ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2016, том 5, № 1, с. 38–46

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9+532.5

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

© 2016 г. А. В. Аксенов, К. П. Дружков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

e-mail: aksenov.av@gmail.com, Konstantin.Druzhkov@gmail.com

Поступила в редакцию 02.11.2015 г.

Рассматривается система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном. Найдены все гидродинамические законы сохранения, проведена групповая классификация. Получен новый закон сохранения, дополнительный к двум базовым законам сохранения. Показано, что система уравнений мелкой воды может быть линеаризована точечной заменой переменных только в случаях постоянного и линейного профилей дна. Приведены примеры инвариантных решений.

Ключевые слова: мелкая вода, закон сохранения, групповая классификация, инвариантное решение.

DOI: 10.1134/S2304487X16010028

ВВЕДЕНИЕ

В безразмерных переменных система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [1]

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + \eta_x = 0, \\ &\eta_t + [(\eta + h)u]_x = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $y = -h(x)$, $h(x) \geq 0$ – профиль дна, $u = u(x,t)$ – средняя по глубине горизонтальная скорость, $\eta = \eta(x,t)$ – отклонение свободной поверхности.

В работе [2] было найдено, что система уравнений мелкой воды с профилем дна $h(x) = -x$ может быть линеаризована в характеристических переменных. Позже в работе [3] было показано, что в этом случае исходная система уравнений (1) точечной заменой переменных может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} &U_T + N_X = 0, \\ &N_T - XU_X - U = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

который формально получается отбрасыванием нелинейных слагаемых в системе уравнений (1).

Классы точных решений линейной системы уравнений (2) приведены в работах [4, 5].

В настоящей работе найдены все гидродинамические законы сохранения для всевозможных профилей дна, решена задача групповой классификации, построены примеры инвариантных решений.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Будем искать гидродинамические законы сохранения системы уравнений (1) в виде пары функций $P(x,t,u,\eta)$, $Q(x,t,u,\eta)$, тождественно удовлетворяющих уравнению

$$D_t(Q) + D_x(P) = 0 \qquad (3)$$

на решениях системы уравнений (1). Здесь

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + \eta_t\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + \eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}$$

– операторы полной производной по соответствующей координате.

Замечание 1. Отметим, что оба уравнения системы уравнений (1) имеют вид (3). Соответствующие два базовых закона сохранения

$$\begin{aligned} &Q_1 = u, \quad P_1 = \frac{u^2}{2} + \eta, \\ &Q_2 = \eta, \quad P_2 = (\eta + h)u \end{aligned} \qquad (4)$$

имеют смысл законов сохранения импульса и массы.

Замечание 2. Из (3) следует, что $Q' = Q + f_x$, $P' = P - f_t$ и $Q'' = CQ$, $P'' = CP$ также являются законами сохранения для произвольных функции $f = f(x,t)$ и постоянной C. В дальнейшем законы сохранения будем находить с точностью до выписанных выше слагаемых и постоянного множителя.

Используя выражение (3) и систему уравнений (1), можно получить следующую переопределенную систему уравнений на искомые функции P и Q

$$\begin{aligned} P_x &= uh' Q_\eta - Q_t, \\ P_u &= uQ_u + (\eta + h)Q_\eta, \\ P_\eta &= Q_u + uQ_\eta. \end{aligned} \tag{5}$$

Исключая из системы уравнений (5) функцию P, можно получить систему уравнений для определения функции Q. Запишем ее в следующем виде

$$\begin{aligned} Q_{xu} &= uh' Q_{\eta\eta} - uQ_{x\eta} - Q_{t\eta}, \\ Q_{tu} &= -u^2 h' Q_{\eta\eta} + uh' Q_{u\eta} + (u^2 - \eta - h)Q_{x\eta} + uQ_{t\eta}, \\ Q_{uu} &= (\eta + h)Q_{\eta\eta}. \end{aligned} \tag{6}$$

Систему уравнений (6) можно исследовать на совместность. Приведем результаты этого исследования.

1. Случай произвольной функции $h(x)$. В этом случае решение системы уравнений (5) имеет вид

$$\begin{aligned} P &= C_1(\eta + h)(u^3 + 2u\eta) + C_2\left(\frac{u^2}{2} + \eta\right) + C_3 u(\eta + h), \\ Q &= C_1\left[u^2(\eta + h) + \eta^2\right] + C_2 u + C_3\eta. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

В силу замечаний 1 и 2, из решения (7) находим новый закон сохранения

$$Q_3 = u^2(\eta + h) + \eta^2, \quad P_3 = (\eta + h)(u^3 + 2u\eta),$$

дополняющий базовые законы сохранения (4).

