)	Σ (16)
1,0	1,0	1,0	2,0	0,5	0,5
1,2	0,99	0,84	1,8	0,51	0,55
1,4	0,99	0,72	1,6	0,52	0,63
1,6	0,97	0,63	1,4	0,55	0,72
1,8	0,97	0,55	1,2	0,59	0,84
2,0	0,91	0,50	1,0	0,65	1,00

Сравнение показывает весьма значительное отклонение от вязкости жидкостей. Естественно, что для больших значений x (14) и (15) асимптотически переходят в $\frac{1}{x}$. Но приближенное равенство достигается только для значений $x \geq 17$.

Выражение $\frac{1}{x}$ дает для величины работы результат слишком малый при растяжении и слишком большой при сжатии, в то время как применение наших уравнений даст результаты, сравнимые с опытными данными.

Так как время релаксации зависит от интенсивности напряжения, для получения максимального влияния при наименьшей затрате энергии напряжение должно быть приложено в возможно более концентрированной форме. Этим объясняется, почему в прокатных станах последних конструкций применяют небольшие валки, непосредственно соприкасающиеся с пластическим материалом. Во избежание изгиба, эти вращающиеся цилиндры поддерживаются большими. Правда, конструкторы, проектирующие эти станы, пришли к такому выводу независимо от теоретических данных, но это показывает, что даже в производственном процессе может иметь место целый ряд достижений в случае применения законов пластичности и ползучести.

III. Опыты на растяжение стальной проволоки. Развитие математической теории пластической деформации должно дать обобщение большого количества данных, включая также обычный опыт на растяжение.

Мы хотим теперь выяснить, что произойдет, если мы нагрузим проволоку и затем оставим ее с подвешенным грузом, так что напряжение превысит предел пластичности.

Здесь, вследствие ускорения массы груза, будут иметь место динамические влияния, но, ввиду медленного движения, мы можем этим влиянием пренебречь.

В упругой области мы имеем, как и ранее:

$$\sigma = 3G\lambda, \quad (17)$$

напряжение от упрочнения

$$\bar{\sigma} = 3H\lambda, \quad (18)$$

и общее напряжение $\sigma + \bar{\sigma} = 3(G + H) \cdot \lambda$.

После перехода напряжения за предел упругости получаем следующее его значение $\sigma_0 + \bar{\sigma} = \sigma_0 + 3H\lambda$, справедливое до некоторой критической интенсивности напряжения упрочнения $\bar{\sigma}$. Если это напряжение также пройдено, начинается релаксация по закону, определяемому уравнениями:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = 3H \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{T}, \quad (19)$$

$$T = T_0 \frac{\omega |\bar{\sigma}|}{e^{\omega |\sigma|}}. \quad (20)$$

Введение предельной интенсивности напряжения упрочнения является предположительным и должно быть доказано. Все упругие константы зависят от температуры, а мы знаем, что температура является при определении колебательной энергии молекул лишь косвенным фактором. Но мы видим, что интенсивность напряжения в известном смысле тождественна упругой энергии этих микронапряжений. Механическая энергия при переходе в тепловую может вызвать промежуточную стадию в виде упругой микроэнергии. В отношении микромеханической энергии эта упругая энергия микро-

напряжения в границах зерен учитывается лишь статистически, и *интенсивность* этих напряжений, как мы это установили, является *скалярной величиной того же порядка, что и температура*. С физической точки зрения интенсивность напряжения есть своеобразная „холодная“ температура. Так как в твердых телах значительное количество энергии накапливается в виде упругой энергии, мы не можем создать теорию пластического состояния без этих двух параметров — температуры и интенсивности напряжения.

Но вернемся к нашему примеру. Задача эта является двухмерной, так как H есть функция координаты и времени. Растягивая проволоку при постоянной нагрузке, мы для каждого данного момента имеем площадь поперечного сечения F , которая следует уравнению:

$$F(\sigma_0 + \bar{\sigma}) = \text{const.}$$

Отсюда, дифференцируя, получаем:

$$(\sigma_0 + \bar{\sigma}) \delta F + F \delta \bar{\sigma} = 0.$$

Вследствие несжимаемости материала, предполагаем

$$\delta(F \cdot l) = F \delta l + l \delta F = 0.$$

Из этих уравнений получаем

$$\delta \bar{\sigma} = (\sigma_0 + \bar{\sigma}) \cdot \frac{\delta l}{l} = (\sigma_0 + \bar{\sigma}) \cdot \delta \lambda. \quad (21)$$

Решение дает:

$$\sigma_0 + \bar{\sigma} = (\sigma_0 + \bar{\sigma}_0) e^{\lambda - \lambda_0}, \quad (22)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_0 + \bar{\sigma}_0}{3(G + H)} \approx \frac{\sigma_0}{3G}. \quad (23)$$

Вводя (21) в уравнение (19), получим соотношение, которое позволяет определить предельную деформацию. Если этот предел деформации достигнут, проволока перестанет равномерно удлиняться, получит резкое сокращение площади поперечного сечения в каком-то месте и разрушится.

