УДК 533.95

РАЗРЫВЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ[1]

А. Н. Голубятников[2]

Поступило 9 октября 2017 г.

Развивается общий подход к решению задач о распространении слабых разрывов по известному фону для систем гиперболических уравнений, допускающих вариационную формулировку. Слабая ударная волна рассматривается как приближение к решению, содержащему слабый разрыв. Данный метод может применяться к описанию различных адиабатических процессов механики сплошной среды при наличии переменных силовых полей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вариационный подход к построению моделей механики сплошной среды занимает большое место в научном творчестве академика Л.И. Седова. В частности, им сформулировано базовое вариационное уравнение [1, 2], позволяющее в единой трактовке описать методику моделирования как обратимых механических процессов, так и необратимых термодинамических явлений. Базовое вариационное уравнение, которое для действительных перемещений представляет собой интегральное уравнение энергии, позволяет получать физически обоснованные условия на разрывах, правильную форму начальных и краевых условий; используя асимптотические методы, проводить осреднение [3], эффективно заменять континуум дискретными системами или вообще системами с конечным числом степеней свободы.

Для локально обратимых динамических процессов характерно наличие голономного вариационного принципа, отвечающего экстремуму функционала действия как интеграла от некоторого лагранжиана Λ, что дает систему гиперболических уравнений Эйлера. Ниже на основании такой лагранжевой формулировки рассматривается задача о распространении разрывов малой амплитуды, слабых разрывов и слабых ударных волн, по известному фону.

Наличие лагранжиана позволяет благодаря сокращению значительного числа членов эффективно вывести, решить в квадратурах и частично проинтегрировать все возникающие уравнения для коэффициентов разложения решения в ряд Тейлора по степеням специальной временнóй переменной τ, равной нулю на поверхности разрыва. В случае невырожденного слабого разрыва на первом этапе решается обыкновенное дифференциальное уравнение Риккати (транспортное уравнение), определяющее скачок ускорения среды. Оно сводится к линейному, остальные уравнения для коэффициентов ряда – также линейны. Таким образом, решение последовательно представляется в квадратурах.

---

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00361, 17-01-00037).

[2]Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

Проведение этой процедуры для систем в форме Коши, не предполагающее, впрочем, вариационной формулировки, в рамках ньютоновской газовой динамики было впервые предложено Дж. Нитше [4, 5]. Как правило, результаты использовались для исследования вопросов затухания ударных волн на однородном фоне или опрокидывания простых волн [6, 7, 8, 9]. Ряд новых примеров с переменным фоном (стационарном степенным, периодическим, нестационарным) в рамках газовой динамики указан в [10].

Приведенный подход применим также к моделям механики сплошной среды, содержащим дополнительные призвольные функции лагранжевых переменных, таким как, например, магнитная гидродинамика с вмороженным магнитным полем [9] и электродинамика с вмороженным удельным зарядом [11]; гидромеханика жидких кристаллов, нематического или смектического типов, соответственно с вмороженными вектором или ковектором, характеризующими ориентацию среды [12, 13]; нелинейная теория упругости с вмороженным начальным напряженным состоянием с еклидовой или неевклидовой метрикой [14] и др.

В качестве примеров представлены задачи о распространении слабых ударных волн в собственном гравитационном поле, в рамках релятивистской газовой динамики и в теории мелкой воды с неровным дном при статическом или нестационарном состоянии фона. В теории относительности вообще отсутствует представление лагранжиана как разности кинетической и потенциальной энергий, поэтому универсальный подход здесь наиболее важен.

2. СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

Для демонстрации метода рассмотрим сначала класс задач с одной неизвестной функцией от двух переменных $x(t,m)$ как закона движения среды x от времени t и массы m. Пусть исходный лагранжиан системы имеет вид

$$\Lambda(x, x_t, x_m, m). \tag{2.1}$$

Например для адиабатических одномерных движений идеального газа

$$\Lambda = x_t^2/2 - U(V,m),$$

где U – удельная внутренняя энергия $V = S(x)x_m$, – удельный объем, S – площадь поперечного сечения, равная соответственно $1, 2\pi\, x, 4\pi\, x^2$ для плоских, цилиндрических и сферических волн или достаточно произвольная в случае гидравлического приближения. Энтропия входит как функция переменной m. При наличии переменных внешних силовых полей, потенциал которых $\Phi(x,m,t)$ добавляется, например аддитивно, возможна зависимость лагранжиана и от времени, но это не вносит существенных изменений теории.