2. Случай линейной функции $h(x) = a_1 x + a_2$. В этом случае решение системы уравнений (5) имеет вид

$$\begin{aligned} P = C_1\Big(&-a_1 x t\beta - x\alpha(\beta + a_2) + \frac{3}{2}a_1 t^2\alpha(\beta + a_2) + \\ &+ \frac{1}{2}t\beta^2 + a_2\beta t + \\ &+ \frac{1}{2}a_1^2 t^3\beta + a_2 t\alpha^2 + t\alpha^2\beta\Big) + a_1 t Q_1 + P_1, \\ Q = C_1\Big(&a_2 t\alpha + t\alpha\beta - x\beta + \frac{1}{2}a_1 t^2\beta\Big) + Q_1. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha = u - a_1 t$, $\beta = \eta + a_1 x$; C_1 – произвольная постоянная; $P_1 = P_1(\alpha, \beta)$, $Q_1 = Q_1(\alpha, \beta)$ – произвольное решение системы уравнений

$$\begin{aligned} P_{1\alpha} &= \alpha Q_{1\alpha} + (\beta + a_2)Q_{1\beta}, \\ P_{1\beta} &= Q_{1\alpha} + \alpha Q_{1\beta}. \end{aligned}$$

3. Случай $h(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + b_2 x + b_3$, $b_1 > 0$. В этом случае решение системы уравнений (5) имеет вид

$$\begin{aligned} P = &\, C_1(\eta + h(x))(u^3 + 2u\eta) + C_2\left(\frac{u^2}{2} + \eta\right) + \\ &+ C_3 u(\eta + h(x)) + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}\Big[(\sqrt{b_1}u^2 + uh'(x)) \times \\ &\times (\eta + h(x)) + \frac{\sqrt{b_1}}{2}\eta(\eta + 2h(x))\Big] + \\ &+ C_5 e^{\sqrt{b_1}t}\Big[(-\sqrt{b_1}u^2 + uh'(x))(\eta + h(x)) - \\ &- \frac{\sqrt{b_1}}{2}\eta(\eta + 2h(x))\Big], \\ Q = &\, C_1\left(u^2(\eta + h(x)) + \eta^2\right) + C_2 u + C_3\eta + \\ &+ C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}\left(\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)\right) + \\ &+ C_5 e^{\sqrt{b_1}t}\left(-\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – произвольные постоянные.

Из решения (8) находим, что в рассматриваемом случае существуют два дополнительных закона сохранения

$$\begin{aligned} Q_4 &= e^{-\sqrt{b_1}t}\left(\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)\right), \\ P_4 &= e^{-\sqrt{b_1}t}\Big[\left(\sqrt{b_1}u^2 + uh'(x)\right)(\eta + h(x)) + \\ &+ \frac{\sqrt{b_1}}{2}\eta(\eta + 2h(x))\Big] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q_5 &= e^{\sqrt{b_1}t}\left(-\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)\right), \\ P_5 &= e^{\sqrt{b_1}t}\Big[\left(-\sqrt{b_1}u^2 + uh'(x)\right)(\eta + h(x)) - \\ &- \frac{\sqrt{b_1}}{2}\eta(\eta + 2h(x))\Big]. \end{aligned}$$

4. Случай $h(x)=\frac{b_1}{2}x^2+b_2x+b_3,\ b_1<0$. В этом случае решение системы уравнений (5) имеет вид

$$P=C_1(\eta+h(x))(u^3+2u\eta)+C_2\left(\frac{u^2}{2}+\eta\right)+$$
$$+C_3u(\eta+h(x))+C_4\left[\sin(\sqrt{-b_1}t)\left(\sqrt{-b_1}u^2(\eta+h(x))+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sqrt{-b_1}}{2}\eta(\eta+2h(x))\right)+\cos(\sqrt{-b_1}t)uh'(x)(\eta+h(x))\right]+$$
$$+C_5\left[-\cos(\sqrt{-b_1}t)\left(\sqrt{-b_1}u^2(\eta+h(x))+\right.\right. \tag{9}$$
$$\left.\left.+\frac{\sqrt{-b_1}}{2}\eta(\eta+2h(x))\right)+\sin(\sqrt{-b_1}t)uh'(x)(\eta+h(x))\right],$$
$$Q=C_1(u^2(\eta+h(x))+\eta^2)+C_2u+C_3\eta+$$
$$+C_4(\sin(\sqrt{-b_1}t)\sqrt{-b_1}u(\eta+h(x))+\cos(\sqrt{-b_1}t)\eta h'(x))+$$
$$+C_5(-\cos(\sqrt{-b_1}t)\sqrt{-b_1}u(\eta+h(x))+\sin(\sqrt{-b_1}t)\eta h'(x)).$$

