Работа 1860 г. по газовой динамике трактует общие уравнения гидродинамики в предположениях, что 1) проекции скоростей в этих уравнениях, а также их частные производные и частные производные давления по времени и пространственным координатам — не считаются бесконечно-малыми, так что их произведения не могут быть пренебрегаемы, и что 2) давление считается заранее заданной произвольной (возрастающей) функцией плотности. В этих предположениях уравнения гидродинамики не приводят к обыкновенному линейному волновому уравнению; интегрирование их оказывается сложной задачей, но Риман упрощает её, допуская, что только одна из трёх проекций скоростей тождественно не равна нулю, т. е. ограничиваясь случаем, когда движения частиц совершаются параллельно определённому направлению. Что касается характеристической зависимости между плотностью и давлением, то Риман оставляет её произвольной (лишь бы давление было возрастающей функцией плотности), но в заключение своего исследования останавливается на двух специальных физически-реальных предположениях — на законе Бойля-Мариотта и на законе адиабатных процессов Пуассона.

Трудно сказать с уверенностью, что именно послужило для Римана непосредственным поводом для изучения «воздушных волн конечной амплитуды»: возможно, что это были опыты Гельмгольца над распространением звука в трубах. Как указывает сам Риман, его работу надлежит рассматривать не в экспериментальном аспекте, а скорее как вклад в теорию нелинейных уравнений в частных производных. Весьма важно отметить приём, которым пользуется Риман при нахождении интеграла одного специального линейного уравнения второго порядка гиперболического типа при условии, что на некоторой кривой, отличной от характеристик уравнения, заданы значения самой искомой функции и её нормальные частные производные; это — так называемая «проблема Коши». Риман находит общее решение для поставленной задачи, выражая его через частный интеграл некоторого «сопряжённого» уравнения в частных производных, подчинённый определённым краевым условиям на двух характеристиках. Возникающий таким образом «метод Римана» применим к произвольным уравнениям гиперболического типа.

Другой значительный результат, содержащийся в этом мемуаре Римана, касается впервые отмеченного здесь явления разрывов в течении газов (Stosswellen — «ударные волны»). Оказывается, что возникновение разрывов возможно даже в том случае, если начальные данные непрерывны. Если Риман при изучении этого явления ограничился линейным случаем, то в дальнейшем Кристоффель [1]) обобщил результаты Римана на случай пространства. В наиболее общей форме теория разрывов, независимо от Римана, была развита Гюгонио [2]). Подробные сведения по этому вопросу можно найти у Адамара в его «Leçons sur la propagation des ondes» (1903) [3]).

---

1) Christoffel, Annali di Matem., т. 8, 1877 г.

2) Hugoniot, Journ. Ec. Polyt., т. 39, 1887 г. и Journ. de Math., сер. 4, т. 3, 1887 г.

3) См. также статью G. Zemplén'a в немецкой энциклопедии (IV, 19); кое-что сказано об этом у Вебстера и Сеге (Дифференциальные уравнения математической физики, ОНТИ, М. — Л., 1934, гл. 6).

XXI. О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Хотя дифференциальные уравнения движения газов получены уже давно, однако их интеграция выполнена почти только для одного единственного случая, когда изменения давления могут считаться бесконечно малыми по сравнению с самим давлением; до последнего времени при исследовании этого вопроса довольствовались тем, что принимали во внимание только первые степени соответствующих отношений. Лишь недавно Гельмгольц стал рассматривать также вторые степени этих отношений, в результате чего ему, между прочим, удалось установить объективное возникновение комбинационных тонов. Оказывается, однако, что в случае, когда начальные движения повсюду совершаются в одном и том же направлении, и в каждой плоскости, перпендикулярной к этому направлению, скорость и давление постоянны, — точные дифференциальные уравнения интегрируются до конца; и если доныне для объяснения экспериментально установленных явлений существующая теория вполне достаточна, то не исключено всё же, что при больших успехах, достигнутых в последнее время Гельмгольцем также и в экспериментальном исследовании вопросов акустики, результаты более точных вычислений в не особенно отдалённом будущем, возможно, соприкоснутся с результатами экспериментов; этим может быть оправдано их опубликование, независимо от теоретического интереса, который представляет само по себе изучение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Давление и плотность нужно было бы считать связанными посредством закона Бойля, если бы вызываемые изменениями давления температурные различия выравнивались так быстро, что температуру газа можно было бы рассматривать как постоянную. Но надлежит, по всей вероятности, совершенно пренебрегать тепловым обменом, и потому следует исходить из закона, связывающего между собою давление и плотность в предположении, что газ не принимает и не отдаёт тепла.

Согласно закону Бойля и Гэй-Люссака имеет место соотношение

$$\log p + \log v = \log T + \text{const.},$$

где v — объём весовой единицы газа, p — давление, T — температура, отсчитываемая от — 273° С.

Станем рассматривать T как функцию p и v и обозначим теплоёмкость при постоянном давлении через c, а при постоянном объёме через c', причём то и другое относится к весовой единице; тогда эта весовая единица при увеличении p на dp и v на dv принимает количество тепла, равное

$$c\frac{dT}{dv}dv + c'\frac{dT}{dp}dp;$$

так как

$$\frac{\partial \log T}{\partial \log v} = \frac{\partial \log T}{\partial \log p} = 1,$$

то этому выражнию можно придать также вид

$$T\,(c d\log v + c' d\log p).$$

Поэтому, если теплообмен отсутствует, то

$$d\log p = -\frac{c}{c'}d\log v,$$

и, следовательно, допуская вместе с Пуассоном, что отношение $\frac{c}{c'} = k$ не зависит от температуры и давления, мы приходим к соотношению

$$\log p = -k\log v + \text{const}.$$

Согласно новейшим опытам Реньо, Джоуля и В. Томсона, указанные соотношения выполняются, вероятно, очень точно при всех мыслимых давлениях и температурах для кислорода, азота, водорода и их соединений.

Реньо установил для этих газов очень точное выполнение закона Бойля и Гэй-Люссака и независимость теплоёмкости c от температуры и давления.

Для атмосферного воздуха Реньо нашёл такие значения:

между	— 30°C	и	+ 10°C	$c = 0{,}2377$
»	+ 10°C	и	+ 100°C	$c = 0{,}2379$
»	+ 100°C	и	+ 215°C	$c = 0{,}2376$

Точно так же для давлений от 1 до 10 атмосфер не оказалось заметной разницы в значениях c.

Далее, опыты Реньо и Джоуля показывают, что для этих газов очень точно выполняется принятая Клаузиусом гипотеза Майера о том, что газ, расширяющийся при постоянной температуре, принимает столько тепла, сколько нужно для выполнения совершаемой им внешней работы. Если объём газа изменяется на dv в то время, как температура остаётся постоянной, то тогда $d\log p = -d\log v$, принятое количество тепла равно $T(c-c')\,d\log v$, выполненная работа равна $p\,dv$. Поэтому, если обозначим через A механический эквивалент тепла, названная гипотеза даёт соотношение

$$AT(c-c')\,d\log v = p\,dv,$$

или

$$c-c' = \frac{pv}{AT},$$

также при любых давлениях и температурах.