Из уравнений (19) и (21) имеем

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{(\bar{\sigma} - \sigma')(\sigma_0 + \bar{\sigma})}{T[3H - (\sigma_0 + \bar{\sigma})]}. \quad (24)$$

Последнее уравнение теряет смысл для $\bar{\sigma} < \sigma'$; но если этот предел превзойден, прирост напряжения делается неопределенным при

$$3H = \sigma_0 + \sigma' = (\sigma_0 + \bar{\sigma}_0) e^{\lambda - \lambda_0} \quad (25)$$

или

$$e^{\lambda} = e^{\lambda_0} \cdot \frac{3H}{\sigma_0 + \bar{\sigma}_0} \cong 3 \frac{H}{\sigma_0}. \quad (26)$$

Критическая деформация, следовательно, не зависит от скорости

$$\lambda_{\text{крит.}} = \ln \left(3 \frac{H}{\sigma_0} \right).$$

Деформация, достигаемая до момента уменьшения площади поперечного сечения, дает возможность определить H , если σ_0 известно. Мы видим, что при всех обстоятельствах $3H > \sigma_0$.

Интеграл уравнения (19) можно выразить через интегральные логарифмы, но проще его интегрировать численно.

Критическое напряжение σ' можно найти путем точного вычисления скорости ползучести, и оно должно быть у этого предела равно нулю.

Единственным предположением нашей теории является допущение одинакового закона упругости для микронапряжений и для упругих напряжений. Но если мы даже обнаружим здесь какие-либо отклонения, то все же будем продолжать пользоваться линейным законом. Даже в этом случае математические трудности пространственной задачи достаточно велики.

IV. Движение цилиндра в пластической массе и глубина распространения зоны пластической деформации. Глубина, которой может достигнуть зона пластичности, является существенным фактором при расчете машин для обработки металлов давлением. Граничная поверхность между упругой и пластической областью является более слабой, чем упруго-деформированная

часть, и обработка такой поверхности должна быть по возможности ограничена. При высадке металлов мы получаем для пластического потока „мертвые“ углы в большинстве случаев там, где изменяется его направление.

Разрешению проблемы пластического течения помогает то, что линии тока могут быть вычислены, как и для вязкой жидкости. Законы вязкой жидкости неприменимы лишь для зависимости между напряжением и скоростью деформации. Вообще можно рассмотреть движение упруго-пластического тела в координатах Эйлера, так как упругая энергия связана с движущейся массой, а не с пространственным элементом.

Однако случай цилиндра, движущегося в пластической массе, представляет исключение и может быть рассмотрен классическими методами, так как линии тока представляют окружности и деформация остается постоянной по этим окружностям.

Предположим, что t_0 — предельная касательная сила пластического материала и \bar{t} — часть, зависящая от упрочнения. Распределение напряжения определяется одним только уравнением равновесия. В полярных координатах получим:

$$\frac{d(-t_0 + \bar{t})}{dt} - t_0 + \bar{t} = 0, \quad (27)$$

где a — радиус цилиндра,

r — радиус элемента,

r_0 — радиус границы между упругой и пластической частями.

Подставляя $r = a\rho$, чтобы получить безразмерные соотношения, находим следующее решение:

$$\bar{t} = -t_0 \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 - 1 \right], \quad (28)$$

где ρ_0 неизвестно и может быть найдено только, если установлена формула для скорости. Единственная скорость, которую может иметь точка, направлена перпендикулярно радиусу. Если v — скорость на радиусе r и v_0 — скорость при $r = a$, получим скорость деформации

$$\gamma = \frac{dv}{dr} = \frac{v}{2}. \quad (29)$$

При стационарном течении

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = G\gamma - \frac{\bar{t}}{T}, \quad \text{при } \frac{d\bar{t}}{dt} = 0,$$

$$\bar{t} = GT \cdot \gamma, \quad (30)$$

где

$$T = T_0 \frac{\omega(\bar{t}) \sqrt{2}}{e^{\omega(\bar{t})} \sqrt{2}}. \quad (31)$$