Из решения (9) находим, что в рассматриваемом случае существуют два дополнительных закона сохранения

$$Q_4=\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\sqrt{-b_1}u(\eta+h(x))+\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\eta h'(x),$$
$$P_4=\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\left(\sqrt{-b_1}u^2(\eta+h(x))+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{-b_1}}{2}\eta(\eta+2h(x))\right)+\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)uh'(x)(\eta+h(x))$$

и

$$Q_5=-\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\sqrt{-b_1}u(\eta+h(x))+\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\eta h'(x),$$
$$P_5=-\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\left(\sqrt{-b_1}u^2(\eta+h(x))+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{-b_1}}{2}\eta(\eta+2h(x))\right)+\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)uh'(x)(\eta+h(x)).$$

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ

Задача групповой классификации заключается в поиске алгебр Ли симметрий, допускаемых рассматриваемой системой уравнений при каждом виде классифицирующей функции [6].

Будем искать операторы симметрии системы уравнений (1) в виде

$$X=\xi^1(x,t,u,\eta)\frac{\partial}{\partial x}+\xi^2(x,t,u,\eta)\frac{\partial}{\partial t}+$$
$$+\eta^1(x,t,u,\eta)\frac{\partial}{\partial u}+\eta^2(x,t,u,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Применяя критерий инвариантности [6], получим следующую переопределенную линейную однородную систему определяющих уравнений

$$\xi^1_\eta-u\xi^2_\eta+\xi^2_u=0,$$
$$\xi^1_u-u\xi^2_u+(\eta+h)\xi^2_\eta=0,$$
$$\eta^1-u\xi^1_x+u^2\xi^2_x-(\eta+h)\times$$
$$\times\eta^1_\eta-\xi^1_t+u\xi^2_t+\eta^2_u+(\eta+h)\xi^2_x=0,$$
$$h'\xi^1+\eta^2+(\eta+h)\times$$
$$\times\left(\eta^1_u-\xi^1_x+2u\xi^2_x-\eta^2_\eta+\xi^2_t-2uh'\xi^2_\eta\right)=0, \tag{10}$$
$$2u\xi^2_x-\eta^1_u+\xi^2_t+\eta^2_\eta-\xi^1_x=0,$$
$$2(\eta+h)\eta^1_\eta-2\eta^2_u+uh'\left(\xi^1_\eta-\xi^2_u-u\xi^2_\eta\right)=0,$$
$$u\eta^1_x+\eta^1_t+\eta^2_x+uh'\left(\xi^2_x-\eta^1_\eta\right)=0,$$
$$uh''\xi^1+h'\eta^1+(\eta+h)\eta^1_x+u\eta^2_x+$$
$$+\eta^2_t+uh'\left(u\xi^2_x-\eta^2_\eta+\xi^2_t-uh'\xi^2_\eta\right)=0.$$

Систему уравнений (10) можно исследовать на совместность. Приведем результаты этого исследования.

1. $h(x)$ – произвольная функция.

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t}. \tag{11}$$

Оператор симметрии (11) задает ядро операторов симметрии.

2. $h(x)=n_2e^{n_1x}+n_3, n_1\neq 0, n_2\neq 0$. В этом случае ядро операторов симметрии расширятся оператором симметрии

$$X_2=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{n_1}{2}t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n_1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}+n_1(\eta+n_3)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

3. $h(x)=m_2\ln|x+m_1|+m_3, m_2\neq 0$. В этом случае ядро операторов симметрии расширятся оператором симметрии

$$X_2=(x+m_1)\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}-m_2\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

4. $h(x)=c_3(x+c_1)^{c_2}+c_4,\ c_2\neq 0,\ c_2\neq 1,\ c_2\neq 2,$ $c_3\neq 0$. В этом случае ядро операторов симметрии расширятся оператором симметрии

$$X_2=2(x+c_1)\frac{\partial}{\partial x}-(c_2-2)t\frac{\partial}{\partial t}+$$
$$+c_2u\frac{\partial}{\partial u}+2c_2(\eta+c_4)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

5. $h(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + b_2 x + b_3, \quad b_1 > 0$. В этом случае ядро операторов симметрии расширятся операторами симметрии

$$X_2 = \left(x + \frac{b_2}{b_1}\right)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + \left(2\eta - \frac{b_2^2}{b_1} + 2b_3\right)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$X_3 = e^{\sqrt{b_1}t}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{b_1}\frac{\partial}{\partial u} - (b_1 x + b_2)\frac{\partial}{\partial \eta}\right),$$
$$X_4 = e^{-\sqrt{b_1}t}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{b_1}\frac{\partial}{\partial u} - (b_1 x + b_2)\frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