Функция Λ предполагается бесконечно дифференцируемой по первым трем переменным, а $x(t,m)$ — непрерывной. Нижние индексы t, m означают соответствующие частные производные. Пусть $t = T(m)$ — закон движения неконтактного разрыва. Введем новую временну́ю переменную $\tau = t - T(m)$ и перейдем к переменным τ, m. Тогда в новых переменных скорость $x_t(t,m) = x_\tau \equiv v$, а удельный объем $x_m(t,m) = x_m - T'x_\tau \equiv w - T'v$. Исходный лагранжиан (2.1) переходит в функцию $\Lambda(x, v, w, T', m)$.

Уравнения Эйлера имеют вид

$$(\Lambda_v)_\tau + (\Lambda_w)_m - \Lambda_x = 0, \quad w_\tau = v_m, \quad v = x_\tau. \tag{2.2}$$

Условия на сильном разрыве, когда скачок $[x_\tau] \neq 0$, имеют в новых переменных наиболее простую форму

$$[\Lambda_v] = 0, \quad [v\Lambda_v - \Lambda] = 0, \tag{2.3}$$

отвечающие сохранению потоков импульса и энергии. Отметим, что производная по τ являются выводящей производной, а производная по m сохраняет непрерывность дифференцируемой функции, таким образом, $[x]$=0 дает $[w] = 0$.

Для слабых разрывов первого порядка, когда $[v] = 0$, $[v_\tau] \neq 0$, условия (2.3) выполняются автоматически. Вычисляя скачок левой части уравнения (2.2), получим дифференциальное уравнение, определяющее характеристику, или функцию $T'(m)$

$$\Lambda_{vv} = (\Lambda_0)_{x_t x_t} - 2T'(\Lambda_0)_{x_t x_m} + T'^2(\Lambda_0)_{x_m x_m} = 0. \tag{2.4}$$

Для слабых ударных волн $[v] \to 0$ последнее (энергетическое) условие (2.3) выполняется тождественно, включая второе приближение (теорема Цемплена). Далее мы предполагаем выполнение неравенств $\Lambda_w > 0$, $\Lambda_{vw} > 0$, $\Lambda_{vvv} < 0$, обобщающих определение нормального газа [15].

Чтобы найти величину скачка ускорения $[a] = [v_\tau]$, продифференцируем по τ уравнение (2.2) и вычислим скачок левой части, учитывая соотношение $[a^2] = [a]^2 + 2a_0[a]$, где нулем отмечено состояние перед фронтом. После сокращений и объединения ряда членов получим уравнение Риккати

$$2\Lambda^0_{vw}[a]' + \Lambda^0_{vvv}[a]^2 + \left((\Lambda^0_{vw})' + 2(\Lambda_{vv})^0_\tau\right)[a] = 0, \tag{2.5}$$

которое сводится к линейному относительно $[a]^{-1}$. Отметим, что в последнем члене стоит производная по времени τ на фоне, равная нулю, если фон статический.

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$[a]^{-1} = \mu \left(C_2 + \int\limits_0^m \frac{\Lambda^0_{vvv} dm}{2\mu\Lambda^0_{vw}} \right), \quad \mu = (\Lambda^0_{vw})^{1/2} \exp \int\limits_0^m \frac{(\Lambda_{vv})^0_\tau dm}{\Lambda^0_{vw}}. \tag{2.6}$$

Постоянная C_2 определяется, например, разностью начального ускорения поршня, расположенного при $m = 0$, и начального ускорения соответствующей материальной точки фона. Кроме этого, уравнение (2.5) имеет особое решение $[a] \equiv 0$, отвечающее отсутствию ускорения скачка поршня $[a(0)] = 0$. В последнем случае надо решать уравнение для следующего коэффициента разложения решения по степеням τ, которое уже, очевидно, линейно. Его решение имеет вид $[v_{\tau\tau}] = C_3/\mu$ (см. ниже).

Вообще, если $n-1$ производных закона относительного движения поршня равны нулю, где $n > 2$, то для $[x^{(n)}_\tau]$ имеем ту же формулу. Мы не рассматриваем здесь неаналитических законов движения поршня, например вида $A\exp(-B/t)$. Этот вопрос представляется открытым.

Нетрудно показать, как строятся следующие члены ряда

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [v^{(n)}_\tau] \tau^n / n!$$

Дифференцируя по τ левую часть уравнения (2.2) и оставляя только члены, содержащие две старшие производные, на каждом шаге при $n \geq 2$ получим

$$\Lambda_{vv} v_\tau^{(n+1)} + 2\Lambda_{vw} (v_\tau^{(n)})_m + ((\Lambda_{vw})_m + (n+1)(\Lambda_{vv})_\tau)\, v_\tau^{(n)} + \ldots = 0.$$

На скачке, используя соотношение вида $[ab] = [a][b] + a_0[b] + b_0[a]$ и равенство $\Lambda_{vv} = 0$, приходим к уравнению

$$2\Lambda_{vw}^0 \left([v_\tau^{(n)}]\right)' + \left((\Lambda_{vw}^0)' + (n+1)((\Lambda_{vv})_\tau^0 + \Lambda_{vvv}^0[a])\right)[v_\tau^{(n)}] = F_n([v_\tau^{(n-1)}], \ldots), \tag{2.7}$$

где правая часть равна нулю при отсутствии скачков предыдущих производных.