Сравнивая уравнения (28), (29), (30) и (31), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{d\rho} - \frac{v}{\rho} = \frac{a}{G\omega T_0 \sqrt{2}} \left(e^{t_0 \omega \sqrt{2} \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 - 1 \right]} - 1 \right). \quad (32)$$

Решение его есть

$$v = \rho \left[v_a - \frac{a}{G\omega T_0 \sqrt{2}} \right] \int_1^{\rho} \left(e^{\omega t_0 \sqrt{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 - 1} - 1 \right) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (33)$$

Мы видим, что условие $v = v_a$ выполняется для $\rho = 1$. Решение легко может быть сведено к интегральной показательной функции.

Обозначая снова интеграл $\int_{\infty}^y e^y \frac{dy}{y}$ через $Ei(y)$, получаем решение уравнения (32) в следующем виде

$$v = a\rho \left(\frac{v_a}{a} + \frac{\ln \rho}{G\omega T_0 \sqrt{2}} - \frac{e^{-\omega t_0 \sqrt{2}}}{2G\omega T_0 \sqrt{2}} \left[Ei(\beta) - Ei\left(\frac{\beta}{\rho^2}\right) \right] \right),$$

где

$$\beta = \omega T_0 \sqrt{2} \rho_0^2. \quad (34)$$

При $\rho = \rho_0$ получаем уравнение, в котором ρ_0 является единственной неизвестной величиной

$$\frac{Ei(\omega t_0 \sqrt{2} \rho^2) - Ei(\omega t_0 \sqrt{2})}{2e^{\omega t_0 \sqrt{2}}} - \ln \rho_0 = \frac{v_a}{a} T_0 \omega G \sqrt{2}. \quad (35)$$

При больших значениях $\omega t_0 \sqrt{2}$, сравнительно легко найти численное решение для этого трансцендентного уравнения. Например, при

$$\omega t_0 \sqrt{2} = 20, \quad \frac{v_a}{a} T_0 \omega G \sqrt{2} = 1000, \text{ и}$$

мы получаем $\rho_0 = 1,22$.

Приложение 1)

Таблица 1

РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ И ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗ НИХ ДАННЫЕ

Испы- тание	$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{\sigma_e - \sigma_r}$	μ	$\sigma_1 - \sigma_2$	σ_z	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_z}$	10 0 $\Delta \varepsilon_e$	1000 $\Delta \varepsilon_t$	ν
Железная труба Fe III 5								
a	0,50	- 0,00	20,0	19,4	1,03	3,4	- 0,27	- 0,13
b	0	- 1	—	—	1	4,6	- 1,06	- 0,40
c	1,01	+ 0,99	21,0	20,5	1,02	5,6	+ 7,50	+ 0,82
d	0	- 1	—	—	1	4,2	- 1,74	- 0,79
e	0,50	+ 0,00	25,2	22,2	1,14	3,8	- 0,04	- 0,02
f	0	- 1	—	—	1	2,9	- 1,58	- 1,13
g	0,28	- 0,43	26,2	24,1	1,09	4,1	- 0,57	- 0,22
h	0,29	- 0,43	27,5	24,9	1,10	2,9	- 0,53	- 0,3
i	0	- 1	—	—	1	4,2	- 2,28	- 1,12
k	0,67	+ 0,34	28,4	25,5	1,11	4,8	+ 0,84	+ 0,24
l	0	- 1	—	—	1	4,0	- 1,82	- 0,90
m	0,81	+ 0,61	28,8	26,5	1,09	4,4	+ 1,82	+ 0,52
n	0	- 1	—	—	1	4,0	- 1,59	- 0,76
o	0,92	+ 0,85	28,8	27,5	1,05	5,2	+ 3,53	+ 0,76
p	0	- 1	—	—	1	3,0	- 1,59	- 1,06
q	0,15	- 0,70	30,7	28,6	1,07	4,2	- 0,87	- 0,35
r	0	- 1	—	—	1	3,4	- 1,14	- 0,60
s	0,50	0,00	32,8	29,2	1,12	4,8	- 0,08	- 0,02
t	0	- 1	—	—	1	3,6	- 1,56	- 0,85
u	0,28	- 0,44	32,3	29,5	1,09	4,9	- 0,84	- 0,28
v	0,67	+ 0,34	33,1	29,6	1,12	3,6	+ 0,65	+ 0,25
w	0,67	+ 0,34	33,1	29,8	1,11	3,2	+ 0,84	+ 0,34
x	0	- 1	—	—	1	3,8	- 1,95	- 1,04
Железная труба Fe III 4								
a, b	0	- 1	—	—	1	—	—	—
c, d	0,50	- 0,00	20,5	19,2	1,07	—	—	—

1) К статье Лоде, стр. 163—205.