6. $h(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + b_2 x + b_3, \quad b_1 < 0$. В этом случае ядро операторов симметрии расширятся операторами симметрии

$$X_2 = \left(x + \frac{b_2}{b_1}\right)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + \left(2\eta - \frac{b_2^2}{b_1} + 2b_3\right)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$X_3 = \cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-b_1}\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\frac{\partial}{\partial u} -$$
$$- (b_1 x + b_2)\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$X_4 = \sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-b_1}\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\frac{\partial}{\partial u} -$$
$$- (b_1 x + b_2)\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

7. $h(x) = a_2$. В этом случае базис операторов симметрии можно записать в виде

$$Y_1 = \left(\frac{3}{2}t(\eta + a_2) - \frac{3}{4}tu^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}tu\right)\frac{\partial}{\partial t} +$$
$$+ \left(\frac{1}{4}u^2 + \eta + a_2\right)\frac{\partial}{\partial u} + u(\eta + a_2)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$Y_2 = \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} + (\eta + a_2)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$Y_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$
$$Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t},$$
$$Y_\infty = (uw_1(u,\eta) + w_2(u,\eta))\frac{\partial}{\partial x} + w_1(u,\eta)\frac{\partial}{\partial t},$$

где $w_1(u,\eta), w_2(u,\eta)$ – произвольное решение системы уравнений

$$w_{1u} + w_{2\eta} = 0,$$
$$w_{2u} + w_1 + (\eta + a_2)w_{1\eta} = 0.$$

Отметим, что оператор симметрии X_1 содержится в операторе Y_∞, если положить $w_1 = 1$, $w_2 = -u$.

8. $h(x) = a_1 x + a_2, \quad a_1 \neq 0$. В этом случае базис операторов симметрии можно записать в виде

$$Y_1 = \left(-4a_1 xt - a_2 t - a_1^2 t^3 + \frac{3}{2}tu^2 - 3t\eta\right)\frac{\partial}{\partial x} +$$
$$+ \left(3tu - x - \frac{5}{2}a_1 t^2\right)\frac{\partial}{\partial t} +$$
$$+\left(4a_1 tu - 3a_1 x - 3a_1^2 t^2 - \frac{1}{2}u^2 - 2\eta\right)\frac{\partial}{\partial u} +$$
$$+\left(6a_1^2 xt + 3a_1 a_2 t + a_1^3 t^3 - 2a_1 xu -\right.$$
$$\left.- \frac{3}{2}a_1 tu^2 + 5a_1 t\eta - 2a_2 u - 2u\eta\right)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$Y_2 = \left(x + \frac{1}{2}a_1 t^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + a_1 t\frac{\partial}{\partial u} - \left(a_1 x + \frac{1}{2}a_1^2 t^2\right)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$Y_3 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2(\eta + a_2)\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$Y_4 = -t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u} + a_1 t\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$Y_\infty = (uw_1(u - a_1 t, \eta + a_1 x) + w_2(u - a_1 t, \eta + a_1 x))\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x} + w_1\frac{\partial}{\partial t} + a_1 w_1\frac{\partial}{\partial u} + (a_1 u w_1 + a_1 w_2)\frac{\partial}{\partial \eta},$$

где $w_1(u - a_1 t, \eta + a_1 x), w_2(u - a_1 t, \eta + a_1 x)$ – произвольные решения системы

$$w_{1\alpha} + w_{2\beta} = 0,$$
$$w_{2\alpha} + w_1 + (\beta + a_2)w_{1\beta} = 0.$$

Здесь использованы такие же обозначения, как и при поиске законов сохранения у системы уравнений с линейным профилем дна

$$\alpha = u - a_1 t,$$
$$\beta = \eta + a_1 x.$$

Замечание 3. В работе [5] найдена точечная замена переменных, связывающая системы уравнений с постоянной и линейной формами дна. Тогда алгебры Ли операторов симметрии этих систем изоморфны.

На основании результатов групповой классификации можно сделать вывод о том, что система уравнений (1) линеаризуема точечной заменой переменных только в случаях постоянного и линейного профилей дна (в остальных случаях алгебра Ли операторов симметрии системы конечномерна).

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Используя результаты групповой классификации, приведем примеры инвариантных решений. В рассмотренных ниже примерах представлены виды инвариантных решений и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к решению которых сводится нахождение инвариантных решений. Решения системы уравнений с частными производными, представляемые через решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, считаются точными решениями.

