НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ТОНКОМ СЛОЕ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Голубятников А.Н.
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
119192, г. Москва, Мичуринский пр., д. 1. E-mail: golubiat@mail.ru

Голубятников Александр Николаевич – профессор кафедры гидромеханики МГУ, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ, доктор физико-математических наук (1999), специалист широкого профиля в области механики сплошной среды. Имеет 316 научных публикаций, включая 8 монографий, две – на английском.

В приближении «мелкой воды» рассматривается вопрос о распространении нелинейных волн малой амплитуды в тонком слое парамагнитной жидкости переменной толщины в неоднородном магнитном поле. Выведены уравнения движения и развит точный метод решения задачи со слабым разрывом, с помощью которой решается задача о слабой ударной волне. Рассмотрен пример равновесного начального состояния.

1. Уравнения мелкой воды. Ограничимся анализом плоской задачи. Пусть $y = \zeta(x,t)$ и $y = -h(x,t)$ – формы верхней и нижней поверхностей слоя по отношению к постоянному гравитационному полю g. Функция $h(x,t)$ считается заданной. Как известно [1, 2], уравнения движения мелкой воды могут быть выведены в предположении малости отношения толщины слоя и характерной длины волны $\varepsilon = (\zeta + h)/\lambda \leq 1$. Магнитная проницаемость μ считается кусочно постоянной, причем $\mu = 1$ вне слоя. Таким образом, движение жидкости и магнитное поле оказываются связанными только краевыми условиями на поверхности слоя [3].

По вертикали решается уравнение равновесия, которое определяет давление

$$p = p_1(x,t) - \rho g(y - \zeta).$$

Нормаль на поверхности слоя с учетом членов порядка ε есть $\mathbf{n} = (-\zeta_x, 1)$, касательный вектор $\tau = (1, \zeta_x)$. Нижний индекс x означает производную.

Давление выше слоя полагается равным нулю. Тогда произвольная функция p_1 с учетом условий $[H_\tau] = 0$ и $[\mu H_n] = 0$ определяется скачком нормально-нормальной составляющей тензора максвелловских напряжений

$$p_1 = \frac{1}{8\pi}\left[\mu(H_n^2 - H_\tau^2)\right]_0^1 = -\frac{\mu - 1}{8\pi\mu}((H_n^0)^2 + \mu(H_\tau^0)^2) < 0. \tag{1}$$

Нулем обозначено состояние вне слоя, единицей – внутри. Поверхностное натяжение не учитывается. Анализ поведения магнитного поля, регулярного в окрестности слоя, показывает, что внешнее искажение поля тонким слоем проявляется только в членах порядка ε^2. Это явно можно видеть на примере сплюснутого эллипса (или эллипсоида [4]). Таким образом, в выражение (1), которое вычисляется с учетом членов порядка ε, наряду с малыми отклонениями поверхности войдет только внешнее магнитное поле.

Пусть потенциал магнитного поля $\mathbf{H} = (H_1, H_2) = \nabla\chi$ $(\Delta\chi = 0)$ равен

$$\chi = a_0(x,t) + a_1(x,t)y - a_0(x,t)_{xx}y^2/2 + \dots.$$

Тогда

$$p_1 = \frac{1}{8\pi}\left([1/\mu](a_1^2 - 2a_1(\zeta a_{0,x})_x) - [\mu](a_{0,x}^2 + 2a_{0,x}(\zeta a_1)_x)\right)$$

Выбор степени приближения связан с последующим дфференцированием p_1 по x. Если $p_{1,x} = 0$, например при достаточно большом, но постоянном внешнем поле, то необходимо учитывать именно члены первого порядка. Далее мы остановимся на более простом случае переменного поля, когда

$$p_1 = \frac{1}{8\pi}\left([1/\mu](H_2^0)^2 - [\mu](H_1^0)^2\right).$$

Традиционный подход к вычислению гидродинамических членов в рамках идеальной несжимаемой однородной жидкости [1, 2] с учетом заданной переменной глубины $h(x,t)$ (обычно этот фактор вообще не рассматривается) дает для средней по толщине слоя скорости продольного движения v и толщины слоя $\zeta + h$ следующие уравнения

$$(\zeta + h)_t + ((\zeta + h)v)_x = 0, \quad v_t + vv_x + g\,\zeta_x = -p_{1,x}/\rho, \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости.

Аналогично можно вывести и уравнения мелкой воды для пространственной задачи.