Таблица 1
(продолжение)

Испы- тание	$\frac{\sigma_l - \sigma_r}{\sigma_e - \sigma_r}$	μ	$\sigma_1 - \sigma_3$	σ_z	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_z}$	1000 $\Delta \varepsilon_e$	1000 $\Delta \varepsilon_l$	ν
<i>e</i>	0	-1	—	—	1	—	—	—
<i>f</i>	1,01	+0,97	22,8	21,7	1,05	—	—	—
<i>g</i>	0	-1	—	—	1	—	—	—
<i>h</i>	0	-1	—	—	1	—	—	—
<i>i</i>	0,50	-0,00	29,1	26,1	1,11	—	—	—
<i>k</i>	0	-1	—	—	1	—	—	—
<i>l</i>	0,28	-0,43	30,2	27,4	1,10	—	—	—
<i>m</i>	0,15	-0,70	29,6	27,7	1,07	—	—	—
<i>n</i>	0	-1	—	—	1	—	—	—
<i>o</i>	0,66	+0,33	31,8	28,7	1,11	—	—	—
<i>p</i>	0,80	+0,60	31,6	29,1	1,09	—	—	—
<i>q</i>	0	-1	—	—	1	—	—	—
<i>r</i>	0,50	-0,01	33,6	29,6	1,13	—	—	—
<i>s</i>	0,01	+0,09	31,5	30,2	1,04	—	—	—
<i>t, u</i>	0	-1	—	—	1	—	—	—

Железная труба Fe IV 1

<i>a</i>	0,31	-0,38	—	—	11,6	-1,36	-0,19	—
<i>b</i>	0,31	-0,38	—	—	8,1	-1,00	-0,20	—
<i>c</i>	0,31	-0,39	—	—	9,6	-1,97	-0,35	—
<i>d</i>	0,31	-0,39	—	—	9,6	-1,90	-0,33	—
<i>e</i>	0,30	-0,33	—	—	11,2	-2,35	-0,35	—
<i>f</i>	0	-1	—	—	4,5	-2,10	-0,91	—
<i>g</i>	0	-1	—	—	10,2	-4,79	-0,93	—
<i>h</i>	0,16	-0,68	—	—	11,2	-3,57	-0,57	—
<i>i</i>	0,16	-0,68	—	—	8,9	-2,59	-0,51	—
<i>k</i>	0,16	-0,68	—	—	10,0	-3,40	-0,61	—
<i>l</i>	0,16	-0,68	—	—	9,8	-3,10	-0,56	—
<i>m</i>	0	-1	—	—	11,0	-5,08	-0,90	—

Железная труба Fe IV 2

<i>a</i>	0	-1	—	—	—	15,8	-5,13	-0,58
<i>b</i>	0	-1	—	—	—	10,2	-4,12	-0,76
<i>c</i>	0	-1	—	—	—	9,9	-4,82	-0,96

Таблица 1
(продолжение)