1. $h(x) = n_2 e^{n_1 x} + n_3, \quad n_1 \neq 0, \quad n_2 \neq 0.$ Найдем решения, инвариантные относительно оператора симметрии

$$C_1X_1 + X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \left(C_1 - \frac{1}{2}n_1 t\right)\frac{\partial}{\partial t} + \\ + \frac{1}{2}n_1 u\frac{\partial}{\partial u} + n_1(\eta + n_3)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Инвариантное решение имеет следующий вид

$$u = w_1(z)e^{\frac{1}{2}n_1 x}, \\ \eta = w_2(z)e^{n_1 x} - n_2 e^{n_1 x} - n_3,$$

где

$$z = e^{\frac{1}{2}n_1 x}\left(n_1 t - 2C_1\right),$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(zw_1 + 2)w_1' + zw_2' + w_1^2 + 2(w_2 - n_2) = 0, \\ zw_2w_1' + (zw_1 + 2)w_2' + 3w_1w_2 = 0.$$

2. $h(x) = m_2 \ln|x + m_1| + m_3, \quad m_2 \neq 0.$ Найдем решения, инвариантные относительно оператора симметрии

$$C_1X_1 + X_2 = (x + m_1)\frac{\partial}{\partial x} + (C_1 + t)\frac{\partial}{\partial t} - m_2\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Инвариантное решение имеет следующий вид

$$u = w_1(z), \\ \eta = w_2(z) - m_2 \ln|x + m_1|,$$

где

$$z = \frac{C_1 + t}{x + m_1},$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(zw_1 - 1)w_1' + zw_2' + m_2 = 0, \\ z(w_2 + m_3)w_1' + (zw_1 - 1)w_2' = 0.$$

3. $h(x) = c_3(x + c_1)^{c_2} + c_4, \; c_2 \neq 0, \; c_2 \neq 1, \; c_2 \neq 2, \; c_3 \neq 0.$ Найдем решения, инвариантные относительно оператора симметрии

$$C_1X_1 + X_2 = 2(x + c_1)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + (C_1 - (c_2 - 2)t)\frac{\partial}{\partial t} + c_2 u\frac{\partial}{\partial u} + \\ + 2c_2(\eta + c_4)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Инвариантное решение имеет следующий вид

$$u = w_1(z)(x + c_1)^{\frac{1}{2}c_2}, \\ \eta = w_2(z)(x + c_1)^{c_2} - c_4,$$

где

$$z = (x + c_1)^{\frac{1}{2}c_2 - 1}\left((c_2 - 2)t - C_1\right),$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(c_2 - 2)(zw_1 + 2)w_1' + (c_2 - 2)zw_2' + \\ + c_2 {w_1}^2 + 2c_2 w_2 = 0, \\ (c_2 - 2)(w_2 + c_3)zw_1' + (c_2 - 2)(zw_1 + 2)w_2' + \\ + 3c_2w_1w_2 + 3c_2c_3w_1 = 0.$$

4. $h(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + b_2 x + b_3, \quad b_1 > 0.$ Найдем решения, инвариантные относительно оператора симметрии

$$C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 = \\ = \left(C_2\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) + C_3 e^{\sqrt{b_1}t} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + C_1\frac{\partial}{\partial t} + \left(C_2 u + C_3\sqrt{b_1}e^{\sqrt{b_1}t} - C_4\sqrt{b_1}e^{-\sqrt{b_1}t}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \\ + \left(C_2\left(2\eta - \frac{b_2^2}{b_1} + 2b_3\right) - C_3(b_1 x + b_2)e^{\sqrt{b_1}t} - \right. \\ \left. - C_4(b_1 x + b_2)e^{-\sqrt{b_1}t}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Рассмотрим следующие случаи

4.1. $C_1 = 1, \quad b_1 - C_2^2 \neq 0.$ В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = e^{C_2 t}w_1(z) + C_2\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) + C_3 e^{\sqrt{b_1}t} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}, \\ \eta = e^{2C_2 t}w_2(z) - \frac{b_1}{2}x^2 - b_2 x - b_3,$$

где

$$z = e^{-C_2 t}\left(\left(C_2^2 - b_1\right)\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) + C_3\left(C_2 + \sqrt{b_1}\right)e^{\sqrt{b_1}t} + \right. \\ \left. + C_4\left(C_2 - \sqrt{b_1}\right)e^{-\sqrt{b_1}t}\right),$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(b_1 - C_2^2\right) w_1 w_1' + \left(b_1 - C_2^2\right) w_2' - 2C_2 w_1 - z = 0,$$
$$\left(b_1 - C_2^2\right) w_2 w_1' + \left(b_1 - C_2^2\right) w_1 w_2' - 3C_2 w_2 = 0.$$