Решение уравнения (2.7) имеет вид

$$[v_\tau^{(n)}] = \frac{1}{\mu_n}\left(C_n + \int\limits_0^m \frac{\mu_n F_n dm}{2\Lambda_{vw}^0}\right), \quad \mu_n = (\Lambda_{vw}^0)^{1/2} \exp\left(\frac{n+1}{2}\int\limits_0^m \frac{((\Lambda_{vv})_\tau^0 + \Lambda_{vvv}^0[a])dm}{\Lambda_{vw}^0}\right).$$

В принципе, используя формулу (2.6) для $[a]$ выражение для интегрирующего множителя μ_n можно частично проинтегрировать.

3. СЛАБЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Пусть скачок скорости, отнесенный к скорости звука фона, $[v]/c_0 \leq 1$. Вычислим, используя первое условие (2.3) и определение скорости звука фона (2.4), поправку $T' = T_0' + \delta T'$, где T_0' отвечает скорости звука фона. Раскладывая это условие в ряд по степеням $[v]$, получим

$$[\Lambda_v] = \Lambda_{vvT'}^0 \delta T'[v] + (1/2)\Lambda_{vvv}^0[v]^2 = 0.$$

Или

$$\delta T' = -\frac{\Lambda_{vvv}^0[v]}{2\Lambda_{vvT'}^0} \tag{3.1}$$

Используя тождества $v = v_0 + [v]$, $a = a_0 + [a]$ и формулу (3.1), линеаризуем уравнение (2.3) по $[v]$. Значение скачка ускорения $[a]$ порядка единицы можно взять из решения задачи о слабом разрыве (2.6), поправка к нему автоматически выпадает. В результате получим

$$2\Lambda_{vw}^0[v]' + \left((1/2)\Lambda_{vvv}^0[a] + (\Lambda_{vw}^0)' + (\Lambda_{vv})_\tau^0\right)[v] = 0. \tag{3.2}$$

Решение уравнения (3.2) имеет вид

$$[v] = \frac{C_1}{(\Lambda_{vw}^0)^{1/2}} \exp\left(-\int\limits_0^m \frac{(\Lambda_{vvv}^0[a] + 2(\Lambda_{vv})_\tau^0)dm}{4\Lambda_{vw}^0}\right). \tag{3.3}$$

Постоянная C_1 определяется начальной скоростью поршня, точнее разностью $v(0) - v_0(0)$.

Подставляя формулы (2.6) для $[a]$ и μ, правую часть (3.3) можно частично проинтегрировать. Окончательно получим

$$[v] = \frac{C_1}{(\mu^2\Lambda_{vw}^0)^{1/4}} \left| C_2 + \int\limits_0^m \frac{\Lambda_{vvv}^0 dm}{2\mu\Lambda_{vw}^0} \right|^{-1/2}. \tag{3.4}$$

Формулы (2.6), (3.4) позволяют проанализировать процессы затухания слабых ударных волн при $C_1 > 0$, $C_2 < 0$ и, наоборот, опрокидывания слабых разрывов при $C_2 > 0$ и, как следствие, усиление слабых ударных волн на произвольном фоне, когда обращается в ноль общий знаменатель этих формул. На постоянном фоне получаются все классические результаты:

$$v \sim r^{-1/2}, \quad v \sim r^{-3/4}, \quad v \sim (r\sqrt{\ln r})^{-1}$$

соответственно для плоских, цилиндрических и сферических волн [6,7].

4. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Перейдем к многомерной теории. Пусть $u^i(t, \xi^\alpha)$, $i = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, \dots, n$, — набор искомых функций и координат, новая переменная $\tau = t - T(\xi^\alpha)$, а исследуемый лагранжиан имеет вид

$$\Lambda(u^i, u^i_\tau, u^i_\alpha, T_\alpha, \xi^\alpha). \tag{4.1}$$

Обозначим $v^i = u^i_\tau$ и $u^i_{\xi^\alpha} = w^i_\alpha$. Тогда уравнения Эйлера есть

$$(\Lambda_{v^i})_\tau + (\Lambda_{w^i_\alpha})_\alpha - \Lambda_{u^i} = 0. \tag{4.2}$$

По повторяющимся индексам (верхнему и нижнему), как принято в тензорном анализе, проводится суммирование.