Испы- тание	$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{\sigma_e - \sigma_r}$	μ	$\sigma_1 - \sigma_3$	σ_z	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_z}$	1000 $\Delta \epsilon_e$	1000 $\Delta \epsilon_t$	ν
<i>d</i>	0,70	+ 0,39	—	—	—	4,3	+ 0,94	+ 0,30
<i>e</i>	0,30	— 0,40	—	—	—	9,8	— 2,47	— 0,43
<i>f</i>	0,16	— 0,68	—	—	—	9,9	— 3,42	— 0,62
Медная труба Си 5								
<i>a</i>	0	— 1	—	—	—	5,1	— 1,60	— 0,56
<i>b</i>	0	— 1	—	—	—	5,4	— 2,20	— 0,77
<i>c</i>	0	— 1	—	—	—	4,5	— 2,30	— 1,03
<i>d</i>	0	— 1	—	—	—	4,9	— 2,91	— 0,92
<i>e</i>	0,75	+ 0,50	—	—	—	4,6	+ 2,21	+ 0,58
<i>f</i>	0,75	+ 0,51	—	—	—	10,1	+ 3,00	+ 0,34
Медная труба Си 6								
<i>a</i>	0	— 1	—	—	+ 1	3,0	— 1,43	— 0,93
<i>b</i>	0	— 1	—	—	1	3,0	— 1,26	— 0,80
<i>c</i>	0,58	+ 0,15	7,6	6,6	1,14	3,8	+ 0,41	+ 0,15
<i>d</i>	0	— 1	—	—	1	2,8	— 1,36	— 0,95
<i>e</i>	1,01	+ 0,99	8,8	8,8	1,02	5,5	+ 6,53	+ 0,89
<i>f</i>	0	— 1	—	—	1	4,1	— 1,93	— 0,92
<i>g</i>	0,58	+ 0,15	11,8	10,6	1,10	5,0	+ 0,17	+ 0,05
<i>h</i>	1,44	+ 0,38	12,3	10,9	1,13	—	+ 0,04	—
<i>i</i>	0,53	+ 0,17	12,8	11,6	1,11	3,7	— 0,00	— 0,00
<i>k</i>	0	— 1	—	—	1	3,6	— 1,80	— 0,98
<i>l</i>	0	— 1	—	—	1	7,7	— 3,42	— 0,85
<i>m</i>	0,76	+ 0,53	13,9	13,0	1,06	5,7	+ 1,93	—
<i>n</i>	0	— 1	—	—	1	4,5	— 1,90	— 0,80
<i>o</i>	0,58	+ 0,16	14,9	13,4	1,11	4,5	+ 0,20	+ 0,07
<i>p</i>	0	— 1	—	—	1	3,6	— 1,62	— 0,88
<i>q</i>	0,76	+ 0,53	14,9	13,7	1,09	4,0	+ 1,25	+ 0,40
<i>r</i>	0	— 1	—	—	1	2,4	— 0,81	— 0,62

Таблица 1
(окончание)

Испы- тание	$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{\sigma_e - \sigma_r}$	μ	$\sigma_1 - \sigma_3$	σ_z	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_z}$	1000 $\Delta \varepsilon_e$	1000 $\Delta \varepsilon_l$	γ
----------------	---	-------	-----------------------	------------	--	--------------------------------	--------------------------------	----------

Никелевая труба Ni 1

<i>a</i>	0	-1	—	—	1	5,8	-2,49	-0,82
<i>b</i>	0,49	-0,02	11,4	10,0	1,14	4,5	+0,17	+0,06
<i>c</i>	0	-1	—	—	1	5,4	-2,53	-0,93
<i>d</i>	1,00	+1,00	15,7	15,0	1,04	6,0	+6,68	—
<i>e</i>	0	-1	—	—	1	5,0	-2,39	-0,96
<i>f</i>	0,49	-0,02	22,2	19,8	1,12	5,4	0,07	+0,02
<i>g</i>	0	-1	—	—	1	4,8	-2,20	-0,79
<i>h</i>	0,79	+0,58	—	—	—	9,6	+2,67	+0,36
<i>i</i>	0,36	-0,29	—	—	—	7,0	-1,01	-0,23
<i>k</i>	0,60	+0,21	—	—	—	8,0	+0,51	+0,09
<i>l</i>	0,61	+0,21	—	—	—	9,4	+0,37	+0,06
<i>m</i>	0,36	-0,29	—	—	—	—	-0,37	—
<i>n</i>	0	-1	—	—	1	5,8	-2,60	-0,88
<i>o</i>	0,49	-0,02	34,2	30,8	1,11	6,0	+0,34	+0,08
<i>p</i>	0	-1	—	—	1	5,2	-2,30	-0,86

Примечание: σ_z — напряжение текучести при растяжении
в $\text{кг} \cdot \text{мм}^2$,
 $\Delta \varepsilon_l$ — относительное удлинение.