4.2. $C_1 = 1, \quad C_2 = -\sqrt{b_1}$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = e^{-\sqrt{b_1}t} w_1(z) - \sqrt{b_1}\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) + C_3 e^{\sqrt{b_1}t} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t},$$
$$\eta = e^{-2\sqrt{b_1}t} w_2(z) - \frac{b_1}{2} x^2 - b_2 x - b_3,$$

где

$$z = 2\sqrt{b_1} e^{\sqrt{b_1}t}(b_1 x + b_2) - C_3 b_1 e^{2\sqrt{b_1}t} - 2C_4 b_1 \sqrt{b_1} t,$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$b_1 w_1 w_1' + b_1 w_2' - w_1 - C_4 = 0,$$
$$2b_1 w_2 w_1' + 2b_1 w_1 w_2' - 3w_2 = 0.$$

4.3. $C_1 = 1, \quad C_2 \sqrt{b_1}$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = e^{\sqrt{b_1}t} w_1(z) + \sqrt{b_1}\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) + C_3 e^{\sqrt{b_1}t} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t},$$
$$\eta = e^{2\sqrt{b_1}t} w_2(z) - \frac{b_1}{2} x^2 - b_2 x - b_3,$$

где

$$z = 2\sqrt{b_1} e^{-\sqrt{b_1}t}(b_1 x + b_2) - 2C_3 b_1 \sqrt{b_1} t + C_4 b_1 e^{-2\sqrt{b_1}t},$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$b_1 w_1 w_1' + b_1 w_2' + w_1 + C_3 = 0,$$
$$2b_1 w_2 w_1' + 2b_1 w_1 w_2' + 3w_2 = 0.$$

4.4. $C_1 = 0, \quad C_2 = 1$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = \left(x + \frac{b_2}{b_1} + C_3 e^{\sqrt{b_1}t} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}\right) w_1(z) - $$
$$- \sqrt{b_1}\left(C_3 e^{\sqrt{b_1}t} - C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}\right),$$
$$\eta = \left(x + \frac{b_2}{b_1} + C_3 e^{\sqrt{b_1}t} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}\right)^2 w_2(z) -$$
$$- \frac{b_1}{2} x^2 - b_2 x - b_3,$$

где $z = t$; w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_1' + w_1^2 + 2w_2 - b_1 = 0,$$
$$w_2' + 3w_1 w_2 = 0.$$

4.5. $C_1 = C_2 = 0$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = w_1(z) + \sqrt{b_1} x \frac{C_3 e^{\sqrt{b_1}t} - C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}}{C_3 e^{\sqrt{b_1}t} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}t}},$$
$$\eta = w_2(z) - \frac{b_1}{2} x^2 - b_2 x - b_3,$$

где $z = t$; w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_1' + \frac{C_3 e^{\sqrt{b_1}z} - C_4 e^{-\sqrt{b_1}z}}{C_3 e^{\sqrt{b_1}z} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}z}} w_1 - b_2 = 0,$$
$$w_2' + \sqrt{b_1} \frac{C_3 e^{\sqrt{b_1}z} - C_4 e^{-\sqrt{b_1}z}}{C_3 e^{\sqrt{b_1}z} + C_4 e^{-\sqrt{b_1}z}} w_2 = 0.$$

5. $h(x) = \frac{b_1}{2} x^2 + b_2 x + b_3, \quad b_1 < 0$. Найдем решения, инвариантные относительно оператора симметрии

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + C_4 X_4 =$$
$$= \left(C_2\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) + C_3 \cos(\sqrt{-b_1}t) + C_4 \sin(\sqrt{-b_1}t)\right) \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial t} + (C_2 u - C_3 \sqrt{-b_1} \sin(\sqrt{-b_1}t) \times$$
$$+ C_4 \sqrt{-b_1} \cos(\sqrt{-b_1}t)) \frac{\partial}{\partial u} +$$
$$+ \left(C_2\left(2\eta - \frac{b_2^2}{b_1} + 2b_3\right) - (b_1 x + b_2) \times\right.$$
$$\left.\times (C_3 \cos(\sqrt{-b_1}t) + C_4 \sin(\sqrt{-b_1}t))\right) \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Рассмотрим следующие случаи

5.1. $C_1 = 1$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = e^{C_2 t} w_1(z) + C_2\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) +$$
$$+ C_3 \cos\left(\sqrt{-b_1}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{-b_1}t\right),$$
$$\eta = e^{2C_2 t} w_2(z) - \frac{b_1}{2} x^2 - b_2 x - b_3,$$