Отсюда следует, что $k=\frac{c}{c'}$ не зависит от давления и температуры и, если принять $c=0{,}237733$, A (по Джоулю) $=424{,}55$ килограммометров, и $\left(\text{при температуре } 0°\text{C, т. е. } T=\frac{100°\text{C}}{0{,}3665}\right)$ pv (по Реньо) $=7990^m{,}267$, то оказывается, что $k=1{,}4101$. Скорость звука в сухом воздухе при температуре 0°C равна

$$\sqrt{7990^m{,}267\cdot 9^m{,}8088\,k}$$

в секунду, что при указанном значении k даёт $332^m{,}440$. С другой стороны, наиболее тщательно проведённые эксперименты Молля и Ван-Беека дают соответственно цифры $332^m{,}528$ и $331^m{,}867$, или в соединении $332^m{,}271$. У Мартэна и А. Бравэ по их собственным подсчётам получилось $332^m{,}37$.

1

Нам нет необходимости сразу делать определённое предположение относительно зависимости между давлением и плотностью; мы допустим, что при плотности ρ давление равно $\varphi(\rho)$ и покуда оставим функцию φ неопределённой.

Введём прямоугольные координаты x, y, z, причём ось x пусть совпадает с направлением движения; обозначим через ρ плотность, через p давление, через u скорость в точке x в момент времени t; наконец, через ω — плоскостной элемент с координатой x.

Объём прямого цилиндра с основанием ω и высотой dx равен $\omega\,dx$, содержащаяся в нём масса $=\omega\rho\,dx$. Изменение этой массы на протяжении элемента времени dt, т. е. величина $\omega\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\,dx$, равняется массе, входящей за это время в цилиндр, т. е. $-\omega\frac{\partial\rho u}{\partial x}dx\,dt$. Ускорение равно $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}$, а сила, действующая в положительном направлении оси x, равна $-\frac{\partial p}{\partial x}\omega\,dx=-\varphi'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\omega\,dx$, где $\varphi'(\rho)$ есть производная от $\varphi(\rho)$. Отсюда для ρ и u получаются два дифференциальных уравнения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial\rho u}{\partial x} \quad\text{и}\quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\varphi'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

или же

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\varphi'(\rho)\frac{\partial \log \rho}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \log \rho}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}\ [^1].$$

Умножим второе уравнение на $\pm\sqrt{\varphi'(\rho)}$ и прибавим к первому. Полагая для краткости

$$\int\sqrt{\varphi'(\rho)}\,d\log\rho=f(\rho), \tag{1}$$

$$f(\rho)+u=2r,\quad f(\rho)-u=2s, \tag{2}$$

придадим полученным уравнениям более простой вид:

$$\frac{\partial r}{\partial t}=-\left(u+\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial s}{\partial t}=-\left(u-\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)\frac{\partial s}{\partial x}, \tag{3}$$

причём нужно считать u и ρ функциями от r и s, определяемыми из уравнений (2). Отсюда следует дальше:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}\left(dx-\left(u+\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt\right). \tag{4}$$

$$ds=\frac{\partial s}{\partial x}\left(dx-\left(u-\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt\right). \tag{5}$$

Можно считать (поскольку такое допущение всегда оправдывается в действительности), что $\varphi'(\rho)$ есть положительная величина. В таком случае последние уравнения свидетельствуют о том, что r остаётся постоянным, когда x изменяется в зависимости от t таким образом, что $dx=\left(u+\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt$, а s остаётся постоянным, когда x изменяется таким образом, что $dx=\left(u-\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt$.

Определённое значение r, или $f(\rho)+u$, передвигается поэтому в сторону возрастающих x со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)}+u$, определённое значение s, или $f(\rho)-u$, передвигается в сторону убывающих со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)}-u$.

Таким образом, определённое значение r будет последовательно встречаться с различными «впереди находящимися» значениями s, и скорость его продвижения в каждый момент будет зависеть от значения s, с которым оно встречается.

2

С помощью анализа можно ответить на вопрос, где и когда значение $r=r'$ встретится с некоторым предшествующим ему значением $s=s'$, т. е. представить x и t как функции r и s. В самом деле, если введём r и s в уравнениях (3) § 1 в качестве независимых переменных, то эти уравнения превращаются в линейные относительно x и t, и их можно интегрировать хорошо известными методами. Впрочем, чтобы привести уравнения (3) к линейным, наиболее целесообразно переписать уравнения (4) и (5) в следующем виде:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}\left\{ d\left(x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t\right) + \left[dr\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} + 1\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + ds\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right)\right]t\right\} \qquad (1)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x}\left\{ d\left(x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t\right) - \left[ds\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} + 1\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + dr\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right)\right]t\right\}. \qquad (2)$$

Принимая затем s и r за независимые переменные, мы получим для x и t следующие линейные уравнения:

$$\frac{\partial\left(x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t\right)}{\partial s} = -t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right)$$
$$\frac{\partial\left(x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t\right)}{\partial r} = \quad t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right).$$

Вследствие этих уравнений выражение

$$\left(x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t\right)dr - \left(x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t\right)ds \qquad (3)$$

есть полный дифференциал, а соответствующий интеграл, который мы назовём w, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} = -t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right) = m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right),$$

где $m = \dfrac{1}{2\sqrt{\varphi'(\rho)}}\left(\dfrac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right)$, так что m есть функция только от $r + s$. Положим $f(\rho) = r + s = \sigma$; тогда $\sqrt{\varphi'(\rho)} = \dfrac{d\sigma}{d\log\rho}$, и значит, $m = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d\log\dfrac{d\rho}{d\sigma}}{d\sigma}$.

При допущении Пуассона $\varphi(\rho) = aa\rho^k$ получается:

$$f(\rho) = \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\rho^{\frac{k-1}{2}} + \text{const.},$$

и дальше, придавая произвольной постоянной значение нуль:

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + u = \frac{k+1}{2} r + \frac{k-3}{2} s, \qquad \sqrt{\varphi'(\rho)} - u = \frac{k-3}{2} r + \frac{k+1}{2} s,$$

$$m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma} = \frac{k-3}{2(k-1)(r+s)}.$$

В предположении закона Бойля $\varphi(\rho) = aa\rho$, и тогда

$$f(\rho) = a \log \rho$$

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + u = r - s + a, \quad \sqrt{\varphi'(\rho)} - u = s - r + a$$

$$m = -\frac{1}{2a}.$$

Эти формулы можно получить из предыдущих, уменьшая $f(\rho)$ на постоянную $\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}$, значит, r и s — на постоянную $\frac{a\sqrt{k}}{k-1}$, и затем полагая $k=1$.