БИБЛИОГРАФИЯ
К ПРЕДИСЛОВИЮ РЕДАКТОРА

1. Соболев С. Л., Труды Сейсмологического института АН СССР, № 49, 1935.
2. Христианович С. А., Математич. сб., новая серия, I (43), вып. 4, 1938.
3. Соколовский В. В., Теория пластичности, изд-во АН СССР, 1946.
4. Галин Л. А., Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 4, 1944.
5. Галин Л. А., Прикладная математика и механика, т. X, вып. 3, 1946.
6. Шевченко К. Н., Известия ОТН, № 3, 1946.
7. Ишлинский А. Ю., Известия ОТН, № 3, 1945.
8. Ишлинский А. Ю., Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 3, 1944.
9. Ильюшин А. А., Прикладная математика и механика, т. VII, вып. 4, 1943.
10. Ильюшин А. А., Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 1, 1944.
11. Ильюшин А. А., Прикладная математика и механика, т. IX, вып. 3, 1945.
12. Ильюшин А. А., Прикладная математика и механика, т. IX, вып. 1, 1945.
13. Ильюшин А. А., Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 5, 1944.
14. Ильюшин А. А., Прикладная математика и механика, т. X, вып. 5—6, 1946.
15. Соколовский В. В., Прикладная математика и механика, т. IX, вып. 6, 1945.

БИБЛИОГРАФИЯ
К СТАТЬЯМ СБОРНИКА ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

1. H. Tresca, Mém. prés. p. div. sav. a l'Acad, de l'Inst. imp. de France, 18, 1868, pp. 739—799; 1872, pp. 75—135.
2. B. Saint-Venant, Comptes Rendus, 70, 1868, pp. 221—290.

3. J. Boussinesq, Mém. couronnées par. l'Acad. de Bruxelles, **40**, 1876.
4. M. Rankine, Phil. Trans., **40**, 1876.
5. M. Levy, Journal de Math. pures et appl., Ser. II, **18**, 1873.
6. E. Zermelo, Jahresbericht der Math. Vereinigung, **11**, 1902.
7. F. Klotter, Jahresbericht der Math. Vereinigung, **2**, 1893.
8. R. Mises, Enzykl. Art., **IV**, **10**, № 5, S. 187.
9. O. Mohr, Abhandl. a. d. Gebiete d. techn. Mechanik, 1906, Abt., **5**, S. 187.
10. Th. Kármán, Ztschr. VDI, 1911, S. 1749—1757.
11. L. Prandtl, Über die Härte plastischer Körper, Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1920, S. 74.
12. M. Lévy, Comptes Rendus, **73**, 1871.
13. A. Nadai, ZAMM, **1**, 1921, S. 20—28.
14. Th. Kármán, Enzykl. d. math. Wiss., Bd. IV—Mechanik, **4**, Teilband, S. 673 u. 745—747.
15. H. Bonte, Ztschr. VDI, **64**, № 51, 1920, S. 1671—1673.
16. A. G. Becker, Bull. Univ. of Illinois, **XIII**, № 32.
17. F. Seely a. W. Putman, Bull. Univ. of Illinois, **XVII**, 1919, № 11.
18. Madelung, Die math. Hilfsmittel des Physikers, 1922.
19. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 5. Aufl.
20. G. Liss, Stahl und Eisen, 1922, S. 816.
21. P. Haigh, Engineering, 1920, pp. 158—160.
22. H. Hencky, Verhandlungen d. I. Intern. Kongr. f. techn. Mechanik, Delft, 1924, S. 84—86.
23. J. Boussinesq, Annales de l'école norm. sup., **35**, 1918, pp. 70—128.
24. O. Mohr, Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials, Zt. VDI, 1900; Abhandl. a. d. Gebiete der techn. Mechanik, 1905—1913.
25. J. Guest, Phil. Mag., **50**, 1900.
26. M. Mesnager, Deformation et rupture des solides, Revue de Métallurgie, № 6 et 7, 1922.
27. Th. Kármán, Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck, Mitteilungen über Forschungsarbeiten VDI, Heft 118, 1912.
28. R. Böcker, Die Mechanik der bleibenden Formänderung in kristallinisch aufgebauten Körpern, Mitt. über Forschungsarbeiten VDI, Heft 175—176, 1915.