Полезно ввести массу m участка слоя, отсчитываемую, например, от подвижной стенки (поршня), как независимую лагранжеву переменную, входящую в функцию $x(t,m)$. Тогда первое уравнение (2) дает $\rho(\zeta + h) = 1/x_m$ и $v = x_t$. В результате получим

$$x_{tt} + \left(\frac{g}{2\rho x_m^2}\right)_m = gh_x - p_{1,x}/\rho. \tag{3}$$

Важно, что уравнение (3) имеет вид уравнения Эйлера $\Lambda_x - (\Lambda_{x_t})_t - (\Lambda_{x_m})_m = 0$, где

$$\Lambda = \frac{x_t^2}{2} - \frac{g}{2\rho x_m} + gh(x,t) - p_1(x,t)/\rho,$$

т.е. допускает лагранжиан, который будет использоваться далее при решении задачи о слабом разрыве.

Условия на сильных разрывах (разрывах первых производных закона движения $x(t,m)$) при отсутствии сосредоточенных притоков массы, импульса или энергии следуют из вида Λ [3]. Пусть $t = T(m)$ – время движения разрыва по массе. Введем ударное время $\tau = t - T(m)$, равное нулю на разрыве. Тогда в переменных τ, m имеем

$$x_t = x_\tau, \quad x_m(t,m) = x_m(\tau,m) - T'(m)x_\tau, \quad \Lambda = \Lambda(\tau, T(m), x, x_\tau, x_m).$$

Отметим, что в этих переменных дифференцирование по m на разрыве сохраняет непрерывность дифференцируемой функции.

На сильном разрыве

$$[x]_0^1 = 0, \quad [\Lambda_{x_\tau}]_0^1 = 0. \tag{4}$$

Состояние 0 расположено перед разрывом, 1 – за ним.

К этим условиям надо добавить еще неравенство, связанное в теории мелкой воды с потерей энергии [1],

$$[x_\tau \Lambda_{x_\tau} - \Lambda] \leq 0.$$

Функция $T(m)$ на сильном разрыве также является искомой. В случае слабого разрыва, который всегда распространяется с характеристической скоростью (скоростью звука), движение разрыва по известному фону известно. В этом случае имеют место разрывы вторых или более высоких призводных функции $x(t,m)$, величины которых определяются уравнениями движения и их дифференциальными продолжениями (транспортными уравнениями [5]).

2. Разрывы малой амплитуды. Рассмотрим класс решений уравнений (3) со слабым разрывом, создаваемом аналитическим движением поршня вида

$$x_p(t) = x_0(t,0) + \alpha_2 t^2/2 + \alpha_3 t^3/6 + \dots.$$

Разрыв движется по известному, вообще говоря, нестационарному фону $x_0(t,m)$, отвечающему некоторому частному решению уравнения (3).

В работе [6] в рамках идеальной магнитной гидродинамики был развит метод решения задач со слабым разрывом, движущимся по произвольному фону. Здесь мы изложим этот метод в лагранжевой форме, которая приводит к значительным упрощениям. Используем обозначения $v = x_\tau$ и $w = x_m(\tau, m)$.

Определение скорости звука фона $1/T_0'$ есть $\Lambda^0_{vv} = 0$. Предполагается, что $\Lambda^0_{vw} > 0$ и $\Lambda^0_{vvv} < 0$ (нормальный газ [7]). Пусть $\alpha_2 \neq 0$. Тогда решение первого транспортного уравнения (уравнения Риккати [5]) определяет скачок ускорения жидкости на разрыве

$$\frac{1}{[v_\tau]} = (\Lambda^0_{vw})^{1/2} \exp \int\limits_0^m \frac{(\Lambda_{vv})^0_\tau dm}{\Lambda^0_{vw}} \left(C_2 + \int\limits_0^m \frac{\Lambda^0_{vvv}}{2(\Lambda^0_{vw})^{3/2}} \exp \left(- \int\limits_0^m \frac{(\Lambda_{vv})^0_\tau dm}{\Lambda^0_{vw}} \right) dm \right). \tag{5}$$

Отметим, что величина скачка ускорения порядка единицы, хотя скачок скорости точно равен нулю. Все последующие члены разложения скачка закона движения по степеням τ определяются линейными уравнениями в квадратурах.

Постоянная C_2 связана со значением начального ускорения поршня $\alpha_2 \neq 0$ и состоянием фона. Если $\alpha_2 < 0$, то скачок ускорения всегда отрицателен. Если же $\alpha_2 > 0$, то имеется возможность ухода скачка ускорения в бесконечность за конечное время (опрокидывание слабого разрыва). Важно, что полученная формула (5) не содержит явно параметров внешнего магнитного поля и глубины слоя, которые входят только через производные v_0 и w_0 закона движения фона.