Условия на разрывах имеют вид

$$[\Lambda^i_v] = 0, \quad [v^i \Lambda_{v^A} - \Lambda] = 0, \tag{4.3}$$

Характеристики, вдоль которых движутся слабые разрывы, определяются уравнением первого порядка в частных производных, аналогичным (2.4),

$$F(\xi^\alpha, T, T_\alpha) = \det(\Lambda_{v^i v^j}) = 0, \tag{4.2}$$

решение $T(\xi^\alpha)$ которого, как известно, сводится к решению системы обыкновенных уравнений бихарактеристик

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = F_{p_\alpha}, \quad \frac{dT}{ds} = p_\alpha F_{p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{ds} = -(F_{\xi^\alpha} + p_\alpha F_T), \tag{4.3}$$

где полагается $T_\alpha = p_\alpha(s)$, s — параметр.

Начальные условия задаются, как правило, в параметрическом виде $T = T_0(\sigma^q)$ на гиперповерхности $\xi^\alpha = \xi^\alpha_0(\sigma^q)$, $q = 1, \dots, n-1$. Начальные данные для p_α определяются соотношениями:

$$dT_0 = p^0_\alpha d\xi^\alpha_0, \quad F(\xi^\alpha_0, T_0, p^0_\alpha) = 0.$$

Характеристика $t = T(\xi^\alpha)$ получается исключением всех параметров s, σ^q. Решение уравнений (4.3) будем предполагать, известным. Хотя их решение, как правило, самая сложная часть анализа свойств даже известного переменного фона $u^i(t, \xi^\alpha)$.

Рассмотрим невырожденную характеристику. Тогда существует единственный собственный вектор b^i матрицы $(\Lambda_{v^i v^j})$, отвечающий данному нулевому собственному числу, нормированный, например, как $b^1 = 1$. В силу симметрии этой матрицы, как матрицы производных лагранжиана, он является одновременно правым и левым собственным вектором.

Это позволяет при дифференциальном продолжении уравнений (4.2) по τ и взятия скачка левой части вывести уравнение для величины слабого разрыва $[v^i_\tau] = b^i[a]$.

Для слабой ударной волны аналогично $[v^i] = b^i[v]$. Вычисление поправки δT_α дает

$$2\delta T_\alpha \Lambda^0_{v^i v^j T_\alpha} b^i b^j + \Lambda^0_{v^i v^j v^k} b^i b^j b^k [v] = 0.$$

Линеаризация уравнений (4.2) относительно $[v]$ с исключением этой комбинации даст уравнение для интенсивности волны.

Введем величины

$$\Lambda^0_{v^i w^l_\alpha} b^i b^j = k^\alpha, \quad (k^\alpha)_\alpha = A, \quad (\Lambda^0_{v^i v^j} b^i b^j)^0_\tau = B, \quad \Lambda^0_{v^i v^j v^k} b^i b^j b^k = C.$$

Тогда получим уравнения

$$2k^\alpha [a]_\alpha + (A + 2B)\,[a] + C[a]^2 = 0,$$

$$2k^\alpha [v]_\alpha + (A + B + (C/2)[a])\,[v] = 0, \tag{4.4}$$

аналогичные уравнениям (2.5), (3.2).

Интегрирование этих уравнений связано с предварительным «выпрямлением» векторного поля $k^\alpha(\xi)$, т.е. с решением уравнения $k^\alpha \eta_\alpha = 0$ и отбором n-1 его функционально независимых решений η^q. Далее вместо ξ^α вводятся новые координаты $\eta^q(\xi^\alpha)$ и $\eta^n = \xi^n$. Таким образом, вектор k^α будет иметь только одну ненулевую компоненту k^n, и дифференцирование вдоль k^α сводится к производной по η^n.

Величина

$$A = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial(\Delta\, k^n)}{\partial \eta^n}, \quad \Delta = \det\left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^q}\right),$$

где β, $q = 1, \ldots, n-1$. Интегрирование уравнений (4.4) осуществляется по переменной η^n как обыкновенных дифференциальных с произвольными постоянными – функциями остальных переменных η^q.

Ситуация усложняется, если характеристика вырождена, т.е. уравнение $\Lambda_{v^i v^j} b^j = 0$ имеет несколько линейно независимых решений b^i_s, $s = 1, \ldots, r > 1$. Это имеет место, например, в задачах электродинамики и общей теории относительности. Тогда на слабом разрыве скачок ускорения равен $[v^i_\tau] = b^i_s [a^s]$, и мы приходим для определения $[a^s]$ уже к системе r уравнений с частными производными. Для двух переменных t, ξ см. соответсвующую теорию в [5].