где

$$z = e^{-C_2 t}\left(\left(C_2^2 - b_1\right)\left(x + \frac{b_2}{b_1}\right) +\right.$$
$$+ C_3\left(C_2 \cos\left(\sqrt{-b_1}t\right) - \sqrt{-b_1} \sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\right)$$
$$\left.+ C_4\left(C_2 \sin\left(\sqrt{-b_1}t\right) + \sqrt{-b_1} \cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\right)\right),$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(b_1 - C_2^2\right)w_1w_1' + \left(b_1 - C_2^2\right)w_2' - 2C_2w_1 - z = 0,$$
$$\left(b_1 - C_2^2\right)w_2w_1' + \left(b_1 - C_2^2\right)w_1w_2' - 3C_2w_2 = 0.$$

5.2. $C_1 = 0, \quad C_2 = 1$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = \left(x + \frac{b_2}{b_1} + C_3\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right) + C_4\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\right)w_1(z) + \\ + \sqrt{-b_1}\left(C_3\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right) - C_4\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)\right),$$
$$\eta = \left(x + \frac{b_2}{b_1} + C_3\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right) + C_4\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)\right)^2 \times \\ \times w_2(z) - \frac{b_1}{2}x^2 - b_2x - b_3,$$

где $z = t$; w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_1' + w_1^2 + 2w_2 - b_1 = 0,$$
$$w_2' + 3w_1w_2 = 0.$$

5.3. $C_1 = C_2 = 0$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = w_1(z) - \sqrt{-b_1}x\frac{C_3\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right) - C_4\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right)}{C_3\cos\left(\sqrt{-b_1}t\right) + C_4\sin\left(\sqrt{-b_1}t\right)},$$
$$\eta = w_2(z) - \frac{b_1}{2}x^2 - b_2x - b_3,$$

где $z = t$; w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_1' - \sqrt{-b_1}\frac{C_3\sin\left(\sqrt{-b_1}z\right) - C_4\cos\left(\sqrt{-b_1}z\right)}{C_3\cos\left(\sqrt{-b_1}z\right) + C_4\sin\left(\sqrt{-b_1}z\right)}w_1 - b_2 = 0,$$
$$w_2' - \sqrt{-b_1}\frac{C_3\sin\left(\sqrt{-b_1}z\right) - C_4\cos\left(\sqrt{-b_1}z\right)}{C_3\cos\left(\sqrt{-b_1}z\right) + C_4\sin\left(\sqrt{-b_1}z\right)}w_2 = 0.$$

6. $h(x) = a_2$.

6.1. Найдем решения, инвариантные относительно оператора симметрии

$$X_1 = \left(\frac{3}{2}t(\eta + a_2) - \frac{3}{4}tu^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}tu\right)\frac{\partial}{\partial t} + \\ + \left(\frac{1}{4}u^2 + \eta + a_2\right)\frac{\partial}{\partial u} + \\ + u(\eta + a_2)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Для этого перейдем к новым переменным

$$y = \eta + a_2, \quad \tau = u,$$
$$v = t, \quad n = x - tu.$$

В новых переменных оператор симметрии X_1 примет вид

$$X_1 = y\tau\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{4}\tau^2 + y\right)\frac{\partial}{\partial \tau} + \\ + \left(\frac{1}{2}n - \tau v\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2}(yv - \tau n)\frac{\partial}{\partial n}.$$

Тогда в новых переменных инвариантное решение имеет вид

$$v = \frac{\sqrt{\tau}}{y}\left(\frac{1}{2\tau}w_1(z) + \left(1 + 4\frac{y}{\tau^2}\right)w_2(z)\right),$$
$$n = \frac{4}{\sqrt{\tau}}w_2(z),$$

где

$$z = \frac{\tau^2 - 4y}{\tau},$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_1' = w_2,$$
$$4z^2w_2' + 4zw_2 - w_1 = 0.$$

Отсюда находим w_1, w_2

$$w_1 = A\sqrt{|z|} + \frac{B}{\sqrt{|z|}},$$
$$w_2 = sgn(z)\frac{A}{2\sqrt{|z|}} - \frac{B}{2z\sqrt{|z|}},$$

A, B — произвольные постоянные.