Введение независимых переменных r и s возможно, заметим, только в том случае, если функциональный детерминант этих функций по x и t, который $= 2\sqrt{\varphi'(\rho)}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}$, не обращается в нуль, т. е., если ни $\frac{\partial r}{\partial x}$ ни $\frac{\partial s}{\partial x}$ не равны нулю.

Если $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$, то из (1) следует $dr = 0$, а из (2) следует, что $x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t$ есть функция лишь s. Следовательно, и в этом также случае выражение (3) есть полный дифференциал, а w есть функция одной переменной s.

Точно так же, если $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$, то s не зависит от t, а $x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t$ и w — функции одной переменной r.

Если, наконец, $\frac{\partial r}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial x}$ оба $= 0$, то на основании дифференциальных уравнений r, s и w являются постоянными.

3

Для решения нашей задачи необходимо прежде всего определить функцию w переменных r и s, таким образом, чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0 \tag{1}$$

и начальным условиям. Такая функция определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое, очевидно, может быть взято произвольно.

Где и когда определённое значение r встречается с определённым значением s, мы можем установить из уравнения

$$(x-(u+\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t)\,dr-(x-(u-\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t)\,ds=dw, \tag{2}$$

и, наконец, u и ρ определяются как функции x и t с помощью уравнений

$$f(\rho)+u=2r, \quad f(\rho)-u=2s. \tag{3}$$

Действительно, если только dr и ds на некотором отрезке не обращаются тождественно в нуль (так что r и s сводились бы к постоянным), из (2) следуют равенства

$$x-(u+\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t=\frac{\partial w}{\partial r} \tag{4}$$

$$x-(u-\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t=-\frac{\partial w}{\partial s}, \tag{5}$$

и тогда посредством (3), (4) и (5) можно выразить u и ρ через x и t.

Если же r в начальный момент на некотором конечном отрезке имеет постоянное значение r', то в дальнейшем этот отрезок сдвигается в сторону возрастающих значений x. Внутри области, где $r=r'$, нельзя из уравнения (2) получить значение $x-(u+\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t$, так как $dr=0$; и, действительно, вопрос о том, когда и где это значение r' встречается с определённым значением s, в этом случае не допускает определённого ответа. Равенство (4) тогда выполняется только на границе этой области и указывает, между какими значениями x в данный момент заключено постоянное значение $r=r'$, или же на протяжении какого промежутка времени в данной точке r принимает это значение. В указанных пределах u и ρ определяются как функции x и t из уравнений (3) и (5). Подобным же образом определяются эти функции в случае, если s на некотором конечном отрезке имеет постоянное значение s', тогда как r меняется; так же и в случае, когда r и s оба сводятся к постоянным. В последнем случае они принимают в пределах, которые могут быть определены из (4) и (5), постоянные значения: какие именно — можно определить из (3).

4

Прежде чем мы предпримем интеграцию уравнения (1) предыдущего параграфа, нам кажется уместным высказать кое-какие соображения, которые не предполагают выполнения этой интеграции. По поводу функции $\varphi(\rho)$ нам нужно сделать только одно допущение, именно, что её производная при возрастании ρ не убывает, что всегда имеет место в действительности. Мы заметим теперь же (и этим не раз воспользуемся в следующем параграфе), что при этом допущении выражение

$$\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}=\int_0^1\varphi'(\alpha\rho_1+(1-\alpha)\rho_2)\,d\alpha$$

при изменениях только одной из величин ρ_1, ρ_2 или остаётся неизменным или изменяется в том же направлении, что и эта величина, откуда сейчас же следует, что оно заключено между $\varphi'(\rho_1)$ и $\varphi'(\rho_2)$.

Рассмотрим сначала случай, когда в начальный момент нарушение равновесия имеет место в конечной области, определяемой неравенствами $a < x < b$, так что вне её u и ρ, а значит также r и s постоянны: значения этих величин при $x < a$ будем отмечать индексом 1, а при $x > b$ — индексом 2. Область, в которой r переменно, согласно § 1 постепенно сдвигается вперёд, и притом её задняя граница движется со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho_1)} + u_1$; в то же время передняя граница области, в которой s переменно, движется назад со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho_2)} - u_2$. По истечении времени

$$\frac{b-a}{\sqrt{\varphi'(\rho_1)} + \sqrt{\varphi'(\rho_2)} + u_1 - u_2}$$

обе эти области разминутся, и между ними образуется пространство, в котором $s = s_2$ и $r = r_1$, и, значит, частицы газа вернутся снова к состоянию равновесия. Итак, из места, в котором нарушено равновесие, распространяются две волны во взаимно противоположных направлениях. В той волне, которая идёт вперёд, $s = s_2$; поэтому с определённым значением плотности ρ непременно связана скорость $u = f(\rho) - 2s_2$ и оба эти значения движутся вперёд с постоянной скоростью

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + u = \sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2s_2.$$

В той же волне, которая идёт назад, с плотностью ρ связана скорость $-f(\rho) + 2r_1$, и оба эти значения движутся назад со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2r_1$. Бóльшим плотностям соответствуют бóльшие скорости распространения, так как и $\sqrt{\varphi'(\rho)}$ и $f(\rho)$ возрастают вместе с ρ.

Представим себе ρ в виде ординаты кривой, у которой переменная абсцисса будет x; тогда каждая точка этой кривой движется параллельно оси абсцисс с постоянной скоростью, притом тем бóльшею, чем больше её ордината. Нетрудно понять, что при таких обстоятельствах точки с бóльшими ординатами в конце концов должны перегнать предшествующие точки с меньшими ординатами, и тогда одному значению x будет соответствовать более одного значения ρ. Но так как этого в действительности быть не может, то должно быть некоторое обстоятельство, препятствующее наступлению указанного явления. В самом деле, при выводе дифференциальных уравнений было сделано допущение, что u и ρ являются непрерывными функциями x и имеют непрерывные производные: это допущение, однако, нарушается, как только в какой-нибудь точке кривая плотности становится перпендикулярной к оси абсцисс, и с этого момента на кривой устанавливается разрыв, так что бóльшие значения ρ непосредственно следуют за меньшими: этот случай будет разобран в следующем параграфе.

Волны сгущения, т. е. те части волны, в которых плотность при распространении убывает, сдвигаясь, становятся всё короче и в конце концов переходят в «ударные» волны; напротив, длина волн разрежения растёт пропорционально времени [2].