Приведем только уравнение для $[a^r]$. Для этого введем коэффициенты:

$$\Lambda^0_{v^i w^l_\alpha} + \Lambda^0_{v^j w^i_\alpha} = 2k^\alpha_{ij}, \quad (k^\alpha_{ij})_\alpha = A_{ij}, \quad (\Lambda^0_{v^i v^j})^0_\tau = B_{ij}, \quad \Lambda^0_{v^i v^j v^k} = C_{ijk},$$

$$D_{ij} = \Lambda^0_{v^i u^j} - \Lambda^0_{v^j u^i}.$$

Тогда

$$2k^\alpha_{ij} b^i_q \left(b^j_r [a^r]\right)_\alpha + (A_{ij} + 2B_{ij} + D_{ij})\, b^i_q b^j_r [a^r] + C_{ijk} b^i_q b^j_r b^k_p [a^r][a^p] = 0.$$

5. ГАЗ В СОБСТВЕННОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Изложенный подход позволяет легко исследовать различные ситуации, возникающие при распространениии волн малой амплитуды по достаточно произвольному переменному фону.

Рассмотрим сферически-симметричную задачу о распространении возмущений по равновесному состоянию совершенного газа в собственном гравитационном поле (модель звезды). Тогда имеем

$$\Lambda = \frac{r_t^2}{2} - f(m)V^{1-\gamma} + \frac{Gm}{r^2},$$

где $V = S(r)r_m = 4\pi r^2 r_m$ – удельный объем, $r(t, m)$ – закон движения среды по радиусу, G – гравитационная постоянная, γ – показатель адиабаты.

Введем переменные τ, $v = r_\tau$, $w = r_m$ (п. 2). Индекс фона 0 для простоты опускаем. Вычисления дают

$$\Lambda_{vv} = 1 - (T')^2 c^2/w^2, \quad c^2 = \gamma(\gamma-1)fV^{1-\gamma} = \gamma pV, \quad \Lambda_{vw} = c/w, \quad \Lambda_{vvv} = -(\gamma+1)/c,$$

где c – обычная скорость звука, p – давление.

Условия равновесия определяют давление

$$p = p_0 - \int\limits_0^m \frac{mdm}{4\pi r^4(m)}.$$

На границе шара $p = 0$. Монотонно возрастающее распределение $r(m)$ должно быть явно задано, что затем определяет функцию $f(m)$.

Ускорение газа за слабым разрывом (2.6) есть

$$a = \left(\frac{w}{c}\right)^{1/2} \left(C_2 - \int\limits_{r_0(t)}^{r} \frac{(\gamma+1)w^{1/2}dr}{2c^{5/2}} \right)^{-1} \equiv \left(\frac{w}{c}\right)^{1/2} (C_2 - I)^{-1} \tag{5.1}$$

Здесь мы исключаем центр $r = 0$, заменяя его ядром с подвижнй поверхностью $r_0(t)$ (сферическим поршнем), массой которого пренебрегаем. Если $a = 0$, то следующая производная $a_\tau = C_3(w/c)^{1/2}$.

Проведем исследование возможных случаев. Пусть давление на границе $r = R < \infty$ имеет асимптотику $p \sim (R-r)^\alpha$, а удельный объем – $V \sim w \sim (R-r)^{-\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Вообще говоря, параметры α и $beta$ связаны решение задачи, $n = \alpha/\beta$ есть локальный показатель политропы. По теории устойчивости равновесия газа, основанной на адиабатическом переносе частиц и законе Архимеда, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $n < \gamma$ [11].

Найдем асимптотики входящих в формулу (5.1) выражений: $(w/c)^{1/2} \sim (R-r)^{-(\alpha+\beta)/4}$; интеграл I конечен, если $4-5\alpha+3\beta > 0$, либо расходится как $(R-r)^{(4-5\alpha+3\beta)/4}$ в остальных случаях, при этом их отношение $\sim (R-r)^{\alpha-\beta-1}$.

Если $C_2 \leq 0$, когда поршень, создающий возмущения, тормозится, то знаменатель отрицателен и опрокидывание разрыва возможно только на границе при $\alpha \leq \beta + 1$, при этом $a \to -\infty$. Если $C_2 > 0$, поршень ускоряется и возможно опрокидывание слабого разрыва внутри шара, $a \to \infty$. При конечном значении интеграла эта возможность зависит от более детальной структуры фона. Опрокидывание всегда имеет место, если $a = 0$, при этом $a_\tau \to \infty$.

Полученные результаты применимы к теории устойчивости равновесия звезд. В зависимости от вида сколь угодно малых возмущений возможны случаи как внутренних, так и приграничных опрокидываний слабых разрывов. Вопрос только об их дальнейшем развитии до сильных ударных волн. Граница равновесного шара всегда неустойчива. Все это мы постоянно наблюдаем на Солнце.