29. M. T. Huber, Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Anstrengung eines Materials, Lemberg, 1904.
30. А. Фепплъ, Сила и деформация, ч. I, ОНТИ, 1934.
31. H. M. Westergaard, On the Resistance of ductile Materials, Journal of Franklin Inst., May, 1920, p. 627.
32. M. Rosu. A. Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H., Zürich, Schweiz. Verband für die Materialprüfungen der Technik Zürich, Sept., 1926.
33. A. Nadai, Zur Mechanik der bildsamen Formänderungen Werkstoffausschußbericht des Vereins deutschen Eisenhüttenleute, № 56, 1925.
34. W. Lode, Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle, Zeitschrift für Physik, 1926 Heft 11—12.
35. M. Mesnager, Commun. prés. dev. le Congr. intern. d'essa des matériaux des constructions, I, 1901, pp. 143—183.
36. G. Sandel, Festigungsbedingungen, Diss., Stuttgart, 1919, Leipzig, 1925.
37. Girtler, Sitzungsbericht d. k. Akad. d. Wissensch. (Wien), 116 IIa, 3, 1907, S. 509—555.
38. F. Schleicher, ZAMM, 5, № 6, 1925, S. 478—479.
39. Bauschinger, Zt. für Baukunde, 1879, 282, Mitt. a. d. mech. techn. Labor. d. K.T.H., München, 3, 5, 7, 8.
40. M. Furlane, Encycl. Brit. Ged. 7, 1877, 796—825; Math. u. Phys. Pap, 3, 1890, S. I—112.
41. Platt a. Hayward, Proc. Inst. of Civ. Eng., 90, 1888, p. 382.
42. Unwin, Machine Design.
43. A. Föppl, Mitt. a. d. mech.-techn. Labor. d. K.T.H., München 27, 1900; 28, 1902; 29, 1904.
44. Coker, Trans. Roy. Soc. (Edinb.), 4011, 1901, pp. 263—293.
45. Hancock, Phil. Mag. (6), 11, 1906, pp. 276—282; 12, 1906, pp. 418—425; 15, 1908, pp. 214—222.
46. W. Scoble, Phil. Mag. (6) 12, 1906, pp. 533—547.
47. A. Nadai, Schweiz. Bauztg., 83, 1924, 14, S. 157—160; 15, S. 172—175.
48. P. Ludwik, Elemente der technologischen Mechanik, Berlin, 1909.
49. P. Ludwik u. R. Scheu, Stahl und Eisen, 45, 1925, 11, S. 373—381.

50. W. Mason, *Inst. Mech. Eng.*, 4, 1909, pp. 1205—1236.
51. C. A. M. Smith, *Engineering*, 88, 1909, pp. 238—243, 593—597, 629—632, 849—853; *Mech. Eng.*, 4, 1909, pp. 1237—1277.
52. L. Turner, *Engineering*, 88, 1909, pp. 169—170, 203—205; 92, 1911, pp. 115—117, 183—185, 246—250, 305—307.
53. G. Cook a. A. Robertson, *Engineering*, 92, 1911, pp. 786—789.
54. Haigh, P., *Rep. Assoc. Adv. Science*, 87 meet, 1919, pp. 486—495; 89 meet, 1921, pp. 324—329; 91 meet 1923, pp. 358—368.
55. Crackford, *Proc. Roy. Soc. (Edinb.)*, 32, 1911—1912, pp. 343—389.
56. Seigel et Cristin, *C. R.*, 179, 1924, pp. 253—256.
57. Seigel et Cristin, *Rev. de Métallurgie, Mém. (Bull. Soc. d'encouragement pour l'industrie nationale)*, 22, 1925, 6, pp. 374—382.
58. Cristin, *Genie Civil*, 88, 1926, 1, pp. 6—9.
59. *Genie Civil*, 87, 1925, 16.
60. Seigle, *C. R.*, 181, 1925, pp. 398—399; *Genie Civil*, 87, 1925, 17, pp. 345—349.
61. Bijlaard, *De Ingenieur*, № 23, 1933.
62. Bijlaard, *De Ingenieur*, № 8 u. 37, 1931.
63. Brillouin, *C. R.*, 179, 1924, pp. 1563—1566; *Ann. de phys.* (10), 3, 1925, pp. 129—144.
64. Seigle, *C. R.*, 178, 1924, pp. 2062—2065.
65. M. Roš u. A. Eichinger, *Diskussionsbericht, der Eidg. Materialprüfungsanstalt, Zürich*, № 34, 1929.
66. A. Nadai, *Der bildsame Zustand der Werkstoff*, 1927.
67. H. Hanemann u. R. J am a d a, *Arch. Eisenhüttenwesen*, 4, 1930, S. 353.
68. G. Sachs, *Der Zugversuch*, 1926.
69. F. Schleicher, *ZAMM*, 1926, 6, S. 199.
70. B. H. Hort, *VDI, Forschungsheft*, № 41, 1907.
71. B. B. Gutenberg u. H. Schlechtweg, *Zt. Phys.*, 31, 1930, S. 745.
72. L. Prandtl, *Spannungsverteilung in plastischen Körper*, *Verhandl. d. I. Intern. Kongr. für techn. Mechanik*, 1924, S. 45.
73. A. Nadai, *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.*, 52, (1), 1930.
74. L. Prandtl, *Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper*, *ZAMM*, 8, 1928, S. 85.