Можно показать, по крайней мере при допущении закона Пуассона (или Бойля), что, кроме некоторых особых случаев, ударные волны образуются не только тогда, когда начальное нарушение равновесия распространено на конечную область. Скорость, с которой двигается вперёд значение r, при этом допущении равна

$$\frac{k+1}{2}r+\frac{k-3}{2}s;$$

бо́льшие значения в среднем двигаются с большей скоростью, и большее значение r' рано или поздно догонит меньшее значение r'', если только встречающееся с r'' значение s в среднем не меньше на

$$(r'-r'')\frac{1+k}{3-k},$$

чем в тот же момент встречающееся с r'. В этом же последнем случае при x, равном $+\infty$, s стало бы равно $-\infty$, так что скорость u стала бы равна $+\infty$ (или при допущении закона Бойля, вместо того, плотность стала бы бесконечно малой). Итак, за исключением специальных случаев, всегда положение будет таково, что из двух значений r, различающихся на конечную величину, большее будет непосредственно следовать за меньшим; следовательно, благодаря обращению в бесконечность производной $\frac{\partial r}{\partial x}$ дифференциальные уравнения теряют смысл и образуются бегущие вперёд ударные волны. Точно так же почти всегда, если $\frac{\partial s}{\partial x}$ обратится в бесконечность, появятся такие же волны, бегущие назад.

Для определения моментов и точек, в которых $\frac{\partial r}{\partial x}$ или $\frac{\partial s}{\partial x}$ обращаются в бесконечность, и возникают внезапные сгущения, мы из уравнений (1) и (2) § 2 получаем, вводя функцию w, следующие соотношения:

$$\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho}+1\right)t\right)=1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho}+1\right)t\right)=1.$$

5

Принимая во внимание, что внезапные сгущения возникают почти всегда, даже в том случае, если плотность и скорость в начальный момент изменяются повсюду непрерывно без разрывов, мы постараемся теперь установить законы распространения ударных волн.

Допустим, что в момент t в точке $x=\xi$ имеется внезапный скачок u и ρ, и будем отмечать значения этих величин и величин, от них зависящих, индексом 1 при $x=\xi-0$ и индексом 2 при $x=\xi+0$; скорости движения газа относительно точки разрыва, равные $u_1-\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $u_2-\frac{\partial\xi}{\partial t}$, обозначим через v_1, v_2. Масса, проходящая в положительном направлении через элемент ω в плоскости $x=\xi$ за промежуток времени dt, тогда $=v_1\rho_1\omega dt=v_2\rho_2\omega dt$; действующая на эту массу сила равна $(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))\,\omega dt$, а обусловленное ею приращение скорости есть v_2-v_1; поэтому получается:

$$(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))\,\omega dt=(v_2-v_1)\,v_1\rho_1\omega dt \quad \text{и} \quad v_1\rho_1=v_2\rho_2,$$

откуда следует

$$v_1=\mp\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}\,,$$

так что

$$\frac{d\xi}{dt}=u_1\pm\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}=u_2\pm\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}\,. \tag{1}$$

В точке, где находится ударная волна, разность $\rho_2-\rho_1$ должна иметь тот же знак, что v_1 и v_2; знак этот — отрицательный или положительный, смотря по тому, двигается ли волна вперёд или назад. В первом случае надлежит брать верхние знаки в предыдущих формулах, и тогда ρ_1 больше чем ρ_2; принимая во внимание допущение, сделанное в начале предыдущего параграфа по поводу функции $\varphi(\rho)$, мы будем иметь:

$$u_1+\sqrt{\varphi'(\rho_1)}>\frac{d\xi}{dt}>u_2+\sqrt{\varphi'(\rho_2)}, \tag{2}$$

так что наша точка разрыва движется вперёд медленнее, чем следующие за нею, и быстрее, чем предшествующие ей значения r; r_1 и r_2 в каждый момент определяются дифференциальными уравнениями, не теряющими смысла по обе стороны от точки разрыва. То же самое справедливо, поскольку значения s движутся назад со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)}-u$, также относительно s_2, а следовательно, и ρ_2 и u_2, но не для s_1. Значения s_1 и $\frac{d\xi}{dt}$ определяются однозначно из r_1, ρ_2 и u_2 посредством соотношений (1). В самом деле, уравнению

$$2(r_1-r_2)=f(\rho_1)-f(\rho_2)+\sqrt{\frac{(\rho_1-\rho_2)(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2}} \tag{3}$$

удовлетворяет только одно значение ρ_1, так как $f(\rho_1)$ и оба множителя

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}-\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}\,,$$

на которые разлагается последний член, постоянно возрастают (впрочем, второй может оставаться и постоянным), когда ρ_1 растёт от ρ_2 до бесконечности, и следовательно, правая часть (3) принимает каждое положительное значение только один раз. Если же ρ_1 определено, то из уравнений (1) получаются вполне определённые значения u_1 и $\frac{d\xi}{dt}$.

Аналогичные соображения справедливы и по поводу волны сгущения, идущей назад.

6

Мы установили, что значение u и ρ по обе стороны движущейся ударной волны связаны всегда соотношением

$$(u_1-u_2)^2=\frac{(\rho_1-\rho_2)(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2} \text{ [3]}.$$

Возникает вопрос: что же получается, если в данный момент в данной точке имеются совершенно произвольные разрывы? Оказывается, что тогда, смотря по значениям u_1, ρ_1, u_2, ρ_2, или расходятся в обе стороны две разных ударных волны, или же идёт вперёд только один, или идёт назад только одна, или не будет вовсе разрывов, так что дифференциальное уравнение нигде не будет терять смысла.

Обозначим значения u и ρ позади или между разрывами в первый момент их распространения через u' и ρ'; тогда в первом случае $\rho'>\rho_1$ и $>\rho_2$, и тогда

$$\left.\begin{aligned} u_1-u' &= \sqrt{\frac{(\rho'-\rho_1)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_1))}{\rho'\rho_1}},\\ u'-u_2 &= \sqrt{\frac{(\rho'-\rho_2)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_2))}{\rho'\rho_2}}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$u_1-u_2=\sqrt{\frac{(\rho'-\rho_1)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_1))}{\rho'\rho_1}}+\sqrt{\frac{(\rho'-\rho_2)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_2))}{\rho'\rho_2}}. \tag{2}$$

Так как оба слагаемых в правой части (2) возрастают вместе с ρ', то u_1-u_2 должно быть положительным, и притом

$$(u_1-u_2)^2>\frac{(\rho_1-\rho_2)(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2};$$

и, обратно, если эти условия выполнены, то всегда имеется одна и только одна пара чисел u' и ρ', удовлетворяющая уравнениям (1).

Чтобы наступил последний случай, и движение совершалось бы согласно дифференциальному уравнению, необходимы и достаточны условия $r_1\leqslant r_2$ и $s_1\geqslant s_2$, так что u_1-u_2 отрицательно и $(u_1-u_2)^2\geqslant(f(\rho_1)-f(\rho_2))^2$. Значения r_1 и r_2, s_1 и s_2 в этом случае разделяются (так как идущее впереди движется с большей скоростью), и разрыв исчезает.