Случаю $\alpha_2 = 0$ отвечает особое решение уравнения Риккати $[v_\tau] = 0$. Тогда при $\alpha_3 \neq 0$ имеем

$$[v_{\tau\tau}] = \frac{C_3}{(\Lambda^0_{vw})^{1/2}} \exp \left(- \int\limits_0^m \frac{(\Lambda_{vv})^0_\tau dm}{\Lambda^0_{vw}} \right)$$

и т.д.

Пусть теперь имеется малая по отношению к скорости звука фона относительная начальная скорость поршня $\alpha_1 > 0$, которая создает слабую ударную волну. Тогда, линеаризуя второе условие на разрыве (4), найдем поправку к величине T_0', отвечающей скорости ударной волны,

$$\delta T' = -\frac{\Lambda^0_{vvv}}{2\Lambda^0_{vvT'}}[v]$$

Затем, линеаризуя уравнение движения относительно малого скачка скорости $[v]$ на разрыве, решая соответствующее линейное дифференциальное уравнение и используя (5), получим

$$[v] = \frac{C_1}{(\Lambda^0_{vw})^{1/2}} \exp \int\limits_0^m \frac{(\Lambda_{vv})^0_\tau}{2\Lambda^0_{vw}} dm \left| 1 + \int\limits_0^m \frac{\Lambda^0_{vvv}}{2C_2(\Lambda^0_{vw})^{3/2}} \exp\left(-\int\limits_0^m \frac{(\Lambda_{vv})^0_\tau dm}{\Lambda^0_{vw}} \right) dm \right|^{-1/2}. \quad (6)$$

Постоянная C_1 выражается через α_1.

Формула (6) показывает, что при положительном C_2 вместе с опрокидыванием слабого разрыва, когда $v_\tau \to \infty$, скорость v также неограниченно растет при любом $C_1 > 0$, что говорит о том, что ударная волна становится сильной, и данная теория требует существенной корректировки.

3. Движение разрывов по статическому фону. Рассмотрим движение разрывов малой амплитуды по статическому фону, $v_0 = 0$. Тогда в формулах (5), (6) можно опустить все производные от фона по τ. Удобно перейти к переменной x, учитывая соотношение $w\,dm = dx$. Уравнение (2) дает

$$\rho g \zeta_0 + p_1 = C_0, \quad w_0 = \frac{g}{C_0 - p_1 + \rho g h}. \quad (7)$$

Таким образом, равновесная форма поверхности искажается только внешним магнитным полем, причем рост поля независимо от глубины всегда увеличивает верхний уровень жидкости.

Вычисление производных лагранжиана

$$\Lambda = \frac{v^2}{2} - \frac{g}{2\rho(w - T'_0 v)} + gh(x) - p_1(x)/\rho$$

при $v = 0$ дает

$$\Lambda^0_{vw} = gT'_0/(\rho w^3), \quad \Lambda^0_{vvv} = -3g(T'_0)^3/(\rho w_0^4), \quad T'_0 = (\rho w_0^3/g)^{1/2}.$$

Тогда для ускорения жидкости на слабом разрыве получим

$$v_\tau = (g/\rho) w_0^{3/4} \left(C_2 - \int\limits_{x_p(t)}^x (3/2) w_0^{7/4} dx \right)^{-1},$$

а для скорости на слабой ударной волне –

$$v = {}_1(\rho/g)^{1/4} w_0^{3/4} \left| 1 - \int\limits_{x_p(t)}^x (3/(2C_2)) w_0^{7/4} dx \right|^{-1/2}.$$

Анализ этих формул показывает, что может также возникать особенность, связанная с обращением в ноль знаменателя удельного объема w_0 (7) при выходе разрыва на нулевую толщину слоя $\zeta_0 + h = 0$. Это возможно только при отрицательном ускорении поршня, пропорциональном C_2. В этом случае можно проследить за процессом затухания ударной волны [6, 7]. При положительном C_2 еще до этого события произойдет опрокидывание слабого разрыва, при этом теория распространения слабой ударной волны становится неприменимой. Исследование влияния на эти процессы фактических конфигураций магнитного поля $\mathbf{H}$ и изменения глубины слоя жидкости h предоставляется читателю.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (No, No 15-01-00361, 17-01-00037).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

2. Лейбович С., Сибасс А.Р. Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргерса и Кортевега – де Вриза // Сб. статей «Нелинейные волны». М.: Мир, 1977. С. 113-150.

3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1994. Т. 1. 528 с.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.

5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.

6. Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д. О распространении разрывов по неднородному статическому фону // Изв. РАН. МЖГ. 2017. No 2. С. 165-172.

7. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.