75. G. J. Taylor a. H. Quinney, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), **230**, 1931, p. 323.
76. R. Mises, ZAMM, 1928, **8**, S. 161.
77. F. Norton a. C. Soderberg, Trans ASME, **64**, 1932, pp. 769—777.
78. Chwalla, Report of the II Inst. Congr. for Bridge e. Struct. Eng., Vienna, 1928, pp. 321—322.
79. H. F. Moore, B. B. Betty a. C. W. Doblins, *ibid*, **32**, № 23, 1935.
80. I. M. Greenwood a. C. W. Orr, Proc. Inst. of Mining a. Metall № 5, 109, 1938.
81. I. McReown, Journ. of the Inst. of Metals, **60**, p. 201, 1937.
82. B. Chalmers, *ibid*, reprint., p. 243, 1937.
83. А. Надаи, Пластичность, ОНТИ, 1936.
84. J. M. Lessels a. C. W. Mac Gregor, Certain Phases of the Combined—Stress Problem, Proc. of the V Intern. Congr. for Appl. Mechanics, Camb., Mass., 1938, pp. 201—207.
85. A. Nadai a. E. A. Davis, Journal Appl. Phys., **8**, 1937, pp. 205—217.
86. W. Prager, Mém. d. Sc. Math., Fasc., **87**, 1937.
87. W. Prager, Theory of Plasticity (mimeographed lecture notes), Brown Univ., 1942.
88. M. Böcher, Introduction to High Algebra, McMillan Co N. Y., 1907, p. 296.
89. А. Ильюшин, Некоторые вопросы теории пластических деформаций, Прикладная математика и механика, 1943, **VII**, вып. 4, стр. 245—272.
90. W. Prager, Mécanique des solides isotropes au delà du domaine elastique, 1937, pp. 29—31.
91. R. W. Bailey, Journal Inst. Mech. Eng., **131**, 1935, pp. 131—169.
92. Bijlaard, De Ingenieur, № 11, 12, 1935.
93. M. Reiner, Amer. Journal of Math., **67**, pp. 350—362, 1945.
94. Bijlaard, De Ingenieur in Ned. Indie, № 4, 7, 11, 1936.
95. Bleich, Schleicher a. Roß, Int. Association for Bridge a. Struct. Eng., Paris, Final Report, 1932, pp. 120—149.
96. С. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, ОНТИ, 1946.
- 96a. Hartmann, Knickung, Kippung, 1937.
97. Schleicher, Bauingenieur, 1934, S. 505.
98. С. Тимошенко, Теория упругости, ОНТИ, 1937.

99. Reissner, Zentralbl. d. Bauverwaltung, 1909.
100. F. Norton, Trans. ASME, **61**, 1939, pp. 233—245.
101. C. R. Soderberg, Trans. ASME, **57**, 1933, pp. 733—743.
102. H. J. Tapsell a. A. E. Johnson, Engineering, **150**, 1940, pp. 24—25.
103. E. Siebel u. A. Maier, Der Einfluß mehrachsiger Spannungszustände auf das Formänderungsvermögen metallischer Werkstoffe, Zt. VDI 77, dez., 1933, S. 1345—1349.
104. H. F. Moore a. N. Alleman, Bull. Univ. of Illinois, **99**, № 48, 1932.
105. H. Hauffstengel u. H. Hanemann, Ztschr. für Metallkunde, **30**, 1938, S. 41.
106. A. Nadai, Trans. ASME, **1**, № 2, APM, 55—10, 1933.
107. C. R. Soderberg, Trans. ASME, 1933, **1**, № 3, APM, 55—14.
108. Gleason, McCullough, Trans. ASME, Appl. Mech., **1**, № 3, APM, 55—12, 1933.

Редактор Ф. Чуриков.

Технический редактор А. С. Дронов.

Корректор Б. Ерусалимский.

*

Подписано к печати 20/X 1948 г. А-08928. Печ. л. 28¹/₄. Уч.-издат. л. 21.
Формат 82×108¹/₃₂. Издат. № 1/72. Цена 21 руб. 60 к. Зак. № 1339.

*

2-я типография „Печатный Двор“ им. А. М. Горького треста „Полиграфкнига“
ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.

ТЕОРИЯ
ПЛАСТИЧНОСТИ

ТЕОРИЯ
ПЛАСТИЧНОСТИ

Сборник статей



СБОРНИК
СТАТЕЙ