Если не выполнены ни те ни другие условия, то начальным условиям удовлетворяет один разрыв, именно, идущий вперёд или назад — смотря по тому, будет ли ρ_1 больше или меньше чем ρ_2.

В самом деле, если $\rho_1 > \rho_2$, то выражение

$$2(r_1 - r_2) \text{ или } f(\rho_1) - f(\rho_2) + u_1 - u_2$$

положительно, так как $(u_1 - u_2)^2 < (f(\rho_1) - f(\rho_2))^2$, и следовательно, это выражение

$$\leqslant f(\rho_1) - f(\rho_2) + \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2}},$$

так как

$$(u_1 - u_2)^2 \leqslant \frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2};$$

поэтому для плотности ρ' позади разрыва можно найти значение, удовлетворяющее условию (2) предыдущего параграфа, и это значение $\leqslant \rho_1$. Следовательно, так как $s' = f(\rho') - r_1$, $s_1 = f(\rho_1) - r_1$, то $s' \leqslant s_1$, так что движение позади разрыва может совершаться согласно дифференциальному уравнению.

Другой случай, когда $\rho_1 < \rho_2$, исследуется подобным же образом.

7

Чтобы иллюстрировать предыдущее изложение простым примером, в котором движение может быть определено с помощью указанных выше приёмов, допустим, что давление и плотность связаны законом Бойля, и в начальный момент имеют разрыв в точке $x = 0$, а по ту и другую сторону от этой точки — постоянны.

По предыдущему, надлежит различать четыре случая.

I. Если $u_1 - u_2 > 0$, так что две массы газа (в их относительном движении) идут одна другой навстречу, и притом $\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 > \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1\rho_2}$, то образуются две ударные волны, бегущие в противоположных направлениях. Обозначая $\sqrt[4]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ через α и вводя положительный корень θ уравнения

$$\frac{u_1 - u_2}{a\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)} = \theta - \frac{1}{\theta},$$

мы убеждаемся, на основании § 6 (1), что плотность между разрывами даётся равенством $\rho' = \theta\theta\sqrt{\rho_1\rho_2}$, и вследствие § 5 (1) получаем скорость разрыва, бегущего вперёд,

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\alpha\theta = u' + \frac{a}{\alpha\theta},$$

и бегущего назад

$$\frac{d\xi}{dt} = u_1 - a\,\frac{\theta}{\alpha} = u' - a\,\frac{\alpha}{\theta};$$

по истечении времени t, если x удовлетворяет неравенству

$$\left(u_1 - a\frac{\theta}{\alpha}\right)t < x < (u_2 + a\alpha\theta)\,t,$$

то значения скорости и плотности будут u' и ρ', для меньших значений x будут u_1 и ρ_1, для бóльших u_2 и ρ_2.

II. Если $u_1 - u_2 < 0$, так что две массы газа расходятся в разные стороны, и вместе с тем

$$\left(\frac{u_1-u_2}{a}\right)^2 \geqslant \left(\log\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2,$$

то в обе стороны от разделяющей их точки удаляются две постепенно суживающиеся волны разрежения. На основании § 4 между ними $r = r_1$, $s = s_2$, $u = r_1 - s_2$. В волне, идущей вперёд, $s = s_2$, и $x - (u + a)\,t$ есть функция r, значение которой определяется из начальных условий при $t = 0$, $x = 0$, и оказывается равным нулю; в волне, идущей назад, $r = r_1$ и $x - (u - a)\,t = 0$. Таким образом, если x удовлетворяет неравенству

$$(r_1 - s_2 + a)\,t < x < (u_2 + a)\,t,$$

первое уравнение для определения u и ρ есть $u = -a + \frac{x}{t}$; для меньших x оно будет $r = r_1$, для бóльших $r = r_2$. Другое уравнение при выполнении неравенства

$$(u_1 - a)\,t < x < (r_1 - s_2 - a)\,t$$

будет $u = a + \frac{x}{t}$; для меньших x и для бóльших x будет соответственно $s = s_1$ и $s = s_2$.

III. Если не имеет места ни тот ни другой случай, и притом $\rho_1 > \rho_2$, то возникает бегущая назад волна разрежения и бегущий вперёд разрыв сгущения. Вводя корень θ уравнения

$$\frac{2\,(r_1 - r_2)}{a} = 2\,\log\,\theta + \theta - \frac{1}{\theta},$$

находим для разрыва, согласно § 5 (3), $\rho' = \theta\theta\rho_2$ и, согласно § 5 (1),

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\theta = u' + \frac{a}{\theta}.$$

По истечении времени t перед разрывом, т. е. при $x > (u_2 + a\theta)\,t$, будет $u = u_2$, $\rho = \rho_2$, а позади него $r = r_1$ и, кроме того, при

$$(u_1 - a)\,t < x < (u' - a)\,t$$

будет $u = a + \frac{x}{t}$, для меньших x $u = u_1$, для бо́льших $u = u'$.

IV. Если два первых случая не имеют места, и $\rho_1 < \rho_2$, то́ всё протекает, как в случае III, но меняется направление.

8 [4]

Чтобы наша задача была полностью разрешена, нужно (§ 3) подобрать функцию w, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0 \tag{1}$$

и начальным условиям.

Исключая заранее случай возможных разрывов, мы можем сказать, что согласно § 1 место и время, т. е. значения x и t, при которых r и s принимают некоторые значения r' и s', определяются полностью, если задаются начальные значения r и s на отрезке между значением r' величины r и значением s' величины s, и если дифференциальные уравнения (3) § 1 выполнены всюду в области (S), которая при любом значении t охватывает все значения x, заключённые между теми двумя значениями, для которых $r = r'$ и $s = s'$. Таким образом, и значение w при $r = r'$, $s = s'$ вполне определено, если везде в области (S) удовлетворено уравнение (1) и для начальных значений r и s заданы значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$, а следовательно, с точностью до аддитивной константы, также и значения w, причём константа — произвольная. Действительно, эти условия равносильны предыдущим. Из § 3 также следует, что производная $\frac{\partial w}{\partial r}$ по обе стороны от значения $r = r''$ (предполагая, что такое значение достигается в конечном промежутке) принимает различные значения, однако, изменяется всюду непрерывно при изменении s; и точно так же $\frac{\partial w}{\partial s}$ относительно r; сама же функция w всюду непрерывна как относительно r, так и относительно s.

После этих вступительных замечаний мы можем перейти к решению нашей задачи, т. е. к определению значения w для заданных значений $r = r'$, $s = s'$.