Приведем также формулу (3.4) для малой скорости газа

$$v = C_1 \left(\frac{w}{c}\right)^{1/2} |C_2 - I|^{-1/2}, \tag{5.2}$$

фактически имеющую те же особенности.

Дадим также явные формулы для равновесия шара при постоянной начальной плотности $\rho = (wS(r))^{-1}$, при этом $\alpha = 1$ и $\beta = 0$.

$$p = \frac{2\pi G\rho^2}{3}(R^2 - r^2), \quad \frac{w}{c} = \frac{1}{S(r)(\gamma p\rho)^{1/2}},$$

$$I = \frac{\gamma+1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{6}{\gamma G\rho^{7/5}}\right)^{5/4} \int\limits_{S(r_0)}^{S(r)} \frac{dx}{x(S(R)-x)^{5/4}}.$$

Интеграл I можно вычислить в элементарных функциях. Он расходится как $(R-r)^{-1/4}$. Равновесие неустойчиво.

6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Рассмотрим вопросы распространения слабых разрывов и слабых ударных волн в рамках специальной теории относительности. Согласно наблюдениям Солнце излучает протоны, скорость которых доходит до 0,8 скорости света c [16]. Эта величина согласуется с максимальной релятивистской скоростью звука $c\sqrt{\gamma - 1}$ в относительно покоящемся газе (см. ниже) при показателе адиабаты $\gamma = 5/3$.

Пусть скорость света равна единице. В силу инвариантности теории относительно преобразований Лоренца лагранжиан имеет вид, в котором явно не выделен квадрат трехмерной скорости $x_t(m,t)$. Ограничимся одномерными движениями и равновесным фоном. Тогда в обычных обозначениях (п. 2)

$$\Lambda = -U(V,m)\sqrt{1 - x_t^2}, \quad V = \frac{S(x)x_m}{\sqrt{1-x_t^2}}.$$

Для совершенного газа $U = 1 + f(m)V^{1-\gamma}$, но бывают и более сложные выражения, охватывающие большой диапазон температур или учитывающие излучение, например $U = (1+2f(m)V^{-2/3})^{1/2}$. Для перехода к ньютоновскому приближению необходимо выполнение неравенств $v^2 \ll 1$ и $U - 1 \ll 1$. Для слабых ударных волн, распространяющихся даже по статическому фону, последнее неравенство может не выполняться при наличии большой начальной температуры.

В переменных τ, $v = x_\tau$, $w = x_m$ удельный объем $V = S(x)(w - T'v)/\sqrt{1-v^2}$, давление $p = -U_V$, удельная энтальпия $h = U + pV$, причем $h_V = Vp_V < 0$.

Производые лагранжиана

$$\Lambda_w = pS, \quad \Lambda_v = \frac{Uv}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{pS(vw - T')}{1-v^2},$$

$$\Lambda_{vv} = \frac{U}{(1-v^2)^{3/2}} + \frac{pS(w - T'v)}{(1-v^2)^2} + \frac{p_V S^2 (vw - T')^2}{(1-v^2)^{5/2}},$$

$$\Lambda_{vw} = \frac{p_V S^2 (vw - T')}{(1-v^2)^{3/2}}.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{hv}{\sqrt{1-v^2}}\right)_\tau + S(x)(p_m - T'p_\tau) = 0, \quad w_\tau = v_m.$$

Условия на разрыве

$$\tau = 0, \quad [x] = 0, \quad [w] = 0, \quad \left[\frac{hv}{\sqrt{1-v^2}} - S(x)T'p\right] = 0,$$

$$\left[\frac{U + pVv^2}{\sqrt{1-v^2}} - S(x)T'pv\right] = 0.$$

Далее ограничимся равновесным фоном ($v_0 = 0$), индекс 0 опускаем. Уравнение $\Lambda_{vv} = 0$ дает $(T')^2 = h/(-p_V S^2)$.

$$\Lambda_{vw} = S\sqrt{-hp_v}, \quad \Lambda_{vvv} = \left(\frac{h}{-p_V}\right)^{1/2} \left(\frac{hp_{VV}}{p_V} - 3Vp_V\right)$$

Для совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)(U - 1)/V, \quad p_V = -\gamma(\gamma - 1)(U - 1)/V^2, \quad p_{VV} = \gamma(\gamma^2 - 1)(U - 1)/V^3,$$

$$h = 1 + \gamma(U - 1), \quad \Lambda_{vvv} = (h/(-p_V))^{1/2}((2\gamma - 1)p - (\gamma + 1)(U - 1)/V).$$

Далее применяем формулы (2.6) и (3.4). Важно выяснить знак величины $\Lambda_{vvv} \sim (2\gamma - 1)(\gamma - 1) - (\gamma + 1) = 2\gamma(\gamma - 2)$, который должен быть отрицательным. Отсюда имеем $1 < \gamma < 2$, что дает для квадрата скорости звука $c^2 = (w/T')^2 = -V^2 p_V/h = \gamma(\gamma - 1)(U - 1)/h < \gamma - 1 < 1$, т.е. меньше скорости света.