6.2. Найдем решения, инвариантные относительно оператора симметрии

$$C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 = \\ = \left(\frac{C_2}{2}x + C_3t + C_4x\right)\frac{\partial}{\partial x} + C_4t\frac{\partial}{\partial t} + \\ + \left(\frac{C_2}{2}u + C_3\right)\frac{\partial}{\partial u} + C_2(\eta + a_2)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

При этом возникают следующие случаи

6.2.1. $C_2 = 1, \quad C_4 \neq 0$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = t^{\frac{1}{2C_4}}w_1(z) - 2C_3,$$
$$\eta = t^{\frac{1}{C_4}}w_2(z) - a_2,$$

где

$$z = (x + 2C_3t)\,t^{-\frac{1}{2C_4}-1},$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(-z - 2C_4z + 2C_4w_1)w_1' + 2C_4w_2' + w_1 = 0,$$

$$2C_4w_2w_1' + (-z - 2C_4z + 2C_4w_1)w_2' + 2w_2 = 0.$$

6.2.2. $C_2 = 0, \quad C_4 = 1$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = w_1(z) + C_3 \ln t,$$
$$\eta = w_2(z),$$

где

$$z = \frac{x}{t} - C_3 \ln t,$$

w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(-C_3 - z + w_1)w_1' + w_2' + C_3 = 0,$$

$$(w_2 + a_2)w_1' + (-C_3 - z + w_1)w_2' = 0.$$

6.2.3. $C_4 = 0, \quad C_2 = 1$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = (x + 2C_3t)\, w_1(z) - 2C_3,$$
$$\eta = (x + 2C_3t)^2 w_2(z) - a_2,$$

где $z = t$; w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_1' + w_1^2 + 2w_2 = 0,$$

$$w_2' + 3w_1w_2 = 0.$$

6.2.4. $C_2 = C_4 = 0$. В этом случае инвариантное решение имеет вид

$$u = w_1(z) + \frac{x}{t},$$
$$\eta = w_2(z),$$

где $z = t$; w_1, w_2 — произвольные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$zw_1' + w_1 = 0,$$

$$zw_2' + w_2 + a_2 = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами работы являются получение нового базового закона сохранения, дополняющего законы сохранения импульса и массы, а также решение задачи групповой классификации. Полученные результаты могут быть использованы для построения новых точных решений и при численном моделировании движений мелкой воды над неровным дном.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-00361, 15-01-04677.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stoker J.J.* The formation of breakers and bores. The Theory of Nonlinear Wave Propagation in Shallow Water and Open Channels // Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. № 1. P. 1–87.
2. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 1. P. 97–109.
3. *Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh.* Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles. Natural Hazards. 1992. V. 6. № 3. P. 227–249.
4. *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.* Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. Вып. 1. С. 185–186.
5. *Чиркунов Ю.А., Доброхотов С.Ю., Медведев С.Б., Миненков Д.С.* Точные решения одномерных нелинейных уравнений мелкой воды над ровным и наклонным дном // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 178. № 3. С. 322–345.
6. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 400 с.

Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2016, vol. 5, no. 1, pp. 38–46.

Conservation Laws, Symmetries, and Exact Solutions of the System of Equations of Shallow Water over an Irregular Bottom

A. V. Aksenov and K. P. Druzhkov

Moscow State University, Moscow, 119992 Russia

e-mail: aksenov.av@gmail.com, Konstantin.Druzhkov@gmail.com

Abstract—The system of equations of one-dimensional shallow water over an irregular bottom has been considered. All hydrodynamic conservation laws have been obtained and the group classification is performed. The new conservation law additional to the two basic conservation laws has been obtained. It has been shown that the system of shallow water equations can be linearized only in the cases of constant and linear profiles of the bottom. Examples of invariant solutions have been given.

Keywords: shallow water, conservation law, group classification, invariant solution

DOI: 10.1134/S2304487X16010028

REFERENCES

1. Stoker J.J. The formation of breakers and bores. The Theory of Nonlinear Wave Propagation in Shallow Water and Open Channels. *Comm. Pure Appl. Math.,* 1948, vol. 1, no. 1, pp. 1–87.
2. Carrier G.F., Greenspan H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mech.,* 1958, vol. 4, no. 1, pp. 97–109.
3. Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh. Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles. *Natural Hazards,* 1992, vol. 6, no. 3, pp. 227–249.
4. Dobrokhotov S.Yu., Tirocci B. Lokalizovannihe resheniya odnomernoyj nelineyjnoyj sistemih uravneniyj melkoyj vodih so skorostjyu. *Uspekhi matematicheskikh nauk,* 2010, vol. 65, no. 1, pp. 185–186 (in Russian).
5. Chirkunov Yu.A., Dobrokhotov S.Yu., Medvedev S.B., Minenkov D.S. Tochnihe resheniya odnomernihkh nelineyjnihkh uravneniyj melkoyj vodih nad rovnihm i naklonnihm dnom. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika,* 2014, vol. 178, no. 3, pp. 322–345 (in Russian).
6. Ovsyannikov L.V. Gruppovoyj analiz differencialjnihkh uravneniyj. M.: Nauka, 1978. 400 p. (in Russian).