Для большей наглядности будем считать, что x и t — абсцисса и ордината точки на плоскости; на этой же плоскости вообразим кривые, на которых r и s постоянны. Первые из этих кривых будем обозначать через (r), вторые через (s); условимся на этих кривых отсчитывать положительные направления в сторону возрастающих t. Область (S) представится в виде части плоскости, которая ограничена кривой (r'), кривой (s') и заключённым между ними отрезком оси абсцисс. Речь идёт о том, чтобы определить значение w в точке пересечения двух первых кривых по значениям, заданным на отрезке оси абсцисс. Мы ещё несколько обобщим задачу и допустим, что область (S), вместо отрезка оси абсцисс, ограничена некоторой кривой (c), пересекающей каждую из кривых (r) и (s) не более одного раза, и что для всех пар значений r и s, отвечающих точкам кривой (c), указаны соответствующие значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$.

Как выяснится сейчас из решения задачи, значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$ должны быть подчинены единственному ограничению — изменяться непрерывно при движении по кривой (c), — тогда как, если бы кривая (c) пересекала кривые (r) и (s) больше одного раза, эти значения не могли бы быть взяты вполне произвольными.

Чтобы определить функции, которые удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению в частных производных и линейным граничным условиям, можно прибегнуть к приёму, сходному с приёмом, употребительным при решении системы линейных уравнений, когда данные уравнения складывают, умножив предварительно на неопределённые множители, и затем подбирают множители так, чтобы выпали все неизвестные, кроме одной.

Представим себе, что область (S) разбита кривыми (r) и (s) на бесконечно малые параллелограммы; пусть δr и δs — приращения, которые приобретают величины r и s, когда происходит движение по сторонам параллелограмма в положительном направлении. Обозначим через v произвольную функцию переменных r и s, которая всюду непрерывна и имеет непрерывные производные. На основании равенства (1) имеем:

$$0=\int v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s}-m\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right)\delta r\delta s, \tag{2}$$

причём интеграл распространён на всю область (S). Расположим правую часть равенства по неизвестным, т. е. в данном случае преобразуем интеграл посредством интегрирования по частям таким образом, чтобы, кроме известных величин, входила только искомая функция, а не её производные. При этом наш интеграл сначала переходит в сумму интеграла, взятого по (S),

$$\int w\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial mv}{\partial r}+\frac{\partial mv}{\partial s}\right)\delta r\delta s$$

и простого интеграла, который должен быть распространён только по границе области (S), так как $\frac{\partial w}{\partial r}$ непрерывно зависит от s, $\frac{\partial w}{\partial s}$ — от r, а w — от обеих этих переменных. Условимся приращения r и s на граничных кривых обозначать через dr и ds, причём будем предполагать, что направление движения так расположено относительно внутренней нормали, как положительное направление кривой (r) относительно положительного направления кривой (s). Тогда упомянутый простой интеграл по границе равен

$$-\int\left(v\left(\frac{\partial w}{\partial s}-mw\right)ds+w\left(\frac{\partial v}{\partial r}+mv\right)\partial r\right).$$

Интеграл по всей границе (S) равен сумме интегралов по кривым (c), (s'), (r'), образующим эту границу, т. е., если обозначим точки пересечения через (c, r'), (c, s'), (r', s'), он равен

$$\int_{c,\,r'}^{c,\,s'}+\int_{c,\,s'}^{r',\,s'}+\int_{s',\,r'}^{c,\,r'}.$$

Из этих трёх интегралов первый, кроме функции v, содержит лишь известные величины, второй, так как для него $ds=0$, — только неизвестную функцию w, а не её производные; третий после интегрирования по частям принимает вид

$$(vw)_{r',\,s'}-(vw)_{c,r'}+\int_{s',r'}^{c,r'}w\left(\frac{\partial v}{\partial s}+mv\right)ds,$$

так что сюда входит тоже только сама неизвестная функция w.

Теперь ясно, что из уравнения (2) можно получить значение функции w в точке (r', s'), выраженное через заданные величины, если подчиним произвольную функцию v следующим ограничениям:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{1) всюду в } (S) \text{ должно быть} & \\
\dfrac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\dfrac{\partial mv}{\partial r}+\dfrac{\partial mv}{\partial s}=0. & \\
\text{2) при } r=r': & \dfrac{\partial v}{\partial s}+mv=0. \\
\text{3) при } s=s': & \dfrac{\partial v}{\partial r}+mv=0. \\
\text{4) при } r=r',\ s=s':\ v=1. &
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

В таком случае будем иметь:

$$w_{r',\,s'}=(vw)_{c,\,r'}+\int_{c\,,\,r'}^{c,\,s'}\left(v\left(\frac{\partial w}{\partial s}-mw\right)ds+w\left(\frac{\partial v}{\partial r}+mv\right)dr\right). \qquad (4)$$

9

Изложенный выше метод нахождения интеграла линейного дифференциального уравнения с линейными граничными условиями сведён, таким образом, к решению подобной же, но гораздо более простой задачи нахождения функции v: вычисление этой функции совершается проще всего посредством применения метода Фурье к частному случаю поставленной общей задачи. Мы ограничимся тем, что лишь вкратце укажем это вычисление, и справедливость полученного результата докажем иным путём [5].

Введём в уравнение (1) предыдущего параграфа, вместо переменных r и s, переменные $\sigma = r + s$ и $u = r - s$, а в качестве кривой (c) возьмём кривую, на которой σ имеет постоянное значение. Тогда задачу можно решить по правилам Фурье и, пользуясь формулой (4) и положив $r' + s' = \sigma'$, $r' - s' = u'$, тогда получим:

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos\mu (u - u') \frac{d\rho}{d\sigma} (\psi_1(\sigma') \psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma') \psi_1(\sigma))\, d\mu,$$

где $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ — два таких, частных интеграла уравнения $\psi'' - 2m\psi' + \mu\mu\psi = 0$, что

$$\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' = \frac{d\sigma}{d\rho}.$$

Допуская закон Пуассона, будем иметь $m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma}$; тогда ψ_1 и ψ_2 выражаются через определённые интегралы, так что v получается в виде тройного интеграла, и после редукции получаем:

$$v = \left(\frac{r' + s'}{r + s}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}} F\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k-1},\ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}\right).$$

Правильность решения легко проверить, убеждаясь, что полученное выражение, действительно, удовлетворяет требованиям (3) предыдущего параграфа.