7. МЕЛКАЯ ВОДА С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНОЙ

Ограничимся анализом плоской задачи. Пусть $y = \zeta(x, t)$ и $y = -h(x, t)$ – формы верхней и нижней поверхностей слоя по отношению к постоянному гравитационному полю g. Функция $h(x, t)$ считается заданной. Как известно [17], уравнения движения мелкой воды могут быть выведены из уравнений потенциального движения идеальной несжимаемой однородной жидкости в предположении малости отношения толщины слоя и характерной длины волны $\varepsilon = (\zeta + h)/\lambda \ll 1$.

По вертикали решается уравнение равновесия, которое определяет давление, которое выше слоя полагается равным нулю,

$$p = -\rho g(y - \zeta).$$

Поверхностное натяжение не учитывается.

Для средней по толщине слоя скорости продольного движения v и толщины слоя $\zeta + h$ имеют место следующие уравнения

$$(\zeta + h)_t + ((\zeta + h)v)_x = 0, \quad v_t + vv_x + g\,\zeta_x = 0, \tag{7.1}$$

где ρ – плотность жидкости.

Введем массу m участка слоя в расчете на единицу поперечной длины, как независимую лагранжеву переменную, входящую в функцию $x(t, m)$. Масса m отсчитывается от подвижной вертикальной стенки (поршня). Тогда первое уравнение (7.1) дает $\rho(\zeta + h) = 1/x_m$ и $v = x_t$. В результате получим

$$x_{tt} + \left(\frac{g}{2\rho x_m^2}\right)_m = gh_x. \tag{7.2}$$

Таким образом, gh_x играет роль переменной горизонтальной силы. Приближение мелкой воды над неоднородным дном позволяет как теоретически, так и экспериментально моделировать воздействие на газ различных переменных внешних сил.

Уравнение (7.2) имеет вид уравнения Эйлера с лагранжианом

$$\Lambda = \frac{x_t^2}{2} - \frac{g}{2\rho x_m} + gh(x, t).$$

В переменных $\tau = t - T'$, $v = x_\tau$, $w = x_m$

$$\Lambda = \frac{v^2}{2} - \frac{g}{2\rho(w - T'v)} + gh(x, t). \tag{7.3}$$

На сильном разрыве

$$[x] = 0, \quad [w] = 0, \quad [\Lambda_v] = \left[v - \frac{gT'}{2\rho(w - T'v)^2}\right] = 0.$$

К этим условиям надо добавить еще неравенство, связанное с потерей энергии [17],

$$[v\Lambda_v - \Lambda] = \left[\frac{v^2}{2} + \frac{g(w - 2T'v)}{2\rho(w - T'v)^2} - gh(x, t)\right] \leq 0.$$

Рассмотрим движение разрыва малой амплитуды по статическому фону, $v_0 = 0$. Удобно перейти к переменной x, учитывая соотношение $w\,dm = dx$. В случае равновесия на основании (7.1) имеем

$$\zeta_0 = 0, \quad w_0 = \frac{1}{\rho h}. \tag{7.4}$$

Вычисление производных лагранжиана (7.3) дает

$$\Lambda^0_{vw} = gT'_0/(\rho w^3), \quad \Lambda^0_{vvv} = -3g(T'_0)^3/(\rho w_0^4), \quad T'_0 = (\rho w_0^3/g)^{1/2}.$$

Тогда для ускорения жидкости на слабом разрыве с учетом (7.4) получим

$$a = (g/\rho)w_0^{3/4}\left(C_2 - \int\limits_{x_p(t)}^{x} (3/2)w_0^{7/4}dx\right)^{-1},$$

а для скорости на слабой ударной волне –

$$v = C_1(\rho/g)^{1/4}w_0^{3/4}\left|C_2 - \int\limits_{x_p(t)}^{x} (3/(2C_2))w_0^{7/4}dx\right|^{-1/2}.$$

Анализ этих формул аналогичен п. 5. Опрокидывание разрыва возможно, в зависимости от рельефа дна и начальных параметров движения поршня, как внутри слоя жикости, так и на его краю. Эта задача имеет приложения к набеганию волн на берег водоема.

8. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ФОН

В рамках теории мелкой воды рассмотрим также пример о распространении слабого разрыва на переменном по времени фоне. Одна такая задача с нестационарным однородным фоном в рамках общей теории относительности была решена в работе [18]. Пусть дно имеет форму $h = h_0 - \alpha x^2/2$ и происходит равномерное по глубине заполнение водоема из состояния покоя. Согласно уравнению (7.2) получим

$$x = b(t)m, \quad x_m = b, \quad \ddot{b} + \alpha g b = 0, \quad b = B\cos\omega t, \quad \omega = (\alpha g)^{1/2},$$

$$\zeta = \frac{1}{\rho b(t)} - h_0 + \alpha\frac{x^2}{2}.$$

Пусть поршень начинает двигаться из положения $x = 0$ при $t = 0$ вправо, жидкость движется влево ($B > 0$).

Вычисления параметров фона на основании лагранжиана (7.3) дают

$$T' = \frac{\rho^{1/2}b^{3/2}}{g^{1/2}}, \quad \Lambda_{vw} = \frac{g^{1/2}}{\rho^{1/2}b^{3/2}}, \quad \Lambda_{vvv} = -\frac{3\rho^{1/2}b^{1/2}}{g^{1/2}}, \quad (\Lambda_{vv})_\tau = \frac{3\dot{b}}{b}, \quad v = \frac{\dot{b}}{b}x, \quad a = -\omega^2 x.$$

На характеристике удобно выразить m через t, или $dm = (g/(\rho b^3))^{1/2}dt$.

Тогда скачки ускорения и скорости жидкости на разрыве равны

$$[a] = \mu^{-1}\left(C_2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{g}\right)^{1/2}\int\limits_0^t \frac{\sqrt{b}\,dt}{\mu}\right)^{-1}, \quad \mu = \frac{g^{1/4}b^{9/4}}{\rho^{1/4}B^3}.$$

$$[v] = \frac{C_1\rho^{1/8}b^{3/8}}{\mu^{1/2}g^{1/8}}\left|C_2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{g}\right)^{1/2}\int\limits_0^t \frac{\sqrt{b}\,dt}{\mu}\right|^{-1/2}.$$

Эти формулы имеют ту же особенность, что и выше, связанную с опрокидыванием слабого разрыва при $C_2 > 0$. Обращение $b(t)$ в нуль не имеет большого смысла, т.к. при этом высота уровня жидкости будет уже бесконечной.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заклюение укажем на ряд гиперболических моделей механики сплошной среды, к которым может быть эффективно применима предложенная теория, причем при наличии произвольных функций лагранжевых переменных. Таковы, например, магнитная гидродинамика с вмороженным магнитным полем и электродинамика с вмороженным удельным зарядом; гидромеханика жидких кристаллов, нематического или смектического типов, соответственно с вмороженными вектором или ковектором, характеризующими ориентацию среды; нелинейная теория упругости с вмороженным начальным напряженным состоянием с еклидовой или неевклидовой метрикой и др. Дальнейшее развитие предполагает также исследование моделей с вырожденными характеристескими направлениями, где анализ сводится, как было показано выше, уже к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка, вообще говоря, с меньшим числом неизвестных функций, например в рамках теорий нелинейных релятивистских полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Математические методы построения новых моделей моделей сплошных сред // УМН. 1965. Т. 20, вып.5. С. 121-180.

2. *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и магнетизма. М.: Наука, 1989.

3. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.

4. *Nitsche J.* Uber Unstetigkeiten in der Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyberbolischer Differentialgleichungssysteme // J. Rat. Mech. Anal. 1953. V. 2. P. 201-297.

5. *Рождственский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

6. *Crussard L.* Sur la déformation des ondes dans le das et sur lesinterférences finies // C. r. Acad. Sci. 1913. T. 156, No 6. P. 447-450; Sur la propagation et l´altérnation des ondes de choc // Там же. No 8. P. 611-613.

7. *Ландау Л.Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // ПММ. 1945. Т. 9, вып. 4. С. 286-292.

8. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.

9. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005.

10. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* О распространении разрывов по неднородному статическому фону // Изв. РАН. МЖГ. 2017. No 2. С. 165-172.

11. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994.

12. *Галин Г.Я., Голубятников А.Н., Каменярж Я.А.* и др. Механика сплошных сред в задачах. М.: ЛЕНАНД, 2017.

13. *Голубятников А.Н.* Симметрии сплошных сред // Успехи механики. Т. 2, No 1. С. 126-183.

14. *Куликовский А.Г. Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский Лицей, 1998.

15. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988.

16. *Мартынов Д.Я.* Курс общей астрофизики. М.: Наука, 1979.

17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

18. *Сибгатуллин Н.Р.* Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. М.: Наука, 1984.