Если положим $v = e^{-\int_{\sigma'}^{\sigma} m\,d\sigma} y$, то для y получим требование:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r\, \partial s} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - mm\right) y = 0,$$

и должно быть $y = 1$, как при $r = r'$, так и при $s = s'$. В случае закона Пуассона этим требованиям можно удовлетворить, полагая, что y есть функция от $z = -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}$. В самом деле, тогда будем иметь, обозначив $\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}$ через λ:

$$m = \frac{\lambda}{\sigma}, \quad \frac{dm}{d\sigma} - mm = -\frac{\lambda + \lambda^2}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s\, \partial r} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d^2 y}{d \log z^2}\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{dy}{d\log z}\right).$$

Следовательно, $v=\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\lambda} y$, и y есть решение дифференциального уравнения

$$(1-z)\frac{d^2 z}{d\log z^2}-z\frac{dy}{d\log z}+(\lambda+\lambda^2)zy=0,$$

т. е. согласно введённым мною в мемуаре о Гауссовом ряде обозначениям, — функция вида

$$P\begin{pmatrix}0 & -\lambda & 0 & \\ 0 & 1+\lambda & 0 & z\end{pmatrix},$$

притом такая, которая при $z=0$ обращается в единицу.

На основании принципов преобразований, изложенных в упомянутой моей работе, y можно выразить не только через функции $P(0,\,2\lambda+1,\,0)$, но также и через функции $P\left(\frac{1}{2},\,0,\,\lambda+\frac{1}{2}\right)$, $P\left(0,\,\lambda+\frac{1}{2},\,\lambda+\frac{1}{2}\right)$; таким образом, для y получается множество представлений с помощью гипергеометрических рядов и определённых интегралов. Мы отметим лишь следующие из них, которые являются достаточными во всех случаях:

$$y=F\,(1+\lambda,-\lambda,\,1,\,z)=(1-z)^{\lambda}F\left(-\lambda,\,-\lambda,\,1,\,\frac{z}{z-1}\right)=$$
$$=(1-z)^{-1-\lambda}F\left(1+\lambda,\,1+\lambda,\,1,\,\frac{z}{z-1}\right).$$

Чтобы из этих результатов, полученных при допущении закона Пуассона, получить соответствующие результаты для случая закона Бойля, достаточно, как было указано в § 2, величины r, s, r', s' уменьшить на $\frac{a\sqrt{k}}{k-1}$ и затем заставить k стремиться к единице; при этом получим:

$$m=-\frac{1}{2a},\quad v=e^{\frac{1}{2a}(r-r'+s-s')}\sum_{0}^{\infty}\frac{(r-r')^n(s-s')^n}{n!\,n!\,(2a)^{2n}}.$$

10

Если выражение для v, найденное в предыдущем параграфе, подставить в равенство (4) § 8, то значение функции w в точке $r=r'$, $s=s'$ будет выражено через значения w, $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$ на кривой (c). Но так как в нашей задаче предполагаются непосредственно заданными на этой кривой лишь значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$, а w должно быть получено с помощью квадратуры, то целесообразно преобразовать выражение для $w_{r',\,s'}$ таким образом, чтобы под знаком интеграла фигурировали лишь производные от w.

Обозначим интегралы выражений $-mv\,ds+\left(\frac{\partial v}{\partial r}+mv\right)dr$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial s}+mv\right)ds-mv\,dr$ (каковые вследствие уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial\, mv}{\partial r}+\frac{\partial\, mv}{\partial s}=0$$

являются полными дифференциалами) через P и Σ, а интеграл от выражения $P\,dr+\Sigma\,ds$ (каковое вследствие $\frac{\partial P}{\partial s}=-mv=\frac{\partial \Sigma}{\partial r}$ также есть полный дифференциал) — через ω.

Если в этих интегралах определим аддитивные константы таким образом, чтобы ω, $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial s}$ обращались в нуль при $r=r'$, $s=s'$, то окажется, что ω удовлетворяет уравнениям $\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial s}+1=v$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial s}=-mv$, и притом будет равно нулю как при $r=r'$, так и при $s=s'$, и — заметим кстати — однозначно определяется этими граничными условиями и уравнением

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial s}+m\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial s}+1\right)=0.$$

Вводя в выражение для $w_{r',s'}$ вместо v функцию ω, преобразуем его посредством интегрирования по частям к виду

$$w_{r',s'}=w_{c,r'}+\int\limits_{c,r'}^{c,s'}\left(\left(\frac{\partial\omega}{\partial s}+1\right)\frac{\partial w}{\partial s}\,ds-\frac{\partial\omega}{\partial r}\,\frac{\partial w}{\partial r}\,dr\right). \tag{1}$$

Чтобы определить движение газа по его начальному состоянию, возьмём в качестве кривой (c) кривую, на которой $t=0$; на этой кривой $\frac{\partial w}{\partial r}=x$, $\frac{\partial w}{\partial s}=-x$, и ещё одно интегрирование по частям приводит к формуле:

$$w_{r',s'}=w_{c,r'}+\int\limits_{c,r'}^{c,s'}(\omega\,dx-x\,ds),$$

следовательно, согласно § 3, (4) и (5),

$$\left.\begin{aligned}(x-(\sqrt{\varphi'(\rho)}+u)\,t)_{r',s'}&=x_{r'}+\int\limits_{x_{r'}}^{x}\frac{\partial\omega}{\partial r'}\,dx\\ (x+(\sqrt{\varphi'(\rho)}-u)\,t)_{r',s'}&=x_{s'}-\int\limits_{x_{r'}}^{xs'}\frac{\partial\omega}{\partial s'}\,dx.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти уравнения (2) лишь постольку, однако, выражают движение газа, поскольку величины

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho}+1\right)t \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho}+1\right)t$$

не обращаются в нуль. Но если одна из этих величин обращается в нуль, то возникает ударная волна, и тогда уравнение (1) останется в силе лишь внутри областей, лежащих по одну и ту же сторону разрыва. Изложенные здесь принципы, по крайней мере в общем случае, недостаточны, чтобы при наступлении указанных обстоятельств определить движение по начальным условиям; сделать это оказывается возможным с помощью соотношения (1) и тех уравнений, которые были получены для разрыва в § 5, если только будет указано местонахождение этого разрыва в момент времени t, т. е. ξ будет задано как функция t. Однако, на этом мы закончим наше изложение, оставляя также в стороне рассмотрение случая, когда воздушная среда ограничена твёрдой стенкой, так как здесь не возникает особых вычислительных трудностей, а сравнение с опытом в настоящее время едва ли возможно.

XXI. О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

(*Werke*, *XVI*)

Мемуар Римана «Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite» был напечатан в 1860 г. в 8-м томе Гёттингенских Abhandlungen. В Göttinger Nachrichten (1859 г., № 19) имеется следующий автореферат:

«Настоящая работа не ставит себе целью способствовать экспериментальным исследованиям; автор просит рассматривать её только как вклад в теорию нелинейных уравнений в частных производных. В теории линейных уравнений в частных производных наиболее плодотворные методы были выработаны не в процессе рассмотрения отвлечённо поставленной задачи, а скорее при изучении специальных физических проблем; точно так же и теория уравнений нелинейных может, как я полагаю, достигнуть наибольших успехов, если внимание наше со всею тщательностью, с учётом всех побочных условий, направится к специальным проблемам физического содержания. И в самом деле, решение совершенно специальной задачи, являющейся предметом настоящего сочинения, требует новых методов и понятий и приводит к результатам, которые, вероятно, будут играть известную роль и в задачах более общих.

Окончательное решение рассматриваемой нами задачи должно было бы внести полную ясность в вопросы, которые послужили предметом обсуждения со стороны английских математиков Чэллиса, Эйри и Стокса (см. Phil. Mag., тт. 33, 34, 35, в частности т. 33, стр. 349), а также вызвали спор в Венском научном обществе между Petzval'ем, Doppler'ом и Ettinghausen'ом, подошедшими к вопросу с несколько иной точки зрения (Sitzungsberichte Ges. d. Wiss., 1852).

Единственный эмпирический закон, который, помимо общих законов движения, пришлось постулировать в настоящем исследовании, это — закон, связывающий давление и плотность газа при условии, что газ не принимает и не отдаёт тепла. Уже Пуассон сделал допущение, что давление пропорционально k-ой степени плотности ρ, где k — отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме; благодаря экспериментам Реньо над теплоёмкостью газов и с помощью одного принципа механической теории тепла это допущение в настоящее время может быть хорошо обосновано. Мне казалось полезным предпослать во введении это обоснование закона Пуассона, поскольку оно ещё, повидимому, мало известно. При этом значение k оказывается равным 1,4101, тогда как согласно опытам Martins и Bravais (Ann. de chim. et de phys., серия 3, т. XIII) скорость звука при 0° С и при сухом воздухе равна $\frac{332{,}37^m}{1''}$, откуда для k следует значение 1,4095.

Хотя сравнение полученных нами результатов с экспериментальными представляет большие трудности и в настоящее время едва ли может быть осуществлено, тем не менее я позволю себе сообщить здесь, насколько возможно кратко, эти результаты.

В нашей работе рассматриваются лишь такие движения воздуха или газа, которые как вначале, так и в дальнейшем являются одинаково направленными, так что скорости и плотности остаются постоянными во всякой плоскости, перпендикулярной к направлению движения. В том случае, если в начальный момент нарушение равновесия ограничивается некоторым конечным отрезком, и при обычном допущении, что изменения давления бесконечно малы по сравнению с самим давлением, как известно, получается тот результат, что из места, где нарушено равновесие, распространяются в противоположных направлениях две волны, причём в каждой из них скорость есть определённая функция давления и именно равна (при сделанном предположении — постоянному) числу $\sqrt{\varphi'(\rho)}$, где $\varphi(\rho)$ обозначает давление при плотности ρ, а $\varphi'(\rho)$ — производную функцию $\varphi(\rho)$. Оказывается, что нечто подобное происходит и в рассматриваемом нами случае, когда изменения давления не являются бесконечно малыми. Точно так же, по прошествии конечного промежутка времени, место, где нарушено равновесие, расплывается двумя волнами по взаимно противоположным направлениям. При этом скорость, измеряемая по направлению распространения волны, есть определённая функция от плотности, именно $\int \sqrt{\varphi'(\rho)}\, d \lg \rho$ (постоянная интегрирования в двух волнах может быть различная); в каждой волне, таким образом, данной плотности всегда соответствует одна и та же скорость и, кроме того, с увеличением плотности увеличивается (алгебраически) и скорость. Оба значения распространяются с постоянной скоростью. Скорость распространения относительно газа равна $\sqrt{\varphi'(\rho)}$, а относительно неподвижного пространства она больше на скорость газа, измеряемую в направлении распространения. При соответствующем реальной действительности предположении, что $\varphi'(\rho)$ с возрастанием ρ не убывает — отсюда следует, что при большей плотности и скорость больше, так что волны разрежения (т. е. те части волны, в которых плотность растёт в направлении распространения(увеличиваются пропорционально времени по своей протяжённости, тогда как волны сгущения аналогичным образом уменьшаются — и наконец должны перейти в «ударные» волны (разрывы). Мы не приводим здесь, вследствие их громоздкости, формул, посредством которых выражаются законы, относящиеся к разделению двух волн и их дальнейшему распространению; не касаемся также и случая, когда равновесие нарушается сразу во всём пространстве.

Для акустики это исследование даёт тот результат, что, если только изменения давления не могут быть пренебрегаемы, то при распространении звуковой волны должна изменяться форма волны, а следовательно, и характер звука. Несмотря на большие успехи, достигнутые в анализе звука в последнее время, в частности, Гельмгольцем, опытная проверка этого результата представляется очень затруднительной; действительно, при малых расстояниях изменение звука не может быть сколько-нибудь заметным, а при больших — слишком трудно устранить разнообразные причины, которые видоизменяют характер звука. О применении к метеорологии также не приходится думать, так как изучаемые нами движения частиц воздуха распространяются со скоростью звука, тогда как атмосферные потоки, по всей видимости, обладают гораздо меньшей скоростью».

[1] к стр. 379.

Два уравнения, выведенные Риманом, получаются из общих эйлеровых уравнений гидродинамики

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ &\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w),$$

если в них положить $v=w=0$, $p=\varphi(\rho)$ и считать u и ρ не зависящими от y и z. Действительно, при этих допущениях мы имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\varphi'(\rho)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \\ -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

что равносильно уравнениям Римана.

Случай, когда «изменения давления бесконечно малы по сравнению с самим давлением», включается сюда следующим образом. Пусть ρ_0 и $p_0=\varphi(\rho_0)$ — значения плотности и давления, которые могут изменяться лишь весьма незначительно; тогда приближённо $\varphi(\rho)$ можно заменить линейной функцией:

$$\varphi(\rho)=p_0+\varphi'(\rho_0)(\rho-\rho_0).$$

Если, кроме того, будем считать бесконечно малыми величину u и частные производные от u и ρ, то, отбрасывая члены высших порядков, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\varphi'(\rho_0)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \\ -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

откуда следует, что u и $\lg \rho$ удовлетворяют обыкновенному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad \left(a=\sqrt{\varphi'(\rho_0)}\right).$$

[2] к стр. 384.

«Волны сгущения» = Verdichtungswellen, «волны разрежения» = Verdünnungswellen, «ударная волна» (разрыв) = Verdichungsstoss (Stosswelle = onde de choc = bore).

[3] к стр. 386.

Это — так называемое «условие совместности» (Hugoniot).

[4] к стр. 389.

В § 8 применительно к частному примеру уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s}-m\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)=0$$

изложен «метод интегрирования Римана», получивший в дальнейшем широкое развитие (см., например, Goursat, «Cours d'analyse», т. 3, гл. 26, или Darboux, «Théorie des surfaces», т. 2).

[5] к стр. 392.

По поводу следующего пассажа в немецком издании «Riemanns Werke» имеется обширное разъяснительное примечание Вебера, которое здесь не воспроизводится.